5.1 Esponenziali

Richiamiamo le conoscenze

Esponenti di base reale ed esponente intero o razionale

Utilizzando le proprietà delle potenze, semplificare le seguenti espressioni

1. **a) $2^{-2} \cdot 2^3 \cdot 2^{-4} \cdot 2^5 \cdot 2^0$; b) $2^{-2} \cdot 4^3 \cdot 8^{-4} \cdot 16^5 \cdot 32^{-6} \cdot 64^7$; c) $2^3 \cdot 2^5 \cdot 2^7 \cdot 2^4$; d) $2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4$**
a) $2^{-2+3-4+5+0} = 2^2$; b) $2^{-2} \cdot 2^6 \cdot 2^{-12} \cdot 2^{20} \cdot 2^{-30} \cdot 2^{42} = 2^{24}$; c) $2^{3+5+7+4} = 2^{19}$ d) $2^{1+2+3+4} = 2^{10}$

2. **a) $3^2 \cdot 3^3 \cdot (3^4)^2$; b) $(5 \cdot 5)^2 \cdot (5^4 \cdot 5)^4$; c) $7^2 \cdot (7 \cdot 7^2)^3 \cdot (7^4 \cdot 7)$; d) $2^2 \cdot 2^3 \cdot (2^3)^2 \cdot (2^4)^4$**
a) $3^{2+3+8} = 3^{13}$; b) $(5^2)^2 \cdot (5^5)^4 = 5^{4+20} = 5^{24}$; c) $7^2 \cdot (7^3)^3 \cdot 7^5 = 7^{2+9+5} = 7^{16}$; d) $2^{2+3+6+16} = 2^{27}$

3. **a) $(3 \cdot 3^2)^3 \cdot (3^3 \cdot 3)^3$; b) $[(3^2)^3]^4 \cdot [(3^3)^2]^4$; c) $(2^2)^3 \cdot (2^3)^2 \cdot (2^6)^2$; d) $2^4 \cdot (2^2)^2 \cdot (2^3)^4 \cdot (2^4)^3$**
a) $(3^3)^3 \cdot (3^4)^3 = 3^{9+12} = 3^{21}$; b) $3^{24} \cdot 3^{24} = 3^{24+24} = 3^{48}$; c) $2^6 \cdot 2^6 \cdot 2^{12} = 2^{6+6+12} = 2^{24}$; d) $2^{4+4+12+12} = 2^{32}$

4. **$5^3 : 5^4 \cdot (5^3 : 5)^5$; b) $\left(\sqrt{3}\right)^3 : \left(\sqrt{27}\right)^5 \cdot \left(\sqrt{3^5}\right)^2 : \sqrt{3}$; c) $(3/7)^2 \cdot (3/7)^4 \cdot 7/3$**
a) $5^{3-4} \cdot (5^{3-1})^5 = 5^{-1} \cdot (5^2)^5 = 5^{-1+10} = 5^9$; b) $3^{3/2} : 3^{15/2} \cdot 3^5 : 3^{1/2} = 3^{3/2-15/2+5-1/2} = 3^{\frac{3-15+10-1}{2}} = 3^{-3/2} = \sqrt{3^{-3}}$; c) $(3/7)^2 \cdot (3/7)^4 \cdot (3/7)^{-1} = (3/7)^{2+4-1} = (3/7)^5$

5. **a) $\sqrt[3]{11} \cdot \sqrt[3]{121} : \left(\sqrt[3]{11} \cdot \sqrt[3]{11}\right)^4$; b) $\pi^4 \cdot (\pi^3)^{-2} : \pi^{-3} \cdot (\pi^2 : \pi^5)^{-2}$**
a) $11^{1/3} \cdot 11^{2/3} : \left(11^{1/3} \cdot 11^{1/3}\right)^4 = 11^{1/3+2/3} : \left(11^{2/3}\right)^4 = 11 : 11^{8/3} = 11^{1-8/3} = 11^{-5/3}$; b) $\pi^{4-6-(-3)} \cdot (\pi^{2-5})^{-2} = \pi \cdot \pi^6 = \pi^7$

6. **a) $3^2 \cdot 5^2 \cdot 3^3 \cdot 2^3$; b) $3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$; c) $-2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 7^4 \cdot 11^3 \cdot 13^2$**
a) $2^3 \cdot 3^{2+3} \cdot 5^2 = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^2$; b) $2^{1+1+2} \cdot 3^{1+2} \cdot 5^{1+1} = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2$; c) $-2 \cdot 7^{1+4} \cdot 11^{1+3} \cdot 13^2 = -2 \cdot 7^5 \cdot 11^4 \cdot 13^2$

7. **a) $2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5^2 \cdot (-2 \cdot 3^3) \cdot (-2 \cdot 5^2) \cdot (-2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3)$; b) $[(2^2 \cdot 5^2)^3 \cdot 3^3]^4 : [(2^4 \cdot 3^4)^2 \cdot 5^2]^4$**
a) $-2^{1+2+1+1+2} \cdot 3^{1+3+2} \cdot 5^{2+5^{2+3}} = -2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^7$; b) $2^{24} \cdot 5^{24} \cdot 3^{12} : (2^{32} \cdot 3^{32} \cdot 5^8) = 2^{24-32} \cdot 3^{12-32} \cdot 5^{24-8} = 2^{-8} \cdot 3^{-20} \cdot 5^{16}$

8. **a) $\left(\frac{\sqrt{2}}{\pi^2}\right)^3 : \left(\frac{\sqrt{8}}{\pi^3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{\pi^2}{\sqrt{32}}\right)^{-3}$; b) $\left(\frac{2}{3^2}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{3^{-2}}{4^6}\right)^3 : \left(\frac{2^7}{81^{-2}}\right)^3$**
a) $2^{3/2} \cdot \pi^{-6} : \left(2^{-3} \cdot \pi^6\right) \cdot \pi^{-6} \cdot 2^{15/2} = 2^{3/2-(-3)+15/2} \cdot \pi^{-6-6-6} = 2^{12} \cdot \pi^{-18}$;
b) $2^{-3} \cdot 3^6 \cdot 3^{-6} \cdot 2^{-36} : \left(2^{21} \cdot 3^{24}\right) = 2^{-3-36-21} \cdot 3^{6-6-24} = 2^{-60} \cdot 3^{-24}$

9. **a) $\left(\sqrt{5}\right)^{-3} : \sqrt{125^3} \cdot 5^{-3} \cdot \sqrt{5^5}$; b) $(\pi/2)^{-2} : (\pi/3)^{-3} \cdot (\pi/4)^2 : (\pi/6)^3$**
a) $5^{-3/2} : 5^{9/2} \cdot 5^{-3} \cdot 5^{5/2} = 5^{-3/2-9/2-3+5/2} = 5^{-13/2}$; b) $\pi^{-2} \cdot 2^2 : (\pi^{-3} \cdot 3^3) \cdot (\pi^2 \cdot 2^{-4}) : (\pi^3 \cdot 2^{-3} \cdot 3^{-3}) = \pi^{-2-(-3)+2-3} \cdot 2^{2-4-(-3)} \cdot 3^{3-3} = \pi^0 \cdot 2 \cdot 3^0 = 2$

10. $\left\{\left[\left(5^2 \cdot 7^3\right)^4 \cdot 2^3\right]^4 \cdot 3^2\right\}^5 : \left\{\left[\left(2^4 \cdot 5^3\right)^2 : 3^5\right]^3 \cdot 7^3\right\}^2 \cdot \left\{\left[\left(3^5 : 5^4\right)^3 \cdot 7^2\right]^4 \cdot 2^5\right\}^3$

$$\left\{\left[5^8\cdot 7^{12}\cdot 2^3\right]^4\cdot 3^2\right\}^5 : \left\{\left[2^8\cdot 5^6 : 3^5\right]^3\cdot 7^3\right\}^2\cdot\left\{\left[3^{15}\cdot 5^{-12}\cdot 7^2\right]^4\cdot 2^5\right\}^3 =$$

$$= 2^{60}\cdot 3^{10}\cdot 5^{160}\cdot 7^{240} : \left(2^{48}\cdot 3^{-30}\cdot 5^{36}\cdot 7^6\right)\cdot 2^{15}\cdot 3^{180}\cdot 5^{-144}\cdot 7^{24} =$$

$$= 2^{60-48+15}\cdot 3^{10+30+180}\cdot 5^{160-36-144}\cdot 7^{240-6+24} = 2^{27}\cdot 3^{220}\cdot 5^{-20}\cdot 7^{258}$$

11. Determinare x in modo che valga la seguente uguaglianza: $2^x\cdot(2^3)^2\cdot(2^x)^3 = 2^{23}$.
Si ha: $2^{x+6+3x} = 2^{23} \Rightarrow 4x + 6 = 23 \Rightarrow 4x = 17 \Rightarrow x = 17/4$

12. Un'azienda ha avuto una produzione di circa 2^{28} chicchi di riso, per un peso di circa 10 tonnellate. Nel giro di tre anni si prevede di raddoppiare la produzione. Il tecnico del marketing dice che quindi si devono raccogliere 2^{56} chicchi; la segretaria di produzione afferma che dovranno essere invece 4^{28}; il direttore del settore vendite non è d'accordo, saranno 2^{29}; infine il responsabile pubblicitario afferma che il risultato corretto è invece 4^{56}. Chi ha ragione e perché?
Si ha: $2\cdot 2^{28} = 2^{29}$, quindi ha ragione il direttore

13. Sappiamo che $3^2 > 2^2$ e che $6^5 > 4^5$, possiamo dire che si ha sempre $a > b \Rightarrow a^n > b^n$, per ogni numero intero n? Giustificare la risposta.
Non vale se n è intero negativo o nullo, per esempio $2 > 1$, mentre $2^0 = 1^0$ e $2^{-3} < 1^{-3}$.

Applicando le proprietà delle potenze semplificare le seguenti espressioni

14. a) $35\cdot 3^{-3}\cdot 28^{-1}\cdot 98\cdot 108^{-1}$; b) $3^3\cdot 3^{-4} : 3^5\cdot 3^2 + 3$; c) $(6^2\cdot 12^{-3})^{-1} : (18^{-3} : 16^4)^2$
a) $5\cdot 7\cdot 3^{-3}\cdot 2^{-2}\cdot 7^{-1}\cdot 2\cdot 7^2\cdot 2^{-2}\cdot 3^{-3} = 2^{-2+1-2}\cdot 3^{-3-3}\cdot 5\cdot 7^{1-1+2} = 2^{-3}\cdot 3^{-6}\cdot 5\cdot 7^2$;
b) $3^{3-4-5+2} + 3 = 3^{-4} + 3 = (1 + 243)/81 = 244/81$;
c) $2^{-2}\cdot 3^{-2}\cdot 2^6\cdot 3^3 : (2^{-3}\cdot 3^{-6} : 2^{16})^2 = 2^4\cdot 3 : (2^{-19}\cdot 3^{-6})^2 = 2^4\cdot 3 : (2^{-38}\cdot 3^{-12}) = 2^{4+38}\cdot 3^{1+12} = 2^{42}\cdot 3^{13}$

15. a) $(3^3)^2\cdot(5^2)^{-3} : 25^3\cdot(5 + 5^2)$; b) $(4^2 : 8^3)^{-4}\cdot(2^{-2} : 2^3)^4 + 16$; c) $7^2\cdot 7^{-3}\cdot 49^5 : (343\cdot 7^{-2})$
a) $3^6\cdot 5^{-6} : 5^6\cdot 5\cdot(1 + 5) = 3^6\cdot 5^{-6-6+1}\cdot 6 = 3^6\cdot 5^{-11}\cdot 2\cdot 3 = 2\cdot 3^7\cdot 5^{-11}$;
b) $(2^4 : 2^9)^{-4}\cdot(2^{-2-3})^4 + 2^4 = (2^{4-9})^{-4}\cdot(2^{-5})^4 + 2^4 = (2^{-5})^{-4}\cdot 2^{-20} + 2^4 = 2^{20}\cdot 2^{-20} + 2^4 = 1 + 16 = 17$;
c) $7^{2-3}\cdot 7^{10} : (7^3\cdot 7^{-2}) = 7^{-1+10} : 7^{3-2} = 7^{9-1} = 7^8$

16. a) $3^2\cdot 5\cdot 3^{-3}\cdot 5^{-2} + 3\cdot 5^2\cdot 3^{-2}\cdot 5^{-3}$; b) $(3^{-7} : 3^{-4}) : (3^{-3} : 3^{-2})$; c) $2^3\cdot 3^{-2}\cdot 4^3\cdot 6^{-2}\cdot 8^5\cdot 9^{-4}$
a) $3^{2-3}\cdot 5^{1-2} + 3^{1-2}\cdot 5^{2-3} = 3^{-1}\cdot 5^{-1} + 3^{-1}\cdot 5^{-1} = 2\cdot 3^{-1}\cdot 5^{-1}$;
b) $3^{-7+4} : 3^{-3+2} = 3^{-3} : 3^{-1} = 3^{-3+1} = 3^{-2}$;
c) $2^3\cdot 3^{-2}\cdot 2^6\cdot 2^{-2}\cdot 3^{-2}\cdot 2^{15}\cdot 3^{-8} = 2^{3+6-2+15}\cdot 3^{-2-2-8} = 2^{22}\cdot 3^{-12}$

17. a) $\dfrac{2^3\cdot 4^{-2}\cdot 8^3}{4^{-2}\cdot 16^2}$; b) $\dfrac{3^{-2}\cdot 9^{-3}\cdot 18^5}{12^{-4}\cdot 18^2}$; c) $(4^{-2} + 3^{-1})\cdot(4^{-2} - 3^{-1})$
a) $2^3\cdot 2^{-4}\cdot 2^9 : (2^{-4}\cdot 2^8) = 2^{3-4+9+4-8} = 2^4$;
b) $\dfrac{3^{-2}\cdot 9^{-3}\cdot 18^5}{12^{-4}\cdot 18^2}\; 3^{-2}\cdot 3^{-6}\cdot 2^5\cdot 3^{10} : (2^{-8}\cdot 3^{-4}\cdot 2^2\cdot 3^4) = 2^{5+8-2}\cdot 3^{-2-6+10+4-4} = 2^{11}\cdot 3^2$;
c) $4^{-4} - 3^{-2} = 2^{-8} - 3^{-2}$

18. a) $(2^{-1} + 1 - 2^{-2})\cdot(2^{-1} + 1 - 2^{-2})$; b) $(3^{-1} + 3^{-2} - 3^{-3})\cdot(3^{-1} + 3^{-2} - 3^{-3})$
a) $(2^{-1} + 1 - 2^{-2})^2 = 2^{-2} + 1 + 2^{-4} + 2\cdot 2^{-1} - 2\cdot 2^{-3} - 2\cdot 2^{-2} = \cancel{2^{-2}} + 1 + 2^{-4} + 1 - \cancel{2^{-2}} - 2^{-1} = 2 + 2^{-4} - 2^{-1}$
$= 2 + 1/16 - 1/2 = (32 + 1 - 8)/16 = 25/16 = 2^{-4}\cdot 5^2$;
b) $(3^{-1} + 3^{-2} - 3^{-3})^2 = 3^{-2} + 3^{-4} + 3^{-6} + 2\cdot 3^{-3} - 2\cdot 3^{-4} - 2\cdot 3^{-5} = 3^{-2} - 3^{-4} + 3^{-6} + 2\cdot 3^{-3} - 2\cdot 3^{-5} = 3^{-6}\cdot$
$(81 - 9 + 1 + 54 - 6) = 3^{-6}\cdot 121 = 3^{-6}\cdot 11^2$

19. a) $\dfrac{(2^{-2} + 1)\cdot(2^{-2} - 1)}{2^{-2} + 2\cdot 2^{-2} + 1}$; b) $(2\cdot 3^{-1} - 3\cdot 2^{-1} - 1)\cdot(2\cdot 3^{-1} - 3\cdot 2^{-1} + 1)$
a) $(2^{-4} - 1) : (3\cdot 2^{-2} + 1) = -15/16\cdot 4/7 = -15/28$;

b) $(2 \cdot 3^{-1} - 3 \cdot 2^{-1})^2 - 1 = 2^2 \cdot 3^{-2} + 2^{-2} \cdot 3^2 - 2 - 1 = 4/9 + 9/4 - 3 = (16 + 81 - 108)/36 = -11/36$

20. $$\frac{(3^{-3}+9^{-2})\cdot\left[\left(3^{-3}\right)^2-3^{-3}\cdot 9^{-2}+\left(9^{-2}\right)^2\right]}{\left[\left(3^3\right)^{-2}-\left(9^{-2}\right)^2\right]^2}$$

$$\frac{\left(3^{-3}\right)^3+\left(9^{-2}\right)^3}{\left[\left(3^3\right)^{-2}-\left(9^{-2}\right)^2\right]^2}=\frac{3^{-9}+9^{-6}}{\left(3^{-6}-9^{-4}\right)^2}=\frac{3^{-9}+3^{-12}}{3^{-12}+9^{-8}-2\cdot 3^{-6}\cdot 9^{-4}}=\frac{3^{-9}+3^{-12}}{3^{-12}+3^{-16}-2\cdot 3^{-6}\cdot 3^{-8}}=$$

$$=\frac{3^{-9}+3^{-12}}{3^{-12}+3^{-16}-2\cdot 3^{-14}}=\frac{3^{16}\cdot\left(3^{-9}+3^{-12}\right)}{3^{16}\cdot\left(3^{-12}+3^{-16}-2\cdot 3^{-14}\right)}=\frac{3^7+3^4}{3^4+1-2\cdot 3^2}=\frac{3^4\cdot\left(3^3+1\right)}{\left(3^2-1\right)^2}=\frac{81\cdot\cancel{28}^{7}}{\cancel{64}^{16}}=\frac{567}{16}$$

21. $$\frac{\left(2^{-3}\right)^2}{\left(2^{-2}-6^{-1}\right)\cdot\left(2^{-2}-3^{-2}\right)}+\frac{\left(6^{-1}\right)^3}{\left(6^{-1}-3^{-2}\right)\cdot\left(6^{-1}-2^{-2}\right)}+\frac{\left(3^3\right)^{-2}}{\left(3^{-2}-2^{-2}\right)\cdot\left(3^{-2}-6^{-1}\right)}$$

$$\frac{2^{-6}}{2^{-4}-2^{-2}\cdot 3^{-2}-2^{-3}\cdot 3^{-1}+2^{-1}\cdot 3^{-3}}+\frac{2^{-3}\cdot 3^{-3}}{2^{-2}\cdot 3^{-2}-2^{-3}\cdot 3^{-1}-2^{-1}\cdot 3^{-3}+2^{-2}\cdot 3^{-2}}+\frac{3^{-6}}{3^{-4}-2^{-1}\cdot 3^{-3}-2^{-2}\cdot 3^{-2}+2^{-3}\cdot 3^{-1}}=$$

$$=\frac{2^{-2}\cdot 3^3}{3^3-2^2\cdot 3-2\cdot 3^2+2^3}+\frac{1}{2\cdot 3-3^2-2^2+2\cdot 3}+\frac{3^{-2}\cdot 2^3}{2^3-2^2\cdot 3-2\cdot 3^2+3^3}=$$

$$=\frac{2^{-2}\cdot 3^3}{27-12-18+8}+\frac{1}{6-9-4+6}+\frac{3^{-2}\cdot 2^3}{8-12-18+27}=\frac{2^{-2}\cdot 3^3}{5}+\frac{1}{-1}+\frac{3^{-2}\cdot 2^3}{5}=\frac{27}{20}-1+\frac{8}{45}=$$

$$=\frac{243-180+32}{180}=\frac{95}{180}=\frac{19}{36}$$

22. $$\frac{\left(10^{-2}+15^{-1}-6^{-2}\right)\cdot\left(10^{-2}-15^{-1}+6^{-2}\right)}{\left(10^{-2}\right)^2-\left(15^{-1}-6^{-2}\right)^2}$$

$$\frac{\left[10^{-2}+\left(15^{-1}-6^{-2}\right)\right]\cdot\left[10^{-2}-\left(15^{-1}-6^{-2}\right)\right]}{\left(10^{-2}\right)^2-\left(15^{-1}-6^{-2}\right)^2}=\frac{\left(10^{-2}\right)^2-\left(15^{-1}-6^{-2}\right)}{\left(10^{-2}\right)^2-\left(15^{-1}-6^{-2}\right)^2}=1]$$

23. $$\frac{1+2\cdot 4^{-2}-\left(2^{-3}\right)^2-2\cdot 2^{-3}\cdot(-1)+\left(4^{-2}\right)^2-(-1)^2}{1-2^{-3}+4^{-2}+1}$$

$$\frac{\left[1+2\cdot 4^{-2}+\left(4^{-2}\right)^2\right]-\left[\left(2^{-3}\right)^2+2\cdot 2^{-3}\cdot(-1)+(-1)^2\right]}{2-2^{-3}+2^{-4}}=\frac{\left(1+4^{-2}\right)^2-\left(2^{-3}-1\right)^2}{2-2^{-3}+2^{-4}}=$$

$$=\frac{\left(1+2^{-4}-2^{-3}+1\right)\cdot\left(1+2^{-4}+2^{-3}-1\right)}{2-2^{-3}+2^{-4}}=\frac{\cancel{\left(2+2^{-4}-2^{-3}\right)}\cdot\left(2^{-4}+2^{-3}\right)}{\cancel{2-2^{-3}+2^{-4}}}=2^{-4}+2^{-3}=$$

$$=2^{-3}\cdot\left(2^{-1}+1\right)=\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{16}$$

Semplificare le seguenti espressioni

24. **a) $2^{1/3} \cdot 4^{-2/5} \cdot 8^{1/7}$; b) $5^{1/2} \cdot 25^{1/3} \cdot 75^{2/3}$; c) $12^{3/4} \cdot 18^{5/2}$; d) $24^{1/3} \cdot 48^{2/3} : 72^{4/3}$**

a) $2^{1/3} \cdot 2^{-4/5} \cdot 2^{3/7} = 2^{1/3 - 4/5 + 3/7} = 2^{-4/105}$; b) $5^{1/2} \cdot 5^{2/3} \cdot 3^{2/3} \cdot 5^{4/3} = 3^{2/3} \cdot 5^{1/2 + 2/3 + 4/3} = 3^{2/3} \cdot 5^{5/2}$;

c) $2^{3/2} \cdot 3^{3/4} \cdot 2^{5/2} \cdot 3^5 = 2^{3/2 + 5/2} \cdot 3^{3/4 + 5} = 2^4 \cdot 3^{23/4}$;

d) $2^{3/3} \cdot 3^{1/3} \cdot 2^{8/3} \cdot 3^{2/3} : 2^{12/3}\, 3^{8/3} = 2^{3/3 + 8/3 - 12/3} \cdot 3^{1/3 + 2/3 - 8/3} = 2^{-1/3} \cdot 3^{-5/3}$

25. **a)** $\dfrac{2^{1/2}\cdot 2^{5/8}\cdot 2^{9/32}}{2^{3/4}\cdot 2^{7/16}\cdot 2^{11/64}}$**; b)** $\dfrac{15^{2/5}\cdot 20^{3/5}}{12^{1/5}\cdot 25^{4/5}}$**; c)** $\dfrac{2^{2/3}\cdot 64^{1/3}\cdot 128^{1/2}\cdot 16^{1/4}}{32^{1/2}\cdot 4^{1/6}\cdot 256^{1/3}\cdot 8^{2/3}}$**; d)** $a^{3/2} \cdot b^{-1/2} \cdot a^{1/4} \cdot b^{-1/2}$

a) $\dfrac{2^{1/2+5/8+9/32}}{2^{3/4+7/16+11/64}} = 2^{45/32-87/64} = 2^{3/64}$;

b) $\dfrac{3^{2/5}\cdot 5^{2/5}\cdot 2^{6/5}\cdot 5^{3/5}}{2^{2/5}\cdot 3^{1/5}\cdot 5^{8/5}} = \dfrac{2^{6/5}\cdot 3^{2/5}\cdot 5^{2/5+3/5}}{2^{2/5}\cdot 3^{1/5}\cdot 5^{8/5}} = 2^{6/5-2/5}\cdot 3^{2/5-1/5}\cdot 5^{1-8/5} = 2^{4/5}\cdot 3^{1/5}\cdot 5^{-3/5}$;

c) $\dfrac{2^{2/3}\cdot 2^{6/3}\cdot 2^{7/2}\cdot 2^{4/4}}{2^{5/2}\cdot 2^{2/6}\cdot 2^{8/3}\cdot 2^{6/3}} = 2^{2/3+2+7/2+1-5/2-1/3-8/3-2} = 2^{-1/3}$;

d) $a^{3/2+1/4}\cdot b^{-1/2-1/2} = a^{7/4}\cdot b^{-1}$

26. **a)** $\left(5^{1/2}-3^{1/2}\right)^2$**; b)** $\left(2^{1/3}+3^{1/3}\right)^3$**; c)** $\left(1+7^{1/2}\right)\cdot\left(1-7^{1/2}\right)$

a) $5+3-2\cdot\sqrt{15} = 8-2\cdot\sqrt{15}$ b) $2+3+3\cdot\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{3}+3\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{9} = 2+3\cdot\sqrt[3]{12}+3\cdot\sqrt[3]{18}$;

c) $1-\left(7^{1/2}\right)^2 = 1-7 = -6$

27. **a)** $\left(5^{1/3}+2^{1/3}\right)\cdot\left(5^{2/3}-10^{1/3}+2^{2/3}\right)$**; b)** $\left(a^{1/2}-b^{1/4}\right)^2+\left(a^{1/2}+b^{1/4}\right)^2$

a) $\left(5^{1/3}\right)^3+\left(2^{1/3}\right)^3 = 5+2 = 7$;

b) $\left(a^{1/2}-b^{1/4}\right)^2+\left(a^{1/2}+b^{1/4}\right)^2 = a+b^{1/2}-\cancel{2\cdot a^{1/2}\cdot b^{1/4}}+a+b^{1/2}+\cancel{2\cdot a^{1/2}\cdot b^{1/4}} = 2a+2b^{1/2}$

28. $\left(2^{1/2}+3^{1/6}\right)^2-\left(2^{1/3}-3^{1/3}\right)\cdot\left(2^{2/3}+6^{1/3}+3^{2/3}\right)-3\cdot\left(1+3^{-2/3}\right)$

$2+3^{1/3}+2\cdot 2^{1/2}\cdot 3^{1/6}-\left(2^{1/3}\right)^3+\left(3^{1/3}\right)^3-3-3^{1-2/3} = \cancel{2}+\cancel{3^{1/3}}+2^{3/2}\cdot 3^{1/6}-\cancel{2}+\cancel{3-3}-\cancel{3^{1/3}} = 2^{3/2}\cdot 3^{1/6}$

29. $\left(2^{1/2}-3^{1/4}+1\right)\cdot\left(2^{1/2}+3^{1/4}+1\right)-2^{3/2}+\left(2^{1/4}-3^{1/2}-1\right)\cdot\left(2^{1/4}+3^{1/2}-1\right)-2^{1/2}\cdot\left(1-2^{3/4}\right)$

$\left(2^{1/2}+1\right)^2-\left(3^{1/4}\right)^2-2^{3/2}+\left(2^{1/4}-1\right)^2-\left(3^{1/2}\right)^2-2^{1/2}+2^{1/2+3/4} =$

$= \cancel{2}+2\cdot 2^{1/2}+\cancel{1}-3^{1/2}-2^{3/2}+\cancel{2^{1/2}}+1-2\cdot 2^{1/4}-\cancel{3}-\cancel{2^{1/2}}+2^{5/4} =$

$= \cancel{2^{3/2}}-3^{1/2}\cancel{-2^{3/2}}+1\cancel{-2^{5/4}+2^{5/4}} = 1-\sqrt{3}$

30. $\left(a^{1/3}+b^{1/4}\right)\cdot\left(a^{1/3}-b^{1/4}\right)-\left(a^{1/3}+b^{1/4}\right)^2+2\cdot\left(a^{1/3}+1\right)\cdot\left(b^{1/4}-1\right)+2\cdot\left(b^{1/4}-1\right)^2$

$\left(a^{1/3}\right)^2-\left(b^{1/4}\right)^2-a^{2/3}-b^{1/2}-2a^{1/3}b^{1/4}+2\cdot\left(a^{1/3}b^{1/4}-a^{1/3}+b^{1/4}-1\right)+2\cdot\left(b^{1/2}+1-2b^{1/4}\right) =$

$= \cancel{a^{2/3}}-\cancel{b^{1/2}}-\cancel{a^{2/3}}-\cancel{b^{1/2}}\cancel{-2a^{1/3}b^{1/4}+2a^{1/3}b^{1/4}}-2a^{1/3}+2b^{1/4}\cancel{-2}+\cancel{2b^{1/2}}\cancel{+2}-4b^{1/4} = -2a^{1/3}-2b^{1/4}$

31. $\left(a^{1/6}+b^{1/3}-c^{1/2}\right)\cdot\left(a^{1/6}+b^{1/3}+c^{1/2}\right)-\left(a^{1/6}-b^{1/3}\right)^2-a^{-1/3}\cdot\left(4a^{1/2}-1\right)\cdot b^{1/3}$

$\left(a^{1/6}+b^{1/3}\right)^2-\left(c^{1/2}\right)^2-a^{1/3}-b^{2/3}+2a^{1/6}b^{1/3}-4a^{-1/3+1/2}b^{1/3}+a^{-1/3}b^{1/3} =$

$= \cancel{a^{1/3}}+\cancel{b^{2/3}}+\cancel{2a^{1/6}b^{1/3}}-c-\cancel{a^{1/3}}-\cancel{b^{2/3}}+\cancel{2a^{1/6}b^{1/3}}-\cancel{4a^{-1/3+1/2}b^{1/3}}+a^{-1/3}b^{1/3} = a^{-1/3}b^{1/3}-c$

Usando la notazione esponenziale e la seguente tabella in cui sono riportati i dati sui pianeti del nostro sistema solare, risolvere i seguenti problemi. La velocità della luce è di* 3 · 10 ^{8} *m/s

Pianeta	Distanza media dal sole (in *m*)	Raggio medio (in *Km*)	Massa (in *Kg*)
Mercurio	$5,79\cdot 10^{10}$	$2,433\cdot 10^{3}$	$3,18\cdot 10^{23}$
Venere	$1,082\cdot 10^{11}$	$6,08\cdot 10^{3}$	$4,881\cdot 10^{24}$
Terra	$1,496\cdot 10^{11}$	$6,378\cdot 10^{3}$	$5,976\cdot 10^{24}$
Marte	$2,28\cdot 10^{11}$	$3,386\cdot 10^{3}$	$6,41\cdot 10^{23}$

Giove	$7,783 \cdot 10^{11}$	$7,137 \cdot 10^{4}$	$1,9 \cdot 10^{27}$
Saturno	$1,429 \cdot 10^{12}$	$6,037 \cdot 10^{4}$	$5,681 \cdot 10^{26}$
Urano	$2,875 \cdot 10^{12}$	$2,56 \cdot 10^{4}$	$8,678 \cdot 10^{25}$
Nettuno	$4,504 \cdot 10^{12}$	$2,27 \cdot 10^{4}$	$1,026 \cdot 10^{26}$
Plutone	$5,91 \cdot 10^{12}$	$1,1 \cdot 10^{3}$	$1,3 \cdot 10^{26}$

32. Determinare quante volte il raggio della Terra è più grande di quello di Mercurio.
Basta fare il rapporto $6,378 \cdot 10^{3} / 2,433 \cdot 10^{3} \approx 2,6$

33. Determinare quante volte il raggio di Saturno è più grande di quello di Plutone.
$6,037 \cdot 10^{4} / 1,1 \cdot 10^{3} \approx 54,9$

34. Determinare quante volte il raggio di Venere è più piccolo di quello di Nettuno.
$2,27 \cdot 10^{4} / 6,08 \cdot 10^{3} \approx 3,7$

35. Determinare quante volte il pianeta Giove è più pesante di Venere.
$1,9 \cdot 10^{27} / 4,881 \cdot 10^{24} \approx 389$

36. Determinare quante volte il pianeta Urano è più leggero di Giove.
$1,9 \cdot 10^{27} / 8,678 \cdot 10^{25} \approx 22$

37. Determinare dopo quanti minuti la luce del sole raggiunge Mercurio.
Dobbiamo dividere per la velocità della luce nel vuoto che è circa $3 \cdot 10^{8}$ *m/s*. $5,79 \cdot 10^{10}$ *m/* $(3 \cdot 10^{8}$ *m/s*$) \approx 193$ *s* $= 3^{m}13^{s}$

38. Determinare dopo quante ore la luce del sole raggiunge il pianeta Saturno.
$1,429 \cdot 10^{12}$ *m/* $(3 \cdot 10^{8}$ *m/s*$) \approx 4763$ *s* $\approx 1^{h}19^{m}23^{s}$

39. Determinare dopo quante ore la luce del sole raggiunge il pianeta Plutone.
$5,91 \cdot 10^{12}$ *m/* $(3 \cdot 10^{8}$ *m/s*$) \approx 19700$ *s* $\approx 5^{h}28^{m}20^{s}$

40. L'elettrone ha una massa di circa $9,11 \cdot 10^{-31}$ *Kg*. Determinare un valore approssimato della massa del protone sapendo che è circa 1800 volte quella dell'elettrone.
$1800 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31}$ *Kg* $\approx 1,639 \cdot 10^{-27}$ *Kg*

41. Quanti *Km* è lungo l'anno luce (la distanza che la luce percorre in un anno)?
Dobbiamo moltiplicare la velocità della luce per quanti secondi ci sono in un anno, cioè $3 \cdot 10^{8}$ *m/s* $\cdot$ $(3600 \cdot 24 \cdot 365)$*s* $\approx 9,46 \cdot 10^{12}$ *Km*. Abbiamo considerato un anno non bisestile, considerando l'anno bisestile la differenza è di appena $9,46 \cdot 10^{12}$ /365*Km* $\approx 2,6 \cdot 10^{10}$ *km*

42. 1000 chicchi di riso arborio pesano circa 37,9 *g* (fonte Ente Nazionale risi). Quanti chicchi di riso arborio vi sono in media in un chilo?
1000 *g* /37,9 *g* $\cdot$ 1000 $\approx$ 26385

43. In un pacco da 1 Kg di riso Carnaroli vi sono circa 30120 chicchi, quanto pesano 1000 di questi chicchi in media?
Il peso di ogni chicco è circa 1000*g* / 30120 $\approx$ 0,0332 *g*, quindi 1000pesano circa 33,2 *g*

44. Con la produzione di 15 tonnellate di riso Roma, 1000 dei quali in media pesano 34,1 *g* (fonte Ente Nazionale risi), quante confezioni con in media 21944 chicchi si possono confezionare?
In 15 tonnellate di riso vi sono circa $15 \cdot 10^{6}$ *g*/ 34,1 *g* $\approx 4,4 \cdot 10^{5}$ migliaia di chicchi. Possiamo confe-

zionare $4{,}4 \cdot 10^5 / 21{,}944 \approx 20046$ confezioni.

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

1. **(AHSME1976) Sia il numero: $P = 2^{1/7} \cdot 2^{3/7} \cdot \ldots \cdot 2^{(2n-1)/7}$, in cui tutte le frazioni hanno denominatore uguale a 7 e numeratori i numeri dispari in successione. Qual è il più piccolo numero *n* per cui *P* è maggiore di 1000? Ricorda che $1 + 3 + \ldots + 2n - 1 = n^2$.**
   Poiché $2^{10} = 1024$ è la prima potenza di 2 maggiore di 1000 e $P = 2^{1/7+3/7+\ldots+(2n-1)/7} = 2^{n^2/7}$, deve essere $n^2/7 \geq 10 \Rightarrow n^2 \geq 70 \Rightarrow n \geq 9 \Rightarrow n = 9$

2. **(AHSME1995) Un campo rettangolare è largo 300 piedi e lungo 400 piedi. Mediamente si trovano tre formiche per ogni pollice quadrato [12 pollici = 1 piede]. Fra i seguenti numeri quale approssima meglio il numero di formiche in tutto il campo? A) $5 \cdot 10^5$ B) $5 \cdot 10^6$ C) $5 \cdot 10^7$ D) $5 \cdot 10^8$ E) $5 \cdot 10^9$**
   L'area è $12 \cdot 10^4$ piedi quadrati, ossia $12^3 \cdot 10^4 = 1{,}728 \cdot 10^7$ pollici quadrati. IL valore che più vi si avvicina, fra quelli proposti, è C)

3. **(B2003) Leone è velocissimo nei calcoli e chiede a Paolo: "Qual è l'ultima cifra di 2003^{2003}?" Aiuta Paolo.**
   Osserviamo che le successive potenze di 10 hanno la cifra delle unità che rappresenta un ciclo: $3^0 = 1$; $3^1 = 3$; $3^2 = 9$; $3^3 = 27$; $3^4 = 81$. Il che significa che a seconda della divisione dell'esponente per 4, la cifra delle unità sarà 1, 3, 9, 7. Poiché $2003 = 4 \cdot 500 + 3$, la cifra cercata è la stessa di 3^3, ossia 7.

4. **(AHSME1999) What is the sum of the digits of the decimal form of the product $2^{1999} \cdot 5^{2001}$?**
   Possiamo scrivere: $2^{1999} \cdot 5^{2001} = 10^{1999} \cdot 5^2$, pertanto il numero si scrive come 25 seguito da 1999 zeri, e quindi la somma cercata è $2 + 5 = 7$

5. **(HSMC1999) List the numbers 2^{100}, 3^{75} and 5^{50} in order from smallest to largest.**
   Possiamo scrivere: $2^{100} = 2^{4 \cdot 25} = 16^{25}$, $3^{75} = 3^{3 \cdot 25} = 27^{25}$ e $5^{50} = 5^{2 \cdot 25} = 25^{25}$. Avendo ricondotto tutte le potenze allo stesso esponente, l'ordine lo stabiliscono le basi. Quindi: $2^{100} < 5^{50} < 3^{75}$

6. **(HSMC2005) If $P = 3^{2000} + 3^{-2000}$ and if $Q = 3^{2000} - 3^{-2000}$, what is $P^2 - Q^2$?**
   Si ha: $P^2 - Q^2 = (P - Q) \cdot (P + Q)$, quindi: $P^2 - Q^2 = (3^{2000} + 3^{-2000} - 3^{2000} + 3^{-2000}) \cdot (3^{2000} + 3^{-2000} + 3^{2000} - 3^{-2000}) = (2 \cdot 3^{-2000}) \cdot (2 \cdot 3^{2000}) = 4$

Potenze ad esponente reale

Determinare la* 2016ª *cifra decimale dei seguenti numeri irrazionali

1. **0,1234567891011… (le cifre decimali sono tutti i numeri interi).**
   Abbiamo il susseguirsi dei numeri naturali. Pertanto le prime 9 cifre sono formate dai numeri a 1 cifra, le successive $2 \cdot 90 = 180$ dai numeri a 2 cifre, poi avremo $3 \cdot 900 = 2700$ numeri a 3 cifre. Quindi i numeri a 3 cifre cominciano dalla 190ª cifra. Da questa cifra fino a quella di posto $189 + 300 = 489$, abbiamo tutti i numeri di 3 cifre che iniziano per 1; dalle posizioni 490 a $189 + 2 \cdot 300 = 789$ che iniziano per 2, e così via fino a quelle di posto $189 + 6 \cdot 300 = 1989$ che iniziano per 6. Quindi la cifra di posto 2016 è una cifra di uno dei numeri della fascia 700. Dato che $2016 - 1989 = 27 = 3 \cdot 9$, vuol dire che la cifra cercata è l'ultima di 708, cioè 8.

2. **0,24681012… (le cifre decimali sono tutti i numeri interi pari).**
   I primi 4 numeri pari occupano i primi 4 posti, i successivi numeri pari, da 10 a 98, sono in numero di 45, e avendo due cifre ciascuno occupano altre 90 cifre decimali. I numeri da 100 a 998 sono 450 e occupano $450 \times 3 = 1350$ posizioni. Siamo così arrivati alla cifra decimale che occupa il posto $4 + 90 + 1350 = 1444$. Quindi dobbiamo considerare altre $2016 - 1444 = 572$ cifre decimali. Poiché i numeri adesso hanno 4 cifre, da 1000 in poi, dobbiamo vedere quale numero occupa la posizione 572. Poiché

572 = 4 × 143, vuol dire che la cifra cercata è la quarta del 143–mo numero pari di 4 cifre. Poiché 1000 = 2 × 500, il numero cercato è 2 × (500 + 142) = 1284. La sua ultima cifra è 4, che è perciò la cifra cercata.

3. **0,3691215182124… (le cifre decimali sono tutti i numeri interi multipli di 3).**
I primi 3 multipli di 3 hanno una cifra e occupano i primi 3 posti, i successivi multipli di 3 a 2 cifre sono 30 (da 3 · 4 a 3 · 33), e occupano altre 60 cifre decimali. Quelli a 3 cifre sono 300 (da 3 · 34 a 3 · 333) e occupano 900 posizioni. Siamo così arrivati alla cifra decimale che occupa il posto 963. Quindi dobbiamo considerare altre 2016 – 963 = 1053 cifre decimali. Si ha 1053 = 4 × 263 + 1, vuol dire che la cifra cercata è la prima del 264–mo multiplo di 3 con 4 cifre. Poiché 1002 = 3 × 334, il numero cercato è 3 × (334 + 263) = 1792. La sua prima cifra è 1.

4. **0,112233445566… (le cifre decimali sono tutti i numeri interi ripetuti due volte).**
Ragionando come nel primo caso dobbiamo raddoppiare il numero di posizioni. Le prime 18 cifre sono formate dai numeri a 1 cifra, le successive 360 da quelli a 2 cifre. E siamo arrivati a 378 cifre. Dato che 2016 – 378 = 1638 = 8 · 204 + 6, ci interessa la sesta cifra del 205° numero a 4 cifre ripetute. E poiché 1000 = 4 · 250, esso sarà 4 · (250 + 204) = 1816. Il numero è ovviamente 18161816, quindi la sua sesta cifra è 8.

5. **0,11335577991111… (le cifre decimali sono tutti i numeri interi dispari ripetuti due volte).**
Come il quesito svolto nel box SOS, raddoppiano il numero di cifre. I primi 5 numeri dispari occupano i primi 5 · 2 = 10 posti, i numeri dispari da 11 a 99 occupano altre 2 · 90 = 180 cifre. Dobbiamo considerare altre 2016 – 190 = 1826 cifre decimali. I numeri adesso hanno 4 cifre (in effetti 8 perché raddoppiano), si ha: 1826 = 8 · 228 + 2, e la cifra cercata è la seconda del 229–mo numero dispari di 4 cifre. Poiché 1001 = 2 × 500 + 1, il numero cercato è 2 × (500 + 228) + 1 = 1457. La cifra cercata è 4.

Equazioni e disequazioni esponenziali

Risolvi le seguenti equazioni esponenziali

1. **a) $3^{2x-1} = 27$; b) $2^{12x-1} = \sqrt{2^3}$; c) $16^{2x-3} = 1/4$; d) $5^{x-2} = 1$; e) $7^{14x} = 1/49$**
a) $3^{2x-1} = 3^3 \Rightarrow 2x - 1 = 3 \Rightarrow x = 2$; b) $2^{12x-1} = 2^{3/2} \Rightarrow 12x - 1 = 3/2 \Rightarrow 24x = 5 \Rightarrow x = 5/24$;
c) $2^{8x-12} = 2^{-2} \Rightarrow 8x - 12 = -2 \Rightarrow 8x = 10 \Rightarrow x = 5/4$; d) $5^{x-2} = 5^0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$;
e) $7^{14x} = 7^{-2} \Rightarrow 14x = -2 \Rightarrow x = -1/7$

2. **a) $(5/4)^{3x+1} = 25/16$; b) $25^{x+1} = 5^{2x^2-1}$; c) $27^{x-2} = 9^{3x-2}$; d)** $15^{2x^2-x} = 225^{x/2-1/4}$
a) $(5/4)^{3x+1} = (5/4)^2 \Rightarrow 3x + 1 = 2 \Rightarrow x = 1/3$; b) $5^{2x+2} = 5^{2x^2-1} \Rightarrow 2x + 2 = 2x^2 - 1 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 3 = 0$
$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+6}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}$; c) $3^{3x-6} = 3^{6x-4} \Rightarrow 3x - 6 = 6x - 4 \Rightarrow 3x = -2 \Rightarrow x = -2/3$;
d) $15^{2x^2-x} = 15^{x-1/2} \Rightarrow 2x^2 - x = x - \frac{1}{2} \Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow (2x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

3. **a)** $2^{2x} \cdot 2^x = \sqrt{8^{x+1}} \cdot 16$ **; b)** $3^{2x-1} = \frac{\sqrt[3]{9}}{27^x}$ **; c)** $7^{x^2-1} = \frac{49^{x-1}}{343^{x+1}}$ **; d)** $16^{2x+4} \cdot 64^x = \frac{8^{x+7}}{\sqrt[3]{2}}$
a) $2^{2x+x} = 2^{\frac{3x+3}{2}} \cdot 2^4 \Rightarrow 2^{3x} = 2^{\frac{3x+3}{2}+4} \Rightarrow 6x = 3x + 3 + 8 \Rightarrow 3x = 11 \Rightarrow x = \frac{11}{3}$;
b) $3^{2x-1} = 3^{\frac{2}{3}-3x} \Rightarrow 2x - 1 = \frac{2-9x}{3} \Rightarrow 6x - 3 = 2 - 9x \Rightarrow 15x = 5 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$;
c) $7^{x^2-1} = \frac{7^{2x-2}}{7^{3x+3}} \Rightarrow 7^{x^2-1} = 7^{2x-2-3x-3} \Rightarrow x^2 - 1 = -x - 5 \Rightarrow x^2 + x + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 16 < 0$;

d) $2^{8x+16}\cdot 2^{6x}=\dfrac{2^{3x+21}}{2^{1/3}}\Rightarrow 8x+16+6x=3x+21-1/3\Rightarrow 11x=5-1/3\Rightarrow 33x=15-1\Rightarrow x=\dfrac{14}{33}$

4. **a)** $17^{x+1}=\sqrt[3]{289^x}$ **; b)** $32^{x^2+x-1}\cdot 128^x=\dfrac{1024}{\sqrt[3]{2}}$ **; c)** $\mathbf{13^{3x}\cdot 169^{2x+1}=1}$

a) $17^{x+1}=17^{\frac{2x}{3}}\Rightarrow x+1=\dfrac{2x}{3}\Rightarrow 3x+3=2x\Rightarrow x=-3$;

b) $2^{5x^2+5x-5}\cdot 2^{7x}=\dfrac{2^{10}}{2^{1/3}}\Rightarrow 5x^2+5x-5+7x=10-\dfrac{1}{3}\Rightarrow 15x^2+36x-44=0\Rightarrow x=\dfrac{-18\pm\sqrt{324+660}}{15}=\dfrac{-18\pm\sqrt{984}}{15}$

c) $13^{3x}\cdot 169^{2x+1}=1\Rightarrow 13^{3x}\cdot 13^{4x+2}=13^0\Rightarrow 3x+4x+2=0\Rightarrow 7x=-2\Rightarrow x=-2/7$

5. **a)** $14^{2x^2-3x}\cdot\sqrt[3]{14}=196^{2+x}$ **; b)** $2^{14x-1}=\sqrt[x]{4^{x-2}}\cdot 128$

a) $14^{2x^2-3x}\cdot 14^{1/3}=14^{4+2x}\Rightarrow 2x^2-3x+1/3=4+2x\Rightarrow 6x^2-15x-11=0\Rightarrow x=\dfrac{15\pm\sqrt{225+264}}{12}=\dfrac{15\pm\sqrt{489}}{12}$

b) $2^{14x-1}=2^{\frac{2x-2}{x}}\cdot 2^7\Rightarrow 14x-1=\dfrac{2x-2}{x}+7\Rightarrow 14x^2-x=2x-2+7x, x\neq 0\Rightarrow$

$\Rightarrow 14x^2-10x+2=0\Rightarrow \Delta/4=25-28<0$

6. **a)** $\dfrac{2^{4x-1}\cdot 8^{x+3}}{16^{\frac{x-1}{2}}}=\sqrt[x+1]{4}$ **; b)** $\dfrac{\sqrt[x+2]{14^3}\cdot 196^{2x-1}}{14^{3x+2}}=1$ **; c)** $\dfrac{10^{4x+1}\cdot 100^x}{0,01^{3x-1}}=\dfrac{0,1^{2x-5}}{1000^{2x+1}}$

a) $\dfrac{2^{4x-1}\cdot 2^{3x+9}}{2^{\cancel{4}^2\cdot\frac{x-1}{\cancel{2}}}}=2^{\frac{2}{x+1}}\Rightarrow 2^{4x-1+3x+9-2x+2}=2^{\frac{2}{x+1}}\Rightarrow 4x-1+3x+9-2x+2=\dfrac{2}{x+1}\Rightarrow 5x+10=\dfrac{2}{x+1}\Rightarrow$

$\Rightarrow 5x^2+5x+10x+10-2=0, x\neq -1\Rightarrow 5x^2+15x+8=0\Rightarrow x=\dfrac{-15\pm\sqrt{225-160}}{10}\Rightarrow x=\dfrac{-15\pm\sqrt{65}}{10}$;

b) $\dfrac{14^{\frac{3}{x+2}}\cdot 14^{4x-2}}{14^{3x+2}}=14^0\Rightarrow \dfrac{3}{x+2}+4x-2-3x-2=0\Rightarrow \dfrac{3}{x+2}+x-4=0\Rightarrow 3+x^2+2x-4x-8=0\Rightarrow$;

$\Rightarrow x^2-2x+5=0\Rightarrow x=1\pm\sqrt{1+5}\Rightarrow x=1\pm\sqrt{6}$

c) $\dfrac{10^{4x+1}\cdot 10^{2x}}{10^{-2(3x-1)}}=\dfrac{10^{-(2x-5)}}{10^{3(2x+1)}}\Rightarrow 10^{4x+1+2x+6x-2}=10^{-2x+5-6x-3}\Rightarrow 12x-1=-8x+2\Rightarrow 20x=3\Rightarrow x=\dfrac{3}{20}$

7. **a)** $\dfrac{3^{x-1}\cdot 9^{x+1}\cdot 27^x}{81^{x-2}\cdot 243^{x+2}}=3$ **; b)** $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{3x-2}\cdot\dfrac{9}{4}=\left(\dfrac{4}{9}\right)^{x-1}\cdot\sqrt[3]{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x-1}}$ **; c)** $\dfrac{5^{x+2}\cdot 125^{2x-\frac{1}{3}}}{625^{4x-1}}=\sqrt[x-1]{25}$

a) $\dfrac{3^{x-1}\cdot 3^{2x+2}\cdot 3^{3x}}{3^{4x-8}\cdot 3^{5x+10}}=3\Rightarrow 6x+1-9x-2=1\Rightarrow 3x=-2\Rightarrow x=-\dfrac{2}{3}$;

b) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{3x-2}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x-2}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{x-1}{3}}\Rightarrow 3x-2-2=2x-2+\dfrac{x-1}{3}\Rightarrow x-2-\dfrac{x-1}{3}=0\Rightarrow$;

$\Rightarrow 3x-6-x+1=0\Rightarrow 2x=5\Rightarrow x=\dfrac{5}{2}$

c) $\dfrac{5^{x+2}\cdot 5^{6x-1}}{5^{16x-4}}=5^{\frac{2}{x-1}}\Rightarrow 5^{7x+1-16x+4}=5^{\frac{2}{x-1}}\Rightarrow -9x+5-\dfrac{2}{x-1}=0\Rightarrow -9x^2+9x-5x-5-2=0\Rightarrow$

$\Rightarrow 9x^2-4x+7=0\Rightarrow \dfrac{\Delta}{4}=4-63<0$

8. **a)** $\dfrac{\sqrt[x-1]{2^x}\cdot 4^{\frac{x-2}{3}}}{8^{2x-3}}=\dfrac{\sqrt{2^{x+1}}}{16^{2x-1}}$ **; b)** $\dfrac{\sqrt[x+1]{5^{2x+1}}\cdot 25^{x+2}}{125^{\frac{x+15}{3}}}=625^{\frac{x-1}{x+1}}$ **; c)** $\dfrac{\sqrt[3x-2]{64}\cdot 64^{5x}}{4^{2x-1}}=256^{x-2}$

$$\frac{2^{\frac{x}{x-1}}\cdot 2^{\frac{2x-4}{3}}}{2^{6x-9}}=\frac{2^{\frac{x+1}{2}}}{2^{8x-4}}\Rightarrow 2^{\frac{x}{x-1}+\frac{2x-4}{3}-6x+9}=2^{\frac{x+1}{2}-8x+4}\Rightarrow \frac{x}{x-1}+\frac{2x-4}{3}+2x+5-\frac{x+1}{2}=0\Rightarrow$$

a) $\Rightarrow 6x+(4x-8+12x+30-3x-3)\cdot(x-1)\Rightarrow 6x+(13x+19)\cdot(x-1)=0\Rightarrow$;

$$\Rightarrow 6x+13x^2-13x+19x-19=0\Rightarrow 13x^2+12x-19=0\Rightarrow x=\frac{-6\pm\sqrt{36+247}}{13}=\frac{-6\pm\sqrt{283}}{13}$$

b) $\dfrac{5^{\frac{2x+1}{x+1}}\cdot 5^{2x+4}}{5^{x+15}}=5^{\frac{4x-4}{x+1}}\Rightarrow 5^{\frac{2x+1}{x+1}+2x+4-x-15}=5^{\frac{4x-4}{x+1}}\Rightarrow \dfrac{2x+1-4x+4}{x+1}+x-11=0\Rightarrow \dfrac{5-2x}{x+1}+x-11=0\Rightarrow$;

$$\Rightarrow 5-2x+x^2-11x+x-11=0\Rightarrow x^2-12x-6=0\Rightarrow x=6\pm\sqrt{36+6}\Rightarrow x=6\pm\sqrt{42}$$

c) $\dfrac{4^{\frac{3}{3x-2}}\cdot 4^{15x}}{4^{2x-1}}=4^{4x-8}\Rightarrow \dfrac{3}{3x-2}+15x-2x+1=4x-8\Rightarrow \dfrac{\cancel{3}^{1}}{3x-2}+{}^{3}\cancel{9}x+\cancel{9}^{3}=0\Rightarrow$

$$\Rightarrow 1+9x^2+9x-6x+6=0\Rightarrow 9x^2+3x+7=0\Rightarrow \Delta=9-252<0$$

9. **a)** $\dfrac{\sqrt[3x-2]{7^{x-1}}\cdot 49^{2x-4}}{7^{\frac{x-3}{2}}}=\sqrt[4]{343^x}$ **; b)** $12^{5x-1}=\dfrac{144^{x-3}}{1728^{x-2}}$ **; c)** $\dfrac{\sqrt[2x-9]{19^x}\cdot 361^{2x-1}}{19^{3x-2}}=\sqrt[5]{19^x}$

$$\frac{7^{\frac{x-1}{3x-2}}\cdot 7^{4x-8}}{7^{\frac{x-3}{2}}}=7^{\frac{3x}{4}}\Rightarrow \frac{x-1}{3x-2}+4x-8-\frac{x-3}{2}=\frac{3x}{4}\Rightarrow \frac{x-1}{3x-2}+\frac{16x-32-2x+6-3x}{4}=0\Rightarrow$$

a) $\Rightarrow \dfrac{x-1}{3x-2}+\dfrac{11x-26}{4}=0\Rightarrow 4x-4+33x^2-78x-22x+52=0\Rightarrow \cancel{33}^{11}x^2-\cancel{96}^{32}x+\cancel{48}^{16}=0\Rightarrow$;

$$\Rightarrow x=\frac{16\pm\sqrt{256-176}}{11}\Rightarrow x=\frac{16\pm\sqrt{80}}{11}$$

b) $12^{5x-1}=\dfrac{12^{2x-6}}{12^{3x-6}}\Rightarrow 5x-1=2x-6-3x+6\Rightarrow 6x=1\Rightarrow=\dfrac{1}{6}$;

c) $\dfrac{19^{\frac{x}{2x-9}}\cdot 19^{4x-2}}{19^{3x-2}}=19^{\frac{x}{5}}\Rightarrow \dfrac{x}{2x-9}+4x\cancel{-2}-3x\cancel{+2}=\dfrac{x}{5}\Rightarrow \dfrac{x}{2x-9}+\dfrac{4x}{5}=0\Rightarrow$ $\left[\text{a)}\dfrac{16\pm 4\cdot\sqrt{5}}{11};\text{b)}\dfrac{1}{6};\text{c)}0\vee\dfrac{31}{8}\right]$

$$\Rightarrow 5x+8x^2-36x=0\Rightarrow 8x^2-31x=0\Rightarrow=0\vee x=\frac{31}{8}$$

Risolvi le seguenti equazioni esponenziali

10. **a) $4^x+6\cdot 2^x-16=0$; b) $4\cdot 4^x-9\cdot 2^x+2=0$; c) $3\cdot 27^{2x}-244\cdot 27^x+81=0$**

a) Sia $2^x=y$, $4^x=y^2$; $y^2+6y-16=0\Rightarrow y=-3\pm 5=2\vee -8\Rightarrow 2^x=2\vee 2^x=-8\Rightarrow x=1\vee\varnothing$;

b) Sia $2^x=y$, $4^x=y^2$; $4y^2-9y+2=0\Rightarrow$ $y=\dfrac{9\pm\sqrt{81-32}}{8}=\dfrac{9\pm 7}{8}=\prec\begin{matrix}2\\1/4\end{matrix}\Rightarrow 2^x=2\vee 2^x=1/4\Rightarrow$ $x=1$ $\vee$ $2^x=2^{-2}$ $\Rightarrow$ $x=1\vee x=-2$; c) Sia $27^x=y$, $27^{2x}=y^2$; $3y^2-244y+81=0\Rightarrow$ $y=\dfrac{122\pm\sqrt{14884-243}}{3}=\dfrac{122\pm 121}{3}=\prec\begin{matrix}1/3\\81\end{matrix}\Rightarrow 27^x=1/3\vee 27^x=81\Rightarrow 3^{3x}=3^{-1}\vee 3^{3x}=3^4\Rightarrow$ $3x=-1$ $\vee$ $3x=4$ $\Rightarrow$ $x=-1/3\vee x=4/3$

11. **a) $9\cdot 9^x-82\cdot 3^x+9=0$; b) $25\cdot 5^{2x}-126\cdot 5^x+5=0$; c) $5\cdot 25^x+14\cdot 5^x-3=0$**

a) Sia $3^x = y$, $9^x = y^2$; $9y^2 - 82y + 9 = 0 \Rightarrow y = \frac{41 \pm \sqrt{1681-81}}{9} = \frac{41 \pm 40}{9} =\prec \begin{matrix} 9 \\ 1/9 \end{matrix} \Rightarrow 3^x = 9 \vee 3^x = 1/9$ $\Rightarrow x = 2 \vee x = -2$; b) Sia $5^x = y$, $5^{2x} = y^2$; $25y^2 - 126y + 5 = 0$ $y = \frac{63 \pm \sqrt{3969-125}}{25} = \frac{63 \pm 62}{25} =\prec \begin{matrix} 5 \\ 1/25 \end{matrix} \Rightarrow 5^x = 5 \vee 5^x = 1/25 \Rightarrow x = 1 \vee x = -2$; c) Sia $5^x = y$, $5^{2x} = y^2$; $5y^2 + 14y - 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{-7 \pm \sqrt{49+15}}{5} = \frac{-7 \pm 8}{5} =\prec \begin{matrix} -3 \\ 1/5 \end{matrix} \Rightarrow 5^x = -3 \vee 5^x = 1/5 \Rightarrow \varnothing \vee x = -1$

12. **a) $4 \cdot 4^x + 9 \cdot 2^x + 2 = 0$; b) $49 \cdot 7^{2x} - 50 \cdot 7^x + 1 = 0$; c) $16 \cdot 8^{2x} - 17 \cdot 8^x + 1 = 0$**

a) Sia $2^x = y$, $4^x = y^2$; $4y^2 + 9y + 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{-9 \pm \sqrt{81-32}}{8} = \frac{-9 \pm 7}{8} =\prec \begin{matrix} -2 \\ -1/4 \end{matrix} \Rightarrow 4^x = -2 \vee 4^x = -1/4 \Rightarrow$ $\varnothing$; b) Sia $7^x = y$, $7^{2x} = y^2$; $49y^2 - 50y + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{25 \pm \sqrt{625-49}}{49} = \frac{25 \pm 24}{49} =\prec \begin{matrix} 1 \\ 1/49 \end{matrix} \Rightarrow 7^x = 1 \vee 7^x = 1/49 \Rightarrow x = 0 \vee x = -2$; c) Sia $8^x = y$, $8^{2x} = y^2$; $16y^2 - 17y + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{17 \pm \sqrt{289-64}}{32} = \frac{17 \pm 15}{32} =\prec \begin{matrix} 1 \\ 1/16 \end{matrix} \Rightarrow 8^x = 1 \vee 8^x = 1/16 \Rightarrow x = 0 \vee 2^{3x} = 2^{-4} \Rightarrow x = 0 \vee 3x = -4 \Rightarrow$ $x = 0 \vee x = -4/3$

13. **a) $256 \cdot 0{,}25^{2x} - 68 \cdot 0{,}25^x + 1 = 0$; b) $32 \cdot 16^x - 65 \cdot 4^x + 2 = 0$; c) $4^x + 31 \cdot 2^x - 32 = 0$**

a) Sia $0{,}25^x = y$, $0{,}25^{2x} = y^2$; $256y^2 - 68y + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{34 \pm \sqrt{1156-256}}{256} = \frac{34 \pm 30}{256} =\prec \begin{matrix} 1/64 \\ 1/4 \end{matrix} \Rightarrow 0{,}25^x$ $= 1/64 \vee 0{,}25^x = 1/4 \Rightarrow (1/4)^x = (1/4)^3 \vee (1/4)^x = 1/4$ $x = 3 \vee x = 1$; b) Sia $4^x = y$, $16^x = y^2$; $32y^2 - 65y + 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{65 \pm \sqrt{4225-256}}{64} = \frac{65 \pm 63}{64} =\prec \begin{matrix} 2 \\ 1/32 \end{matrix} \Rightarrow 4^x = 2 \vee 4^x = 1/32 \Rightarrow 2^{2x} = 2 \vee 2^{2x} = 2^{-5} \Rightarrow 2x = 1 \vee 2x = -5 \Rightarrow x = 1/2 \vee x = -5/2$; c) Sia $2^x = y$, $4^x = y^2$; $y^2 + 31y - 32 = 0 \Rightarrow y = \frac{-31 \pm \sqrt{961+128}}{2} = \frac{-31 \pm 33}{2} =\prec \begin{matrix} -32 \\ 1 \end{matrix} \Rightarrow 2^x = -32 \vee 2^x = 1 \Rightarrow \varnothing \vee x = 0$

14. **a) $25 \cdot 0{,}04^x - 3126 \cdot 0{,}2^x + 125 = 0$; b) $9 \cdot 3^x - 244 \cdot \sqrt{3^x} + 27 = 0$; c) $9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$**

a) Sia $0{,}2^x = y$, $0{,}04^x = y^2$; $25y^2 - 3126y + 125 = 0 \Rightarrow y = \frac{1563 \pm \sqrt{2442969-3125}}{25} = \frac{1563 \pm 1562}{25} =\prec \begin{matrix} 125 \\ 1/25 \end{matrix} \Rightarrow 0{,}2^x = 125 \vee 0{,}2^x = 1/25 \Rightarrow 5^{-x} = 5^3 \vee 5^{-x} = 5^{-2} \Rightarrow x = -3 \vee x = 2$; b) Sia $\sqrt{3^x} = y$, $3^x = y^2$; $9y^2 - 244y + 27 = 0 \Rightarrow y = \frac{122 \pm \sqrt{14884-243}}{9} = \frac{122 \pm 121}{9} =\prec \begin{matrix} 27 \\ 1/9 \end{matrix} \Rightarrow \sqrt{3^x} = 27 \vee \sqrt{3^x} = 1/9 \Rightarrow 3^{x/2} = 3^3 \vee 3^{x/2} = 3^{-2} \Rightarrow x/2$ $= 3 \vee x/2 = -2 \Rightarrow x = 6 \vee x = -4$; c) Sia $3^x = y$, $9^x = y^2$; $y^2 - 2y - 3 = 0 \Rightarrow y = 1 \pm 2 = -1 \vee 3 \Rightarrow 3^x = -1 \vee 3^x = 3 \Rightarrow \varnothing \vee x\ 1$

15. **a) $9^{x-1} - 10 \cdot 3^{x-2} + 1 = 0$; b) $9^{x-2} - 30 \cdot 3^{x-4} + 1 = 0$; c) $9^x + 2 \cdot 3^x - 15 = 0$**

a) $9^x/9 - 10 \cdot 3^x/9 + 1 = 0 \Rightarrow 9^x - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$. Sia $3^x = y$, $9^x = y^2 \Rightarrow y^2 - 10y + 9 = 0 \Rightarrow y = 5 \pm 4 = 1 \vee 9 \Rightarrow 3^x = 1 \vee 3^x = 9 \Rightarrow x = 0 \vee x = 2$;

b) $9^x/81 - 30 \cdot 3^x/81 + 1 = 0 \Rightarrow 9^x - 30 \cdot 3^x + 81 = 0$. Sia $3^x = y$, $9^x = y^2$; $y^2 - 30y + 81 = 0 \Rightarrow y = 15 \pm \sqrt{225-81} = 15 \pm 12 =\prec \begin{matrix} 27 \\ 3 \end{matrix} \Rightarrow 3^x = 3 \vee 3^x = 27 \Rightarrow x = 1 \vee x = 3$

c) $3^x = y$, $9^x = y^2$; $y^2 + 2y - 15 = 0 \Rightarrow y = -1 \pm \sqrt{1+15} = -1 \pm 4 = \prec \begin{matrix} -5 \\ 3 \end{matrix} \Rightarrow 3^x = -1 \vee 3^x = 3 \Rightarrow \varnothing \vee x\ 1$

16. **a) $25^{x+1} + 124 \cdot 5^x - 5 = 0$; b) $4^{x+2} - 10 \cdot 2^x + 1 = 0$; c) $(4/25)^x - 133/20 \cdot (2/5)^x + 5/2 = 0$**

a) $25 \cdot 25^x + 124 \cdot 5^x - 5 = 0$. Sia $5^x = y$, $25^x = y^2$; $25y^2 - 124y - 5 = 0 \Rightarrow y = \frac{62 \pm \sqrt{3844+125}}{25} = \frac{62 \pm 63}{25} = \prec \begin{matrix} 5 \\ 1/25 \end{matrix} \Rightarrow 5^x = 5 \vee 5^x = 1/25 \Rightarrow x = 1 \vee x = -2$; b) $16 \cdot 4^x - 10 \cdot 2^x + 1 = 0$. Sia $2^x = y$, $4^x = y^2$; $16y^2 - 10y + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{16} = \frac{5 \pm 3}{16} = \prec \begin{matrix} 1/2 \\ 1/8 \end{matrix} \Rightarrow 2^x = 1/2 \vee 2^x = 1/8 \Rightarrow x = -1 \vee x = -3$; c) Sia $(2/5)^x = y$, $(4/25)^x = y^2$; $y^2 - 133/20y + 5/2 = 0 \Rightarrow 20y^2 - 133y + 50 = 0 \Rightarrow y = \frac{133 \pm \sqrt{17689-4000}}{40} = \frac{133 \pm 117}{40} = \prec \begin{matrix} 25/4 \\ 2/5 \end{matrix} \Rightarrow (2/5)^x = 25/4 \vee (2/5)^x = 2/5 \Rightarrow (2/5)^x = (2/5)^{-2} \vee x = 1 \Rightarrow x = -2 \vee x = 1$

17. **a) $375 \cdot (25/9)^x - 706 \cdot (5/3)^x + 135 = 0$; b) $8 \cdot (9/4)^x - 6 \cdot (3/2)^x - 27 = 0$; c) $4^x + 3 \cdot 2^{x-1} + 2 = 0$**

a) Sia $(5/3)^x = y$, $(25/9)^x = y^2$; $375y^2 - 706y + 135 = 0 \Rightarrow y = \frac{353 \pm \sqrt{124609-50625}}{375} = \frac{353 \pm 272}{375} = \prec \begin{matrix} 5/3 \\ 27/125 \end{matrix} \Rightarrow (5/3)^x = 5/3 \vee (5/3)^x = 27/125 \Rightarrow x = 1 \vee (5/3)^x = (5/3)^{-3} \Rightarrow x = 1 \vee x = -3$;

b) Sia $(3/2)^x = y$, $(9/4)^x = y^2$; $8y^2 - 6y - 27 = 0 \Rightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{9+216}}{8} = \frac{3 \pm 15}{8} = \prec \begin{matrix} 9/4 \\ -3/2 \end{matrix} \Rightarrow (3/2)^x = 9/4 \vee (3/2)^x = -3/2 \Rightarrow x = 2 \vee \varnothing$; c) $4^x + 3/2 \cdot 2^x + 2 = 0 \Rightarrow 2 \cdot 4^x + 3 \cdot 2^x + 4 = 0$. Sia $2^x = y$, $4^x = y^2$; $2y^2 + 3y + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 32 < 0$

18. **a) $2^{2x+7} - 9 \cdot 2^{x+2} + 1 = 0$; b) $9^{x+1} - 730 \cdot 3^x + 81 = 0$; c) $49^{x+1} - 16808 \cdot 7^x + 343 = 0$**

a) $8 \cdot 2^{2x+4} - 9 \cdot 2^{x+2} + 1 = 0$. Sia $2^{x+2} = y$, $2^{2x+4} = y^2$; $8y^2 - 9y + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{9 \pm \sqrt{81-32}}{16} = \frac{9 \pm 7}{16} = \prec \begin{matrix} 1 \\ 1/8 \end{matrix} \Rightarrow 2^{x+2} = 1 \vee 2^{x+2} = 1/8 \Rightarrow x + 2 = 0 \vee x + 2 = -3 \Rightarrow x = -2 \vee x = -5$;

b) $9 \cdot 9^x - 730 \cdot 3^x + 81 = 0$. Sia $3^x = y$, $9^x = y^2$; $9y^2 - 730y + 81 = 0 \Rightarrow y = \frac{365 \pm \sqrt{133225-729}}{9} = \frac{365 \pm 364}{9} = \prec \begin{matrix} 81 \\ 1/9 \end{matrix} \Rightarrow 3^x = 81 \vee 3^x = 1/9 \Rightarrow x = 4 \vee x = -2$;

c) $49 \cdot 49^x - 16808 \cdot 7^x + 343 = 0$. Sia $7^x = y$, $49^x = y^2$; $49y^2 - 16808y + 343 = 0 \Rightarrow y = \frac{8404 \pm \sqrt{70627216-16807}}{49} = \frac{8404 \pm 8403}{49} = \prec \begin{matrix} 343 \\ 1/49 \end{matrix} \Rightarrow 7^x = 343 \vee 7^x = 1/49 \Rightarrow x = 3 \vee x = -2$

19. **a) $5 \cdot 25^{x+1} - 30 \cdot 5^x + 1 = 0$; b) $4 \cdot (9/16)^x + 5 \cdot (3/4)^x - 6 = 0$; c) $3 \cdot (25/9)^x - 2 \cdot (5/3)^x - 5 = 0$**

a) $125 \cdot 25^x - 30 \cdot 5^x + 1 = 0$. Sia $5^x = y$, $25^x = y^2$; $125y^2 - 30y + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{15 \pm \sqrt{225-125}}{125} = \frac{15 \pm 10}{125} = \prec \begin{matrix} 1/5 \\ 1/25 \end{matrix} \Rightarrow 5^x = 1/5 \vee 5^x = 1/25 \Rightarrow x = -1 \vee x = -2$;

b) Sia $(3/4)^x = y$, $(9/16)^x = y^2$; $4y^2 + 5y - 6 = 0 \Rightarrow y = \frac{-5 \pm \sqrt{25+96}}{8} = \frac{-5 \pm 11}{8} = \prec \begin{matrix} 3/4 \\ -2 \end{matrix} \Rightarrow (3/4)^x = 3/4 \vee (3/4)^x = -2 \Rightarrow x = 1 \vee \varnothing$;

c) Sia $(5/3)^x = y$, $(25/9)^x = y^2$; $3y^2 - 2y - 5 = 0 \Rightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{1+15}}{3} = \frac{1 \pm 4}{3} = \prec \begin{matrix} 5/3 \\ -1 \end{matrix} \Rightarrow (5/3)^x = 5/3 \vee (5/3)^x = -1 \Rightarrow x = 1 \vee \varnothing$

20. **a) $2^{3x+5} - 35 \cdot 4^{x+1} + 49 \cdot 2^x - 4 = 0$; b) $2^{2x-\frac{3}{4}} - 2^{x-\frac{1}{4}} - 2^{x-\frac{1}{2}} + 1 = 0$; c) $5^{2x-\frac{2}{3}} = 2 \cdot 5^{x-\frac{1}{3}} - 1$**

a) $32 \cdot 2^{3x} - 140 \cdot 4^x + 49 \cdot 2^x - 4 = 0$. Sia $2^x = y$, $4^x = y^2$; $2^{3x} = y^3$; $32y^3 - 140y^2 + 49y - 4 = 0 \Rightarrow$ Dividiamo per $y - 4$: $(y - 4) \cdot (32y^2 - 12y + 1) = 0 \Rightarrow (y - 4) \cdot (4y - 1) \cdot (8y - 1) = 0 \Rightarrow y = 4 \vee y = 1/4 \vee y = 1/8 \Rightarrow 2^x = 4 \vee 2^x = 1/4 \vee 2^x = 1/8 \Rightarrow x = 2 \vee x = -2 \vee x = -3$;

b) $2^{2x-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} - 2^{x-\frac{1}{4}} \cdot \left(1+2^{-\frac{1}{4}}\right) + 1 = 0 \Rightarrow 2^{-\frac{1}{4}} \cdot 2^{2\cdot\left(x-\frac{1}{4}\right)} - 2^{x-\frac{1}{4}} \cdot \left(1+2^{-\frac{1}{4}}\right) + 1 = 0$. Sia $2^{x-1/4} = y$, $2^{2x-1/2} = y^2$; $\Rightarrow$

$$2^{-\frac{1}{4}} y^2 - \left(1+2^{-\frac{1}{4}}\right) y + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1+2^{-\frac{1}{4}} \pm \sqrt{1+2\cdot 2^{-\frac{1}{4}} + 2^{-\frac{1}{2}} - 4\cdot 2^{-\frac{1}{4}}}}{2\cdot 2^{-\frac{1}{4}}} =$$

$$= \frac{1+2^{-\frac{1}{4}} \pm}{2^{\frac{3}{4}}} = \frac{1+2^{-\frac{1}{4}} \pm \sqrt{1+2^{-\frac{1}{2}} + 2^{\frac{3}{4}} - 2\cdot 2^{\frac{3}{4}}}}{2^{\frac{3}{4}}} = \frac{1+2^{-\frac{1}{4}} \pm \sqrt{1-2^{-\frac{1}{2}} + 2^{\frac{3}{4}}}}{2^{\frac{3}{4}}} = \Rightarrow 2^{x-1/4} = 2^{1/4} \vee 2^{x-1/4} = 2^0 \Rightarrow$$

$$= \frac{1+2^{-\frac{1}{4}} \pm \sqrt{\left(1-2^{-\frac{1}{4}}\right)^2}}{2^{\frac{3}{4}}} = \frac{1+2^{-\frac{1}{4}} \pm \left(1-2^{-\frac{1}{4}}\right)}{2^{\frac{3}{4}}} = \prec \begin{array}{l} \dfrac{2}{2^{\frac{3}{4}}} = 2^{\frac{1}{4}} \\ \dfrac{2^{\frac{3}{4}}}{2^{\frac{3}{4}}} = 1 \end{array}$$

$x - 1/4 = 1/4 \vee x - 1/4 = 0 \Rightarrow x = 1/2 \vee x = 1/4$;

c) $5^{2x-\frac{2}{3}} - 2\cdot 5^{x-\frac{1}{3}} + 1 = 0 \Rightarrow \left(5^{x-\frac{1}{3}} - 1\right)^2 = 0 \Rightarrow 5^{x-\frac{1}{3}} - 1 = 0 \Rightarrow x - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

21. **a) $4^{x+2} - 2^{x+5/2} - 2^{x+2} + \sqrt{2} = 0$; b) $9^x - 10\cdot 3^{x+1/2} + 27 = 0$; c) $4^{x-1} - 3\cdot 2^{x-3/2} + 1 = 0$**

a) $2^{2(x+2)} - 2^{x+2} \cdot (2^{1/2} + 1) + \sqrt{2}$. Sia $2^{x+2} = y$, $2^{2(x+2)} = y^2$; $y^2 - (2^{1/2} + 1)y + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow$

$$y = \frac{2^{1/2}+1 \pm \sqrt{\left(2^{1/2}+1\right)^2 - 4\sqrt{2}}}{2} = \frac{2^{1/2}+1 \pm \sqrt{2+2^{3/2}+1-2\cdot 2^{3/2}}}{2} = \frac{2^{1/2}+1 \pm \sqrt{2-2^{3/2}+1}}{2} =$$

$$= \frac{2^{1/2}+1 \pm \sqrt{\left(1-2^{1/2}\right)^2}}{2} = \frac{2^{1/2}+1 \pm \left(1-2^{1/2}\right)}{2} = \prec \begin{array}{l} \dfrac{2}{2} = 1 \\ \dfrac{2\cdot 2^{1/2}}{2} = 2^{1/2} \end{array} \Rightarrow 2^{x+2} = 1$$

$\vee\ 2^{x+2} = 2^{1/2} \Rightarrow x + 2 = 0 \vee x + 2 = 1/2 \Rightarrow x = -2 \vee x = -3/2$;

b) $9^x - 10 \cdot 3^{1/2} \cdot 3^x + 27 = 0$ Sia $3^x = y$, $9^x = y^2$; $y^2 - 10 \cdot 3^{1/2}\, y + 27 = 0 \Rightarrow$

$$y = 5\cdot 3^{1/2} \pm \sqrt{25\cdot 3 - 27} = 5\cdot 3^{1/2} \pm \sqrt{48} = 5\cdot 3^{1/2} \pm 4\cdot 3^{1/2} = \prec \begin{array}{l} 9\cdot 3^{1/2} = 3^{5/2} \\ 3^{1/2} \end{array} \Rightarrow 3^x = 3^{5/2} \vee 3^x = 3^{1/2} \Rightarrow x =$$

$5/2 \vee x = 1/2$;

c) $4^x/4 - 3\cdot 2^{-3/2} \cdot 2^x + 1 = 0 \Rightarrow 4^x - 3\cdot 2^{1/2} \cdot 2^x + 4 = 0$. Sia $2^x = y$, $4^x = y^2$; $y^2 - 3\cdot 2^{1/2} y + 4 = 0 \Rightarrow$

$$y = \frac{3\cdot 2^{1/2} \pm \sqrt{9\cdot 2 - 16}}{2} = \frac{3\cdot 2^{1/2} \pm \sqrt{2}}{2} = \frac{3\cdot 2^{1/2} \pm 2^{1/2}}{2} = \prec \begin{array}{l} \dfrac{2\cdot 2^{1/2}}{2} = 2^{1/2} \\ \dfrac{4\cdot 2^{1/2}}{2} = 2^{3/2} \end{array} \Rightarrow 2^x = 2^{1/2} \vee 2^x = 2^{3/2} \Rightarrow x = 1/2$$

$\vee\ x = 3/2$

22. **a) $36^x - 6^{x+3/2} - 6^{x-1} + \sqrt{6} = 0$; b) $49^x - 7^{x+3/4} = 7^{x+1/2} - \sqrt[4]{7^5}$; c) $4^x - 2^{x+\pi} - 2^{x+3/5} + 2^{\pi+3/5} = 0$**

a) $6^{2x} - \left(6^{3/2} + 6^{-1}\right) \cdot 6^x + 6^{1/2} = 0$. Sia $6^x = y$, $36^x = y^2$; $y^2 - \left(6^{3/2} + 6^{-1}\right) \cdot y + 6^{1/2} = 0 \Rightarrow$

$$y=\frac{\left(6^{3/2}+6^{-1}\right)\pm\sqrt{\left(6^{3/2}+6^{-1}\right)^2-4\cdot 6^{1/2}}}{2}=\frac{\left(6^{3/2}+6^{-1}\right)\pm\sqrt{6^3+2\cdot 6^{1/2}+6^{-2}-4\cdot 6^{1/2}}}{2}=$$

$$=\frac{\left(6^{3/2}+6^{-1}\right)\pm\sqrt{6^3-2\cdot 6^{1/2}+6^{-2}}}{2}=\frac{\left(6^{3/2}+6^{-1}\right)\pm\sqrt{\left(6^{3/2}-6^{-1}\right)^2}}{2}=\frac{\left(6^{3/2}+6^{-1}\right)\pm\left(6^{3/2}-6^{-1}\right)}{2}=\prec\begin{matrix}6^{3/2}\\6^{-1}\end{matrix}\Rightarrow$$

$6^x=6^{3/2}\vee 6^x=6^{-1}\Rightarrow x=3/2\vee x=-1;$

b) $7^{2x}-\left(7^{3/4}+7^{1/2}\right)7^x-7^{5/4}=0$. Sia $7^x=y$, $49^x=y^2$; $y^2-\left(7^{3/4}+7^{1/2}\right)y+7^{5/4}=0\Rightarrow$

$$y=\frac{\left(7^{3/4}+7^{1/2}\right)\pm\sqrt{\left(7^{3/4}+7^{1/2}\right)^2-4\cdot 7^{5/4}}}{2}=\frac{\left(7^{3/4}+7^{1/2}\right)\pm\sqrt{7^{3/2}+7+2\cdot 7^{5/4}-4\cdot 7^{5/4}}}{2}=$$

$$=\frac{\left(7^{3/4}+7^{1/2}\right)\pm\sqrt{7^{3/2}+7-2\cdot 7^{5/4}}}{2}=\frac{\left(7^{3/4}+7^{1/2}\right)\pm\sqrt{\left(7^{3/4}-7^{1/2}\right)^2}}{2}=\frac{\left(7^{3/4}+7^{1/2}\right)\pm\left(7^{3/4}-7^{1/2}\right)}{2}\prec\begin{matrix}7^{3/4}\\7^{1/2}\end{matrix}\Rightarrow$$

$7^x=7^{3/4}\vee 7^x=7^{1/2}\Rightarrow x=3/4\vee x=1/2;$ c) $4^x-\left(2^{\pi}+2^{3/5}\right)2^x+2^{\pi+3/5}=0$. Sia $2^x=y$, $4^x=y^2$;

$$y^2-\left(2^{\pi}+2^{3/5}\right)y+2^{\pi+3/5}=0\Rightarrow y=\frac{\left(2^{\pi}+2^{3/5}\right)\pm\sqrt{\left(2^{\pi}+2^{3/5}\right)^2-4\cdot 2^{\pi+3/5}}}{2}=$$

$$=\frac{\left(2^{\pi}+2^{3/5}\right)\pm\sqrt{2^{2\pi}+2^{6/5}+2^{\pi+8/5}-2\cdot 2^{\pi+8/5}}}{2}=\frac{\left(2^{\pi}+2^{3/5}\right)\pm\sqrt{2^{2\pi}+2^{6/5}-2^{\pi+8/5}}}{2}=\Rightarrow 2^x=2^{\pi}\vee 2^x=2^{3/5}$$

$$=\frac{\left(2^{\pi}+2^{3/5}\right)\pm\sqrt{\left(2^{\pi}-2^{3/5}\right)^2}}{2}=\prec\begin{matrix}2^{\pi}\\2^{3/5}\end{matrix}$$

$\Rightarrow x=\pi\vee x=3/5$

23. **a) $8^x-5\cdot 4^x+2^{x+1}+8=0$; b) $3^{3x+1}-4\cdot 9^x-17\cdot 3^x+6=0$; c) $5^{-2x-3}-6\cdot 5^{-x-2}+1=0$**

a) $2^{3x}-5\cdot 2^{2x}+2\cdot 2^x+8=0$. Sia $2^x=y$, $4^x=y^2$, $8^x=y^3$; $y^3-5y^2+2y+8=0\Rightarrow(y+1)\cdot(y-2)\cdot(y-4)=0\Rightarrow y=-1\vee y=2\vee y=4\Rightarrow 2^x=-1\vee 2^x=2\vee 2^x=4\Rightarrow\varnothing\vee x=1\vee x=2$; b) $3\cdot 3^{3x}-4\cdot 3^{2x}-17\cdot 3^x+6=0$. Sia $3^x=y$, $9^x=y^2$, $27^x=y^3$; $3y^3-4y^2-17y+6=0\Rightarrow(y+2)\cdot(y-3)\cdot(3y-1)=0\Rightarrow y=-2\vee y=3\vee y=1/3\Rightarrow 3^x=-2\vee 3^x=3\vee 3^x=1/3\Rightarrow\varnothing\vee x=1\vee x=-1$; c) $5\cdot 5^{-2x-4}-6\cdot 5^{-x-2}+1=0$. Sia $5^{-x-2}=y$, $5^{-2x-4}=y^2$; $5y^2-6y+1=0\Rightarrow y=\frac{3\pm\sqrt{9-5}}{5}=\frac{3\pm 2}{5}\prec\begin{matrix}1\\1/5\end{matrix}\Rightarrow 5^{-x-2}=1\vee 3\pm\sqrt{9-5}=1/5\Rightarrow -x-2=0\vee -x-2=-1\Rightarrow x=-2\vee x=-1$

24. **Spiegare perché l'equazione $a^{2x}+b\cdot a^x+c=0$ non ha soluzioni reali qualunque siano a, b e c numeri reali positivi**

Per la regola dei segni di Cartesio, l'equazione se ha soluzioni reali queste sono entrambe negative. E un esponenziale non può assumere tali valori.

25. **(Liceo scientifico 2013/2014) Si determinino i valori reali di x per cui: $\left[\left(x^2-10x+26\right)/5\right]^{x^2-6x+1}=1$.**

Abbiamo tre possibilità, a seconda che sia la base uguale a ±1 o l'esponente uguale a 0:

$$x^2-10x+26=\pm 5\vee\begin{cases}x^2-6x+1=0\\x^2-10x+26\neq 0\end{cases}\Rightarrow x^2-10x+21=0\vee x^2-10x+31=0\vee\begin{cases}x=3\pm\sqrt{8}\\\forall x\in\mathbb{R}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(x=3\vee x=7\right)\vee\Delta=100-124<0\vee x=3\pm\sqrt{8}$$

26. **Se $2^{2015}-2^{2014}+2^{2013}-2^{2012}=k\cdot 2^{2012}$, quanto vale k?**

Abbiamo: $2^{2012}\cdot(2^3-2^2+2-1)=k\cdot 2^{2012}\Rightarrow 2^3-2^2+2-1=k\Rightarrow k=5$

Risolvi i seguenti sistemi di equazioni esponenziali, in cui le lettere rappresentano numeri reali positivi

27. **a)** $\begin{cases} 2^{x+3}=8 \\ 9^{3y-2}=1/3 \end{cases}$ **; b)** $\begin{cases} \sqrt{7^x}=1/49 \\ 12^{4y-3}=\sqrt[3]{144}/12^x \end{cases}$ **; c)** $\begin{cases} 4^{x+3}:32^{y-1}=1 \\ 18^{2y}:324^{x-1}=18^{x+y} \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2^{x+3}=2^3 \\ 3^{6y-4}=3^{-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3=3 \\ 6y-4=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1/2 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 7^{x/2}=7^{-2} \\ 12^{4y-3}=12^{2/3-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x/2=-2 \\ 4y-3=2/3-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-4 \\ 4y=11/3+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=23/12 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 2^{2x+6}:2^{5y-5}=2^0 \\ 18^{2y}:18^{2x-2}=18^{x+y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{2x+6-5y+5}=2^0 \\ 18^{2y-2x+2}=18^{x+y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-5y+11=0 \\ 3x-y-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-15x+10+11=0 \\ y=3x-2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 13x=21 \\ y=3x-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=21/13 \\ y=37/13 \end{cases}$

28. **a)** $\begin{cases} 2^{x+y}=1/16 \\ 3^{x+y-1}=\sqrt{3} \end{cases}$ **; b)** $\begin{cases} \sqrt{5^{x+2y}}=5^x \\ 25^{y-2x}=1/125 \end{cases}$ **; c)** $\begin{cases} 1/\sqrt[3]{169^{x+y}}=13^{x+y}/\sqrt{13} \\ 6^{2y+x-1}=36/\sqrt{6^{x-3y}} \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2^{x+y}=2^{-4} \\ 3^{x+y-1}=3^{1/2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=-4 \\ x+y=3/2 \end{cases}$; Le equazioni si contraddicono. Sistema impossibile.

b) $\begin{cases} 5^{\frac{x+2y}{2}}=5^x \\ 5^{2y-4x}=5^{-3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x+2y}{2}=x \\ 2y-4x=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2y \\ 2y-8y=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1/2 \end{cases}$;

c)

$\begin{cases} 13^{-\frac{2x+2y}{3}}=13^{x+y}/13^{\frac{1}{2}} \\ 6^{2y+x-1}=6^2/6^{\frac{x-3y}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13^{-\frac{2x+2y}{3}}=13^{x+y-\frac{1}{2}} \\ 6^{2y+x-1}=6^{2-\frac{x-3y}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-2x-2y}{3}=x+y-\frac{1}{2} \\ x+2y-1=2-\frac{x-3y}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x-4y-6x-6y+3=0 \\ 2x+4y-2=4-x+3y \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 10x+10y-3=0 \\ 3x+y-6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x+60-30x-3=0 \\ y=6-3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=57/20 \\ y=-51/20 \end{cases}$

29. **a)** $\begin{cases} \sqrt{2^x}=4^{x^2-1} \\ 2^{y+1}=32^x/\sqrt{8^{y-x}} \end{cases}$ **; b)** $\begin{cases} \sqrt{7^{2x+3y}}=343^{x-1} \\ 15^{3x+7y}=1/\sqrt[y]{225^x} \end{cases}$ **; c)** $\begin{cases} \sqrt{3^{x-3}}=81 \\ 5^{2y+1}=5\cdot\sqrt{5} \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2^{x/2}=2^{2x^2-2} \\ 2^{y+1}=2^{5x}/2^{\frac{3y-3x}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2}=2x^2-2 \\ 2^{y+1}=2^{5x-\frac{3y-3x}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^2-x-4=0 \\ y+1=\frac{10x-3y+3x}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1\pm\sqrt{1+64}}{8} \\ 2y+2-13x+3y=0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1\pm\sqrt{65}}{8} \\ y=\frac{13x-2}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1\pm\sqrt{65}}{8} \\ y=13\cdot\frac{1\pm\sqrt{65}}{40}-\frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1\pm\sqrt{65}}{8} \\ y=\frac{13\pm13\sqrt{65}-16}{40} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1\pm\sqrt{1+65}}{8} \\ y=\frac{-3\pm13\sqrt{65}}{40} \end{cases}$;

b)

$$\begin{cases} 7^{\frac{2x+3y}{2}} = 7^{3x-3} \\ 15^{3x+7y} = 15^{-\frac{2x}{y}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2x+3y}{2} = 3x-3 \\ 3x+7y = -\frac{2x}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+3y = 6x-6 \\ 3xy+7y^2+2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3y+6}{4} \\ 3\cdot\frac{3y+6}{4}y+7y^2+2\cdot\frac{3y+6}{4} = 0 \end{cases} \Rightarrow ;$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3y+6}{4} \\ 9y^2+18y+28y^2+6y+12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3y+6}{4} \\ 37y^2+24y+12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3y+6}{4} \\ \Delta/4 = 144-37\cdot 12 < 0 \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} 3^{\frac{x-3}{2}} = 3^4 \\ 5^{2y+1} = 5^{3/2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-3}{2} = 4 \\ 2y+1 = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3 = 8 \\ 2y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 11 \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

30. **a)** $\begin{cases} a^{x+y} = a^{2y-1} \\ b^{y^2-1} = b^{1-x} \end{cases}$ **;b)** $\begin{cases} \sqrt[y]{a^x} = \frac{1}{a^{y+1-2x}} \\ \frac{\sqrt[y-1]{a^{x+1}}}{a^{2x-1}} = 1 \end{cases}$ **;c)** $\begin{cases} \sqrt{2^{x^2-1}} = \frac{4}{64^{1-x-y}} \\ a^{3x+5y} = \frac{\sqrt[4]{a^{x-y}}}{a^{x+2}} \end{cases}$

a) $$\begin{cases} x+y = 2y-1 \\ y^2-1 = 1-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y-1 \\ y^2-2+y-1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y-1 \\ y^2+y-3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y-1 \\ y = \frac{-1\pm\sqrt{1+12}}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}-1 \\ y = \frac{-1\pm\sqrt{13}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-3\pm\sqrt{13}}{2} \\ y = \frac{-1\pm\sqrt{13}}{2} \end{cases} ;$$

b) $$\begin{cases} a^{\frac{x}{y}} = a^{-y-1+2x} \\ \frac{a^{\frac{x+1}{y-1}}}{a^{2x-1}} = a^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = -y-1+2x \\ \frac{x+1}{y-1}-2x+1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y^2+y-2xy = 0 \\ x+1-2xy+2x+y-1 = 0 \\ y \neq 0 \wedge y \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y^2+y-2xy = 0 \\ 3x-2xy+y = 0 \\ y \neq 0 \wedge y \neq 1 \end{cases}$$ sottraiamo termine a termine:

$$\begin{cases} -2x+y^2 = 0 \\ 3x-2xy+y = 0 \\ y \neq 0 \wedge y \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{y^2}{2} \\ 3\cdot\frac{y^2}{2}-2\cdot\frac{y^2}{2}y+y = 0 \\ y \neq 0 \wedge y \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{y^2}{2} \\ 3y^2-2y^3+2y = 0 \\ y \neq 0 \wedge y \neq 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{y^2}{2} \\ y = 0 \vee 2y^2-3y-2 = 0 \\ y \neq 0 \wedge y \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{y^2}{2} \\ y = \frac{3\pm\sqrt{9+16}}{4} \\ y \neq 0 \wedge y \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{y^2}{2} \\ y = 2 \vee y = -\frac{1}{2} \\ y \neq 0 \wedge y \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \vee x = \frac{1}{8} \\ y = 2 \vee y = -\frac{1}{2} \end{cases} ;$$

c)

$$\begin{cases} 2^{\frac{x^2-1}{2}} = \dfrac{2^2}{2^{6-6x-6y}} \\ a^{3x+5y} = \dfrac{a^{\frac{x-y}{4}}}{a^{x+2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{2} = 2-6+6x+6y \\ 3x+5y = \dfrac{x-y}{4} - x - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+7-12x-12y=0 \\ 16x+20y-x+y+8=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x^2+7-12x}{12} \\ 15x+21\dfrac{x^2+7-12x}{12}+8=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x^2+7-12x}{12} \\ 180x+21x^2+147-234x+96=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x^2+7-12x}{12} \\ 21x^2-54x+243=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x^2+7-12x}{12} \\ \Delta/4 = 729-21\cdot 243 < 0 \end{cases}$$

31. **a)** $\begin{cases} \sqrt{a^{2x+1}} = \dfrac{a^{x-3}}{\sqrt{a^{y-2}}} \\ b^{y-x} = \dfrac{\sqrt[x]{b^y}}{b^{2x-1}} \end{cases}$ **; b)** $\begin{cases} a^{x+y-1} = \dfrac{1}{a^{2x-y}} \\ b^{2x+y} = \dfrac{b}{\sqrt{b^{x-2}}} \end{cases}$

a) $$\begin{cases} a^{\frac{2x+1}{2}} = a^{x-3-\frac{y-2}{2}} \\ b^{y-x} = b^{\frac{y}{x}-(2x-1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2x+1}{2} = x-3-\dfrac{y-2}{2} \\ y-x = \dfrac{y}{x}-2x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{2x}+1 = \cancel{2x}-6-y+2 \\ xy-x^2 = y-2x^2+x \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=5 \\ x^2+4x-5=0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=5 \\ x=-2\pm\sqrt{4+5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=5 \\ x=-5 \vee x=1 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} x+\cancel{y}-1 = -2x+\cancel{y} \\ 2x+y = 1-\dfrac{x-2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{4}{3}+2y-2+\dfrac{1}{3}-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{3} \\ y=\dfrac{7}{6} \end{cases}$$ b) $x = 1/2, y = 3/4$]

32. **a)** $\begin{cases} \sqrt{b^{x+y-1}} = \dfrac{b^x}{b^{-y}} \\ c^y = c^{x-1}\cdot\sqrt{c^{x+y}} \end{cases}$ **; b)** $\begin{cases} a^{2x} = \sqrt[x]{a^{2y-z}} \\ a^{x+y-2z} = \dfrac{a^{2x-1}}{a^{1-3y}} \\ 3^{z-1} = 9^{x-3y} \end{cases}$ **; c)** $\begin{cases} 2^{x+y} = 2^{y-2x} \\ 3^{2x-1} = 3^{z+y} \\ 4^{2z-x-1} = 2^{x+y-1} \end{cases}$

a); $$\begin{cases} \dfrac{x+y-1}{2} = x+y \\ y = x-1+\dfrac{x+y}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-1-2x-2y=0 \\ 2y-2x+2-x-y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+1=0 \\ 3x-y-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+1=0 \\ 4x-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{5}{4} \\ x=\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} 2x = \dfrac{2y-z}{x}, x \neq 0 \\ x+y-2z = 2x-1-1+3y \\ z-1 = 2x-6y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2-2y+z=0 \\ x+2y+2z-2=0 \\ 2x-6y-z+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2-2y+2x-6y+1=0 \\ x+2y+2(2x-6y+1)-2=0 \\ z=2x-6y+1 \end{cases} \Rightarrow$$;

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x^2+2x-8y+1=0 \\ 5x-10y=0 \\ z=2x-6y+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8y^2+4y-8y+1=0 \\ x=2y \\ z=4y-6y+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8y^2-4y+1=0 \\ x=2y \\ z=-2y+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta=16-32<0 \\ x=2y \\ z=-2y+1 \end{cases}$$

c) $\begin{cases} x+\cancel{y}=\cancel{y}-2x \\ 2x-1=y+z \\ 4z-2x-2=x+y-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y+z+1=0 \\ y-4z+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y+z+1=0 \\ 5z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \\ z=0 \end{cases}$

33. **a)** $\begin{cases} 4^{x+y}=8 \\ 2^{x-z}=4 \\ 8^{y-z}=\sqrt{2} \end{cases}$ **; b)** $\begin{cases} a^x=a^y \\ b^{x-y}=b^{z+1} \\ c^{z-1}=c^{y-1} \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x+2y=3 \\ x-z=2 \\ 3y-3z=1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2z+4+2y=3 \\ x=z+2 \\ 6y-6z-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{1+2z}{2} \\ x=z+2 \\ -\cancel{6}^{3}\dfrac{1+2z}{\cancel{2}}-6z-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{1+2z}{2} \\ x=z+2 \\ -3-6z-6z-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{1}{6} \\ x=\dfrac{5}{3} \\ z=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x=y \\ x-y=z+1 \\ z-1=y-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ z=-1 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ z=-1 \\ y=-1 \end{cases}$

34. **a)** $\begin{cases} 6^{2x+3y-1}=36^x \\ 12^{3x-y+z}=144^{x-z} \\ \sqrt[3]{5^{2x-y}}=\sqrt{5^{z+1}} \end{cases}$ **; b)** $\begin{cases} \pi^{3x+2}=\pi^{3y-z} \\ \sqrt[4]{\pi^{x+y-z}}=\dfrac{1}{\pi^{x-y}} \\ 2^{3x-y+1}=16^{-2x+3y} \end{cases}$

a) $\begin{cases} \cancel{2x}+3y-1=\cancel{2x} \\ 3x-y+z=2x-2z \\ \dfrac{2x-y}{3}=\dfrac{z+1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1/3 \\ x-1/3+3z=0 \\ 4x-\dfrac{2}{3}=3z+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1/3 \\ x=1/3-3z \\ 12x-11-9z=0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} y=1/3 \\ x=1/3-3z \\ 4-36z-11-9z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{1}{3} \\ x=\dfrac{4}{5} \\ z=-\dfrac{7}{45} \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 3x+2=3y-z \\ \dfrac{x+y-z}{4}=y-x \\ 3x-y+1=-8x+12y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{10}{19} \\ y=-\dfrac{7}{19} \\ z=-\dfrac{29}{19} \end{cases}$

35. **a)** $\begin{cases} 2^x+3^y=13/3 \\ 3^{2y-1}+4^x=433/27 \end{cases}$ **; b)** $\begin{cases} 16^x+25^y=29 \\ 5^y+2\cdot 4^x=9 \end{cases}$ **; c)** $\begin{cases} 7^{x+1}-2\cdot 3^{y-1}=9259/27 \\ 5\cdot 3^{y+1}+2\cdot 7^x=299/3 \end{cases}$

$$\begin{cases}2^x+3^y=13/3\\3^{2y}/3+4^x=433/27\end{cases}\Rightarrow\left(2^x=z,3^y=t\right)\begin{cases}z+t=13/3\\t^2/3+z^2=433/27\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=13/3-z\\9t^2+27z^2=433\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}t=13/3-z\\9\left(13/3-z\right)^2+27z^2=433\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=13/3-z\\9\left(169/9-26/3z+z^2\right)+27z^2=433\end{cases}\Rightarrow$$

a) $$\Rightarrow\begin{cases}t=13/3-z\\169-78z+9z^2+27z^2=433\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=13/3-z\\\cancel{36}^{6}z^2-\cancel{78}^{13}z-\cancel{264}^{44}=0\end{cases}\Rightarrow$$;

$$\Rightarrow\begin{cases}t=13/3-z\\z=\dfrac{13\pm\sqrt{169+1056}}{12}=\dfrac{13\pm35}{12}=\prec\begin{matrix}4\\-\dfrac{11}{6}\end{matrix}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=1/3\\z=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3^y=1/3\\2^x=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-1\\x=2\end{cases}$$

$$\begin{cases}16^x+25^y=29\\5^y+2\cdot4^x=9\end{cases}\Rightarrow\left(4^x=z,5^y=t\right)\begin{cases}z^2+t^2=29\\t+2z=9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z^2+81-36z+4z^2=29\\t=9-2z\end{cases}\Rightarrow$$

b) $$\Rightarrow\begin{cases}5z^2-36z+52=0\\t=9-2z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=\dfrac{18\pm\sqrt{324-260}}{5}=\dfrac{18\pm8}{5}=\prec\begin{matrix}\dfrac{26}{5}\\2\end{matrix}\\t=9-2z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=\dfrac{26}{5}\vee z=2\\t=-\dfrac{7}{5}\vee t=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\y=1\end{cases};$$

$$\begin{cases}7^{x+1}-2\cdot3^{y-1}=9259/27\\5\cdot3^{y+1}+2\cdot7^x=299/3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}7\cdot7^x-2/3\cdot3^y=9259/27\\15\cdot3^y+2\cdot7^x=299/3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}189\cdot7^x-18\cdot3^y=9259\\45\cdot3^y+6\cdot7^x=299\end{cases}\Rightarrow$$

c) $$\Rightarrow\left(7^x=z,3^y=t\right)\begin{cases}189z-18t=9259\\45t+6z=299\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=\dfrac{9259+18t}{189}\\45t+\cancel{6}^{2}\cdot\dfrac{9259+18t}{\cancel{189}^{63}}=299\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}z=\dfrac{9259+18t}{189}\\2835t+18518+36t=18837\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=\dfrac{9259+18t}{189}\\y=\dfrac{319}{2871}=\dfrac{1}{9}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=49\\t=\dfrac{1}{9}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=-2\end{cases}$$

36. **a)** $\begin{cases}3^x+2\cdot5^y=31/75\\2\cdot3^{x+1}+5^{y-2}=1251/625\end{cases}$ **;b)** $\begin{cases}2^{x-y}+5^y=127\\3\cdot5^y-2^{x-y+1}=371\end{cases}$ **;c)** $\begin{cases}2^x+3^y=745\\2^{x-1}+3^{y-1}=251\end{cases}$

a) $$\begin{cases}3^x+2\cdot5^y=31/75\\2\cdot3^{x+1}+5^{y-2}=1251/625\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}75\cdot3^x+150\cdot5^y=31\\6\cdot3^x+5^y/25=1251/625\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}75\cdot3^x+150\cdot5^y=31\\3750\cdot3^x+25\cdot5^y=1251\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}75z+150t=31\\3750z+25t=1251\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}75z+6\cdot\left(1251-3750z\right)=31\\25t=1251-3750z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}75z+7506-22500z=31\\25t=1251-3750z\end{cases}\Rightarrow;$$

$$\Rightarrow\begin{cases}z=\dfrac{7475}{22425}=\dfrac{1}{3}\\t=\dfrac{1251-1250}{25}=\dfrac{1}{25}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3^x=\dfrac{1}{3}\\5^y=\dfrac{1}{25}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\y=-2\end{cases}$$

b) $$\begin{cases}2^{x-y}+5^y=127\\3\cdot5^y-2\cdot2^{x-y}=371\end{cases}\Rightarrow\left(2^{x-y}=z,5^y=t\right)\begin{cases}z+t=127\\3t-2z=371\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=127-t\\3t-254+2t=371\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}z=2\\t=125\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2^{x-y}=2\\5^y=5^3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-y=1\\y=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4\\y=3\end{cases};$$

c)

$$\begin{cases}2^x+3^y=745\\2^x/2+3^y/3=251\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2^x+3^y=745\\3\cdot2^x+2\cdot3^y=1506\end{cases}\Rightarrow\left(2^x=z,3^y=t\right)\begin{cases}z+t=745\\3z+2t=1506\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=745-t\\2235-3t+2t=1506\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}z=16\\t=729\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2^x=2^4\\3^y=3^6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4\\y=6\end{cases}$$

37. **a)** $\begin{cases}2^{x+y}+3^x=41\\4\cdot3^x-3\cdot2^{x+y}=-60\end{cases}$ **; b)** $\begin{cases}2^x-3^y=-1\\2^x+3^y=17\end{cases}$ **; c)** $\begin{cases}3^{x+2y}-3^{x+5y-1}=36/81\\3^{x+2y+1}+3^{x+5y}=28/27\end{cases}$

a) $\begin{cases}z+t=41\\4t-3z=-60\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=41-t\\4t-123+3t=-60\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=32\\t=9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2^{x+y}=2^5\\3^x=3^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=5\\x=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=3\\x=2\end{cases};$

b) $\begin{cases}2^x-3^y=-1\\2^x+3^y=17\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\cdot2^x=16\\2\cdot3^y=18\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2^x=2^3\\3^y=3^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases};$

c)

$$\begin{cases}3^{x+2y}-3^{x+5y}/3=36/81\\3\cdot3^{x+2y}+3^{x+5y}=28/27\end{cases}\Rightarrow\left(3^{x+2y}=z,3^{x+5y}=t\right)\begin{cases}z-t/3=36/81\\3z+t=28/27\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}81z-27t=36\\81z+27t=28\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}162z=64\\54t=-8\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}z=32/81\\t=-4/27\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3^{x+2y}=32/81\\3^{x+5y}=-4/27\end{cases}\Rightarrow\varnothing$$

38. **a)** $\begin{cases}4^{x-1}+3\cdot2^{y+1}=\dfrac{1}{2}+6\cdot\sqrt{2}\\4^{x+1}-2^{y+2}=8-4\cdot\sqrt{2}\end{cases}$ **; b)** $\begin{cases}5^x-3^{y-x+1}=-2024/25\\3^{y-x+2}+5^{x+1}=1216/5\end{cases}$

$$\begin{cases}\dfrac{4^x}{4}+3\cdot2^{y+1}=\dfrac{1}{2}+6\cdot\sqrt{2}\\4\cdot4^x-2\cdot2^{y+1}=8-4\cdot\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow\left(4^x=z,2^{y+1}=t\right)\begin{cases}\dfrac{z}{4}+3t=\dfrac{1}{2}+6\cdot\sqrt{2}\\4z-2t=8-4\cdot\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z+12t=2+24\cdot\sqrt{2}\\4z-2t=8-4\cdot\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow$$

a) $\Rightarrow\begin{cases}z=2+24\cdot\sqrt{2}-12t\\\cancel{8}+96\cdot\sqrt{2}-48t-2t=\cancel{8}-4\cdot\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=2+24\cdot\sqrt{2}-12t\\t=2\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=2\\t=2\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow$;

$$\Rightarrow\begin{cases}4^x=2\\2^{y+1}=2\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2^{2x}=2\\2^{y+1}=2^{3/2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1/2\\y=1/2\end{cases}$$

b)

$$\begin{cases}5^x-3^{y-x+1}=-2024/25\\3\cdot3^{y-x+1}+5\cdot5^x=1216/5\end{cases}\Rightarrow\left(5^x=z,3^{y-x+1}=t\right)\begin{cases}z-t=-2024/25\\3t+5z=1216/5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}25z-25t=-2024\\15t+25z=1216\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}1216-15t-25t=-2024\\25z=1216-15t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=81\\z=1/25\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3^{y-x+1}=3^4\\5^x=5^{-2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y-x+1=4\\x=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=1\\x=-2\end{cases}$$

39. **a)** $\begin{cases}2^x+3^y-2^z=3\\2^x-3^y-2^z=-15\\2^x+3^y+2^z=19\end{cases}$ **; b)** $\begin{cases}2^x+2^{y+1}+2^{z-1}=5\\2^{x+1}+2^y-2^z=2\\2^x+2^{y-1}+2^z=\dfrac{5}{2}\end{cases}$

a) $\begin{cases}2^x+3^y-2^z=3\\2^x-3^y-2^z=-15\\2^x+3^y+2^z=19\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\cdot3^y=18\\2\cdot2^x=4\\2\cdot2^z=16\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3^y=3^2\\2^x=2\\2^z=2^3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=2\\x=2\\z=3\end{cases}$ Abbiamo ottenuto la prima equazione sottraendo le prime due; analogamente abbiamo sommando seconda e terza e sottratto la prima dalla terza.

b) $\begin{cases} 2^x+2\cdot 2^y+2^z/2=5 \\ 2^{x+1}+2^y-2^z=2 \\ 2^x+2^y/2+2^z=\dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{x+1}+4\cdot 2^y+2^z=10 \\ 2^{x+1}+2^y-2^z=2 \\ 2^{x+1}+2^y+2\cdot 2^z=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{x+1}+4\cdot 2^y+2^z=10 \\ 3\cdot 2^y+2\cdot 2^z=8 \\ 3\cdot 2^z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{x+1}+4\cdot 2^y+1=10 \\ 3\cdot 2^y+2=8 \\ 2^z=1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2^{x+1}+8=9 \\ 2^y=2 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{x+1}=1 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$

40. **a)** $\begin{cases} 2^{x+y}+3^{x-y}-2^{x-z}=49/12 \\ 2^{x+y+1}-3^{x-y-1}-2^{x-z}=275/36 \\ 2^{x+y}+3^{x-y}+2^{x-z}=55/12 \end{cases}$ **; b)** $\begin{cases} 6^{x+y}-5^{x-y}=179/5 \\ 6^{x+y-2}+5^{x-y+4}=126 \end{cases}$

a)

$\begin{cases} 2^{x+y}+3^{x-y}-2^{x-z}=49/12 \\ 2\cdot 2^{x+y}-3^{x-y}/3-2^{x-z}=275/36 \\ 2^{x+y}+3^{x-y}+2^{x-z}=55/12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12\cdot 2^{x+y}+12\cdot 3^{x-y}-12\cdot 2^{x-z}=49 \\ 72\cdot 2^{x+y}-12\cdot 3^{x-y}-36\cdot 2^{x-z}=275 \\ 12\cdot 2^{x+y}+12\cdot 3^{x-y}+12\cdot 2^{x-z}=55 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12\cdot 2^{x+y}+12\cdot 3^{x-y}-12\cdot 2^{x-z}=49 \\ 72\cdot 2^{x+y}-12\cdot 3^{x-y}-36\cdot 2^{x-z}=275 \\ 24\cdot 2^{x-z}=6 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 12\cdot 2^{x+y}+12\cdot 3^{x-y}-3=49 \\ 72\cdot 2^{x+y}-12\cdot 3^{x-y}-9=275 \\ 2^{x-z}=1/4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12\cdot 2^{x+y}+12\cdot 3^{x-y}=52 \\ 72\cdot 2^{x+y}-12\cdot 3^{x-y}=284 \\ 2^{x-z}=2^{-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12\cdot 2^{x+y}+12\cdot 3^{x-y}=52 \\ 84\cdot 2^{x+y}=336 \\ x-z=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 48+12\cdot 3^{x-y}=52 \\ 2^{x+y}=4 \\ x-z=-2 \end{cases} =$

$\Rightarrow \begin{cases} 3^{x-y}=1/3 \\ 2^{x+y}=2^2 \\ x-z=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=-1 \\ x+y=2 \\ x-z=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=1 \\ 2y=3 \\ z=x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1/2 \\ y=3/2 \\ z=5/2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5\cdot 6^{x+y}-5^{x-y+1}=179 \\ 6^{x+y}/36+125\cdot 5^{x-y+1}=126 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5\cdot 6^{x+y}-5^{x-y+1}=179 \\ 6^{x+y}+4500\cdot 5^{x-y+1}=4536 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5z-t=179 \\ z+4500t=4536 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} t=5z-179 \\ z+22500z-805500=4536 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=1 \\ z=36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^{x-y+1}=1 \\ 6^{x+y}=36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^{x-y+1}=5^0 \\ 6^{x+y}=6^2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x-y+1=0 \\ x+y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=1 \\ 2y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1/2 \\ y=3/2 \end{cases}$

Risolvere le seguenti disequazioni esponenziali

41. **a)** $3^{x^2-1}\geq\sqrt[5]{3}$ **; b)** $(3/4)^{x+1}\leq 9/16$ **; c)** $13^{2x^2-x+1}>\sqrt[3]{13^{x+2}}$

a) $3^{x^2-1}\geq 3^{1/5}\Rightarrow x^2-1\geq 1/5\Rightarrow x^2\geq 6/5\Rightarrow x\leq-\sqrt{6/5}\vee x\geq\sqrt{6/5}$;

b) $(3/4)^{x+1}\leq(3/4)^2\Rightarrow x+1\geq 2\Rightarrow x\geq 1$;

c) $13^{2x^2-x+1}>13^{(x+2)/3}\Rightarrow 2x^2-x+1>(x+2)/3\Rightarrow 6x^2-3x+3>x+2\Rightarrow$
$\Rightarrow 6x^2-4x+1>0\Rightarrow\Delta=16-24<0\Rightarrow\forall x\in\mathbb{R}$

42. **a)** $11^{4x}>121^{x-1}/\sqrt{11}$ **; b)** $(1/3)^{\frac{x-1}{3}}<27^{x+1}$ **; c)** $4^{2x^2}>\sqrt[5]{2^{x+1}}$ **; d)** $3^x>27$

a) $11^{4x}>11^{2x-2}/11^{1/2}\Rightarrow 11^{4x}>11^{2x-2-1/2}\Rightarrow 4x>2x-5/2\Rightarrow 2x>-5/2\Rightarrow x>-5/4$;

b) $3^{\frac{1-x}{3}}<3^{3x+3}\Rightarrow\dfrac{1-x}{3}<3x+3\Rightarrow 1-x<9x+9\Rightarrow 10x>-8\Rightarrow x>-4/5$;

$4^{2x^2} > 2^{(x+1)/5} \Rightarrow 2^{4x^2} > 2^{(x+1)/5} \Rightarrow 4x^2 > (x+1)/5 \Rightarrow 20x^2 - x - 1 > 0 \Rightarrow$

c) $\Rightarrow \left(x = \frac{1 \pm 9}{40} = \prec \begin{matrix} 1/4 \\ -1/5 \end{matrix} \right) x < -\frac{1}{5} \vee x > \frac{1}{4}$

d) $3^x > 27 \Rightarrow 3^x > 3^3 \Rightarrow x > 3$

43. **a)** $5 \cdot 5^{x+1} < 1/125^{2x}$ **; b)** $3^{2x-1} < 1/3$ **; c)** $\sqrt{7^{x+3}} > 49^{x-2}$ **; d)** $2^{2x+1} < 4 \cdot \sqrt{2^x} / 8^{2x-1}$

a) $5^{x+2} < 5^{-6x} \Rightarrow x + 2 < -6x \Rightarrow x < -2/7$;

b) $3^{2x-1} < 3^{-1} \Rightarrow 2x \cancel{-1} < \cancel{-1} \Rightarrow x < 0$;

c) $7^{(x+3)/2} > 7^{2x-4} \Rightarrow (x+3)/2 > 2x - 4 \Rightarrow x + 3 > 4x - 8 \Rightarrow x < 11/3$;

d) $2^{2x+1} < 2^2 \cdot 2^{x/2} / 2^{6x-3} \Rightarrow 2^{2x+1} < 2^{2+x/2-6x+3} \Rightarrow 2x + 1 < 2 + x/2 - 6x + 3 \Rightarrow 15/2x < 4 \Rightarrow x < 8/15$

44. **a)** $\left(\frac{1}{3}\right)^{4x+7} \le \sqrt[x]{9^{x+1}}$ **; b)** $27^{4x^2-2x} < \frac{\sqrt[3]{9^{x+2}}}{3^{x-2}}$

$3^{-4x-7} \le 3^{\frac{2x+2}{x}} \Rightarrow -4x - 7 \le \frac{2x+2}{x} \Rightarrow \frac{-4x^2 - 7x - 2x - 2}{x} \le 0 \Rightarrow \frac{4x^2 + 9x + 2}{x} \ge 0$

a) $x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 32}}{8} = \frac{-9 \pm 7}{8} = \prec \begin{matrix} -2 \\ -1/4 \end{matrix}; \begin{cases} 4x^2 + 9x + 2 \ge 0 \\ x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 4x^2 + 9x + 2 \le 0 \\ x < 0 \end{cases} \Rightarrow$;

$\Rightarrow \begin{cases} x \le -2 \vee x \ge -\frac{1}{4} \\ x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -2 \le x \le -\frac{1}{4} \\ x < 0 \end{cases} \Rightarrow x > 0 \vee -2 \le x \le -\frac{1}{4}$

b)

$3^{12x^2-6x} < \frac{3^{\frac{2x+4}{3}}}{3^{x-2}} \Rightarrow 3^{12x^2-6x} < 3^{\frac{2x+4}{3} - x + 2} \Rightarrow 12x^2 - 6x < \frac{2x+4}{3} - x + 2 \Rightarrow 36x^2 - 18x - 2x - 4 + 3x - 6 < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 36x^2 - 17x - 10 < 0 \Rightarrow \left(x = \frac{17 \pm \sqrt{1729}}{72} \right); \frac{17 - \sqrt{1729}}{72} < x < \frac{17 + \sqrt{1729}}{72}$

45. **a)** $3^{2x+1} \ge 3 \cdot \sqrt[x+1]{81^{x-2}}$ **; b)** $\sqrt[x-1]{5^2} / 25^{x+1} > 125^{2x-3}$ **; c)** $\sqrt{\pi^{x-1}} \cdot \pi^{x+1} > \pi$

a) $3^{2x+1} \ge 3 \cdot 3^{\frac{4x-8}{x+1}} \Rightarrow 3^{2x+1} \ge 3^{1 + \frac{4x-8}{x+1}} \Rightarrow 2x \cancel{+1} \ge \cancel{1} + \frac{4x-8}{x+1} \Rightarrow \frac{2x^2 + 2x - 4x + 8}{x+1} \ge 0 \Rightarrow \frac{2x^2 - 2x + 8}{x+1} \ge 0 \Rightarrow$;

$\Rightarrow \frac{x^2 - x + 4}{x+1} \ge 0 \Rightarrow (\Delta = 1 - 16 < 0); x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$

$5^{\frac{2}{x-1}} / 5^{2x+2} > 5^{6x-9} \Rightarrow 5^{\frac{2}{x-1} - 2x - 2} > 5^{6x-9} \Rightarrow \frac{2}{x-1} - 2x - 2 > 6x - 9 \Rightarrow \frac{2}{x-1} - 8x + 7 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2 - 8x^2 + 8x + 7x - 7}{x-1} > 0 \Rightarrow \frac{8x^2 - 15x + 5}{x-1} < 0 \Rightarrow \left(x = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 160}}{16} = \frac{15 \pm \sqrt{65}}{16} \right);$

b) $\begin{cases} 8x^2 - 15x + 5 > 0 \\ x - 1 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 8x^2 - 15x + 5 < 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{15 - \sqrt{65}}{16} \vee x > \frac{15 + \sqrt{65}}{16} \\ x < 1 \end{cases} \vee$;

$\begin{cases} \frac{15 - \sqrt{65}}{16} < x < \frac{15 + \sqrt{65}}{16} \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow x < \frac{15 - \sqrt{65}}{16} \vee 1 < x < \frac{15 + \sqrt{65}}{16}$

c) $\pi^{\frac{x-1}{2}}\cdot\pi^{x+1}>\pi\Rightarrow\pi^{\frac{x-1}{2}+x+1}>\pi\Rightarrow\frac{x-1}{2}+x+\cancel{1}>\cancel{1}\Rightarrow x-1+2x>0\Rightarrow x>\frac{1}{3}$

46. **a)** $4^{x^2-1}<\frac{1}{16^{3x-2}}$ **; b)** $\sqrt[x+3]{\frac{7}{8}}\le\left(\frac{64}{49}\right)^{2x-3}$

a) $4^{x^2-1}<4^{-6x+4}\Rightarrow x^2-1<-6x+4\Rightarrow x^2+6x-5<0\Rightarrow\left(x=-3\pm\sqrt{9+5}=-3\pm\sqrt{14}\right);-3-\sqrt{14}<x<-3+\sqrt{14}$

$\left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{1}{x+3}}\le\left(\frac{7}{8}\right)^{-4x+6}\Rightarrow\frac{1}{x+3}\ge-4x+6\Rightarrow\frac{1+4x^2-6x+12x-18}{x+3}\ge0\Rightarrow\frac{4x^2+6x-17}{x+3}\ge0\Rightarrow$

b) $\Rightarrow\left(x=\frac{-3\pm\sqrt{9+68}}{4}=\frac{-3\pm\sqrt{77}}{4}\right);\begin{cases}4x^2+6x-17\ge0\\x+3>0\end{cases}\vee\begin{cases}4x^2+6x-17\le0\\x+3<0\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases}x\le\frac{-3-\sqrt{77}}{4}\vee x\ge\frac{-3+\sqrt{77}}{4}\\x>-3\end{cases}\vee\begin{cases}\frac{-3-\sqrt{77}}{4}\le x\le\frac{-3+\sqrt{77}}{4}\\x<-3\end{cases}\Rightarrow x-3<x\le\frac{-3-\sqrt{77}}{4}\vee x\ge\frac{-3+\sqrt{77}}{4}$

47. **a)** $\frac{5^{2x+1}-25}{3^{4x+1}-\sqrt[7]{3}}>0$ **; b)** $\frac{4^{3x+7}-\sqrt[7]{32}}{\sqrt{2^{2x-3}}-4}\le0$ **; c)** $\frac{\sqrt[x]{27}-81}{0,1^{x^2-2x}-100}\ge0$

a) $\frac{5^{2x+1}-5^2}{3^{4x+1}-3^{1/7}}>0\Rightarrow\begin{cases}5^{2x+1}-5^2>0\\3^{4x+1}-3^{1/7}>0\end{cases}\vee\begin{cases}5^{2x+1}-5^2<0\\3^{4x+1}-3^{1/7}<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+1-2>0\\4x+1-1/7>0\end{cases}\vee\begin{cases}2x+1-2<0\\4x+1-1/7<0\end{cases}\Rightarrow$;

$\Rightarrow\begin{cases}x>1/2\\x>-3/14\end{cases}\vee\begin{cases}x<1/2\\x<-3/14\end{cases}\Rightarrow x>\frac{1}{2}\vee x<-\frac{3}{14}$

b) $\frac{2^{6x+14}-2^{5/7}}{2^{\frac{2x-3}{2}}-2^2}\le0\Rightarrow\begin{cases}2^{6x+14}\ge2^{5/7}\\2^{\frac{2x-3}{2}}<2^2\end{cases}\vee\begin{cases}2^{6x+14}\le2^{5/7}\\2^{\frac{2x-3}{2}}>2^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6x+14\ge5/7\\\frac{2x-3}{2}<2\end{cases}\vee\begin{cases}6x+14\le5/7\\\frac{2x-3}{2}>2\end{cases}\Rightarrow$;

$\Rightarrow\begin{cases}x\ge-\frac{31}{14}\\x<\frac{7}{2}\end{cases}\vee\begin{cases}x\le-\frac{31}{14}\\x>\frac{7}{2}\end{cases}\Rightarrow-\frac{31}{14}\le x<\frac{7}{2}\vee\varnothing\Rightarrow-\frac{31}{14}\le x<\frac{7}{2}$

c) $\frac{3^{\frac{3}{x}}-3^4}{10^{-x^2+2x}-10^2}\ge0\Rightarrow\begin{cases}3^{\frac{3}{x}}\ge3^4\\10^{-x^2+2x}>10^2\end{cases}\vee\begin{cases}3^{\frac{3}{x}}\le3^4\\10^{-x^2+2x}<10^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{3}{x}\ge4\\-x^2+2x-2>0\end{cases}\vee\begin{cases}\frac{3}{x}\le4\\-x^2+2x-2<0\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases}\frac{3-4x}{x}\ge0\\x^2-2x+2<0\end{cases}\vee\begin{cases}\frac{3-4x}{x}\le0\\x^2-2x+2>0\end{cases}\Rightarrow(\Delta=4-8<0)\begin{cases}\frac{3-4x}{x}\ge0\\\varnothing\end{cases}\vee\begin{cases}\begin{cases}3-4x\ge0\\x<0\end{cases}\vee\begin{cases}3-4x\le0\\x>0\end{cases}\\\forall x\in\mathbb{R}\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases}x\le\frac{3}{4}\\x<0\end{cases}\vee\begin{cases}x\ge\frac{3}{4}\\x>0\end{cases}\Rightarrow x<0\vee x\ge\frac{3}{4}$

48. **a)** $\frac{0,125^{x-3}-16^{3x-1}}{0,25^{3x+5}-\sqrt[5]{8}}>0$ **; b)** $4^x-5\cdot\sqrt{2}\cdot2^x+8\ge0$

a) $\frac{0,125^{x-3}-16^{3x-1}}{0,25^{3x+5}-\sqrt[5]{8}}>0\Rightarrow\begin{cases}0,125^{x-3}-16^{3x-1}>0\\0,25^{3x+5}-\sqrt[5]{8}>0\end{cases}\vee\begin{cases}0,125^{x-3}-16^{3x-1}<0\\0,25^{3x+5}-\sqrt[5]{8}<0\end{cases}$, risolviamo intanto il primo sistema:

$\left(0{,}125=1/8=2^{-3};0{,}25=1/4=2^{-2}\right)\begin{cases}2^{-3x+9}>2^{12x-4}\\2^{-6x-10}>2^{3/5}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3x+9>12x-4\\-6x-10>3/5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<13/15\\x<-53/30\end{cases}\Rightarrow x<-53/30$,

quindi il secondo sistema diventa: $\begin{cases}x>13/15\\x>-53/30\end{cases}\Rightarrow x>13/15$, quindi le soluzioni sono: $x<-53/30 \vee x>13/15$

b) $4^x-5\cdot\sqrt{2}\cdot 2^x+8\geq 0\Rightarrow y^2-5\cdot\sqrt{2}y+8\geq 0\left(2^x=y\right)$. Intanto risolviamo l'equazione associata: $y=\dfrac{5\sqrt{2}\pm\sqrt{50-32}}{2}=\dfrac{5\sqrt{2}\pm\sqrt{18}}{2}=\dfrac{5\sqrt{2}\pm 3\sqrt{2}}{2}\prec\begin{matrix}4\sqrt{2}\\\sqrt{2}\end{matrix}$. La disequazione ha soluzioni: $y\leq\sqrt{2}\vee y\geq 4\sqrt{2}\Rightarrow 2^x\leq 2^{1/2}\vee 2^x\geq 2^{5/2}\Rightarrow x\leq 1/2\vee x\geq 5/2$

49. **a)** $\dfrac{0{,}125^{x^2-1}-\sqrt[4]{2}}{\sqrt{5^{x+1}}-\sqrt[6]{5}}>0$ **; b)** $27\cdot\left(\dfrac{4}{9}\right)^x-30\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^x+8<0$

a) $\dfrac{0{,}125^{x^2-1}-\sqrt[4]{2}}{\sqrt{5^{x+1}}-\sqrt[6]{5}}>0\Rightarrow\begin{cases}0{,}125^{x^2-1}-\sqrt[4]{2}>0\\\sqrt{5^{x+1}}-\sqrt[6]{5}>0\end{cases}\vee\begin{cases}0{,}125^{x^2-1}-\sqrt[4]{2}<0\\\sqrt{5^{x+1}}-\sqrt[6]{5}<0\end{cases}$; risolviamo intanto il primo sistema:

$\begin{cases}0{,}125^{x^2-1}>\sqrt[4]{2}\\\sqrt{5^{x+1}}>\sqrt[6]{5}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2^{-3x^2+3}>2^{1/4}\\5^{\frac{x+1}{2}}>5^{\frac{1}{6}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3x^2+3>1/4\\\dfrac{x+1}{2}>\dfrac{1}{6}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2<11/12\\3x+3>1\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases}-\sqrt{11/12}<x<\sqrt{11/12}\\x>-2/3\end{cases}\Rightarrow -\dfrac{2}{3}<x<\sqrt{\dfrac{11}{12}}=\dfrac{\sqrt{33}}{6}$, quindi il secondo sistema diventa: $\begin{cases}x^2>11/12\\3x+3<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<-\sqrt{11/12}\vee x>\sqrt{11/12}\\x<-2/3\end{cases}\Rightarrow x<-\sqrt{\dfrac{11}{12}}=-\dfrac{\sqrt{33}}{6}$, quindi le soluzioni sono: $x<-\dfrac{\sqrt{33}}{6}\vee -\dfrac{2}{3}<x<\dfrac{\sqrt{33}}{6}$

b) $27\cdot\left(\dfrac{4}{9}\right)^x-30\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^x+8<0\Rightarrow 27\cdot y^2-30\cdot y+8<0\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^x=y\right)$ Intanto risolviamo l'equazione associata: $y=\dfrac{15\pm\sqrt{225-216}}{27}=\dfrac{15\pm 3}{27}=\prec\begin{matrix}2/3\\4/9\end{matrix}$. La disequazione ha soluzioni: $4/9<y<2/3$, da cui $4/9=(2/3)^2<(2/3)^x<2/3\Rightarrow 1<x<2$

50. **a)** $\dfrac{\sqrt[4]{5^x}-0{,}2}{6^{3x}-\sqrt[7]{216}}\leq 0$ **; b)** $\dfrac{8^{x+2}-16}{0{,}01^{3x-2}-0{,}1^x}>0$ **; c)** $\dfrac{0{,}4^{x^2+1}-1}{2^{5x+2}-\sqrt{32^{x+1}}}<0$

a) $\dfrac{\sqrt[4]{5^x}-0{,}2}{6^{3x}-\sqrt[7]{216}}\leq 0\Rightarrow\begin{cases}\sqrt[4]{5^x}-0{,}2\geq 0\\6^{3x}-\sqrt[7]{216}<0\end{cases}\vee\begin{cases}\sqrt[4]{5^x}-0{,}2\leq 0\\6^{3x}-\sqrt[7]{216}>0\end{cases}$; risolviamo intanto il primo sistema:

$\begin{cases}\sqrt[4]{5^x}\geq 1/5\\6^{3x}<\sqrt[7]{216}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5^{x/4}\geq 5^{-1}\\6^{3x}<6^{3/7}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x/4\geq -1\\3x<3/7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geq -4\\x<1/7\end{cases}\Rightarrow -4\leq x<1/7$, quindi il secondo sistema diventa: $\begin{cases}x\leq -4\\x>1/7\end{cases}\Rightarrow\varnothing$, quindi le soluzioni sono quelle del primo sistema.

b) $\dfrac{8^{x+2}-16}{0{,}01^{3x-2}-0{,}1^x}>0\Rightarrow\begin{cases}8^{x+2}-16>0\\0{,}01^{3x-2}-0{,}1^x>0\end{cases}\vee\begin{cases}8^{x+2}-16<0\\0{,}01^{3x-2}-0{,}1^x<0\end{cases}$; risolviamo intanto il primo sistema:

$\begin{cases} 8^{x+2} > 16 \\ 0,01^{3x-2} > 0,1^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{3x+6} > 2^4 \\ 0,1^{6x-4} > 0,1^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+6 > 4 \\ 6x-4 < x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -2/3 \\ x < 4/5 \end{cases} \Rightarrow -2/3 < x < 4/5$, quindi il secondo sistema diventa: $\begin{cases} x < -2/3 \\ x > 4/5 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$, quindi le soluzioni sono quelle del primo sistema.

c) $\dfrac{0,4^{x^2+1}-1}{2^{5x+2}-\sqrt{32^{x+1}}} < 0 \Rightarrow \begin{cases} 0,4^{x^2+1}-1 > 0 \\ 2^{5x+2}-\sqrt{32^{x+1}} < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 0,4^{x^2+1}-1 < 0 \\ 2^{5x+2}-\sqrt{32^{x+1}} > 0 \end{cases}$; risolviamo intanto il primo sistema: $\begin{cases} 0,4^{x^2+1} > 1 \\ 2^{5x+2} < \sqrt{32^{x+1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0,4^{x^2+1} > 0,4^0 \\ 2^{5x+2} < 2^{\frac{5x+5}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+1 < 0 \\ 5x+2 < \dfrac{5x+5}{2} \end{cases} \Rightarrow \varnothing$, perché la prima disequazione non ha soluzioni. Il secondo sistema diventa: $\begin{cases} x^2+1 > 0 \\ 5x+2 > \dfrac{5x+5}{2} \end{cases} \Rightarrow 10x+4 > 5x+5 \Rightarrow x > 1/5$, quindi le soluzioni sono quelle del secondo sistema.

51. **a) $4^x - 12\cdot 2^x + 32 > 0$; b) $3^{2x+1} - 28\cdot 3^x + 9 \le 0$; c) $4^{x+1} - 9\cdot 2^x + 2 > 0$**

a) $y^2 - 12y + 32 > 0$ ($y = 2^x$) $\Rightarrow$ [$y = 6 \pm 2 = 4 \vee 8$] $y < 4 \vee y > 8 \Rightarrow 2^x < 2^2 \vee 2^x > 2^3 \Rightarrow x < 2 \vee x > 3$

b) $3\cdot 3^{2x} - 28\cdot 3^x + 9 \le 0 \Rightarrow 3y^2 - 28y + 9 \le 0$ ($y = 3^x$) $\Rightarrow \left(y = \dfrac{14 \pm \sqrt{196-27}}{3} = \dfrac{14 \pm 13}{3} = \prec \begin{matrix} 9 \\ 1/3 \end{matrix} \right)$, $1/3 \le y \le 9 \Rightarrow 1/3 \le 3^x \le 9 \Rightarrow 1 - 1 \le x \le 2$

c) $4\cdot 4^x - 9\cdot 2^x + 2 > 0 \Rightarrow 4y^2 - 9y + 2 > 0$ ($y = 2^x$) $\Rightarrow \left(y = \dfrac{9 \pm \sqrt{81-32}}{8} = \dfrac{9 \pm 7}{8} = \prec \begin{matrix} 2 \\ 1/4 \end{matrix} \right)$, $y < 1/4 \vee y > 2 \Rightarrow 2^x < 2^{-2} \vee 2^x > 2 \Rightarrow x < -2 \vee x > 1$

52. **a)** $3^{2x}/4^{2x-1} - 7\cdot(3/4)^x + 3 \le 0$**; b)** $40\cdot(5/2)^{2x} - 641\cdot(5/2)^x + 250 < 0$**; c) $32\cdot 2^x - 18\cdot 2^{x/2} + 1 > 0$**

a) $4\cdot(3/4)^{2x} - 7\cdot(3/4)^x + 3 \le 0 \Rightarrow \left[y = (3/4)^x \right] 4y^2 - 7y + 3 \le 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(y = \dfrac{7 \pm \sqrt{49-48}}{8} = \prec \begin{matrix} 1 \\ 3/4 \end{matrix} \right) 3/4 \le y \le 1 \Rightarrow 3/4 \le (3/4)^x \le (3/4)^0 \Rightarrow 0 \le x \le 1$;

b) $40\cdot(5/2)^{2x} - 641\cdot(5/2)^x + 250 < 0 \Rightarrow 40y^2 - 641y + 250 < 0 \left[(5/2)^x = y \right] \Rightarrow$
$\left(y = \dfrac{641 \pm \sqrt{410881-40000}}{80} = \dfrac{641 \pm 609}{80} = \prec \begin{matrix} 2/5 \\ 125/8 \end{matrix} \right), 2/5 < y < 125/8 \Rightarrow$;
$\Rightarrow (5/2)^{-1} < (5/2)^x < (5/2)^3 \Rightarrow -1 < x < 3$

c) $32\cdot 2^x - 18\cdot 2^{x/2} + 1 > 0 \Rightarrow 32y^2 - 18y + 1 > 0$ ($y = 2^{x/2}$) $\Rightarrow \left(y = \dfrac{9 \pm \sqrt{81-32}}{32} = \dfrac{9 \pm 7}{32} = \prec \begin{matrix} 1/2 \\ 1/16 \end{matrix} \right)$, $y < 1/16 \vee y > 1/2 \Rightarrow 2^{x/2} < 2^{-4} \vee 2^{x/2} > 2^{-1} \Rightarrow x/2 < -4 \vee x/2 > -1 \Rightarrow x < -8 \vee x > -2$

53. **a)** $2^{x+2} - 5\cdot\sqrt{2}^{x+1} + 2 \ge 0$**;b) $3\cdot 27^{x+1} + 51\cdot 9^x - 29\cdot 3^x + 1 > 0$**

a) $2\cdot 2^{x+1} - 5\cdot 2^{\frac{x+1}{2}} + 2 \ge 0 \Rightarrow 2y^2 - 5y + 2 \ge 0 \left(2^{\frac{x+1}{2}} = y \right) \Rightarrow \left[y = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \dfrac{5 \pm 3}{4} = \prec \begin{matrix} 1/2 \\ 2 \end{matrix} \right] y \le 1/2 \vee y \ge 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2^{\frac{x+1}{2}} \le 2^{-1} \vee 2^{\frac{x+1}{2}} \ge 2 \Rightarrow \dfrac{x+1}{2} \le -1 \vee \dfrac{x+1}{2} \ge 1 \Rightarrow x \le -3 \vee x \ge 1$

b) $3\cdot 27\cdot 27^x + 51\cdot 9^x - 29\cdot 3^x + 1 > 0 \Rightarrow 81y^3 + 51y^2 - 29y + 1 > 0$ ($3^x = y$) $\Rightarrow (y+1)\cdot(81y^2 - 30y + 1)$

$> 0 \Rightarrow [\, y = \frac{15 \pm \sqrt{225-81}}{81} = \frac{15 \pm 12}{81} = \prec \begin{matrix} 1/3 \\ 1/27 \end{matrix}]\, -1 < y < 1/27 \vee y > 1/3 \Rightarrow -1 < 3^x < 3^{-3} \vee 3^x > 3^{-1} \Rightarrow x < -3 \vee x > -1$

54. **a)** $3 \cdot (16/9)^x + 2 \cdot (4/3)^x - 8 > 0$**; b) $49^x + 5 \cdot 7^x + 6 \le 0$; c)** $\sqrt[3]{2^{2x}} - 3 \cdot \sqrt[3]{2^{x+1}} + 2^{5/3} \ge 0$

a) $3 \cdot (16/9)^x + 2 \cdot (4/3)^x - 8 > 0 \Rightarrow 3y^2 + 2y - 8 > 0 \left[(4/3)^x = y \right] \Rightarrow \left(y = \frac{-1 \pm 5}{3} = \prec \begin{matrix} -2 \\ 4/3 \end{matrix} \right)$;

$y < -2 \vee y > 4/3 \Rightarrow (4/3)^x < -2 \vee (4/3)^x > 4/3 \Rightarrow x > 1$

b) $49^x + 5 \cdot 7^x + 6 \le 0 \Rightarrow y^2 + 5y + 6 \le 0\ (7^x = y) \Rightarrow -3 \le y \le -2 \Rightarrow -3 \le 7^x \le -2 \Rightarrow \varnothing$

$\sqrt[3]{2^{2x}} - 3 \cdot \sqrt[3]{2^{x+1}} + 2^{5/3} \ge 0 \Rightarrow \sqrt[3]{2^{2x}} - 3 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^x} + 2 \cdot \sqrt[3]{4} \ge 0 \Rightarrow y^2 - 3 \cdot \sqrt[3]{2} y + 2 \cdot \sqrt[3]{4} \ge 0 \left(y = \sqrt[3]{2^x} \right) \Rightarrow$

c) $\Rightarrow y \left(= \frac{3 \cdot \sqrt[3]{2} \pm \sqrt{9 \cdot \sqrt[3]{4} - 8 \cdot \sqrt[3]{4}}}{2} = \frac{3 \cdot \sqrt[3]{2} \pm \sqrt{\sqrt[3]{4}}}{2} = \frac{3 \cdot \sqrt[3]{2} \pm \sqrt[3]{2}}{2} = \prec \begin{matrix} 2\sqrt[3]{2} \\ \sqrt[3]{2} \end{matrix} \right) y \le \sqrt[3]{2} \vee y \ge 2\sqrt[3]{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt[3]{2^x} \le \sqrt[3]{2} \vee \sqrt[3]{2^x} \ge 2\sqrt[3]{2} \Rightarrow x \le 1 \vee 2^{x/3} \ge 2^{4/3} \Rightarrow x \le 1 \vee x \ge 4$

55. **a)** $\frac{1}{4^{x-4}} - \frac{5}{2^{x-3}} + 1 < 0$**; b) $8^x - 4^x - 2^{x+2} + 4 < 0$; c)** $\frac{\sqrt[x]{7} - 343}{0,2^{4x-7} - 125} < 0$

a) $\frac{1}{2^{2x-8}} - \frac{5}{2^{x-3}} + 1 < 0 \Rightarrow \frac{4}{2^{2x-6}} - \frac{5}{2^{x-3}} + 1 < 0 \Rightarrow 4y^2 - 5y + 1 < 0 \left(\frac{1}{2^{x-3}} = y \right) \Rightarrow \left(y = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{8} = \frac{5 \pm 3}{8} = \prec \begin{matrix} 1 \\ 1/4 \end{matrix} \right)$

$1/4 < y < 1 \Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{2^{x-3}} < 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{2} \right)^2 < \left(\frac{1}{2} \right)^{x-3} < \left(\frac{1}{2} \right)^0 \Rightarrow 0 < x - 3 < 2 \Rightarrow 3 < x < 5$

b) $8^x - 4^x - 2^{x+2} + 4 < 0 \Rightarrow y^3 - y^2 - 4y + 4 \le 0\ (2^x = y) \Rightarrow y^2 (y - 1) - 4(y - 1) \le 0 \Rightarrow (y^2 - 4) \cdot (y - 1) \le 0 \Rightarrow (y - 2) \cdot (y + 2) \cdot (y - 1) \le 0 \Rightarrow y \le -2 \vee 1 \le y \le 2 \Rightarrow 2^x \le -2 \vee 1 \le 2^x \le 2 \Rightarrow 0 \le x \le 1$

c) $\frac{\sqrt[x]{7} - 343}{0,2^{4x-7} - 125} < 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[x]{7} - 343 > 0 \\ 0,2^{4x-7} - 125 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \sqrt[x]{7} - 343 < 0 \\ 0,2^{4x-7} - 125 > 0 \end{cases}$; risolviamo intanto il primo sistema: $\begin{cases} 7^{1/x} > 7^3 \\ (1/5)^{4x-7} < 5^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1/x > 3 \\ 4x - 7 > -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 1/3 \\ x > 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ \varnothing \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$. Il secondo sistema diventa:

$\begin{cases} 7^{1/x} < 7^3 \\ (1/5)^{4x-7} > 5^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1/x < 3 \\ 4x - 7 < -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 1/3 \\ x < 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \\ x < 1 \end{cases} \Rightarrow 1/3 < x < 1 \vee x < 0$ quindi le soluzioni sono quelle del secondo sistema.

56. **a)** $\frac{4 \cdot 16^x - 9 \cdot 4^x + 2}{9 \cdot 27^{2x} - 82 \cdot 27^x + 9} < 0$**; b)** $\frac{2 \cdot 4^x + 3 \cdot 2^x - 2}{\frac{1}{9^{x-1}} + \frac{17}{3^x} - 2} < 0$

a) $\frac{4y^2 - 9y + 2}{9z^2 - 82z + 9} < 0 \left(4^x = y, 27^x = z \right) \Rightarrow \begin{cases} 4y^2 - 9y + 2 > 0 \\ 9z^2 - 82z + 9 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 4y^2 - 9y + 2 < 0 \\ 9z^2 - 82z + 9 > 0 \end{cases}$. Risolviamo intanto le singole equazioni: $y = \frac{9 \pm \sqrt{81-32}}{8} = \frac{9 \pm 7}{8} = \prec \begin{matrix} 2 \\ 1/4 \end{matrix}$; $z = \frac{41 \pm \sqrt{1681-81}}{9} = \frac{41 \pm 40}{9} = \prec \begin{matrix} 9 \\ 1/9 \end{matrix}$. Ritorniamo

ai due sistemi: $\begin{cases} y<1/4 \vee y>2 \\ 1/9<z<9 \end{cases} \vee \begin{cases} 1/4<y<2 \\ z<1/9 \vee z>9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4^x<4^{-1} \vee 2^{2x}>2 \\ 3^{-2}<3^{3x}<3^2 \end{cases} \vee \begin{cases} 2^{-2}<2^{2x}<2 \\ 3^{3x}<3^{-2} \vee 3^{3x}>3^2 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x<-1 \vee x>1/2 \\ -2/3<x<2/3 \end{cases} \vee \begin{cases} -1<2^{2x}<1/2 \\ x<-2/3 \vee x>2/3 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}<x<\frac{2}{3} \vee -1<x<-\frac{2}{3}$$

b) $\frac{2y^2+3y-2}{9z^2+17z-2}<0\left(2^x=y,\frac{1}{3^x}=z\right) \Rightarrow \begin{cases} 2y^2+3y-2>0 \\ 9z^2+17z-2<0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2y^2+3y-2<0 \\ 9z^2+17z-2>0 \end{cases}$. Risolviamo intanto le singole equazioni: $y=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{-3\pm 5}{4}=\prec\begin{matrix}-2\\1/2\end{matrix}; z=\frac{-17\pm\sqrt{289+72}}{18}=\frac{-17\pm 19}{18}=\prec\begin{matrix}-2\\1/9\end{matrix}$. Ritorniamo ai due sistemi

$$\begin{cases} y<-2 \vee y>1/2 \\ -2<z<1/9 \end{cases} \vee \begin{cases} -2<y<1/2 \\ z<-2 \vee >1/9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x<-2 \vee 2^x>2^{-1} \\ -2<3^{-x}<3^{-2} \end{cases} \vee \begin{cases} -2<2^x<2^{-1} \\ 3^{-x}<-2 \vee 3^{-x}>3^{-2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x>2 \end{cases} \vee \begin{cases} x<-1 \\ x<2 \end{cases} \Rightarrow x>2 \vee x<-1$$

57. **a)** $\frac{8\cdot 0{,}125^{2x}-33\cdot 0{,}125^x+4}{0{,}2^{2x-1}-26\cdot 0{,}2^x+5}\geq 0$ **; b)** $\frac{5^{2x}-2\cdot 5^x-15}{13^{2x+1}-170\cdot 13^x+13}>0$

a) $\frac{8a^2-33a+4}{5b^2-26b+5}\geq 0,\left(0{,}125^x=a,0{,}2^x=b\right) \Rightarrow \begin{cases} 8a^2-33a+4\geq 0 \\ 5b^2-26b+5>0 \end{cases} \vee \begin{cases} 8a^2-33a+4\leq 0 \\ 5b^2-26b+5<0 \end{cases}$; risolviamo il primo sistema:

$a=\frac{33\pm\sqrt{1089-128}}{16}=\frac{33\pm 31}{16}=\prec\begin{matrix}4\\1/8\end{matrix}; b=\frac{13\pm\sqrt{169-25}}{5}=\frac{13\pm 12}{5}=\prec\begin{matrix}5\\1/5\end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} a\leq 1/8 \vee a\geq 4 \\ b<1/5 \vee b>5 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 0{,}125^x\leq 1/8 \vee 0{,}125^x\geq 4 \\ 0{,}2^x<1/5 \vee 0{,}2^x>5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{-3x}\leq 2^{-3} \vee 2^{-3x}\geq 2^2 \\ 5^{-x}<5^{-1} \vee 5^{-x}>5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq 1 \vee x\leq -2/3 \\ x>1 \vee x<-1 \end{cases} \Rightarrow x<-1 \vee x>1$. Passiamo al secondo sistema: $\begin{cases} 2^{-3}\leq 2^{-3x}\leq 2^2 \\ 5^{-1}<5^{-x}<5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2/3\leq x\leq 1 \\ -1<x<1 \end{cases} \Rightarrow -2/3\leq x<1$. Quindi la soluzione finale è $x<-1 \vee x\geq -2/3, x\neq 1$

b) $\frac{a^2-2a-15}{13b^2-170b+13}>0,\left(5^x=a,13^x=b\right) \Rightarrow \begin{cases} a^2-2a-15>0 \\ 13b^2-170b+13>0 \end{cases} \vee \begin{cases} a^2-2a-15<0 \\ 13b^2-170b+13<0 \end{cases}$ risolviamo il primo sistema:

$a=1\pm\sqrt{1+15}=1\pm 4=\prec\begin{matrix}5\\-3\end{matrix}; b=\frac{85\pm\sqrt{7225-169}}{13}=\frac{85\pm 84}{13}=\prec\begin{matrix}13\\1/13\end{matrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a<-3 \vee a>5 \\ b<1/13 \vee b>13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^x<-3 \vee 5^x>5 \\ 13^x<1/13 \vee 13^x>13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ x<-1 \vee x>1 \end{cases} \Rightarrow x>1$. Passiamo al secondo sistema: $\begin{cases} -3<5^x<5 \\ 1/13<13^x<13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<1 \\ -1<x<1 \end{cases} \Rightarrow -1<x<1$. Quindi la soluzione finale è $x>-1$, $x\neq 1$.

58. **a)** $\frac{2\cdot 16^{2x}-9\cdot 16^x+4}{8^{2x+1}-17\cdot 8^x+2}>0$ **; b)** $\frac{4^x-31\cdot 2^x-32}{3\cdot 9^{x+1}-4\cdot 3^{x+1}+1}\leq 0$

a) $\begin{cases} 2\cdot 16^{2x}-9\cdot 16^x+4>0 \\ 8^{2x+1}-17\cdot 8^x+2>0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2\cdot 16^{2x}-9\cdot 16^x+4<0 \\ 8^{2x+1}-17\cdot 8^x+2<0 \end{cases}$; risolviamo il primo sistema:

$\left(16^x=a;8^x=b\right)\begin{cases}2a^2-9a+4>0\\8b^2-17b+2>0\end{cases}\Rightarrow\left(a=\frac{9\pm\sqrt{81-32}}{4}=\prec\begin{matrix}4\\1/2\end{matrix};b=\frac{17\pm\sqrt{289-64}}{16}=\prec\begin{matrix}2\\1/8\end{matrix}\right)$,

$\begin{cases}a<1/2\vee a>4\\b<1/8\vee b>2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}16^x<1/2\vee 16^x>4\\8^x<1/8\vee 8^x>2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2^{4x}<2^{-1}\vee 2^{4x}>2^2\\2^{3x}<2^{-3}\vee 2^{3x}>2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<-1/4\vee x>1/2\\x<-1\vee x>1/3\end{cases}\Rightarrow x<-1\vee x>1/2$

il secondo: $\begin{cases}2^{-1}<2^{4x}<2^2\\2^{-3}<2^{3x}<2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-1/4<x<1/2\\-1<x<1/3\end{cases}\Rightarrow -1/4<x<1/3$. La soluzione è unione delle due, ossia: $x<-1\vee -1/4<x<1/3\vee x>1/2$

b) $\begin{cases}4^x-31\cdot 2^x-32\geq 0\\3\cdot 9^{x+1}-4\cdot 3^{x+1}+1<0\end{cases}\vee\begin{cases}4^x-31\cdot 2^x-32\leq 0\\3\cdot 9^{x+1}-4\cdot 3^{x+1}+1>0\end{cases}$ risolviamo il primo sistema:

$\left(2^x=a;3^x=b\right)\begin{cases}a^2-31a-32\geq 0\\27b^2-12b+1<0\end{cases}\Rightarrow\left(a=\frac{31\pm\sqrt{961+128}}{2}=\prec\begin{matrix}32\\-1\end{matrix};b=\frac{6\pm\sqrt{36-27}}{27}=\prec\begin{matrix}1/3\\1/9\end{matrix}\right)$ il secondo:

$\begin{cases}a\leq -1\vee a\geq 32\\1/9<b<1/3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2^x\leq -1\vee 2^x\geq 2^5\\3^{-2}<3^x<3^{-1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geq 5\\-2<x<-1\end{cases}\Rightarrow\varnothing$

$\begin{cases}-1\leq 2^x\leq 2^5\\3^x<3^{-2}\vee 3^x>3^{-1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\leq 5\\x<-2\vee x>-1\end{cases}\Rightarrow -1<x\leq 5$. La soluzione è solo quest'ultima

59. **a)** $\frac{0,25^{2x}-12\cdot 0,25^x+32}{32\cdot 8^{2x}-12\cdot 8^x+1}\leq 0$ **; b)** $\frac{7^{2x+1}-50\cdot 7^x+7}{9^{4x+1}-82\cdot 81^x+9}\leq 0$

a) $\begin{cases}0,25^{2x}-12\cdot 0,25^x+32\geq 0\\332\cdot 8^{2x}-12\cdot 8^x+1<0\end{cases}\vee\begin{cases}0,25^{2x}-12\cdot 0,25^x+32\leq 0\\332\cdot 8^{2x}-12\cdot 8^x+1>0\end{cases}$ risolviamo il primo sistema:

$\left(0,25^x=a;8^x=b\right)\begin{cases}a^2-12a+32\geq 0\\32b^2-12b+1<0\end{cases}\Rightarrow\left(a=6\pm\sqrt{36-32}=\prec\begin{matrix}8\\4\end{matrix};b=\frac{6\pm\sqrt{36-32}}{32}=\prec\begin{matrix}1/4\\1/8\end{matrix}\right)$, il

$\begin{cases}a\leq 4\vee a\geq 8\\1/8<b<1/4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0,25^x\leq 4\vee 0,25^x\geq 8\\1/8<8^x<1/4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2^{-2x}\leq 2^2\vee 2^{-2x}\geq 2^3\\2^{-3}<2^{3x}<2^{-2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geq -1\vee x\leq -3/2\\-1<x<-2/3\end{cases}\Rightarrow -1<x<-2/3$

secondo: $\begin{cases}2^2\leq 2^{-2x}\leq 2^3\\2^{3x}<2^{-3}\vee 2^{3x}>2^{-2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3/2\leq x\leq -1\\x<-1\vee x>-2/3\end{cases}\Rightarrow -3/2\leq x<-1$. La soluzione è unione delle due, ossia: $-3/2<x<-2/3\wedge x\neq -1$

b) $\begin{cases}7^{2x+1}-50\cdot 7^x+7\geq 0\\9^{4x+1}-82\cdot 81^x+9<0\end{cases}\vee\begin{cases}7^{2x+1}-50\cdot 7^x+7\leq 0\\9^{4x+1}-82\cdot 81^x+9>0\end{cases}$ risolviamo il primo sistema:

$\left(7^x=a;81^x=b\right)\begin{cases}7a^2-50a+7\geq 0\\9b^2-82b+9<0\end{cases}\Rightarrow\left(a=\frac{25\pm\sqrt{625-49}}{7}=\prec\begin{matrix}7\\1/7\end{matrix};b=\frac{41\pm\sqrt{1681-81}}{9}=\prec\begin{matrix}9\\1/9\end{matrix}\right)$ il se-

$\begin{cases}a\leq 1/7\vee a\geq 7\\1/9<b<9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}7^x\leq 7^{-1}\vee 7^x\geq 7\\3^{-2}<3^{4x}<3^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\leq -1\vee x\geq 1\\-1/2<x<1/2\end{cases}\Rightarrow\varnothing$

condo: $\begin{cases}7^{-1}\leq 7^x\leq 7\\3^{4x}<3^{-2}\vee 3^{4x}>3^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-1\leq x\leq 1\\x<-1/2\vee x>1/2\end{cases}\Rightarrow -1\leq x<-1/2\vee 1/2<x\leq 1$. La soluzione è solo quest'ultima

60. **a)** $\frac{9\cdot 27^{2x}-82\cdot 27^x+9}{27\cdot 81^{2x}-82\cdot 81^x+3}>0$ **; b)** $\frac{9^{x+1}-28\cdot 3^x+3}{2^{2x+5}-3\cdot 2^{x+2}+1}>0$

a) $\begin{cases}9\cdot 27^{2x}-82\cdot 27^x+9>0\\27\cdot 81^{2x}-82\cdot 81^x+3>0\end{cases}\vee\begin{cases}9\cdot 27^{2x}-82\cdot 27^x+9<0\\27\cdot 81^{2x}-82\cdot 81^x+3<0\end{cases}$ risolviamo il primo sistema:

$\left(27^x = a; 81^x = b\right)\begin{cases} 9a^2 - 82a + 9 > 0 \\ 27b^2 - 82b + 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \left(a = \frac{41 \pm \sqrt{1681-81}}{9} =\prec \begin{matrix} 9 \\ 1/9 \end{matrix}; b = \frac{41 \pm \sqrt{1681-81}}{27} =\prec \begin{matrix} 3 \\ 1/27 \end{matrix} \right)$, il

$\begin{cases} a < 1/9 \vee a > 9 \\ b < 1/27 \vee b > 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^{3x} < 3^{-2} \vee 3^{3x} > 3^2 \\ 3^{4x} < 3^{-3} \vee 3^{4x} > 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -2/3 \vee x > 2/3 \\ x < -3/4 \vee x > 1/4 \end{cases} \Rightarrow x < -3/4 \vee x > 2/3$

secondo: $\begin{cases} 3^{-2} < 3^{3x} < 3^2 \\ 3^{-3} < 3^{4x} < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2/3 < x < 2/3 \\ -3/4 < x < 1/4 \end{cases} \Rightarrow -2/3 < x < 1/4$. La soluzione è unione delle due, ossia:

$x < -3/4 \vee -2/3 < x < 1/4 \vee x > 2/3$

b) $\begin{cases} 9 \cdot 9^x - 28 \cdot 3^x + 3 > 0 \\ 2 \cdot 2^{2x+4} - 3 \cdot 2^{x+2} + 1 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 9 \cdot 9^x - 28 \cdot 3^x + 3 < 0 \\ 2 \cdot 2^{2x+4} - 3 \cdot 2^{x+2} + 1 < 0 \end{cases}$ risolviamo il primo sistema:

$\left(3^x = a; 2^{x+2} = b\right)\begin{cases} 9a^2 - 28a + 3 > 0 \\ 2b^2 - 3b + 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \left(a = \frac{14 \pm \sqrt{196-27}}{9} =\prec \begin{matrix} 3 \\ 1/9 \end{matrix}; b = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} =\prec \begin{matrix} 1 \\ 1/2 \end{matrix} \right)$, il secondo:

$\begin{cases} a < 1/9 \vee a > 3 \\ b < 1/2 \vee b > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^x < 3^{-2} \vee 3^x > 3 \\ 2^{x+2} < 2^{-1} \vee 2^{x+2} > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -2 \vee x > 1 \\ x < -3 \vee x > -2 \end{cases} \Rightarrow x < -3 \vee x > 1$

$\begin{cases} 3^{-2} < 3^x < 3 \\ 2^{-1} < 2^{x+2} < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 < x < 1 \\ -3 < x < -2 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$. Le soluzioni sono solo quelle del primo sistema

Risolvi i seguenti sistemi di disequazioni esponenziali

61. **a)** $\begin{cases} 2^{x-1} > 1/16 \\ 3^{2x-3} > \sqrt[5]{27} \end{cases}$ **;b)** $\begin{cases} a^{x+3} > a^{x^2-1}, a > 1 \\ b^{5x-2} > b^{1-3x}, 0 < b < 1 \end{cases}$ **;c)** $\begin{cases} 5^{13+x} / \sqrt{5^{2x+3}} \geq 25^x \\ 3^{2x^2+x-1} < 1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2^{x-1} > 2^{-4} \\ 3^{2x-3} > 3^{3/5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 > -4 \\ 2x - 3 > 3/5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x > 9/5 \end{cases} \Rightarrow x > 9/5$;

b) $\begin{cases} x + 3 > x^2 - 1 \\ 5x - 2 < 1 - 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x - 4 < 0 \\ x < 3/8 \end{cases} \Rightarrow \left(x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2} \right) \begin{cases} \frac{1-\sqrt{17}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{17}}{2} \\ x < 3/8 \end{cases} \Rightarrow \frac{1-\sqrt{17}}{2} < x < 3/8$;

c) $\begin{cases} 5^{13+x-x-3/2} \geq 5^{2x} \\ 2x^2 + x - 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \left(x = \frac{-1 \pm 3}{4} =\prec \begin{matrix} 1/2 \\ -1 \end{matrix} \right) \begin{cases} 23/2 \geq 2x \\ -1 < x < 1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 23/4 \\ -1 < x < 1/2 \end{cases} \Rightarrow -1 < x < 1/2$

62. **a)** $\begin{cases} 5^{5x+3} \cdot 25^{x+1} < \frac{\sqrt{5}}{125^{x-1}} \\ \sqrt{2^{x^2-1}} \geq 8 \cdot \sqrt[4]{32^{x+1}} \end{cases}$ **;b)** $\begin{cases} 16^{2x+5} < \sqrt{2} \cdot 4^{2x^2} \\ 31^{7x+1} < 31 \cdot \sqrt[7]{31^{5x-2}} \end{cases}$ **;c)** $\begin{cases} 4^{3-4x} < 64^{5x+2} \\ 13^{x^2-3} \leq 169^{2x-7} \end{cases}$

a) $\begin{cases} 5^{5x+3+2x+2} < 5^{1/2-3x+3} \\ 2^{\frac{x^2-1}{2}} \geq 2^3 \cdot 2^{\frac{5x+5}{4}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x + 5 < 5 - 3x + 7/2 \\ \frac{x^2-1}{2} \geq 3 + \frac{5x+5}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 7/20 \\ 2x^2 - 2 - 12 - 5x - 5 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 7/20 \\ 2x^2 - 5x - 19 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$;

$\Rightarrow \left(x = \frac{5 \pm \sqrt{177}}{4} \right) \begin{cases} x < 7/20 \\ x \leq \frac{5-\sqrt{177}}{4} \vee x \leq \frac{5+\sqrt{177}}{4} \end{cases} \Rightarrow x \leq \frac{5-\sqrt{177}}{4}$

b) $\begin{cases} 2^{8x+20} < 2^{1/2+4x^2} \\ 31^{7x+1} < 31^{1+\frac{5x-2}{7}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x+20 < 1/2+4x^2 \\ 7x+1 < 1+\dfrac{5x-2}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x^2-16x+39>0 \\ 49x-5x+2<0 \end{cases} \Rightarrow \left(x = \dfrac{8\pm\sqrt{376}}{8} = \dfrac{4\pm\sqrt{94}}{4} \right)$

$\begin{cases} x > \dfrac{4-\sqrt{94}}{4} \vee x < \dfrac{4+\sqrt{94}}{4} \\ x < -1/22 \end{cases} \Rightarrow x < -1/22$;

c) $\begin{cases} 4^{3-4x} < 4^{15x+6} \\ 13^{x^2-3} \le 13^{4x-17} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3-4x < 15x+6 \\ x^2-3 \le 4x-17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -3/19 \\ x^2-4x+14 \le 0 \end{cases} \Rightarrow (\Delta = 16-56<0) \begin{cases} x > -3/19 \\ \varnothing \end{cases} \Rightarrow \varnothing$

63. **a)** $\begin{cases} 0,1^{2x} \cdot 0,01^{4-2x} \le 10^x \cdot 100 \\ 0,25^{4x+1} \cdot 0,5^{5x+1} < 0,125^{5x-2} \end{cases}$ **;b)** $\begin{cases} 4^{x+1} \cdot 8^{x-1} < 2^{4x-5} \cdot 16^{1-4x} \\ 5^{12x} \le \dfrac{25^{x^2+3} \cdot \sqrt{5}}{125^{\frac{2x-3}{4}}} \end{cases}$

a); $\begin{cases} 10^{-2x} \cdot 10^{-8+4x} \le 10^x \cdot 10^2 \\ 0,5^{8x+2} \cdot 0,5^{5x+1} < 0,5^{15x-6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x-8+4x \le x+2 \\ 8x+2+5x+1 > 15x-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le 10 \\ x < 9/2 \end{cases} \Rightarrow x < 9/2$

b) $\begin{cases} 2^{2x+2} \cdot 2^{3x-3} < 2^{4x-5} \cdot 2^{4-16x} \\ 5^{12x} \le \dfrac{5^{2x^2+6} \cdot 5^{1/2}}{5^{\frac{6x-9}{4}}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x-1 < -12x-1 \\ 12x \le 2x^2 + \dfrac{13}{2} - \dfrac{6x-9}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<0 \\ 8x^2-48x+26-6x+9 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x<0 \\ 8x^2-54x+37 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \left(x = \dfrac{27\pm\sqrt{449}}{8} \right) \Rightarrow \begin{cases} x<0 \\ x \le \dfrac{27-\sqrt{449}}{8} \vee x \ge \dfrac{27+\sqrt{449}}{8} \end{cases} \Rightarrow x<0$

64. **a)** $\begin{cases} 14^{11-x} < \dfrac{196^{2x+1}}{\sqrt{14}} \\ 17^{2x^2+x} > 17^{4x+1} \cdot \sqrt[3]{289^{x+1}} \end{cases}$ **;b)** $\begin{cases} (a^2+2)^{4+2x} < (a^2+2)^{3x-1} \\ \left(\dfrac{1}{a^2+3}\right)^{2x^2-3x+1} \le \left(\dfrac{1}{a^2+3}\right)^{x+4} \end{cases}$

a) $\begin{cases} 14^{11-x} < \dfrac{14^{4x+2}}{14^{1/2}} \\ 17^{2x^2+x} > 17^{4x+1} \cdot 17^{\frac{2x+2}{3}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11-x < 4x+2-\dfrac{1}{2} \\ 2x^2+x > 4x+1+\dfrac{2x+2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \dfrac{19}{10} \\ 6x^2+3x-12x-3-2x-2>0 \end{cases} \Rightarrow$;

$\Rightarrow \begin{cases} x > \dfrac{19}{10} \\ 6x^2-11x-5>0 \end{cases} \Rightarrow \left(x = \dfrac{11\pm\sqrt{241}}{12} \right) \begin{cases} x > \dfrac{19}{10} \\ x < \dfrac{11-\sqrt{241}}{12} \vee x > \dfrac{11+\sqrt{241}}{12} \end{cases} \Rightarrow x > \dfrac{11+\sqrt{241}}{12}$

b) Osserviamo che $a^2 + 2 > 1$ e $1/(a^2 + 3) < 1$.

$\begin{cases} 4+2x < 3x-1 \\ 2x^2-3x+1 \ge x+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>5 \\ 2x^2-4x-3 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \left(x = \dfrac{2\pm\sqrt{10}}{2} \right) \begin{cases} x>5 \\ x \le \dfrac{2-\sqrt{10}}{2} \vee x \ge \dfrac{2+\sqrt{10}}{2} \end{cases} \Rightarrow x>5$

65. **a)** $\begin{cases} 3^{x^2+5} < \dfrac{1}{27^{4x^2-x}} \\ 8^{x^2+7} \le \sqrt[5]{2^{x^2+x}} \end{cases}$ **; b)** $\begin{cases} 6^{2x} < 36^{1-x^2+x} \\ 0,13^{4x+1} > 0,13^{4+7x} \end{cases}$ **; c)** $\begin{cases} (4/5)^{1-5x} > (5/4)^{3-3x} \\ (3/4)^{2-x^2} \le (16/9)^{2-3x} \end{cases}$

a) $\begin{cases} 3^{x^2+5} < 3^{-12x^2+3x} \\ 2^{3x^2+21} \le 2^{\frac{x^2+x}{5}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+5 < -12x^2+3x \\ 3x^2+21 \le \dfrac{x^2+x}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13x^2-3x+5<0 \\ 15x^2+105-x^2-x \le 0 \end{cases} \Rightarrow$;

$\Rightarrow (\Delta = 9-260<0) \begin{cases} \varnothing \\ 14x^2-x+105 \le 0 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$

b) $\begin{cases} \cancel{2x} < 2-2x^2+\cancel{2x} \\ 4x+1<4+7x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2<1 \\ x>-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1<x<1 \\ x>-1 \end{cases} \Rightarrow -1<x<1$;

c) $\begin{cases} (5/4)^{5x-1} > (5/4)^{3-3x} \\ (3/4)^{2-x^2} \le (3/4)^{4-6x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x-1>3-3x \\ 2-x^2 \ge 4-6x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1/2 \\ x^2-6x+2 \le 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(x = 3 \pm \sqrt{7}\right) \begin{cases} x>1/2 \\ 3-\sqrt{7} \le x \le 3+\sqrt{7} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{1}{2} < x \le 3+\sqrt{7}$

66. **a);** $\begin{cases} 3\cdot\sqrt[5]{9^{x+2}} < 27^{4x+1} \\ 4^{2x-1}\cdot 0,5^{4-2x} > 8^{1-x} \\ 0,2^{x^2} < 5^{4+3x}\cdot\sqrt{125^{\frac{3x-1}{3}}} \end{cases}$ **; b)** $\begin{cases} \dfrac{6^{31+2x}}{36^{1+23x}} > \dfrac{6^{1-5x}}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{9^{2x^2-4x}}{3^{x^2+1}} \le \dfrac{27^{x^2+7}}{3} \end{cases}$

a) $\begin{cases} 3\cdot 3^{\frac{2x+4}{5}} < 3^{12x+3} \\ 2^{4x-2}\cdot 2^{-4+2x} > 2^{3-3x} \\ 5^{-x^2} < 5^{4+3x}\cdot 5^{\frac{3x-1}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+\dfrac{2x+4}{5} < 12x+3 \\ 4x-2-4+2x > 3-3x \\ -x^2 < 4+3x+\dfrac{3x-1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-3/29 \\ x>1 \\ 2x^2+9x+7>0 \end{cases} \Rightarrow$;

$\Rightarrow \left(x = \dfrac{-9\pm 5}{4} = \prec \begin{matrix} -7/2 \\ -1 \end{matrix} \right) \begin{cases} x>-3/29 \\ x>1 \\ x<-\dfrac{7}{2} \vee x>-1 \end{cases} \Rightarrow x>1$

b) $\begin{cases} 31-2x-2-46x > 1-5x-\dfrac{1}{2} \\ 4x^2-8x-x^2-1 \le 3x^2+21-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 57-78x>0 \\ -8x-21 \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<19/26 \\ x \ge -21/8 \end{cases} \Rightarrow -\dfrac{21}{8} \le x < \dfrac{19}{86}$

67. **a);** $\begin{cases} 0,23^{2x-6}\cdot\sqrt[x]{0,23^{3x}} > 1 \\ 0,54^{3x}\cdot 0,54^{4x-1} < 1 \\ 4^x+2^{x+1}+1>0 \end{cases}$ **; b)** $\begin{cases} 9^x+4\cdot 3^x+4<0 \\ \dfrac{5^{x^2-4x}}{7^{x^2}} \le \dfrac{12^{x^2+3}}{31} \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x-6+3<0, x\ne 0 \\ 3x+4x-1>0 \\ 4^x+2\cdot 2^x+1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<3/2 \\ x>1/7 \\ \left(2^x+1\right)^2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<3/2 \\ x>1/7 \\ \forall x\in\mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{1}{7}<x<\dfrac{3}{2}$;

b) $\begin{cases} \left(3^x+2\right)^2<0 \\ \dfrac{5^{x^2-4x}}{7^{x^2}} \le \dfrac{12^{x^2+3}}{31} \end{cases} \Rightarrow \varnothing$

68. **a)** $\begin{cases} 4^{2x}-10\cdot 4^{x}+16>0 \\ 27^{2x}-30\cdot 27^{x}+81<0 \end{cases}$ **; b)** $\begin{cases} \dfrac{5^{1+7x}}{25^{2-3x}}<\dfrac{0,04^{x}}{5} \\ 49^{2x}-8\cdot 49^{x}+7>0 \end{cases}$

a) $\begin{cases} y^2-10y+16>0,\left(4^x=y\right) \\ z^2-30z+81<0,\left(27^x=z\right) \end{cases} \Rightarrow \left(y=5\pm 3=\prec \begin{matrix} 2 \\ 8 \end{matrix} ; z=15\pm 12=\prec \begin{matrix} 3 \\ 27 \end{matrix} \right) \begin{cases} 4^x<2 \vee 4^x>8 \\ 3<27^x<27 \end{cases} \Rightarrow$;

$\Rightarrow \begin{cases} 2^{2x}<2 \vee 2^{2x}>2^3 \\ 3<3^{3x}<3^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<1/2 \vee x>3/2 \\ 1/3<x<1 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{1}{3}<x<\dfrac{1}{2}$

b) $\begin{cases} 5^{1+7x-4+6x}<5^{-2x-1} \\ y^2-8y+7>0,\left(y=49^x\right) \end{cases} \Rightarrow \left(y=4\pm 3=\prec \begin{matrix} 1 \\ 7 \end{matrix} \right) \begin{cases} 13x-3<-2x-1 \\ 49^x<1 \vee 49^x>7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<2/15 \\ x<0 \vee x>1/2 \end{cases} \Rightarrow x<0;$

69. **a)** $\begin{cases} \dfrac{\sqrt[x]{2^{3x+8}}}{2}<8^{\frac{2x-3}{5}} \\ 11^{\frac{3x+4}{x-1}}<121^{\frac{3x+5}{2x-3}} \end{cases}$ **; b)** $\begin{cases} 12^{3x}\cdot\sqrt{12}>144/12^{x+1} \\ 0,33^{4x+1}<1/0,33^{\frac{3x+5}{6x-2}} \end{cases}$ **; c)** $\begin{cases} 4^{2x+1}\cdot 8^{1+x}>\sqrt{32^{\frac{x-1}{3x+2}}} \\ 8^{2x-1}-6\cdot 8^{x-1}+1<0 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2^{\frac{3x+8}{x}-1}<2^{\frac{6x-9}{5}} \\ 11^{\frac{3x+4}{x-1}}<11^{\frac{6x+10}{2x-3}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{3x+8}{x}-1<\dfrac{6x-9}{5} \\ \dfrac{3x+4}{x-1}<\dfrac{6x+10}{2x-3} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{15x+40-5x}{x}<\dfrac{6x^2-9x}{x} \\ \dfrac{\cancel{6x^2}+8x-9x-12}{(x-1)\cdot(2x-3)}<\dfrac{\cancel{6x^2}-6x+10x-10}{(x-1)\cdot(2x-3)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{6x^2-19x-40}{x}>0 \\ \dfrac{5x+2}{(x-1)\cdot(2x-3)}>0 \end{cases}$; Risolviamo le due disequazioni distintamente:

$\dfrac{6x^2-19x-40}{x}>0 \Rightarrow \begin{cases} 6x^2-19x-40>0 \\ x>0 \end{cases} \vee \begin{cases} 6x^2-19x-40<0 \\ x<0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(x=\dfrac{19\pm\sqrt{1321}}{12} \right) \begin{cases} x<\dfrac{19-\sqrt{1321}}{12} \vee x>\dfrac{19+\sqrt{1321}}{12} \\ x>0 \end{cases} \vee \begin{cases} \dfrac{19-\sqrt{1321}}{12}<x<\dfrac{19+\sqrt{1321}}{12} \\ x<0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x>\dfrac{19+\sqrt{1321}}{12} \vee \dfrac{19-\sqrt{1321}}{12}<x<0$

$\dfrac{5x+2}{(x-1)\cdot(2x-3)}>0 \Rightarrow \begin{cases} 5x+2>0 \\ (x-1)\cdot(2x-3)>0 \end{cases} \vee \begin{cases} 5x+2<0 \\ (x-1)\cdot(2x-3)<0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x>-2/5 \\ x<1 \vee x>3/2 \end{cases} \vee \begin{cases} x<-2/5 \\ 1<x<3/2 \end{cases} \Rightarrow \left(-\dfrac{2}{5}<x<1 \vee x>\dfrac{3}{2} \right) \vee \varnothing \Rightarrow \left(-\dfrac{2}{5}<x<1 \vee x>\dfrac{3}{2} \right)$. Torniamo al sistema: $\begin{cases} x>\dfrac{19+\sqrt{1321}}{12} \vee \dfrac{19-\sqrt{1321}}{12}<x<0 \\ -\dfrac{2}{5}<x<1 \vee x>\dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow -\dfrac{2}{5}<x<0 \vee x>\dfrac{19+\sqrt{1321}}{12}$

b) $\begin{cases} 12^{3x+1/2}>12^{2-x-1} \\ 0,33^{4x+1}<0,33^{\frac{3x+5}{-6x+2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+1/2>1-x \\ 4x+1>\dfrac{3x+5}{-6x+2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1/8 \\ \dfrac{-24x^2+8x-6x+2-3x-5}{2-6x}>0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x>1/8 \\ \dfrac{24x^2+x+3}{1-3x}<0 \end{cases} \Rightarrow (\Delta=1-288<0) \begin{cases} x>1/8 \\ 1-3x<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1/8 \\ x<1/3 \end{cases} \Rightarrow x<\dfrac{1}{3}$

c) $\begin{cases} 2^{4x+2+3+3x} > 2^{\frac{5x-5}{6x+4}} \\ 8\cdot 8^{2x-2} - 6\cdot 8^{x-1} + 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x+5 > \dfrac{5x-5}{6x+4} \\ 8\cdot y^2 - 6y + 1 < 0, \left(y = 8^{x-1}\right) \end{cases} \Rightarrow \left(y = \dfrac{3\pm 1}{8} = \prec \begin{matrix} 1/2 \\ 1/4 \end{matrix} \right) \begin{cases} \dfrac{42x^2+28x+30x+20-5x+5}{6x+4} > 0 \\ 1/2 < 8^{x-1} < 1/4 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{42x^2+53x+25}{6x+4} > 0 \\ 2^{-1} < 2^{3x-3} < 2^{-2} \end{cases} \Rightarrow \left(\Delta = 53^2 - 4200 < 0\right) \begin{cases} 6x+4 > 0 \\ -1 < 3x-3 < -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -2/3 \\ 2/3 < x < 1/3 \end{cases} \Rightarrow 2/3 < x < 1/3$

70. **a)** $\begin{cases} 3^{2x-1} < 81 \\ 0,4^{3x+1} > (2/5)^{5-2x} \\ \sqrt[x-1]{7^{x+1}} < 49^x \end{cases}$ **; b)** $\begin{cases} 5^{1+4x} > 0,04^{1+3x} \\ 0,008^{x^2-3} > 25^{4+x^2} \\ \sqrt[x]{0,3^{x+5}} \ge 0,09^{2x+1} \end{cases}$

a) $\begin{cases} 3^{2x-1} < 3^4 \\ 0,4^{3x+1} > 0,4^{5-2x} \\ 7^{\frac{x+1}{x-1}} < 7^{2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-1 < 4 \\ 3x+1 < 5-2x \\ \dfrac{x+1}{x-1} < 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 5/2 \\ x < 4/5 \\ \dfrac{x+1-2x^2+2x}{x-1} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 5/2 \\ x < 4/5 \\ \dfrac{2x^2-3x-1}{x-1} > 0 \end{cases}$. Risolviamo l'ultima disequazione: $\begin{cases} 2x^2-3x-1 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x^2-3x-1 < 0 \\ x-1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \left(x = \dfrac{3\pm\sqrt{17}}{4} \right) \begin{cases} x < \dfrac{3-\sqrt{17}}{4} \vee x > \dfrac{3+\sqrt{17}}{4} \\ x > 1 \end{cases} \vee$

$\vee \begin{cases} \dfrac{3-\sqrt{17}}{4} < x < \dfrac{3+\sqrt{17}}{4} \\ x < 1 \end{cases} \Rightarrow x > \dfrac{3+\sqrt{17}}{4} \vee \dfrac{3-\sqrt{17}}{4} < x < 1$.

Quindi: $\begin{cases} x < 5/2 \\ x < 4/5 \\ x > \dfrac{3+\sqrt{17}}{4} \vee \dfrac{3-\sqrt{17}}{4} < x < 1 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{3-\sqrt{17}}{4} < x < \dfrac{4}{5}$.

b) $\begin{cases} 5^{1+4x} > (1/25)^{1+3x} \\ (1/125)^{x^2-3} > 5^{8+2x^2} \\ 0,3^{\frac{x+5}{x}} \ge 0,3^{4x+2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+4x > -2-6x \\ -3x^2+9 > 8+2x^2 \\ \dfrac{x+5}{x} \le 4x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -3/10 \\ -1/\sqrt{5} < x < 1/\sqrt{5} \\ \dfrac{4x^2+x-5}{x} \ge 0 \end{cases}$. Risolviamo a pare l'ultima disequazione:

$\begin{cases} 4x^2+x-5 \ge 0 \\ x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 4x^2+x-5 \le 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \left(x = \dfrac{-1\pm 9}{8} = \le \begin{matrix} 1 \\ -5/4 \end{matrix} \right) \begin{cases} x \le -5/4 \vee x \ge 1 \\ x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -5/4 \le x \le 1 \\ x < 0 \end{cases} \Rightarrow$. Quindi il sistema da risolvere adesso è: $\begin{cases} x > -3/10 \\ -1/\sqrt{5} < x < 1/\sqrt{5} \\ x \ge 1 \vee -5/4 \le x < 0 \end{cases} \Rightarrow -\dfrac{3}{10} < x < 0$.

$\Rightarrow x \ge 1 \vee -5/4 \le x < 0$

La sfida

1. Determinare la somma delle cifre del numero $(10^n + 1)^3$, $n \in \mathbb{N}$

Abbiamo $(10^n + 1)^3 = 10^{3n} + 3 \cdot 10^{2n} + 3 \cdot 10^n + 1$. Questo numero è formato quasi tutto da zeri, tranne 1, 3, 3, 1, pertanto la somma cercata è 8

2. Determinare la somma delle cifre del numero $(10^n + 1)^4$, $n \in \mathbb{N}$

Abbiamo $(10^n + 1)^4 = 10^{4n} + 4 \cdot 10^{3n} + 6 \cdot 10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 1$. Questo numero è formato quasi tutto da zeri, tranne 1, 4, 6, 4, 1, pertanto la somma cercata è 16

3. **Determinare la somma delle cifre del numero $(10^n + 1)^m$, $n, m \in \mathbb{N}$**

   Ragionando come in precedenza le uniche cifre non nulle sono quelle della riga di posto m del triangolo di tartagia, e sappiao che questa somma fa 2^m.

4. **Determinare la somma delle cifre del numero $(10^n + 9)^2$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$**

   Abbiamo $(10^n + 9)^2 = 10^{2n} + 2 \cdot 9 \cdot 10^n + 81 = 10^{2n} + 18 \cdot 10^n + 81$. Questo numero è formato quasi tutto da zeri, tranne 1, 1, 8, 8, 1, pertanto la somma cercata è 19.

5. **Poiché $80^2 = 6400$, cioè il quadrato di un numero di due cifre è un numero di 4 cifre, possiamo dire che è sempre vero che il quadrato di un numero di n cifre è un numero con $2n$ cifre? Se la risposta è negativa, quante cifre può avere?**

   No, il quadrato di un numero di n cifre ha da $2n - 1$ cifre a $2n$ cifre, per esempio $99^2 = 9801$ ha 4 cifre, mentre $11^2 = 121$ ne ha 3.

6. **Possiamo dire che $10^{30} + 10^{29} > 10^{31}$?**

   No, perché $10^{30} + 10^{29} = 10^{29} \cdot (10 + 1) = 10^{29} \cdot 11$, mentre $10^{31} = 10^{29} \cdot 10^2$

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

1. **(AHSME 1951) Se $a^x = c^q = b$ e $c^y = a^z = d$, quale delle seguenti uguaglianze è vera?**
   A) $xy = qz$ B) $x/y = q/z$ C) $x + y = q + z$ D) $x - y = q - z$ E) $x^y = q^z$.
   Verifichiamo che A è corretta: $c^y = a^z \Rightarrow c = a^{z/y} \Rightarrow c^q = a^{zq/y} = a^x \Rightarrow zq/y = x \Rightarrow zq = xy$.

2. **(AHSME 1952) Risolvere $\begin{cases} z^x = y^{2x} \\ 2^z = 2 \cdot 4^x \\ x + y + z = 16 \end{cases}$ nell'insieme dei numeri naturali.**

$$\begin{cases} z^x = y^{2x} \\ 2^z = 2^{2x+1} \\ x + y + z = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = y^2 \\ z = 2x + 1 \\ x + y + z = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = y^2 \\ x = \dfrac{z-1}{2} \\ \dfrac{z-1}{2} + y + z = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = y^2 \\ x = \dfrac{z-1}{2} \\ 3z + 2y = 33 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = y^2 \\ x = \dfrac{z-1}{2} \\ 3y^2 + 2y - 33 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = y^2 \\ x = \dfrac{z-1}{2} \\ y = \dfrac{-1 \pm 10}{3} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 9 \\ x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

   Nell'equazione di secondo grado abbiamo considerato solo la soluzione intera.

3. **(AHSME 1957) Risolvere $9^{x+2} = 240 + 9^x$.**
   $81 \cdot 9^x - 240 - 9^x = 0 \Rightarrow 80 \cdot 9^x = 240 \Rightarrow 9^x = 3 \Rightarrow 3^{2x} = 3 \Rightarrow x = 1/2$

4. **(AHSME 1958) Se $4^x - 4^{x-1} = 24$, quanto vale $(2x)^x$?**
   $4^x - 4^x/4 = 24 \Rightarrow 3/4 \cdot 4^x = 24 \Rightarrow 4^x = 32 \Rightarrow 2^{2x} = 2^5 \Rightarrow x = 5/2 \Rightarrow (2x)^x = 5^{5/2}$

5. **(AHSME 1960) Quali soluzioni hanno in comune le equazioni $3^{x+y} = 81$ e $81^{x-y} = 3$?**
   $3^{x+y} = 81 \Rightarrow x + y = 4$; $81^{x-y} = 3 \Rightarrow x - y = 1/4$. Pertanto $2x = 17/4 \Rightarrow x = 17/8$ e $2y = 15/4 \Rightarrow y = 15/8$

6. **(AHSME 1961) Risolvere l'equazione $2^{2x} - 3^{2y} = 55$, con $x, y \in \mathbb{Z}$.**
   $(2^x - 3^y) \cdot (2^x + 3^y) = 55$. Dato che cerchiamo soluzioni intere può essere:

$\begin{cases} 2^x - 3^y = 1 \\ 2^x + 3^y = 55 \end{cases} \vee \begin{cases} 2^x - 3^y = 5 \\ 2^x + 3^y = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{x+1} = 56 \\ 2 \cdot 3^y = 54 \end{cases} \vee \begin{cases} 2^{x+1} = 16 \\ 2 \cdot 3^y = 6 \end{cases}$, solo il secondo sistema ha soluzioni intere: $\begin{cases} 2^{x+1} = 2^4 \\ 3^y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$

7. (AHSME 1962) Risolvere $(x - 8) \cdot (x - 10) = 2^y$, con $x, y \in \mathbb{Z}$.

Entrambi i fattori devono essere potenze di 2:
$x - 8 = 2^h$, $x - 10 = 2^{y-h}$. Sottraiamo termine a termine: $2 = 2^h - 2^{y-h} \Rightarrow 1 = 2^{h-1} - 2^{y-h-1}$. In un solo caso la differenza di due potenze di 2 fa 1: 2 – 1. Pertanto deve essere: $2^{h-1} = 2$ e $2^{y-h-1} = 1$, cioè $h - 1 = 1$ e $y - h - 1 = 0$; ossia $h = 2$, $y = 3$ e quindi $x = 12$. Così abbiamo: $4 \cdot 2 = 2^3$. Ma può essere anche: $(-4) \cdot (-2) = 2^3$, otteniamo quindi anche le altre soluzioni: $x = 6$, $y = 3$.

8. (AHSME 1964) Sapendo che si ha: $2^x = 8^{y+1}$ e $9^y = 3^{x-9}$, determinare il valore di $x + y$.

$2^x = 2^{3y+3}$ e $3^{2y} = 3^{x-9} \Rightarrow x = 3y + 3$ e $2y = x - 9 = 3y + 3 - 9 \Rightarrow y = 6$; $x = 21$; $x + y = 27$

9. (HSMC 2005) Risolvere $3^x - 3^{-x} = 80/9$

$3^{2x} - 1 - 80/9 \cdot 3^x = 0 \Rightarrow 9 \cdot 3^{2x} - 80 \cdot 3^x - 9 = 0 \Rightarrow 3^x = \dfrac{40 \pm \sqrt{1600+81}}{9} = \dfrac{40 \pm 41}{9} = \prec \begin{matrix} 9 \\ -1/9 \end{matrix} \Rightarrow 3^x = 9$

$\Rightarrow x = 2$.

10. (HSMC 2008) Risolvere $27^x - 9^{x-1} - 3^{x+1} + 1/3 = 0$.

$27^x - 9^x/9 - 3 \cdot 3^x + 1/3 = 0 \Rightarrow 9 \cdot 27^x - 9^x - 27 \cdot 3^x + 3 = 0 \Rightarrow 9 \cdot a^3 - a^2 - 27a + 3 = 0$ $(a = 3^x) \Rightarrow 9a \cdot (a^2 - 3) - (a^2 - 3) = 0 \Rightarrow (9a - 1) \cdot (a^2 - 3) = 0 \Rightarrow a = 1/9 \vee a^2 = 3 \Rightarrow 3^x = 3^{-2} \vee 3^{2x} = 3 \Rightarrow x = -2 \vee x = 1/2$

11. (AL 2008) Se $2^{2^x} + 4^{2^x} = 56$, quanto vale $2^{2^{2^x}}$?

$\left(2^{2^x} = y\right) y + y^2 = 56 \Rightarrow y \cdot (y+1) = 7 \cdot 8 \Rightarrow y = 7 \Rightarrow 2^{2^x} = 7$, si ha: $2^{2^{2^x}} = 2^7 = 128$

12. (AL 2009) Quante soluzioni reali ha l'equazione $e^{5x} + e^{4x} - 3e^{3x} - 17e^{2x} - 30e^x = 0$?

$e^x \cdot (e^{4x} + e^{3x} - 3e^{2x} - 17e^x - 30) = 0$. Usando il teorema di Ruffini, sappiamo che le uniche soluzioni intere si trovano fra i divisori di 30. Dato che gli esponenziali sono sempre positivi dobbiamo considerare solo i divisori positivi. Verificando troviamo che $e^x = 3$ va bene, quindi abbassiamo di grado:

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & 1 & -3 & -17 & -30 \\ 3 & & 3 & 12 & 27 & \underline{30} \\ \hline & 1 & 4 & 9 & 10 & 0 \end{array}$$

, abbiamo quindi; $e^x \cdot (e^x - 3) \cdot (e^{3x} + 4e^{2x} + 9e^x + 10) = 0$. A questo punto, dato che il fattore ottenuto è ovviamente sempre positivo, concludiamo che l'unica soluzione reale è $e^x = 3$.

Questions in English

13. (NC 2002) Find the non–zero solution for x: $8^x = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{x^2}$.

$2^{3x} = 2^{-2x^2} \Rightarrow 3x = -2x^2 \Rightarrow x = 0 \vee x = -3/2$

14. (HSMC 2006) Given that x is a real number which satisfies the equation $2^{2^x} + 4^{2^x} = 42$. What is the value of $\sqrt{2^{2^{2^x}}}$?

$\left(2^{2^x} = y\right) y + y^2 = 42 \Rightarrow y \cdot (y+1) = 6 \cdot 7 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow 2^{2^x} = 6$, si ha: $\sqrt{2^{2^{2^x}}} = \sqrt{2^6} = 8$

15. (HSMC 2008) If $2^n - 2^{n-2} = 192$, what is the value of n?

$2^{n-2} \cdot (2^2 - 1) = 192 \Rightarrow 2^{n-2} \cdot 3 = 64 \cdot 3 \Rightarrow 2^{n-2} = 2^6 \Rightarrow n = 8.$

16. (AL2007) The equation $3^{x^2} = 81^{2x-3}$ has *two* solutions. What is the sum of the solutions?

$3^{x^2} = 3^{8x-12} \Rightarrow x^2 - 8x + 12 = 0$, la somma delle soluzioni è l'opposto del coefficiente del termine di I grado, ossia 8.

17. (AL2007) Solve for n: $5^n + 5^n + 5^n + 5^n + 5^n = \left(\sqrt{5}\right)^{10}$.

$5 \cdot 5^n = 5^{10/2} \Rightarrow 5^{n+1} = 5^5 \Rightarrow n + 1 = 5 \Rightarrow n = 4$

18. **(AL2008) How many real number solutions are there for the equation $\left(x^2 + 4x + 5\right)^{x^2+1} = 1$?**

Una potenza vale 1 in tre casi: 1) base uguale ad 1, $x^2 + 4x + 5 = 1 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x + 2)^2 = 0 \Rightarrow x = -2$; 2) base uguale a –1 ed esponente pari: $x^2 + 4x + 5 = -1 \Rightarrow x^2 + 4x + 6 = 0$, non ha soluzioni perché ha discriminante nullo; 3) base diversa da 0 ed esponente uguale a zero: in questo caso l'esponente è sempre maggiore od uguale ad 1. Quindi solo 1 soluzione.

19. (AL 2009) If $2^x \cdot 4^x \cdot 8^x = \sqrt{2}$, then what is x?

$2^x \cdot 2^{2x} \cdot 2^{3x} = 2^{1/2} \Rightarrow 2^{6x} = 2^{1/2} \Rightarrow 6x = ½ \Rightarrow x = 1/12.$

20. (HSMC 2011) Find x if $2^{16^x} = 16^{2^x}$.

$2^{16^x} = 2^{4 \cdot 2^x} \Rightarrow 2^{16^x} = 2^{2^{x+2}} \Rightarrow 16^x = 2^{x+2} \Rightarrow 2^{4x} = 2^{x+2} \Rightarrow 4x = x + 2 \Rightarrow x = 2/3$

Test di Verifica

1. Quali fra i seguenti rappresentano numeri reali?

A 0^π **B** 0^0 **C** $\left(1-\sqrt{2}\right)^{\sqrt{3}}$ **D** $(1 - \pi)^4$ **E** $\left(\dfrac{1+\sqrt{2}}{\pi-3}\right)^{\sqrt{17}}$

Non hanno senso 0^0 e $\left(1-\sqrt{2}\right)^{\sqrt{3}}$, perché la base è negativa, le risposte corrette sono: A – D – E

2. Quali fra i seguenti sono soluzioni dell'equazione $\dfrac{\sqrt[2x-3]{7^x} \cdot 49^{x-1}}{343^{x-2}} = 7^{2x}$

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** 4

Basta verificare che solo B e C funzionano:

$$\frac{\sqrt[-3]{7^0} \cdot 49^{-1}}{343^{-2}} = 7^0 \Rightarrow 7^4 \neq 1; \frac{\sqrt[-1]{7} \cdot 49^0}{343^{-1}} = 7^2 \Rightarrow 7^{-1+3} = 7^2; \frac{\sqrt[1]{7^2} \cdot 49^1}{343^0} = 7^4 \Rightarrow 7^{2+2} = 7^4;$$

$$\frac{\sqrt[3]{7^3} \cdot 49^2}{343} = 7^6 \Rightarrow 7^{1+4-3} \neq 7^6; \frac{\sqrt[5]{7^4} \cdot 49^3}{343^2} = 7^8 \Rightarrow 7^{4/5+6-6} \neq 7^8$$

3. Quali fra le seguenti disequazioni ha come sue soluzioni $0 < x < 1$?

A $7^{3x} > \dfrac{49^{x-1}}{343}$ **B** $5^{2x-1} \leq \dfrac{25^{x-1}}{625}$ **C** $3^{2-x} > \dfrac{9^{2x+1}}{27^{2x-3}}$ **D** $2^{3x+2} \geq \dfrac{4^{3x-1}}{8^{x+4}}$ **E** $16^x \geq \dfrac{2^{3x+2}}{32^{1-x}}$

$7^{3x} > 7^{2x-2-3} \Rightarrow x > -5$: A va bene; $5^{2x-1} \leq 5^{2x-2-4} \Rightarrow -1 \leq -6 \Rightarrow \varnothing$; $3^{2-x} > 3^{4x+2-6x+9} \Rightarrow x > 9$;

$2^{3x+2} \geq 2^{6x-2-3x-12} \Rightarrow 2 \geq -14 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$: D va bene; $2^{4x} \geq 2^{3x+2-5+5x} \Rightarrow x \leq \dfrac{3}{8}$

4. Quali fra le seguenti disequazioni sono sempre verificate?

A $9^x + 4 \cdot 3^{x+1} + 27 > 0$ **B** $7^{2x+1} > 49^{x-1}$ **C** $16^x + 2^{3x} + 1 > 0$ **D** $2^x \leq 4^x$ **E** $5^{2x} + 4 \cdot 5^{x+1} - 125 > 0$

A: è somma di quantità positive, quindi è sempre verificata; B equivale a $2x + 1 > 2x - 2$ che è sempre vera; C è come A; D equivale a $x \le 2x \Rightarrow x \ge 0$; E ha un'associata che ha delta positivo, quindi non è sempre verificata.

5. **Quali fra le seguenti disequazioni sono contraddizioni?**

$\boxed{A}$ $\left(\frac{3}{2}\right)^x < \left(-\frac{3}{2}\right)^x$ $\boxed{B}$ $2^x - 3^x + 5^x < 0$ B – E $\boxed{C}$ $4^x + 2^x - 1 < 0$ $\boxed{D}$ $11^x \le \frac{1}{121}$ $\boxed{E}$ $81^x + 2 \cdot 3^{2x} + 1 \le 0$

A non ha senso perché il secondo membro ha la base negativa, quindi non è una disequazione; B non è mai verificata perché $5^x > 3^x$, per ogni x; C ha associata una disequazione di II grado a discriminante positivo, quindi ha soluzioni; D equivale a $x \le -2$; E non ha soluzioni perché il membro di sinistra è somma di addendi tutti positivi.

6. **Il doppio di 8^{2n+1} è?**

$\boxed{A}$ 16^{2n+1} $\boxed{B}$ 8^{4n+2} $\boxed{C}$ 2^{6n+4} $\boxed{D}$ 4^{6n+3} $\boxed{E}$ **Nessuno dei precedenti**

$2 \cdot 8^{2n+1} = 2^{1+6n+3} = 2^{6n+4}$, cioè la C

7. **Qual è la cifra delle unità di 2023^{2023}?**

$\boxed{A}$ **1** $\boxed{B}$ **3** $\boxed{C}$ **5** $\boxed{D}$ **7** $\boxed{E}$ **Nessuno dei precedenti**

Vediamo che $3^1 = 3$, $3^2 = 9$, $3^3 = 27$, $3^4 = 81$, quindi le cifre delle unit+ si ripetono nel periodo (3, 9, 7, 1), dato che $2023 = 4 \cdot 504 + 3$, ha la stessa cifra delle unità di 3^3, quindi risposta D

8. **Quale fra i seguenti insiemi appartiene all'insieme delle soluzioni di $3^{2x+6} - 8 \cdot 3^{x+2} - 1 < 0$?**

$\boxed{A}$ $-3 < x < -2$ $\boxed{B}$ $x \le -2$ $\boxed{C}$ $x > -5$ $\boxed{D}$ $x < 0$ $\boxed{E}$ **Nessuno dei precedenti**

Abbiamo: $9 \cdot 3^{2(x+2)} - 8 \cdot 3^{x+2} - 1 < 0 \Rightarrow 9y^2 - 8y - 1 < 0$, con $y = 3^{x+2}$. Si ha: $-1/9 < y < 1 \Rightarrow -2 < x + 2 < 0 \Rightarrow -4 < x < -2$.ì, l'unica che va bene è la A.

9. **Se $a^{x+2} = 3$, allora a^{2x-1} quanto vale?**

$\boxed{A}$ **9** $\boxed{B}$ **$9/a$** $\boxed{C}$ **$9a^{-5}$** $\boxed{D}$ **Non può determinarsi** $\boxed{E}$ **Nessuno dei precedenti**

$a^{2x-1} = a^{2(x+2)-5} = a^{2(x+2)} \cdot a^{-5} = 9a^{-5}$, risposta C

10. **Quale fra le seguenti disequazioni è priva di soluzioni?**

$\boxed{A}$ $5^{2x-1} > \frac{25^{x-1}}{625}$ $\boxed{B}$ $3^{2x} < 3^x$ $\boxed{C}$ $\left(\frac{2}{3}\right)^x > \left(\frac{4}{9}\right)^{x+1}$ $\boxed{D}$ $\left(\frac{3}{4}\right)^x \le \left(\frac{4}{3}\right)^x$ $\boxed{E}$ **Nessuna delle precedenti**

$5^{2x-1} > 5^{2x-2-4} \Rightarrow -1 > -6 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$;$2x < x \Rightarrow x < 0$; $x < -2x - 2 \Rightarrow x < -2/3$; $-x \le 2x \Rightarrow x \ge 0$. QUindi la risposta corretta è la E

11. **Risolvi $5^{2x+3} - 3126 \cdot 5^x + 25 = 0$**

$125 \cdot 5^{2x} - 3126 \cdot 5^x + 25 = 0 \Rightarrow 125\,y^2 - 3126y + 25 = 0 \Rightarrow y = 1/125 \vee y = 25 \Rightarrow x = -3 \vee x = 2$

12. **Se $2^{2023} - 2^{2022} + 2^{2021} - 2^{2020} = k \cdot 2^{2019}$, quanto vale k?**

$2^{2019} \cdot (2^4 - 2^3 + 2^2 - 2) = k \cdot 2^{2019} \Rightarrow k = 2^4 - 2^3 + 2^2 - 2 = 10$

13. **Risolvi** $\begin{cases} 2^x + 5 \cdot 3^y = 151 \\ 3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^y = -6 \end{cases}$

$$\begin{cases} a + 5b = 151 \\ 3a - 2b = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 151 - 5b \\ 453 - 15b - 2b = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 16 \\ b = 27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x = 16 \\ 3^y = 27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

14. **Un'equazione esponenziale ha come incognita** l'esponente **La disequazione** $2^{2x-1} < 2^{4x+3}$ **ha le stesse soluzioni della disequazione** $2x - 1 < 4x + 3$. **L'equivalenza** $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} > \left(\frac{1}{2}\right)^{4x+1} \Leftrightarrow x - 1 > 4x + 1$ non è corretta

15. **Per calcolare un valore approssimato di 2^π, consideriamo le successive potenze di 2^3 e 2^4, quindi consideriamo $2^{3,1}$ e $2^{3,2}$ continuiamo considerando le potenze di 2 con esponente dato dalle approssimazioni del numero π. Finché non troviamo valori identici fino alla cifra che a noi interessa**

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. **(Medicina 2000) Se A è un numero negativo allora $(-A)^{0,5}$ è sicuramente un numero**

A) uguale a 1 B) reale C) Sempre uguale a 0,5 D) Sempre un numero intero E) sempre 0
Risposta B. Le altre opzioni si mostra facilmente che sono false.

2. **(Ingegneria – Politecnico di Torino 1999). Sia n un numero intero positivo. Allora $3^{n+1} - 3^n$ è uguale a A) 3 B) 3^n C) $3^{\frac{n+1}{n}}$ D) $(2 \cdot 3)^n$ E) $2 \cdot 3^n$**
Risposta E. $3^{n+1} - 3^n = 3^n \cdot (3 - 1) = 2 \cdot 3^n$

3. **(Ingegneria 2002). La metà di $\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$ è uguale a A) $\left(\frac{1}{4}\right)^{25}$ B) $\left(\frac{1}{2}\right)^{51}$ C) $\left(\frac{1}{4}\right)^{50}$ D) $\left(\frac{1}{2}\right)^{25}$ E) $\left(\frac{1}{2}\right)^{49}$**
Risposta B. $\left(\frac{1}{2}\right)^{50} : 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{50}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{50+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{51}$

4. **(Ingegneria 2009). Dato un numero reale x, la seguente relazione $\frac{2^x \cdot 2}{\sqrt{4^{x+1}}}$ vale**
A) $1/2^x$ B) 0 C) 1/2 D) 2 E) 1
Risposta E. $\frac{2^{x+1}}{2^{x+1}} = 1$