5. Esponenziali e logaritmi

5.2 Logaritmi

***Calcola i seguenti logaritmi* (*Gli eventuali parametri sono scelti in modo che le espressioni abbiano significato*)**

1. **a)** $log_4(1/64)$; **b)** $log_{\sqrt{3}}(27)$; **c)** $log_{3/4}(1)$; **d)** $log_2\left(\sqrt{2}\right)$

   a) $log_4\left(4^{-3}\right)=-3$; b) $log_{\sqrt{3}}\left[\left(\sqrt{3}\right)^6\right]=6$; c) $log_{3/4}\left[(3/4)^0\right]=0$; d) $log_2\left(2^{1/2}\right)=1/2$

2. **a)** $log_{\sqrt{2}}(2)$; **b)** $log_5\left(\sqrt[7]{25}\right)$; **c)** $log_{\sqrt[4]{5}}(1/5)$; **d)** $log_{1/4}(128)$

   a) $log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}^2\right)=2$; b) $log_5\left(5^{2/7}\right)=2/7$; c) $log_{\sqrt[4]{5}}\left(5^{-1}\right)=log_{\sqrt[4]{5}}\left(\sqrt[4]{5}^{-4}\right)=-4$;

   d) $2^{-2x}=2^7 \Rightarrow -2x=7 \Rightarrow x=-7/2$

3. **a)** $log_{1/\sqrt{7}}(49)$; **b)** $log_{1/\sqrt{32}}(32)$; **c)** $\boldsymbol{log_a(a^2)}$; **d)** $log_{a^3}\left(a^2\right)$

   a) $log_{(\sqrt{7})^{-1}}\left[\left(\sqrt{7}^{-1}\right)^{-4}\right]=-4$; b) $log_{(\sqrt{32})^{-1}}\left[\left(\sqrt{32}^{-1}\right)^{-2}\right]=-2$; c) $log_a(a^2)=2$; d) $log_{a^3}\left(a^2\right)=2/3$

4. **a)** $log_{1/a}\left(\sqrt{a}\right)$; **b)** $log_{\sqrt{a^3}}\left(1/a^2\right)$; **c)** $log_{\sqrt{a}}\left(\sqrt[3]{a}\right)$; **d)** $log_8\left(\sqrt[3]{1/2}\right)$

   a) $log_{1/a}\left(1/a^{-1/2}\right)=-1/2$; b) $a^{3x/2}=a^{-2} \Rightarrow 3x/2=-2 \Rightarrow x=-4/3$;

   c) $a^{x/2}=a^{1/3} \Rightarrow x/2=1/3 \Rightarrow x=2/3$; d) $2^{3x}=2^{-1/3} \Rightarrow 3x=-1/3 \Rightarrow x=-1/9$

5. **a)** $log_{\sqrt[3]{7}}(49)$; **b)** $log_{11/\sqrt{11}}(121)$; **c)** $log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt[5]{8}\right)$; **d)** $log_\pi\left(\sqrt[3]{1/\pi}\right)$

   a) $7^{x/3}=7^2 \Rightarrow x/3=2 \Rightarrow x=6$; b) $11^{(1-½)x}=11^2 \Rightarrow x/2=2 \Rightarrow x=4$; c) $2^{½x}=2^{3/5} \Rightarrow x/2=3/5 \Rightarrow x=6/5$; d) $log_\pi\left(\pi^{-1/3}\right)=-1/3$

6. **a)** $ln\left(e^\pi\right)$; **b)** $ln\left(e\cdot\sqrt[4]{e^3}\right)$; **c)** $log_{27}\left(\sqrt{3}\right)$; **d)** $log_{2^{3,1}}(4)$

   a) $ln\left(e^\pi\right)=\pi$; b) $ln\left(e\cdot e^{3/4}\right)=ln\left(e^{7/4}\right)=7/4$; c) $3^{3x}=3^{½} \Rightarrow 3x=½ \Rightarrow x=1/6$;

   d) $2^{3,1x}=2^2 \Rightarrow 31x/10=2 \Rightarrow x=20/31$

Semplificare le seguenti espressioni

7. **a)** $\boldsymbol{log_2(4)\cdot log_4(2)}$; **b)** $log_{\sqrt{6}}\left[18\cdot log_5(25)\right]$; **c)** $log_{4/9}(3/2)\cdot log_{3/2}(4/9)$; **d)** $\left[log_8\left(\sqrt{32}\right)\right]^{log_4(8)}$

   a) $log_2(2^2)\cdot log_4(4^{½})=2\cdot ½=1$; b) $log_{\sqrt{6}}[18\cdot 2]=log_{\sqrt{6}}(36)=log_{\sqrt{6}}\left[\left(\sqrt{6}\right)^4\right]=4$;

   c) $log_{4/9}\left[(4/9)^{-1/2}\right]\cdot log_{3/2}\left[(3/2)^{-2}\right]=-\frac{1}{2}\cdot(-2)=1$;

   d) $\left[log_{2^3}\left(2^{5/2}\right)\right]^{log_{2^2}\left(2^3\right)}=\left\{log_{2^3}\left[\left(2^3\right)^{5/6}\right]\right\}^{log_{2^2}\left[\left(2^2\right)^{3/2}\right]}=\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{5}{6}\cdot\sqrt{\frac{5}{6}}$

8. **a)** $\dfrac{log_{\sqrt{15}}(225)}{log_{12}\left(\sqrt[3]{1/144}\right)}$; **b)** $log_{\frac{7}{4}}\left(\frac{16}{49}\right)-log_{\frac{16}{49}}\left(\frac{4}{7}\right)$; **c)** $\left[log_{1/2}\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)\right]^{log_{1/3}(9)}$; **d)** $\dfrac{log_{\sqrt{5}}(1/25)}{log_2\left(2^\pi\right)}$

   a) $\dfrac{log_{\sqrt{15}}\left[\left(\sqrt{15}\right)^4\right]}{log_{12}\left(12^{-2/3}\right)}=\dfrac{4}{-2/3}=-6$; b) $log_{\frac{7}{4}}\left[\left(\frac{7}{4}\right)^{-2}\right]-log_{\frac{16}{49}}\left[\left(\frac{16}{49}\right)^{1/2}\right]=-2-\frac{1}{2}=-\frac{5}{2}$;

c) $\left[log_{2^{-1}}\left(2^{1/2-3}\right)\right]^{log_{1/3}\left[(1/3)^{-2}\right]} = log_{2^{-1}}\left[\left(2^{-1}\right)^{5/2}\right]^{-2} = \left(\frac{5}{2}\right)^{-2} = \frac{4}{25}$; d) $\frac{log_{\sqrt{5}}\left[\left(\sqrt{5}\right)^{-4}\right]}{\pi} = -\frac{4}{\pi}$

9. **a)** $ln\left(\sqrt{e}\right)\cdot ln\left(\frac{e^3}{\sqrt{e}}\right)$**; b)** $2^{log_2(17)}\cdot 17^{log_{17}\left(\frac{1}{3}\right)}$**; c)** $\frac{log_4\left(\sqrt[3]{128}\right)}{log_2(16)+log_{16}(2)}$**; d)** $ln\left(\frac{e^2}{\sqrt{e}}\right)-log_{e^2}(e)$

a) $\frac{1}{2}\cdot\left(3-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}=\frac{5}{4}$; b) 17 · 1/3 =17/3;

c) $\frac{log_{2^2}\left(2^{7/3}\right)}{log_2\left(2^4\right)+log_{16}\left(16^{1/4}\right)} = \frac{log_{2^2}\left[\left(2^2\right)^{7/6}\right]}{4+1/4} = \frac{7/6}{17/4} = \frac{7}{\cancel{6}^3}\cdot\frac{\cancel{4}^2}{17} = \frac{14}{51}$; d) 2 – ½ – ½= 2 – 1 = 1

10. **a)** $\boldsymbol{log_2(4)\cdot log_4(8)\cdot log_8(16)}$**; b)** $\frac{log_3(9)}{log_9(3)+log_9(1/3)}$**; c)** $\left[e^{ln(\pi)}\cdot\pi^{log_\pi(e)}\right]^{log_{\sqrt{e}}(e)}$

a) $log_2(2^2)\cdot log_4(4^{3/2})\cdot log_8(8^{4/3}) = 2\cdot 3/2\cdot 4/3 = 4$; b) $\frac{3}{1/2-1/2}=?$ l'espressione non ha senso perché si annulla il denominatore; c) $(\pi\cdot e)^2$

11. **a)** $log_{\frac{2}{3}}\left\{\left[log_{27}(9)\right]^{log_9(81)}\right\}$**; b)** $log_2\left\{\left[log_{\sqrt{2}}(1/2)\right]^{log_{\sqrt{2}}(8)}\right\}$**; c)** $log_{\sqrt[3]{2}}\left\{\left[log_{\sqrt{3}}(9)\right]^{log_{\sqrt{5}}(25)}\right\}$

a) $log_{\frac{2}{3}}\left\{\left[log_{27}\left(27^{2/3}\right)\right]^2\right\} = log_{\frac{2}{3}}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^2\right\} = 2$; b) $log_2\left\{\left[log_{\sqrt{2}}\left[\left(\sqrt{2}\right)^{-2}\right]\right]^{log_{\sqrt{2}}\left[\left(\sqrt{2}\right)^6\right]}\right\} = log_2\left\{(-2)^6\right\} = 6$;

c) $log_{\sqrt[3]{2}}\left\{\left[log_{\sqrt{3}}\left[\left(\sqrt{3}\right)^4\right]\right]^{log_{\sqrt{5}}\left[\left(\sqrt{5}\right)^4\right]}\right\} = log_{\sqrt[3]{2}}\left\{4^4\right\} = log_{2^{1/3}}\left\{\left(2^{1/3}\right)^{24}\right\} = 24$

12. **a)** $log_{\frac{7}{3}}\left\{\left[log_{0,5}\left(\sqrt[7]{8}\right)\right]^{log_{0,25}\left(\sqrt[3]{64}\right)}\right\}$**; b)** $\left[log_{27}(3)\cdot log_3(27)\right]^{log_{1/4}(2)-log_2(1/4)}$

a) $log_{\frac{7}{3}}\left\{\left[log_{2^{-1}}\left[\left(2^{-1}\right)^{-3/7}\right]\right]^{log_{4^{-1}}\left[\left(4^{-1}\right)^{-1}\right]}\right\} = log_{\frac{7}{3}}\left\{\left[-\frac{3}{7}\right]^{-1}\right\} = ?$ l'argomento non può essere negativo;

b) $\left[log_{27}\left[(27)^{1/3}\right]\cdot log_3\left(3^3\right)\right]^{log_{1/4}\left[(1/4)^{-1/2}\right]-log_2\left(2^{-2}\right)} = \left[\frac{1}{3}\cdot 3\right]^{-1/2+2} = 1^{3/2} = 1$

Semplifica le seguenti espressioni, tenendo conto che tutte le variabili sono scelte in modo che i relativi logaritmi abbiano significato

13. **a)** $log_a\left(a^2\right)+log_a\left(1/a^3\right)-2\cdot log_a\left(\sqrt[3]{a^2}\right)$**; b)** $\frac{log_a\left(a^3\right)\cdot log_{a^2}\left(a^3\right)}{log_{\sqrt[3]{a}}\left(a^4\right)}+\frac{log_{a^2}\left(a^4\right)\cdot log_{\sqrt{a}}(a)}{log_{\frac{1}{a}}\left(a^2\right)}$

a) 2 – 3 – 2 · 2/3 = –7/3; b) $\frac{\cancel{3}\cdot 3/2}{\cancel{12}^4}+\frac{\cancel{2}\cdot 2}{-\cancel{2}}=\frac{3}{8}-2=-\frac{13}{8}$

14. **a)** $\frac{log_x\left(x^3\right)\cdot log_x\left(\sqrt{x}\right)}{log_{\sqrt{x}}\left(\sqrt{\sqrt{x}}\right)}-\frac{log_y(1/y)\cdot log_y\left(\sqrt{y}\right)}{log_{1/\sqrt{y}}(y)}$**; b)** $log_a\left(a^b\right)\cdot log_a\left(a^b\cdot a\right)\cdot log_{\sqrt{a}}\left(\sqrt[3]{a^b}\right)$

a) $\frac{3\cdot\cancel{1/2}}{\cancel{1/2}}-\frac{-1\cdot 1/2}{-2}=3-\frac{1}{4}=\frac{11}{4}$ b) $b\cdot(b+1)\cdot 2b/3 = 2b^2\cdot(b+1)/3$

15. $log_{a^b}\left(a^c\right)+log_{a^c}\left(a^b\right)-log_{a^{b+c}}\left(a^{b-c}\right)$

$$\frac{c}{b}+\frac{b}{c}-\frac{b-c}{b+c}=\frac{bc^2+c^3+b^3+\cancel{b^2c-b^2c}+bc^2}{bc\cdot(b+c)}=\frac{2bc^2+c^3+b^3}{bc\cdot(b+c)}$$

Determinare il valore dell'incognita affinché le seguenti uguaglianze abbiano validità

16. **a)** $\boldsymbol{log_3(x) = 3}$**; b)** $log_{\sqrt{x}}(4)=1$**; c)** $log_3\left(\sqrt[3]{x^2}\right)=4$**; d)** $\boldsymbol{log_x(2) = 1/2}$**; e)** $log_{1/3}(x+1)=-1$

a) $x = 3^3 = 27$; b) $\sqrt{x}=4 \Rightarrow x=16$; c) $3^4=\sqrt[3]{x^2} \Rightarrow x=\pm\left(3^4\right)^{3/2}=\pm 3^6=\pm 729$; d) $x^{1/2}=2 \Rightarrow x=4$;

e) $x+1=3 \Rightarrow x=2$

17. **a)** $\boldsymbol{log_{x+1}(4) = 2}$**; b)** $log_{2x-1}(3/2)=-2$**; c)** $log_{3x+1}(1/3)=3$**; d)** $log_{x^2}(5/4)=1/2$

a) $(x+1)^2=4 \Rightarrow x+1=2 \Rightarrow x=1$;

b) $\frac{1}{(2x-1)^2}=\frac{3}{2} \Rightarrow (2x-1)^2=\frac{2}{3} \Rightarrow 2x-1=\pm\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow x=\frac{1+\sqrt{\frac{2}{3}}}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{6}}{3}}{2}=\frac{3+\sqrt{6}}{6}$ abbiamo eliminato la soluzione negativa non accettabile;

c) $(3x+1)^3=1/3 \Rightarrow (3x+1)^3=\frac{1}{3} \Rightarrow 3x+1=\sqrt[3]{\frac{1}{3}} \Rightarrow x=\frac{-1+\sqrt[3]{\frac{1}{3}}}{3}=\frac{-3+\sqrt[3]{9}}{9}$;

d) $\sqrt{x^2}=\frac{5}{4} \Rightarrow |x|=\frac{5}{4} \Rightarrow x=\pm\frac{5}{4}$

18. **a)** $log_{1-x}(5)=3/2$**; b)** $log_{2/3}(x+2)=1$**; c)** $\boldsymbol{log_2(4x-3) = 2}$**; d)** $log_4\left(\sqrt{x}+1\right)=-1$

a) $\sqrt{(1-x)^3}=5 \Rightarrow (1-x)^3=25 \Rightarrow 1-x=\sqrt[3]{25} \Rightarrow x=1-\sqrt[3]{25}$; b) $x+2=2/3 \Rightarrow x=-4/3$;

c) $4x-3=4 \Rightarrow x=7/4$; d) $\sqrt{x}+1=\frac{1}{4}$ nessuna soluzione, il primo membro è sempre maggiore del secondo

19. **a)** $log_3(2x+3)=-2$**; b)** $log_{\sqrt{2}}(x^2+1)=4$**; c)** $log_{1/4}(2x-1)=-2$**; d)** $log_{2-x}(3)=-1/2$

a) $2x+3=1/9 \Rightarrow x=-13/9$; b) $x^2+1=4 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$; c) $2x-1=16 \Rightarrow x=17/2$;

d) $(2-x)^{-1/2}=3 \Rightarrow 2-x=1/9 \Rightarrow x=17/9$

20. **a)** $log_{\sqrt{3}}(x^2-x)=2$**; b)** $log_{x+1}(1/2)=3$**; c)** $log_{3/2}(4x+1)=1/2$**; d)** $log_{3/5}(1-2x)=2$

a) $x^2-x=3 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$; b) $(x+1)^3=\frac{1}{2} \Rightarrow x+1=\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \Rightarrow x=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}-1=\frac{\sqrt[3]{4}-2}{2}$;

c) $4x+1=\sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow x=\frac{-1+\sqrt{3/2}}{4}=\frac{-1+\sqrt{6}/2}{4}=\frac{-2+\sqrt{6}}{8}$; d) $1-2x=9/25 \Rightarrow x=8/25$

21. **a)** $log_{x+1}\left(\sqrt{2}\right)=2/3$**; b)** $log_{x+1}\left(\sqrt{2}\right)=-2/3$**; c)** $\boldsymbol{log_3(x^2+x) = -2}$**; d)** $log_{x/3}(4)=1/2$

a) $(x+1)^{2/3}=\sqrt{2} \Rightarrow x+1=\sqrt[4]{8} \Rightarrow x=\sqrt[4]{8}-1$;

b) $(x+1)^{-2/3}=\sqrt{2} \Rightarrow x+1=\frac{1}{\sqrt[4]{8}} \Rightarrow x=-1+\frac{\sqrt[4]{2}}{2}=\frac{-2+\sqrt[4]{2}}{2}$; c) $x^2+x=1/9 \Rightarrow 9x^2+9x-1=0$ $\Rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{6}$ d) $(x/3)^{1/2}=4 \Rightarrow x/3=16 \Rightarrow x=48$

Negli esercizi seguenti si tenga conto che base ed argomento devono assumere valori positivi e la base deve essere diversa da 1

22. **a)** $\boldsymbol{log_x(x) = 2}$**; b)** $\boldsymbol{log_x(x^2) = 1}$**; c)** $\boldsymbol{log_{x+1}(x) = -1}$**; d)** $\boldsymbol{log_x(x+1) = 1/2}$

a) $\begin{cases} x^2=x \\ x>0, x\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \vee x=1 \\ x>0, x\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$; b) $\begin{cases} x=x^2 \\ x>0, x\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \vee x=1 \\ x>0, x\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$;

c) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+1} = x \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x - 1 = 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};$

d) $\begin{cases} \sqrt{x} = x+1 \\ x > 0, x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x^2 + 2x + 1 \\ x > 0, x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x + 1 = 0 \\ x > 0, x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \Delta = 1 - 4 < 0 \Rightarrow \varnothing$

23. **a)** $\boldsymbol{log_x(x + 1) = -1}$**; b)** $\boldsymbol{log_{x+1}(x) = -1}$**; c)** $\boldsymbol{log_{x+2}(x - 2) = 2}$**; d)** $\boldsymbol{log_x(1 - x) = 2}$

a) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} = x+1 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x - 1 = 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};$

b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+1} = x \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x - 1 = 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};$

c) $\begin{cases} (x+2)^2 = x - 2 \\ x > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 3x + 6 = 0 \\ x > 2 \end{cases} \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow \varnothing$

d) $\begin{cases} x^2 = 1 - x \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x - 1 = 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

24. **a)** $log_{x^2}(1-x) = 1$**; b)** $\boldsymbol{log_{x+1}(x^2) = 2}$**; c)** $log_{x^2}(x+1) = 1/2$**; d)** $log_{x^2+1}(x^2 - 1) = 2$

a) $\begin{cases} x^2 = 1 - x \\ x < 1, x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x - 1 = 0 \\ x < 1, x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ x < 1, x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2};$

b) $\begin{cases} (x+1)^2 = x^2 \\ x > -1, x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 0 \\ x > -1, x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ x > -1, x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x = -\dfrac{1}{2};$

c) $\begin{cases} \sqrt{x^2} = x+1 \\ x > -1, x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| = x+1 \\ x > -1, x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{x} = \cancel{x} + 1 \\ x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -x = x+1 \\ -1 < x < 0 \end{cases} \Rightarrow \varnothing \vee \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ -1 < x < 0 \end{cases} \Rightarrow x = -\dfrac{1}{2};$

d) $\begin{cases} (x^2+1)^2 = x^2 - 1 \\ x < -1 \vee x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^4 + x^2 = 0 \\ x < -1 \vee x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2(x^2+1) = 0 \\ x < -1 \vee x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x < -1 \vee x > 1 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$

25. **a)** $log_{\frac{x+1}{2}}\left(\dfrac{x+1}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$**; b)** $log_{\frac{x}{2}}\left(\dfrac{2}{x}\right) = -2$**; c)** $\boldsymbol{log_{x-2}(x + 2) = 2}$

a) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+1}{2}} = \dfrac{x+1}{3} \\ x > -1, x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x+1}{2} = \left(\dfrac{x+1}{3}\right)^2 \\ x > -1, x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+1)\cdot\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{x+1}{9}\right) = 0 \\ x > -1, x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x > -1, x \neq 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \dfrac{7}{2} \\ x > -1, x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{7}{2};$

b) $\begin{cases} \left(\dfrac{2}{x}\right)^2 = \dfrac{2}{x} \\ x > 0, x \neq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{2}{x}\right)\cdot\left(\dfrac{2}{x} - 1\right) = 0 \\ x > 0, x \neq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x > 0, x \neq 2 \end{cases} \Rightarrow \varnothing;$

c) $\begin{cases} (x-2)^2 = x+2 \\ x > 2, x \neq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 2 = 0 \\ x > 2, x \neq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5 \pm \sqrt{17}}{2} \\ x > 2, x \neq 3 \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$

Usando le parti proporzionali, calcolare i seguenti logaritmi con 5 cifre decimali¸ usando i valori dei logaritmi interi calcolati con la calcolatrice. Verificare i risultati

26. **a) *log*(15,4); b) *log*(12,3); c) *log*(31,5); d) *log*(48,1)**
a) $log(15) \approx 1{,}17609$, $log(16) \approx 1{,}20411$, quindi $log(15{,}4) \approx 1{,}17609 + (1{,}20411 - 1{,}17609)\cdot 0{,}4 \approx 1{,}18730$; b) $log(12) \approx 1{,}07918$, $log(13) \approx 1{,}11394 \Rightarrow log(12{,}3) \approx 1{,}17609 \cdot 0{,}7 + 1{,}11394 \approx 1{,}08960$;
c) $log(31) \approx 1{,}49136$, $log(32) \approx 1{,}50514 \Rightarrow log(31{,}5) \approx 1{,}49136 \cdot 0{,}5 + 1.5014 \cdot 0.5 \approx 1{,}49825$;
d) $log(48) \approx 1{,}68124$, $log(49) \approx 1{,}69019 \Rightarrow log(48{,}1) \approx 1{,}68124 \cdot 0{,}9 + 1.69019 \cdot 0{,}1 \approx 1{,}68213$

27. **Determinare una relazione fra *a* e *b* in modo che si abbia $log_b(a) > 1$.**
Dato che $log_b(b) = 1$, deve essere $a > b$

28. **Determinare una relazione fra *a* e *b* in modo che si abbia $log_b(a) < 1$.**
Dal precedente: $a < b$

Determinare gli insiemi di esistenza dei seguenti logaritmi.

29. **a) $log_2(1 - x)$; b) $log_{3-x}(3 + x)$; c) $log_{3+x}(3 - x)$; d)** $log_{x^2+2}(3+x)$

a) $1 - x > 0 \Rightarrow x < 1$; b) $\begin{cases} 3-x>0 \\ 3-x\neq 1 \\ 3+x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<3 \\ x\neq 2 \\ x>-3 \end{cases} \Rightarrow -3<x<3, x\neq 2$;

c) $\begin{cases} 3+x>0 \\ 3+x\neq 1 \\ 3-x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-3 \\ x\neq -2 \\ x<3 \end{cases} \Rightarrow -3<x<3, x\neq -2$; d) $3 + x > 0 \Rightarrow x > -3$

30. **a) $log_{1/2}(2 + x)$; b) $log_{1+2x}(x^2 + 1)$; c) $log_{3+4x}(4x - 1)$; d) $log_{5-3x}(3x - 5)$**

a) $2 + x > 0 \Rightarrow x > -2$; b) $\begin{cases} 1+2x>0 \\ 1+2x\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1/2 \\ x\neq 0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 3+4x>0 \\ 3+4x\neq 1 \\ 4x-1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-3/4 \\ x\neq -1/2 \\ x>1/4 \end{cases} \Rightarrow x > \frac{1}{4}$;

d) $\begin{cases} 5-3x>0 \\ 5-3x\neq 1 \\ 3x-5>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<5/3 \\ x\neq 4/3 \\ x>5/3 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$

31. **a) $log_{2x+3}(4 + 3x)$; b) $log_{1/2+3/4x}(4x + 1)$; c) $log_{x+2}(4)$**

a) $\begin{cases} 2x+3>0 \\ 2x+3\neq 1 \\ 4+3x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-3/2 \\ x\neq -1 \\ x>-4/3 \end{cases} \Rightarrow x > -\frac{4}{3}, x\neq -1$; b) $\begin{cases} 1/2+3/4x>0 \\ 1/2+3/4x\neq 1 \\ 4x+1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-3/2 \\ x\neq 2/3 \\ x>-1/4 \end{cases} \Rightarrow x > -\frac{1}{4}, x\neq \frac{2}{3}$;

c) $\begin{cases} x+2>0 \\ x+2\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x\neq -1 \end{cases}$

32. **a)$log_x(x^2+x)$; b)$log_{2x}(x-x^2)$; c)$log_{3/4-x}(3/2-2/3x)$**

a) $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ x^2+x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ x<-1 \vee x>0 \end{cases} \Rightarrow x>0, x\neq 1$; b) $\begin{cases} 2x>0 \\ 2x\neq 1 \\ x-x^2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 1/2 \\ 0<x<1 \end{cases} \Rightarrow 0<x<1, x\neq \frac{1}{2}$;

c) $\begin{cases} 3/4-x>0 \\ 3/4-x\neq 1 \\ 3/2-2/3x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<3/4 \\ x\neq -1/4 \\ x<9/4 \end{cases} \Rightarrow x<\frac{3}{4}, x\neq -\frac{1}{4}$

33. **a)** $log_{x^2-1}(1-x^2)$**; b)** $log_{4x^2-9}(16-25x^2)$**; c)** $log_{x^2-3x}(2x-5x^2)$

a) $\begin{cases} x^2-1>0 \\ x^2-1\neq 1 \\ 1-x^2>0 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$ prima e terza condizione si contraddicono;

b) $\begin{cases} 4x^2-9>0 \\ 4x^2-9\neq 1 \\ 16-25x^2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-3/2 \vee x>3/2 \\ x\neq \pm\sqrt{5/2} \\ -4/5<x<4/5 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$;

c) $\begin{cases} x^2-3x>0 \\ x^2-3x\neq 1 \\ 2x-5x^2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<0 \vee x>3 \\ x\neq \dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2} \\ 0<x<2/5 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$

34. **a)** $log_{x^2-5x}\left(2x^2+3x\right)$; **b)** $log_{x^2-3}\left(2-9x^2\right)$; **c)** $log_{\frac{2x+1}{x-x^2}}\left(\dfrac{x^2-2x}{4-3x}\right)$

a) $\begin{cases} x^2-5x>0 \\ x^2-5x\neq 1 \\ 2x^2+3x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<0 \vee x>5 \\ x\neq \dfrac{5\pm\sqrt{29}}{2} \\ x<-3/2 \vee x>0 \end{cases} \Rightarrow x<-\dfrac{3}{2} \vee x>5 \wedge x\neq \dfrac{5\pm\sqrt{29}}{2}$;

b) $\begin{cases} x^2-3>0 \\ x^2-3\neq 1 \\ 2-9x^2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-\sqrt{3} \vee >\sqrt{3} \\ x\neq \pm 2 \\ -\sqrt{2/9}<x<\sqrt{2/9} \end{cases} \Rightarrow \varnothing$;

c) $\begin{cases} \dfrac{2x+1}{x-x^2}>0 \\ \dfrac{2x+1}{x-x^2}\neq 1 \\ \dfrac{x^2-2x}{4-3x}>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-\dfrac{1}{2} \vee 0<x<1 \\ \forall x\in\mathbb{R} \\ x<0 \vee \dfrac{4}{3}<x<2 \end{cases} \Rightarrow x<-\dfrac{1}{2}$

35. **a)** $log_{2x^2+3x}\left(3x^2+2x\right)$; **b)** $log_{x^2+x+1}\left(x^2+3x+2\right)$

a) $\begin{cases} 2x^2+3x>0 \\ 2x^2+3x\neq 1 \\ 3x^2+2x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-\dfrac{3}{2} \vee x>0 \\ x\neq \dfrac{-3\pm\sqrt{17}}{4} \\ x<-\dfrac{2}{3} \vee x>0 \end{cases} \Rightarrow x<-\dfrac{3}{2} \vee x>0, x\neq \dfrac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$;

b) $\begin{cases} x^2+x+1>0 \\ x^2+x+1\neq 1 \\ x^2+3x+2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x\in\mathbb{R} \\ x\neq -1, x\neq 0 \\ x<-2 \vee x>-1 \end{cases} \Rightarrow x<-2 \vee x>-1, x\neq 0$

36. **a)** $log_{4x^2-5}\left(x^2+x+1\right)$; **b)** $log_{x^2-2x+1}\left(x^2-4x+4\right)$

a) $\begin{cases} 4x^2-5>0 \\ 4x^2-5\neq 1 \\ x^2+x+1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-\sqrt{5}/2 \vee x>\sqrt{5}/2 \\ x\neq \pm\sqrt{3/2} \\ \forall x\in\mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow x<-\sqrt{5}/2 \vee x>\sqrt{5}/2, x\neq \pm\sqrt{3/2}$;

b) $\begin{cases} x^2-2x+1>0 \\ x^2-2x+1\neq 1 \\ x^2-4x+4>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ x\neq 0, x\neq 2 \\ x\neq 2 \end{cases} \Rightarrow x\notin\{0,1,2\}$

37. **a)** $log_{-x^2+1}\left(3x^2+x-1\right)$; **b)** $log_{4x+1}\left(5x^2-x-3\right)$

a) $\begin{cases} 1-x^2>0 \\ 1-x^2\neq 1 \\ 3x^2+x-1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1<x<1 \\ x\neq 0 \\ x<\dfrac{-1-\sqrt{13}}{6} \vee x>\dfrac{-1+\sqrt{13}}{6} \end{cases} \Rightarrow -1<x<\dfrac{-1-\sqrt{13}}{6} \vee \dfrac{-1+\sqrt{13}}{6}<x<1;$

b) $\begin{cases} 4x+1>0 \\ 4x+1\neq 1 \\ 5x^2-x-3>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1/4 \\ x\neq 0 \\ x<\dfrac{1-\sqrt{61}}{2} \vee x>\dfrac{1+\sqrt{61}}{2} \end{cases} \Rightarrow x>\dfrac{1+\sqrt{61}}{2}$

38. **a)** $log_2 \dfrac{x-x^2}{x^2+x-2}$; **b)** $log_{\frac{x-1}{2-3x}}(4)$; **c)** $log_{\frac{x-2}{x+2}}\left(\dfrac{1}{3-x}\right)$

a) $\dfrac{x-x^2}{x^2+x-2}>0 \Rightarrow \begin{cases} x-x^2>0 \\ x^2+x-2>0 \end{cases} \vee \begin{cases} x-x^2<0 \\ x^2+x-2<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<x<1 \\ x<-2 \vee x>1 \end{cases} \vee \begin{cases} x<0 \vee x>1 \\ -2<x<1 \end{cases} \Rightarrow \varnothing \vee -2<x<0;$

b) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2-3x}>0 \\ \dfrac{x-1}{2-3x}\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{3}<x<1 \\ x\neq \dfrac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{2}{3}<x<1, x\neq \dfrac{3}{4};$

c) $\begin{cases} \dfrac{x-2}{x+2}>0 \\ \dfrac{x-2}{x+2}\neq 1 \\ \dfrac{1}{3-x}>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-2 \vee x>2 \\ \forall x\in\mathbb{R} \\ x<3 \end{cases} \Rightarrow x<-2 \vee 2<x<3$

39. **a)** $log_{\frac{x+1}{2x-3}}\left(\dfrac{4x-1}{2x+3}\right)$; **b)** $log_{x^2-x}\left(\dfrac{3x-1}{2x+5}\right)$

a) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2x-3}>0 \\ \dfrac{x+1}{2x-3}\neq 1 \\ \dfrac{4x-1}{2x+3}>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-1 \vee x>3/2 \\ x\neq 4 \\ x<-3/2 \vee x>1/4 \end{cases} \Rightarrow x<-\dfrac{3}{2} \vee x>\dfrac{3}{2}, x\neq 4;$

b) $\begin{cases} x^2-x>0 \\ x^2-x\neq 1 \\ \dfrac{3x-1}{2x+5}>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<0 \vee x>1 \\ x\neq \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2} \\ x<-5/2 \vee x>1/3 \end{cases} \Rightarrow \left(x<-\dfrac{5}{2} \vee x>1\right) \wedge x\neq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

40. **a)** $log_{\frac{x^2-3x}{x+1}} \dfrac{x^4-1}{x^2+3x}$; **b)** $log_{x^2-4}\left(x^2-9\right)$

a) $\begin{cases} \dfrac{x^2-3x}{x+1} > 0 \\ \dfrac{x^2-3x}{x+1} \neq 1 \\ \dfrac{x^4-1}{x^2+3x} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \vee x > 3 \\ x \neq 2 \pm \sqrt{5} \\ x < -3 \vee -1 < x < 0 \vee x > 1 \end{cases} \Rightarrow (-1 < x < 0 \vee x > 3) \wedge x \neq 2 \pm \sqrt{5}\,;$

b) $\begin{cases} x^2-4 > 0 \\ x^2-4 \neq 1 \\ x^2-9 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -2 \vee x > 2 \\ x \neq \pm\sqrt{5} \\ x < -3 \vee x > 3 \end{cases} \Rightarrow x < -3 \vee x > 3$

41. **a)** $log_{\frac{x^2-x}{2x-1}}\left(\dfrac{4x+1}{5-x^2}\right)$; **b)** $log_x \dfrac{x^3-1}{1-x^2+x}$

a) $\begin{cases} \dfrac{x^2-x}{2x-1} > 0 \\ \dfrac{x^2-x}{2x-1} \neq 1 \\ \dfrac{4x+1}{5-x^2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < x < \dfrac{1}{2} \vee x > 1 \\ x \neq \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \\ x < -\sqrt{5} \vee -\dfrac{1}{4} < x < \sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow 0 < x < \dfrac{1}{2} \vee 1 < x < \sqrt{5}, x \neq \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\,;$

b) $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ \dfrac{x^3-1}{1-x^2+x} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x < \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \vee 1 < x < \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow 1 < x < \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Proprietà dei logaritmi

Usando le proprietà dei logaritmi, calcolare le seguenti espressioni

1. **a)** $log_3\left(3 \cdot \sqrt[3]{27}\right)$; **b)** $log_5\left(\dfrac{25}{\sqrt{5}}\right)$; **c)** $log_6\left(6 \cdot \sqrt{216}\right)$; **d)** $log_2\left(\dfrac{1}{4} \cdot \sqrt[3]{2}\right)$; **e)** $log_{0,5}\left(\dfrac{8 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt[4]{4 \cdot \sqrt[3]{2}}}\right)$

a) $log_3(3^2) = 2$;b) $log_5(5^{2-½}) = 3/2$; c) $log_6(6^{1+3/2}) = 5/2$; d) $log_2(2^{-2+1/3}) = -5/3$;

e) $log_{1/2}\left(\dfrac{2^{3+1/2}}{\sqrt[4]{2^{2+1/3}}}\right) = log_{1/2}\left(\dfrac{2^{7/2}}{2^{7/12}}\right) = log_{1/2}\left(\dfrac{1}{2^{7/12-7/2}}\right) = \dfrac{7-42}{12} = -\dfrac{35}{12}$

2. **a)** $log_2\left(\dfrac{1024 \cdot \sqrt{32}}{\sqrt[7]{4}}\right)$; **b)** $log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt[5]{64}}\right)$; **c)** $log_{0,2}\left(25 \cdot \sqrt[4]{5}\right)$; **d)** $log_{\frac{1}{5}}\left(\dfrac{125 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{3125}}\right)$

a) $log_2(2^{10+5/2-2/7}) = (140 + 35 - 4)/14 = 171/14$;b) $log_{1/2}(2^{1+½-6/5}) = -(10 + 5 - 12)/10 = -3/10$;
c) $log_{1/5}(5^{2+1/4}) = -9/4$; d) $log_{1/5}(5^{3+½-5/2}) = -1$

3. **a)** $log_5\left(25 \cdot \sqrt{125 \cdot \sqrt{5}}\right)$; **b)** $log_4\left(2 \cdot \sqrt{8 \cdot \sqrt[3]{2}}\right)$; **c** $log_8\left(\sqrt{\dfrac{2 \cdot \sqrt{512}}{\sqrt{4 \cdot \sqrt{8 \cdot \sqrt{16}}}}}\right)$

a) $log_5(5^{2+(3+1/2)/2}) = 2 + 7/4 = 15/4$;b) $log_4(2^{1+(3+1/3)/2}) = log_4(4^{(1+5/3)/2}) = 4/3$;

$$\frac{1}{2}log_8\left(\frac{2\cdot\sqrt{512}}{\sqrt{4\cdot\sqrt{8\cdot\sqrt{16}}}}\right)=\frac{1}{2}\left[log_8\left(2\cdot\sqrt{512}\right)-log_8\left(\sqrt{4\cdot\sqrt{8\cdot\sqrt{16}}}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[log_8(2)+log_8\left(\sqrt{512}\right)-\frac{1}{2}log_8\left(4\cdot\sqrt{8\cdot\sqrt{16}}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[log_8\left(8^{1/3}\right)+\frac{1}{2}log_8\left(8^3\right)-\frac{1}{2}\left[log_8(4)+\frac{1}{2}log_8\left(8\cdot\sqrt{16}\right)\right]\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left[log_8\left(8^{2/3}\right)+\frac{1}{2}\left\{log_8(8)+log_8\left(\sqrt{16}\right)\right\}\right]\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{11}{6}-\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\left\{1+\frac{1}{2}log_8(16)\right\}\right]\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{11}{6}-\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\left\{1+\frac{1}{2}log_8\left(8^{4/3}\right)\right\}\right]\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{11}{6}-\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\left\{1+\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{4}^{2}}{3}\right\}\right]\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{11}{6}-\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\left\{1+\frac{2}{3}\right\}\right]\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{11}{6}-\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{3}\right]\right]=$$

$$\text{c }=\frac{1}{2}\left[\frac{11}{6}-\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}+\frac{5}{6}\right]\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{11}{6}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{6}^{2}}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{11}{6}-\frac{3}{4}\right]=\frac{1}{2}\cdot\frac{13}{12}=\frac{13}{24}$$

4. **a)** $log_9\left(\frac{3\cdot\sqrt[5]{81}}{\sqrt{3\cdot\sqrt{27}}}\right)$; **b)** $log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{27\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3\cdot\sqrt{243}}}\right)$; **c)** $log_{\frac{1}{81}}\left(\frac{27\cdot\sqrt{3\cdot\sqrt[3]{3}}}{\sqrt[5]{81\cdot\sqrt{27}}}\right)$

a) $log_9(3^{1+4/5-(1+3/2)/2}) = log_9(9^{(9/5-5/4)/2}) = 11/40$;b) $log_{1/3}(3^{3+½-(1+5/2)/2}) = log_{1/3}[(1/3)^{-(7/2-7/4)}) = -7/4$;
c) $log_{1/81}(3^{3+(1+1/3)/2-(4+3/2)/5}) = log_{1/81}(3^{3+2/3-11/10}) = log_{1/81}(81^{(90+20-33)/120}) = -77/120$

5. **a)** $log_2\left(4\cdot\sqrt[5]{\frac{1}{8}}\right)+log_4\left(\frac{16\cdot\sqrt{8}}{\sqrt{2}}\right)-2\cdot log_3\left(27\cdot\sqrt{243}\right)$; **b)** $\dfrac{log_{\sqrt{6}}\left(\frac{\sqrt[4]{6\cdot\sqrt[3]{6\cdot\sqrt{216}}}}{\sqrt[4]{6\cdot\sqrt[3]{6}}}\right)}{log_{\sqrt[3]{4}}\left(\frac{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{16}\cdot\sqrt{8}}{\sqrt[3]{32\cdot\sqrt{2}}}\right)}$

a) $log_2(2^{2-3/5}) + log_4(4^{(2+¾-1/4)}) - 2\ log_3(3^{3+5/2}) = 7/5 + 5/2 - 11 = -71/10$;

b) $$\frac{log_{\sqrt{6}}\left(\sqrt[4]{\frac{\cancel{6}\cdot\sqrt[3]{6\cdot 6^{3/2}}}{\cancel{6}\cdot\sqrt[3]{6}}}\right)}{log_{\sqrt[3]{4}}\left(\frac{2^{1/3+4/3+3/2}}{2^{(5+1/2)/3}}\right)}=\frac{log_{\sqrt{6}}\left(\sqrt[12]{\frac{\cancel{6}\cdot 6^{3/2}}{\cancel{6}}}\right)}{log_{\sqrt[3]{4}}\left(2^{19/6-7/6}\right)}=\frac{log_{\sqrt{6}}\left(6^{1/8}\right)}{log_{\sqrt[3]{4}}\left(2^{4/3}\right)};$$

$$log_{\sqrt[3]{4}}\left(2^{4/3}\right)=x\Rightarrow 2^{2x/3}=2^{4/3}\Rightarrow x=2;\frac{log_{\sqrt{6}}\left(\sqrt{6}^{1/4}\right)}{2}=\frac{1}{8}$$

6. **a)** $\left[log_{\frac{1}{4}}\left(2\cdot\frac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{32}\cdot\sqrt[3]{64}}\right)+log_{0,25}\left(\frac{2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt[7]{16}\cdot\sqrt[3]{4}}\right)\right]^2$; **b)** $log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{2\cdot\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{32}}{\sqrt{2\cdot\sqrt{2\cdot\sqrt{2}}}}\right)\cdot log_{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2\cdot\sqrt{\sqrt{32}}}}{8\cdot\sqrt[3]{16\cdot\sqrt{128}}}\right)$

a) $[log_{1/4}(2^{1+4/5-5/2-2}) + log_{1/4}(2^{1+½-4/7-2/3})]^2 = [log_{1/4}(2^{-27/10}) + log_{1/4}(2^{11/42})]^2 = (27/20 - 11/84)^2 = (128/105)^2 = 16384/11025$;

$$\left[log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(2^{1+2/3+5/2}\right)-log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(2^{(1+(1+1/2)/2)/2}\right)\right]\cdot\left[log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2^{1+5/4}}\right)-log_{\sqrt{2}}\left(2^{3+(4+7/2)/3}\right)\right]=$$

b) $$=\left[log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(2^{25/6}\right)-log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(2^{7/8}\right)\right]\cdot\left[log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}^{9/4}\right)-log_{\sqrt{2}}\left(2^{11/2}\right)\right]=$$

$$=\left[log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-25/3}\right]-log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-7/4}\right]\right]\cdot\left[\frac{9}{4}-log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}^{11}\right)\right]=\left(-\frac{25}{3}+\frac{7}{4}\right)\cdot\left(\frac{9}{4}-11\right)=\frac{2765}{48}$$

7. **a)** $log_{\frac{1}{8}}\left(\frac{\sqrt[4]{2\cdot\sqrt[4]{4\cdot\sqrt{2}}}}{\sqrt[4]{16\cdot\sqrt[5]{4}}}\right)+log_{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt[5]{27\cdot\sqrt{3}}\cdot\sqrt{243}}{\sqrt[3]{3\cdot\sqrt{27}}}\right)$; **b)** $log_{0,5}\left(\frac{\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{2\cdot\sqrt[5]{8\cdot\sqrt[3]{16}}}}}{16\cdot\sqrt[4]{2\cdot\sqrt[3]{4}}}\right)-log_{0,2}\left(\frac{\sqrt[5]{25\cdot\sqrt[4]{5}}}{25\cdot\sqrt[3]{5\cdot\sqrt{5\cdot\sqrt{5}}}}\right)$

a) $$log_{\frac{1}{8}}\left(\frac{2^{(1+(2+1/2)/4)/4}}{2^{(4+2/5)/4}}\right)+log_{\sqrt{3}}\left(\frac{3^{(3+1/2)/5+5/2}}{3^{(1+3/2)/3}}\right)=log_{\frac{1}{8}}\left(2^{-111/160}\right)+log_{\sqrt{3}}\left(3^{71/30}\right)=$$
$$=log_{\frac{1}{8}}\left[\left(\frac{1}{8}\right)^{37/160}\right]+log_{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}^{71/15}\right)=\frac{37}{160}+\frac{71}{15}=\frac{2383}{480}$$;

b) $$log_{1/2}\left(\frac{2^{(1+(1+(3+4/3)/5)/3)/2}}{2^{4+(1+2/3)/4}}\right)-log_{1/5}\left(\frac{5^{(2+1/4)/5}}{5^{2+(1+(1+1/2)/2)/3}}\right)=log_{1/2}\left(2^{-\frac{649}{180}}\right)-log_{1/5}\left(5^{-\frac{32}{15}}\right)=$$
$$=\frac{649}{180}-\frac{32}{15}=\frac{53}{36}$$

8. $$\left[log_{\frac{1}{4}}\left(0,25\cdot\frac{2\cdot\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2}}\right)+log_9\left(\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}}{\sqrt[5]{81}}\right)\right]\cdot\left[log_{\frac{1}{4}}\left(0,25\cdot\frac{2\cdot\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2}}\right)-log_9\left(\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}}{\sqrt[5]{81}}\right)\right]$$

$$\left[log_{\frac{1}{4}}\left(0,25\cdot\frac{2\cdot\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2}}\right)\right]^2-\left[log_9\left(\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}}{\sqrt[5]{81}}\right)\right]^2=\left[1+log_{\frac{1}{4}}\left(2^{1+2/3-1/3}\right)\right]^2-\left[log_9\left(3^{1/2+3/2-4/5}\right)\right]^2=$$

$$=\left[1+log_{\frac{1}{4}}\left(2^{4/3}\right)\right]^2-\left[log_9\left(3^{6/5}\right)\right]^2=\left(1-\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{1}{9}-\frac{9}{25}=-\frac{56}{225}$$

Scrivere sotto forma di un unico logaritmo le seguenti espressioni, gli eventuali parametri presenti sono tali da rendere reali i risultati

9. **a)** $\boldsymbol{log_5(2)+log_5(4)-log_5(8)}$; **b)** $\boldsymbol{log_3(6)+2\cdot log_3(5)}$; **c)** $\boldsymbol{log_a(5)-3\,log_a(2)+log_a(4)}$
   a) $log_5(2\cdot 4/8)=log_5(1)=0$; b) $log_3(6\cdot 5^2)=log_3(150)$; c) $log_a(5/2^3\cdot 4)=log_a(5/2)$
10. $\boldsymbol{2\,log(2)-3\,log(3)+4\,log(5)-log(6)}$
   $log(2^2/3^3\cdot 5^4/6)=log(1250/81)$
11. **a)** $\boldsymbol{ln\left(\sqrt{2}\right)+2\,ln(3)-3\,ln(4)+1/2\,ln(2)}$; **b)** $\boldsymbol{log_{1/3}(3/4)-3\cdot log_{1/3}(4/3)}$
   a) $ln\left(\frac{\sqrt{2}\cdot 3^2\cdot\sqrt{2}}{4^3}\right)=ln\left(\frac{9}{32}\right)$; b) $log_{1/3}[(3/4)/(4/3)^3]=log_{1/3}(81/256)$
12. $\boldsymbol{[log(1/3)+log(25)]\cdot[log(1/3)-log(25)]-[log(5)-log(3)]^2}$
   $[log(1/3)]^2-[log(25)]^2-[log(5)]^2-[log(3)]^2+2log(5)\,log(3)=[-log(3)]^2-4[log(5)]^2-[log(5)]^2-[log(3)]^2+2log(5)log(3)=-5[log(5)]^2+2log(5)log(3)$
13. **a)** $\boldsymbol{log_2(a+b)+log_2(a-b)-log_2(a^2+b^2-2ab)}$; **b)** $\boldsymbol{log_4(a)+2\,log_4(b)-log_4(b^3)}$
   a) $$log_2(a+b)+log_2(a+b)-log_2\left[(a-b)^2\right]=log_2(a+b)+log_2(a+b)-2log_2(a-b)=$$
   $$=log_2(a+b)-log_2(a-b)=log_2\left(\frac{a+b}{a-b}\right)$$;
   b) $log_4(ab^2/b^3)=log_4(a/b)$
14. $\boldsymbol{log(a)+log(b)-log(a^2)+log(b^3)}-2\cdot log\left(\sqrt{b}\right)+3\cdot log\left(\sqrt[3]{a}\right)$

$log(ab/a^2 \cdot b^3) - log(b) + log(a) = log(b^4/a) + log(a/b) = log(b^4/a \cdot a/b) = log(b^3)$

15. $\boldsymbol{log_a(a) - b\, log_a(b) + a\, log_a(a+1) + (b-1)\, log_a(b)}$

$1 - log_a(b^b) + log_a[(a+1)^a] + log_a(b^{b-1}) = 1 + log_a\left[\frac{(a+1)^a \cdot b^{b-1}}{b^b}\right] = 1 + log_a\left[\frac{(a+1)^a}{b}\right]$

16. $\boldsymbol{[log(a) + log(b)]^2 - [log(a) - log(b)]^2 - 1/2 \cdot log(b^2) + 1/3 \cdot log(a^3)}$

$[log(a)]^2 + [log(b)]^2 + 2log(a)log(b) - [log(a)]^2 - [log(b)]^2 + 4log(a)log(b) + log(b) + log(a) = log(a^4)log(b) + log(ab)$

Usando il cambio di base semplificare le seguenti espressioni

17. **a)** $\boldsymbol{log_2(3) \cdot log_3(2)}$**;b)** $\frac{log_4(5)}{log_5(4)}$**; c)** $\frac{log_2(3) \cdot log_8(3)}{log_4(3)}$**; d)** $\boldsymbol{log_2(3) \cdot log_3(4)}$

a) $\frac{\cancel{log_2(3)} \cdot log_2(2)}{\cancel{log_2(3)}} = 1$;b) $\frac{log_5(5)}{log_5(4) \cdot log_5(4)} = \frac{1}{[log_5(4)]^2} = [log_4(5)]^2$;

c) $\frac{log_2(3) \cdot \cancel{log_2(3)} \cdot log_2(4)}{log_2(8) \cdot \cancel{log_2(3)}} = \frac{2 \cdot log_2(3)}{3} = log_2(\sqrt[3]{9})$; d) $\frac{\cancel{log_2(3)} \cdot log_2(4)}{\cancel{log_2(3)}} = 2$

18. **a)** $\frac{log_2(3)}{log_{1/2}(1/3)}$**; b)** $\frac{log_{\sqrt{2}}(\sqrt{3})}{log_2(3)}$**; c)** $\boldsymbol{log(2) - log_{100}(4)}$**; d)** $\boldsymbol{log_2(10) - log_4(10) + log_8(10)}$

a) $\frac{log_2(3) \cdot log_2(1/2)}{log_2(1/3)} = \frac{\cancel{log_2(3)} \cdot (-1)}{-\cancel{log_2(3)}} = 1$; b) $log(2) - \frac{log(4)}{log(100)} = log(2) - \frac{\cancel{2}log(2)}{\cancel{2}} = 0$;

c) $\frac{\cancel{log_{\sqrt{2}}(3)} \cdot log_{\sqrt{2}}(2)}{2\,\cancel{log_{\sqrt{2}}(3)}} = \frac{2}{2} = 1$;

d) $log_2(10) - \frac{log_2(10)}{log_2(4)} + \frac{log_2(10)}{log_2(8)} = log_2(10) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{6} log_2(10) = log_2(\sqrt[6]{10^5})$

19. **a)** $\frac{log_2(5) + log_4(25)}{log_8(125)}$**; b)** $\frac{log_3(6) - log_9(36)}{log_{27}(216)}$**; c)** $\frac{log_{81}(8)}{log_9(2)}$**; d)** $\frac{log_{25}(9) - log_5(3)}{log_{25}(9) + log_5(3)}$

a) $\frac{log_2(5) + \frac{log_2(25)}{log_2(4)}}{\frac{log_2(125)}{log_2(8)}} = \frac{\cancel{log_2(5)} + \frac{2\,\cancel{log_2(5)}}{2}}{\frac{3\,\cancel{log_2(5)}}{3}} = 2$; b) $\frac{log_3(6) - \frac{log_3(36)}{log_3(9)}}{\frac{log_3(216)}{log_3(27)}} = \frac{\cancel{log_3(6)} - \frac{2\,\cancel{log_3(6)}}{2}}{\frac{3\,\cancel{log_3(6)}}{3}} = 0$;

c) $\frac{log_9(8)}{log_9(2) \cdot log_9(81)} = \frac{3\,\cancel{log_9(2)}}{\cancel{log_9(2)} \cdot 2} = \frac{3}{2}$; d) $\frac{2log_{25}(3) - \frac{log_{25}(3)}{log_{25}(5)}}{2log_{25}(3) + \frac{log_{25}(3)}{log_{25}(5)}} = \frac{2log_{25}(3) - 2log_{25}(3)}{2log_{25}(3) + 2log_{25}(3)} = 0$

20. **a)** $\boldsymbol{log_2(3) \cdot log_3(4) \cdot log_4(5) \cdot log_5(6) \cdot log_6(7) \cdot log_7(8)}$**; b)** $log_{a^n}(b^m) \cdot log_{b^n}(a^m)$

a) $\cancel{log_2(3)} \cdot \frac{log_2(4)}{\cancel{log_2(3)}} \cdot \cancel{log_4(5)} \cdot \frac{log_4(6)}{\cancel{log_4(5)}} \cdot \cancel{log_6(7)} \cdot \frac{log_6(8)}{\cancel{log_6(7)}} = 2 \cdot \cancel{log_4(6)} \cdot \frac{log_4(8)}{\cancel{log_4(6)}} = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$;

b) $m \cdot log_{a^n}(b) \cdot \frac{log_{a^n}(a^m)}{log_{a^n}(b^n)} = m \cdot \cancel{log_{a^n}(b)} \cdot \frac{m/n}{n \cdot \cancel{log_{a^n}(b)}} = \frac{m^2}{n^2}$

21. **a)** $\boldsymbol{log_3(4) \cdot log_4(5) \cdot log_5(6) \cdot log_6(7) \cdot log_7(8) \cdot log_8(9)}$**; b)** $log_{a^n}(b) - \frac{log_a(b)}{n}$

a) $$\cancel{log_3(4)}\cdot\frac{log_3(5)}{\cancel{log_3(4)}}\cdot\cancel{log_5(6)}\cdot\frac{log_5(7)}{\cancel{log_5(6)}}\cdot\cancel{log_7(8)}\cdot\frac{log_7(9)}{\cancel{log_7(8)}}=$$
$$=\cancel{log_3(5)}\cdot\frac{log_3(7)}{\cancel{log_3(5)}}\cdot log_7(9)=\cancel{log_3(7)}\cdot\frac{log_3(9)}{\cancel{log_3(7)}}=2\ ;$$

b) $$\frac{log_a(b)}{log_a(a^n)}-\frac{log_a(b)}{n}=\frac{log_a(b)}{n}-\frac{log_a(b)}{n}=0$$

22. **a)** $\boldsymbol{log_4(5)\cdot log_5(6)\cdot log_6(7)\cdot\ldots\cdot log_{15}(16)}$**; b)** $log_{a^n}(a^m)$

a) $$\cancel{log_4(5)}\cdot\frac{log_4(6)}{\cancel{log_4(5)}}\cdot\cancel{log_6(7)}\cdot\frac{log_6(8)}{\cancel{log_6(7)}}\cdot\ldots\cdot\cancel{log_{14}(15)}\cdot\frac{log_{14}(16)}{\cancel{log_{14}(15)}}=$$
$$=\cancel{log_4(6)}\cdot\frac{log_4(8)}{\cancel{log_4(6)}}\cdot\cancel{log_8(10)}\cdot\frac{log_8(12)}{\cancel{log_8(10)}}\cdot\cancel{log_{12}(14)}\cdot\frac{log_{12}(16)}{\cancel{log_{12}(14)}}=$$
$$=\frac{3}{2}\cdot\cancel{log_8(12)}\cdot\frac{log_8(16)}{\cancel{log_8(12)}}=\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{3}}=2$$

23. **a)** $\frac{log_2(3)\cdot log_4(9)\cdot log_6(27)}{log_4(3)\cdot log_6(9)\cdot log_8(27)}$**; b)** $\frac{log_3(2)\cdot log_4(15)\cdot log_{17}(24)\cdot log_{31}(35)}{log_4(2)\cdot log_{17}(15)\cdot log_{31}(24)\cdot log_{81}(35)}$**; c)** $\frac{log_{25}(2)\cdot log_{14}(4)\cdot log_{21}(11)}{log_{14}(2)\cdot log_{21}(4)\cdot log_5(11)}$

a) $$log_2(3)\cdot\frac{log_4(9)}{log_4(3)}\cdot\frac{log_6(27)}{log_6(9)}\cdot\frac{log_2(8)}{log_2(27)}=\cancel{log_2(3)}\cdot log_3(9)\cdot log_9(27)\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{3}\cdot\cancel{log_2(3)}}=\cancel{2}\cdot\frac{3}{\cancel{2}}=3\ ;$$

b) $$log_3(2)\cdot\frac{log_4(15)}{log_4(2)}\cdot\frac{log_{17}(24)}{log_{17}(15)}\cdot\frac{log_{31}(35)}{log_{31}(24)}\cdot\frac{1}{log_{81}(35)}=log_3(2)\cdot log_2(15)\cdot log_{15}(24)\cdot log_{24}(35)\cdot\frac{log_3(81)}{log_3(35)}=$$
$$=log_3(2)\cdot\cancel{log_2(15)}\cdot\frac{\cancel{log_2(24)}}{\cancel{log_2(15)}}\cdot\frac{log_2(35)}{\cancel{log_2(24)}}\cdot\frac{4}{log_3(35)}=\cancel{log_3(2)}\cdot\frac{\cancel{log_3(35)}}{\cancel{log_3(2)}}\cdot\frac{4}{\cancel{log_3(35)}}=4\ ;$$

c) $$log_{25}(2)\cdot\frac{log_{14}(4)}{log_{14}(2)}\cdot\frac{log_{21}(11)}{log_{21}(4)}\cdot\frac{1}{log_5(11)}=log_{25}(2)\cdot log_2(4)\cdot\cancel{log_4(11)}\cdot\frac{log_4(5)}{\cancel{log_4(11)}}=$$
$$=log_{25}(2)\cdot 2\cdot\frac{log_{25}(5)}{log_{25}(4)}=\cancel{log_{25}(2)}\cdot\cancel{2}\cdot\frac{1/2}{\cancel{2}\cdot\cancel{log_{25}(2)}}=\frac{1}{2}$$

Negli esercizi seguenti le lettere rappresentano numeri per cui i logaritmi hanno significato

24. **a)** $log_{\sqrt{a}}(b^3)\cdot log_{b^2}(\sqrt{a})$**; b)** $log_a(\sqrt{b})\cdot log_{\sqrt{b}}(a^3)$**; c)** $log_{\sqrt{a^3}}(b^2)\cdot log_{\sqrt{b^5}}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{a}}\right)$

a) $$3\cdot log_{\sqrt{a}}(b)\cdot\frac{log_{\sqrt{a}}(\sqrt{a})}{log_{\sqrt{a}}(b^2)}=3\cdot\cancel{log_{\sqrt{a}}(b)}\cdot\frac{1}{2\cdot\cancel{log_{\sqrt{a}}(b)}}=\frac{3}{2}\ ;$$ b) $$\cancel{log_a(\sqrt{b})}\cdot\frac{log_a(a^3)}{log_a(\sqrt{b})}=3\ ;$$

c) $$2\cdot log_{\sqrt{a^3}}(b)\cdot\frac{log_{\sqrt{a^3}}(a^{-1/4})}{log_{\sqrt{a^3}}(\sqrt{b^5})}=2\cdot\cancel{log_{\sqrt{a^3}}(b)}\cdot\frac{-1/4\cdot 2/3}{5/2\cdot\cancel{log_{\sqrt{a^3}}(b)}}=\cancel{2}\cdot\left(-\frac{1}{\cancel{6}^{3}}\right)\cdot\frac{2}{5}=-\frac{2}{15}$$

25. **a)** $log_{\sqrt{a}}(b^3)\cdot log_{1/b^2}(\sqrt{a})$**; b)** $log_{a^2}(\sqrt{b})\cdot log_{b^2}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}\right)$**; c)** $log_{1/a^2}(\sqrt[5]{b^2})\cdot log_{b^4}\left(\frac{1}{a^3}\right)$

a) $$3\cdot log_{\sqrt{a}}(b)\cdot\frac{log_{\sqrt{a}}(\sqrt{a})}{log_{\sqrt{a}}(b^{-2})}=3\cdot\cancel{log_{\sqrt{a}}(b)}\cdot\frac{1}{-2\cdot\cancel{log_{\sqrt{a}}(b)}}=-\frac{3}{2}\ ;$$

b) $\frac{1}{2}\cdot log_{a^2}(b)\cdot\frac{log_{a^2}\left(a^{-3/4}\right)}{log_{a^2}\left(b^2\right)}=\frac{1}{2}\cdot\cancel{log_{a^2}(b)}\cdot\frac{(-3/4)/2}{2\cdot\cancel{log_{a^2}(b)}}=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot\frac{1}{2}=-\frac{3}{16}$;

c) $\frac{2}{5}\cdot log_{1/a^2}(b)\cdot\frac{log_{1/a^2}\left(a^{-3}\right)}{log_{1/a^2}\left(b^4\right)}=\frac{2}{5}\cdot\cancel{log_{1/a^2}(b)}\cdot\frac{3/2}{4\cdot\cancel{log_{1/a^2}(b)}}=\frac{\cancel{2}}{5}\cdot\frac{3}{\cancel{8}^{4}}=\frac{3}{20}$

26. **a)** $log_{\sqrt{a}}\left(b^4\right)\cdot log_{\sqrt{b}}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)$**; b)** $log_{a^2}\left(\sqrt{b^3}\right)\cdot log_{b^3}\left(\frac{1}{\sqrt[5]{a^4}}\right)$

a) $4\cdot log_{\sqrt{a}}(b)\cdot\frac{log_{\sqrt{a}}\left(a^{-1/3}\right)}{log_{\sqrt{a}}\left(\sqrt{b}\right)}=4\cdot\cancel{log_{\sqrt{a}}(b)}\cdot\frac{-2/3}{1/2\cdot\cancel{log_{\sqrt{a}}(b)}}=4\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)=-\frac{16}{3}$;

b) $\frac{3}{2}\cdot log_{a^2}(b)\cdot\frac{log_{a^2}\left(a^{-4/5}\right)}{log_{a^2}\left(b^3\right)}=\frac{3}{2}\cdot\cancel{log_{a^2}(b)}\cdot\frac{(-2/5)}{3\cdot\cancel{log_{a^2}(b)}}=\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\cdot\left(-\frac{\cancel{2}}{\cancel{15}^{5}}\right)=-\frac{1}{5}$

27. $log_a(b)=\frac{1}{2}\Rightarrow 2\cdot log_{\sqrt{a}}\left(\frac{1}{b}\right)+3\cdot log_{\frac{1}{b^3}}\left(\frac{1}{\sqrt[5]{a^4}}\right)=?$

$2\cdot\frac{log_a\left(b^{-1}\right)}{log_a\left(\sqrt{a}\right)}+3\cdot\frac{log_a\left(a^{-4/5}\right)}{log_a\left(b^{-3}\right)}=2\cdot\frac{-log_a(b)}{1/2}+\cancel{3}\cdot\frac{(-4/5)}{-\cancel{3}log_a(b)}=2\cdot\frac{-\cancel{1/2}}{\cancel{1/2}}+\frac{4/5}{1/2}=-2+\frac{8}{5}=-\frac{2}{5}$

28. $log_a(b)=\frac{3}{4}\Rightarrow 3\cdot log_{\sqrt{a^3}}\left(b^2\right)-4\cdot log_{b^2}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}\right)=?$

$log_a(b)=\frac{3}{4}\Rightarrow 3\cdot\frac{log_a\left(b^2\right)}{log_a\left(a^{3/2}\right)}-4\cdot\frac{log_a\left(a^{-3/4}\right)}{log_a\left(b^2\right)}=3\cdot\frac{\cancel{2\cdot 3/4}}{\cancel{3/2}}-\cancel{4}^{2}\cdot\frac{\cancel{(-3/4)}}{\cancel{2}\cdot\cancel{(3/4)}}=3+2=5$

29. $log_b(a)=3\Rightarrow\left[log_{\frac{1}{a^2}}\left(\frac{1}{b^3}\right)\right]^2-\left[log_{\sqrt{b^3}}\left(\sqrt[3]{a^4}\right)\right]^2=?$

$\left[\frac{log_b\left(b^{-3}\right)}{log_b\left(a^{-2}\right)}\right]^2-\left[\frac{log_b\left(a^{-4/3}\right)}{log_b\left(b^{3/2}\right)}\right]^2=\left[\frac{-\cancel{3}}{-2\cdot\cancel{3}}\right]^2-\left[\frac{(-4/\cancel{3})\cdot\cancel{3}}{3/2}\right]^2=\frac{1}{4}-\frac{64}{9}=-\frac{247}{36}$

30. $log_{a^2}(b)=-\frac{1}{4}\Rightarrow log_a\left(\frac{1}{b^2}\right)-4\cdot log_{b^3}\left(\frac{1}{a^4}\right)=?$

$=-\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{log_{a^2}\left(b^{-2}\right)}{log_{a^2}(a)}-4\cdot\frac{log_{a^2}\left(a^{-4}\right)}{log_{a^2}\left(b^3\right)}=\frac{\cancel{-2\cdot(-1/4)}}{\cancel{1/2}}-4\cdot\frac{-2}{3\cdot(-1/4)}=1-\frac{32}{3}=-\frac{29}{3}$

31. $log_a(x)=2, log_a(y)=3\Rightarrow log_a\left(x^2\cdot y^3\right)=?$

$2\cdot log_a(x)+3\cdot log_a(y)=2\cdot 2+3\cdot 3=13$

32. a) $\frac{log_a(b)\cdot log_x(c)\cdot log_y(d)}{log_x(b)\cdot log_y(c)\cdot log_{a^4}(d)}$; b) $\frac{log_a(b)\cdot log_x(c)\cdot log_y(d)}{log_x(b)\cdot log_y(c)\cdot log_{a^n}(d)}$

$\frac{\left[\cancel{log_x(b)}/log_x(a)\right]\cdot\left[\cancel{log_y(c)}/log_y(x)\right]\cdot\left[\cancel{log_{a^4}(d)}/log_{a^4}(y)\right]}{\cancel{log_x(b)}\cdot\cancel{log_y(c)}\cdot\cancel{log_{a^4}(d)}}=\frac{1}{log_x(a)\cdot log_y(x)\cdot log_{a^4}(y)}=$;

$\frac{\cancel{log_y(x)}}{log_y(a)\cdot\cancel{log_y(x)}\cdot log_{a^4}(y)}=\frac{\cancel{log_{a^4}(y)}}{log_{a^4}(a)\cdot\cancel{log_{a^4}(y)}}=\frac{1}{1/4}=4$

b)
$$\frac{\left[\cancel{log_x(b)}/log_x(a)\right]\cdot\left[\cancel{log_y(c)}\backslash log_y(x)\right]\cdot\left[\cancel{log_{a^n}(d)}\backslash log_{a^n}(y)\right]}{\cancel{log_x(b)}\cdot\cancel{log_y(c)}\cdot\cancel{log_{a^n}(d)}}=\frac{1}{log_x(a)log_y(x)log_{a^n}(y)}=$$

$$=\frac{\cancel{log_y(x)}}{log_y(a)\cancel{log_y(x)}log_{a^n}(y)}=\frac{\cancel{log_{a^n}(y)}}{log_{a^n}(a)\cancel{log_{a^n}(y)}}=\frac{1}{1/n}=n$$

33. $log_a(x)=2, log_b(x)=\frac{1}{2}, log_c(x)=\frac{1}{3}, log_d(x)=3\Rightarrow log_{abcd}(x)=?$

$$\frac{log_a(x)}{log_a(abcd)}=\frac{2}{log_a(a)+log_a(bcd)}=\frac{2}{1+\frac{log_b(x)}{log_b(bcd)}}=\frac{2}{1+\frac{1/2}{1+log_b(cd)}}=\frac{2}{1+\frac{1/2}{1+\frac{log_c(x)}{log_c(cd)}}}=$$

$$=\frac{2}{1+\frac{1/2}{1+\frac{1/3}{1+log_c(d)}}}=\frac{2}{1+\frac{1/2}{1+\frac{1/3}{1+\frac{log_d(x)}{log_d(d)}}}}=\frac{2}{1+\frac{1/2}{1+\frac{1/3}{1+3}}}=\frac{2}{1+\frac{1/2}{1+\frac{1}{12}}}=\frac{2}{1+\frac{\cancel{12}^{6}}{\cancel{26}^{13}}}=\frac{26}{19}$$

34. **In che relazione sono $log_a(b)$ e a)** $log_{a^n}(b^n)$ **; b) $log_{1/a}(1/b)$?**

a) $log_{a^n}(b^n)=\frac{log_a(b^n)}{log_a(a^n)}=\frac{n\cdot log_a(b)}{n}=log_a(b)$.

b) $log_{1/a}(1/b)=\frac{log_a(1/b)}{log_a(1/a)}=\frac{-log_a(b)}{-1}=log_a(b)$

35. **È vero che** $log_{a^n}(b)=n\cdot log_a(b)$**?**

$$log_{a^n}(b)=\frac{log_a(b)}{log_a(a^n)}=\frac{log_a(b)}{n}=log_a\left(\sqrt[n]{b}\right)$$

36. **Determinare quante cifre hanno i numeri: a) 2^{1000}; b) 12345^{678}; c) 2020^{2020}; d) 9876^{54321}; e) 13579^{2468}**

a) 1000 · log(2) ≈ 301,03, quindi ha 301 + 1 = 302 cifre;
b) 12345 · log(678) ≈ 2774,03, quindi ha 2774 + 1 = 2775 cifre
c) 2020 · log(2020) ≈ 6676,8, quindi ha 6676 + 1 = 6677 cifre;
d) 54321 · log(9876) ≈ 216989, quindi ha 216990 cifre;
e) 2468 · log(13579) ≈ 10199,9, quindi ha 10199 + 1 = 10200 cifre

37. **Con l'uso dei logaritmi ordinare dal più piccolo al più grande: 3^{751}, 4^{632}, 5^{543}.**
log (3^{751}) = 751 · log(3) ≈ 358; log(4^{632}) = 632 log (4) ≈ 380; log(5^{543}) = 543 log(5) ≈ 379. Quindi si ha : $3^{751} < 5^{543} < 4^{632}$

38. **Determinare il più piccolo valore intero di *n* per cui 2^n ha almeno 1000 cifre.**
n log(2) > 999 ⇒ n > 999/log(2) ≈ 3318 ⇒ n = 3319

39. **Determinare il più piccolo valore intero di *n* per cui n^{17} ha almeno 100 cifre.**
17 log(n) > 99 ⇒ log(n)> 99/17 ⇒ n> $10^{99/17}$ ≈ 666084,6 ⇒ n = 666085

Calcolare, con precisione al secondo decimale, i seguenti logaritmi usando la calcolatrice

40. **a) $log_3(7)$; b) $log_4(31)$; c)** $log_{1/3}(2/5)$ **; d)** $log_{4/5}\left(\sqrt{2}\right)$ **; e)** $log_{\sqrt{3}}(12)$ **; f) $log_{13}(1,21)$**

a) $\frac{log(7)}{log(3)}\approx 1,77$; b) $\frac{log(31)}{log(4)}\approx 2,47\,2$; c) $\frac{log(2/5)}{log(1/3)}\approx 0,83$; d) $\frac{log\left(\sqrt{2}\right)}{log(4/5)}\approx -1,55$;

e) $\dfrac{log(12)}{log(\sqrt{3})} \approx 4,52$; f) $\dfrac{log(1,21)}{log(13)} \approx 0,07$

41. **a) $log_{0,12}(4)$; b) $log_{\pi}(3)$; c) $log_3(\pi)$; d)** $log_{1/2}(1+\sqrt{2})$**; e)** $log_{\sqrt{2}-1}(1/5)$

a) $\dfrac{log(4)}{log(0,12)} \approx -0,65$; b) $\dfrac{log(3)}{log(\pi)} \approx 0,95$; c) $\dfrac{log(\pi)}{log(3)} \approx 1,04$; d) $\dfrac{log(1+\sqrt{2})}{log(1/2)} \approx -1,27$;

e) $\dfrac{log(1/5)}{log(\sqrt{2}-1)} \approx 1,82$

42. **a)** $log_2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$**; b) $log_{1+\pi}(\pi)$; c)** $log_{\pi^2}(1+\sqrt{5})$**; d)** $log_{2/5}\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$**; e) $log_{1+e}(e+\pi)$**

a) $\dfrac{log(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{log(2)} \approx 1,65$; b) $\dfrac{log(\pi)}{log(1+\pi)} \approx 0,80$; c) $\dfrac{log(1+\sqrt{5})}{log(\pi^2)} \approx 0,51$;

d) $\dfrac{log\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)}{log(2/5)} \approx -0,34$; e) $\dfrac{log(e+\pi)}{log(1+e)} \approx 1,34$

43. **Sapendo che $log(2) \approx 0,301$, senza usare l'apposito tasto della calcolatrice determinare un valore approssimato di $log_5(10)$.**

$$1 = log(2\cdot 5) = log(2)+log(5) = log(2)+\frac{log_5(5)}{log_5(10)} = log(2)+\frac{1}{log_5(10)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow log_5(10) = \frac{1}{1-log(2)} \approx \frac{1}{1-0,301} = \frac{1}{0,699} \approx 1,430$$

Risolvi le seguenti equazioni o disequazioni esponenziali (i risultati possono differire nella forma, controllarli con la calcolatrice)

44. **a) $3^{x+1} = 4$; b) $5^{x+2} = 3$; c) $2^{3x-1} = 5^x$; d)** $2^{x^2} = 5$

a) $log_3(3^{x+1}) = log_3(4) \Rightarrow x + 1 = log_3(4) \Rightarrow x = log_3(4) - 1$; b) $log_5(5^{x+2}) = log_5(3) \Rightarrow x + 2 = log_5(3) \Rightarrow x = log_5(3) - 2$; c) $log(2^{3x-1}) = log(5^x) \Rightarrow (3x - 1)log(2) = xlog(5) \Rightarrow [3log(2) - log(5)]x = log(2) \Rightarrow x\,log(8/5) = log(2) \Rightarrow$ $x = \dfrac{log(2)}{log(8/5)} = log_{8/5}(2)$

d) $log_2(2^{x^2}) = log_2(5) \Rightarrow x^2 = log_2(5) \Rightarrow x = \pm\sqrt{log_2(5)}$

45. **a) $4^{2x-3} = 3^{x-1}$; b) $4^{3x+2} = 7^{x-1}$; c)** $2\cdot 5^{2x-1} = 3^{x-1}/5$

a) $log(4^{2x-3}) = log(3^{x-1}) \Rightarrow (2x - 3)log(4) = (x - 1)log(3) \Rightarrow [2log(4) - log(3)]x = 3log(4) - log(3)$ $\Rightarrow log(16/3)x = log(64/3) \Rightarrow x = \dfrac{log(64/3)}{log(16/3)} = log_{16/3}\left(\dfrac{64}{3}\right)$; b) $log(4^{3x+2}) = log(7^{x-1}) \Rightarrow (3x + 2)log(4) = (x - 1)(log(7) \Rightarrow [3log(4) - log(7)]x = -2log(4) - log(7) \Rightarrow log(64/7)x = -log(112) \Rightarrow$ $x = -\dfrac{log(112)}{log(64/7)} = -log_{64/7}(112) = log_{64/7}\left(\dfrac{1}{112}\right)$; c) $log(2\cdot 5^{2x-1}) = log(3^{x-1}/5) \Rightarrow log(2) + (2x - 1)log(5) = (x - 1)log(3) - log(5) \Rightarrow [2log(5) - log(3)]x = \cancel{log(5)} - log(2) - log(3) - \cancel{log(5)} \Rightarrow$ $log(25/3)x = log(1/6) \Rightarrow x = \dfrac{log(1/6)}{log(25/3)} = log_{25/3}\left(\dfrac{1}{6}\right)$

46. **a)** $\sqrt{3^{2x-5}} = 2^{x-1}$**; b)** $4^{\frac{x-1}{2}} = 3^{\frac{x+1}{3}}$**; c)** $(2/3)^{x+1} < (3/5)^{x-1}$

a) $log\left(\sqrt{3^{2x-5}}\right)=log\left(2^{x-1}\right)\Rightarrow\frac{2x-5}{2}log(3)=(x-1)log(2)\Rightarrow\left[log(3)-log(2)\right]x=log\left(3^{5/2}\right)-log(2)\Rightarrow$
$\Rightarrow log(3/2)x=log\left(\sqrt{243}/2\right)\Rightarrow x=\frac{log\left(\sqrt{243}/2\right)}{log(3/2)}=log_{3/2}\left(\sqrt{243}/2\right)$;

b) $\frac{x-1}{2}log(4)=\frac{x+1}{3}log(3)\Rightarrow(x-1)log(2)=(x+1)log\left(\sqrt[3]{3}\right)\Rightarrow\left[log(2)-log\left(\sqrt[3]{3}\right)\right]x=$
$=log\left(\sqrt[3]{3}\right)+log(2)\Rightarrow x=\frac{log\left(2\sqrt[3]{3}\right)}{log\left(2/\sqrt[3]{3}\right)}=log_{2/\sqrt[3]{3}}\left(2\sqrt[3]{3}\right)$;

c) $(x+1)log(2/3)<(x-1)log(3/5)\Rightarrow\left[log(2/3)-log(3/5)\right]x<\left[-log(2/3)-log(3/5)\right]\Rightarrow$
$\Rightarrow log(10/9)x<-log(2/5)\Rightarrow x<\frac{log(5/2)}{log(10/9)}=log_{10/9}(5/2)$

47. **a) $1/2^{3x}\geq 3$; b) $3^{x+3}>4$; c) $3^{2x+3}\geq 2\cdot 5^{4x+7}$**

a) $log(1/2^{3x})\geq log(3)\Rightarrow 3log(1/2)x\geq log(3)\Rightarrow log(1/8)x\geq log(3)\Rightarrow x\leq\frac{log(3)}{log(1/8)}=log_{1/8}(3)$;

b) $(x+3)log(3)>log(4)\Rightarrow log(3)x>log(4/27)\Rightarrow x>\frac{log(4/27)}{log(3)}=log_3\left(\frac{4}{27}\right)$;

c) $(2x+3)log(3)\geq log(2)+(4x+7)log(5)\Rightarrow[log(9)-log(1024)]x\geq log(2)+log(5^7)-log(27)\Rightarrow$
$log(9/1024)x\geq log(2\cdot 5^7/27)\Rightarrow x\leq\frac{log\left(2\cdot 5^7/27\right)}{log(9/1024)}=log_{9/1024}\left(\frac{2\cdot 5^7}{27}\right)$

48. **a) $(5/7)^{x-4}<2^{3-2x}$; b) $\sqrt{3^{x+3}}\leq 2^{x+1}$; c) $(3/4)^{x^2+1}<1$**

a) $(x-4)log(5/7)<(3-2x)log(2)\Rightarrow[log(5/7)+log(4)]x<log(9)+log[(5/7)]^4\Rightarrow log(20/7)x<log[9\cdot(5/7)^4]\Rightarrow x<\frac{log\left(9\cdot 5^4/7^4\right)}{log(20/7)}=log_{20/7}\left(\frac{9\cdot 5^4}{7^4}\right)$

b) $\frac{x+3}{2}log(3)\leq(x+1)log(2)\Rightarrow\left[log\left(\sqrt{3}\right)-log(2)\right]x\leq log(2)-log\left(\sqrt{27}\right)\Rightarrow$
$\Rightarrow log\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x\leq log\left(\frac{2}{\sqrt{27}}\right)\Rightarrow x\geq\frac{log\left(2/\sqrt{27}\right)}{log\left(\sqrt{3}/2\right)}=log_{\sqrt{3}/2}\left(\frac{2}{\sqrt{27}}\right)$

c) $(x^2+1)log(3/4)<log(1)\Rightarrow(x^2+1)log(3/4)<0$, sempre verificata perché $log(3/4)<0$

49. **a) $(4/3)^{3x+5}<(6/5)^{2x}$; b) $\pi^{3x+1}<e^{4x-1}$**

a) $(3x+5)log(4/3)<2xlog(6/5)\Rightarrow[log(64/27)-log(36/25)]x<log(1024/243)\Rightarrow$
$log(400/243)x<log(1024/243)\Rightarrow x<\frac{log(1024/243)}{log(400/243)}=log_{400/243}\left(\frac{1024}{243}\right)$

b) $(3x+1)ln(\pi)<4x-1\Rightarrow[ln(\pi^3)-4]x<-1-ln(\pi)$ $x<\frac{1+ln(\pi)}{ln\left(\pi^3\right)-4}$

Risolvere le seguenti equazioni o disequazioni esponenziali

50. **a) $2^x+2^{x+1}-2^{x-1}=0$; b) $3^{2x}+3^x-2=0$; c) $4^x-3\cdot 2^x-1=0$**

a) $2^x(1+2-½)=0\Rightarrow 5\cdot 2^{x-1}=0\Rightarrow\varnothing$

b) $3^x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}=\prec\begin{matrix}-2\ (N.A.)\\ 1\end{matrix}\Rightarrow 3^x=1\Rightarrow x=0$ $3^{2x}+3^x-2=0$;

c) $4^x-3\cdot 2^x-1=0$ $2^x=\frac{3\pm\sqrt{9+4}}{2}\Rightarrow 2^x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}\Rightarrow x=log_2\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$

51. **a) $9^x - 2 \cdot 3^x - 4 = 0$; b) $3 \cdot 5^{2x} - 7 \cdot 5^x + 1 = 0$**

a) $3^x = 1 \pm \sqrt{5} \Rightarrow 3^x = 1 + \sqrt{5} \Rightarrow x = log_3\left(1+\sqrt{5}\right)$

b) $3 \cdot 5^{2x} - 7 \cdot 5^x + 1 = 0\, 5^x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49-12}}{6} = \dfrac{7 \pm \sqrt{37}}{6} \Rightarrow x = log_5\left(\dfrac{7 \pm \sqrt{37}}{6}\right)$

52. **a) $2 \cdot e^{2x} + 3 \cdot e^x - 2 < 0$; b) $3 \cdot 4^x + 2^x - 3 > 0$; c) $3^{x+1} - 3^x + 2 > 0$**

a) $e^x = \dfrac{-3 \pm 5}{4} = \prec \begin{matrix} -2 \\ 1/2 \end{matrix} \Rightarrow -2 < e^x < \dfrac{1}{2} \Rightarrow e^x < \dfrac{1}{2} \Rightarrow x < ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -ln(2) \Rightarrow x > ln(2)$

b) $2^x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{37}}{6} \Rightarrow 2^x > \dfrac{\sqrt{37}-1}{6} \Rightarrow x > log_2\left(\dfrac{\sqrt{37}-1}{6}\right)$

c) $3 \cdot 3^x - 3^x + 2 > 0 \Rightarrow 4 \cdot 3^x > -2 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$

53. **a) $4 \cdot 6^{2x+1} - 5 \cdot 6^{x+1} + 3 = 0$; b) $e^{2x} - e^x - 1 > 0$**

a) $24 \cdot 6^{2x} - 30 \cdot 6^x + 3 = 0 \Rightarrow 8 \cdot 6^{2x} - 10 \cdot 6^x + 1 = 0 \Rightarrow 6^x = \dfrac{5 \pm \sqrt{17}}{8} \Rightarrow x = log_6\left(\dfrac{5 \pm \sqrt{17}}{8}\right)$

b) $e^x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x > ln\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

54. **a) $2 \cdot 16^{x-1} + 3 \cdot 4^x - 1 \geq 0$; b) $\pi^{2x} - \pi^x - 5 \leq 0$**

a) $4^{2x}/8 + 3 \cdot 4^x - 1 \geq 0 \Rightarrow 4^{2x} + 24 \cdot 4^x - 8 \geq 0 \Rightarrow 4^x = -12 \pm \sqrt{152} \Rightarrow x \geq log_4\left(\sqrt{152} - 12\right)$;

b) $\pi^x = \dfrac{1 \pm \sqrt{21}}{2} \Rightarrow \dfrac{1-\sqrt{21}}{2} \leq \pi^x \leq \dfrac{1+\sqrt{21}}{2} \Rightarrow x \leq log_\pi\left(\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\right)$

55. **a) $3 \cdot 4^{x-2} - 3 \cdot 2^x - 1 \geq 0$; b) $5^x \cdot 2^{x-1} = 25^{3x-1} \cdot 8^{2x-3}$**

a) $3/16 \cdot 4^x - 3 \cdot 2^x - 1 \geq 0 \Rightarrow 3 \cdot 4^x - 48 \cdot 2^x - 16 \geq 0$ $4^x = \dfrac{24 \pm \sqrt{592}}{3} \Rightarrow 4^x \geq \dfrac{24+\sqrt{592}}{3} \Rightarrow x \geq log_4\left(\dfrac{24+\sqrt{592}}{3}\right)$;

b) $5^{x-6x+2} = 2^{6x-9-x+1} \Rightarrow 5^{-5x+2} = 2^{5x-8} \Rightarrow (-5x+2)\, log(5) = (5x-8)log(2) \Rightarrow -5[log(5) + log(2)]x = -2[4log(2) + log(5)] \Rightarrow 5log(10)x = 2log(80) \Rightarrow 5x = 2log(8) + 2 \Rightarrow 5x = 6log(2) + 2 \Rightarrow$ $x = \dfrac{6log(2)+2}{5}$

56. **a) $3^{x+1} \cdot 7^{3x+1} = 9^x \cdot 49^{2x-3}$; b) $4^{x+1} \cdot 125^{x-1} = 16^{2x-3} \cdot 5^{x-1}$**

a) $3^{x+1-2x} = 7^{4x-6-3x-1} \Rightarrow 3^{1-x} = 7^{x-7} \Rightarrow (1-x)log(3) = (x-7)log(7) \Rightarrow [log(3) + log(7)]x = 7log(7) + log(3) \Rightarrow log(21)x = 7log(7) + log(3) \Rightarrow$ $x = \dfrac{7log(7) + log(3)}{log(21)}$

b) $4^{x+1-4x+6} = 5^{x-1-3x+3} \Rightarrow 4^{7-3x} = 5^{2-2x} \Rightarrow (7-3x)log(4) = (2-2x)log(5) \Rightarrow [2log(5) - 3log(4)]x = 2log(5) - 7log(4) \Rightarrow log(25/64)x = log(25/4^7) \Rightarrow 2log(5/8)x = 2log(5/128) \Rightarrow$ $x = log_{5/8}\left(\dfrac{5}{128}\right)$

57. **a) $8^{2x} \cdot 9^{4x+7} = 4^{3x-2} \cdot 3^{x+5}$; b) $4 \cdot 3^x - 2^{x+1} = 3 \cdot 2^x + 3^{x-1}$**

a) $2^{6x-6x+4} = 3^{x+5-8x-14} \Rightarrow 16 = 3^{-7x-9} \Rightarrow -7x - 9 = log_3(16) \Rightarrow$ $x = -\dfrac{9 + log_3(16)}{7}$

b) $12 \cdot 3^{x-1} - 3^{x-1} = 3 \cdot 2^x + 2 \cdot 2^x \Rightarrow 11 \cdot 3^{x-1} = 5 \cdot 2^x \Rightarrow log(11) + (x-1)log(3) = log(5) + x\, log(2) \Rightarrow [log(3) - log(2)]x = log(5) - log(11) + log(3) \Rightarrow log(3/2)x = log(15/11) \Rightarrow x = log_{3/2}\left(\dfrac{15}{11}\right)$

58. **a) $5 \cdot 10^x + 2^{x+2} = 3 \cdot 10^{x+1} + 2^x$; b) $6^{x+1} - 8^x = 2^{3x+1} - 6^{x-1}$**

a) $5 \cdot 10^x - 30 \cdot 10^x = 2^x - 4 \cdot 2^x \Rightarrow -25 \cdot 10^x = -3 \cdot 2^x \Rightarrow 25 \cdot 5^x = 3 \Rightarrow 5^{x+2} = 3 \Rightarrow x + 2 = log_5(3) \Rightarrow x = log_5(3) - 2 \Rightarrow x = log_5(3) - log_5(25) \Rightarrow x = log_5(3/25)$

b) $6 \cdot 6^x + 6^x/6 = 2 \cdot 8^x + 8^x \Rightarrow 37/6 \cdot 6^x = 3 \cdot 8^x \Rightarrow 37/6 \cdot 3^x = 3 \cdot 4^x \Rightarrow log(37/6) + x\, log(3) = log(3) + x\, log(4) \Rightarrow x\, log(4/3) = log(37/18) \Rightarrow x = log_{4/3}(37/18)$

Risolvere i seguenti sistemi di equazioni esponenziali

59. **a)** $\begin{cases} 2^{x-1} + 3^{y-1} = 7 \\ 2^{x+1} - 3^y = 12 \end{cases}$ **; b)** $\begin{cases} 3^x - 2 = 3^{y+1} \\ 3^{y-2} + 4 = 3^{x-2} \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2^x/2 + 3^y/3 = 7 \\ 2 \cdot 2^x - 3^y = 12 \end{cases} \Rightarrow \left(a = 2^x; b = 3^y\right) \begin{cases} 3a + 2b = 42 \\ 2a - b = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + 4a - 24 = 42 \\ b = 2a - 12 \end{cases} \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} a = 66/7 \\ b = 48/7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x = 66/7 \\ 3^y = 48/7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = log_2(66/7) \\ y = log_3(48/7) \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 3^x - 3 \cdot 3^y = 2 \\ 3^y/9 - 3^x/9 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - 3b = 2 \\ b - a = -36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2b = -34 \\ a = b + 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 17 \\ a = 53 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = log_3(53) \\ y = log_3(17) \end{cases}$

60. **a)** $\begin{cases} 5^{x+1} - 5^y = 4 \\ 5^{y-1} + 5^x = 11 \end{cases}$ **; b)** $\begin{cases} 3 \cdot 2^x + 2^y = 8 \\ 5 \cdot 2^y - 3 \cdot 2^x = 4 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 5a - b = 4 \\ a + b/5 = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5a - b = 4 \\ 5a + b = 55 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b = 51 \\ a = (55 - b)/5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 51/2 \\ a = 59/10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = log_5(59/10) \\ y = log_5(51/2) \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 3a + b = 8 \\ 5b - 3a = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6b = 12 \\ a = (5b - 4)/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

61. **a)** $\begin{cases} 2^x + 2^{2y-1} = 16 \\ 3 \cdot 4^{y-1} - 5 \cdot 2^{x-1} = 2 \end{cases}$ **; b)** $\begin{cases} 2^x + 2^{y+2} = 3 \\ 2^{y+3} - 2^{x+2} = -4 \end{cases}$

a) $\left(a = 2^x; b = 4^y\right) \begin{cases} a + b/2 = 16 \\ 3b/4 - 5a/2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 32 \\ 3b - 10a = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 32 - 2a \\ 96 - 6a - 10a = 8 \end{cases} \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} b = 21 \\ a = 11/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = log_2(11/2) \\ y = log_4(21) \end{cases}$;

b) $\left(a = 2^x, b = 2^{y+2}\right) \begin{cases} a + b = 3 \\ 2b - 4a = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 - b \\ 2b - 12 + 4b = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5/3 \\ b = 4/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = log_2(5/3) \\ y = log_2(4/3) - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = log_2(5/3) \\ y = log_2(1/3) \end{cases}$

62. **a)** $\begin{cases} 4 \cdot \pi^x + \pi^{y+1} = 1 \\ \pi^x + 3 \cdot \pi^y = 5 \end{cases}$ **; b)** $\begin{cases} 9^x - 3^{2y+1} = -18 \\ 3^{2x-3} - 9^{y-2} = \dfrac{2}{9} \end{cases}$

a) $\begin{cases} 4a + \pi b = 1 \\ a + 3b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 20 - 12b + \pi b = 1 \\ a = 5 - 3b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \dfrac{19}{12 - \pi} \\ a = \dfrac{3 - 5\pi}{12 - \pi} < 0 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$;

b) $\left(a = 9^x, b = 9^y\right) \begin{cases} a - 3b = -18 \\ \dfrac{a}{\cancel{27}^{3}} - \dfrac{b}{\cancel{81}^{9}} = \dfrac{2}{\cancel{9}^{1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3b - 18 \\ b - 6 - \dfrac{b}{9} - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 9 \\ b = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

63. **a)** $\begin{cases} e^{2x+1} - e^{y-1} = 13 \\ e^y + e^{2x-1} = 3 \end{cases}$ **; b)** $\begin{cases} 4^{x-2} - 2^{x-1} = 1 \\ 2^{x+3} + 4^x = 3 \end{cases}$

a) $\left(a=e^{2x},b=e^{y}\right)\begin{cases}e\cdot a-b/e=13\\ b+a/e=\ 3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}e\cdot a-\dfrac{3e-a}{e^2}=13\\ b=\dfrac{3e-a}{e}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{13e^2+3e}{e^3+1}\\ b=\dfrac{3e^3-13e}{e^3+1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=ln\left(\sqrt{\dfrac{13e^2+3e}{e^3+1}}\right)\\ y=ln\left(\dfrac{3e^3-13e}{e^3+1}\right)\end{cases};$

b) $\begin{cases}a/16-b/2=1\\ 8b+a=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a-8b=16\\ a=3-8b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-13/16\\ a=3-8b\end{cases}\Rightarrow\varnothing$

Risolvere le seguenti disequazioni esponenziali

Livello 2

64. **a)** $\dfrac{2^{3x+1}-3}{4^{x+2}-5}\geq 0$**; b)** $\dfrac{4^{5x-1}-1}{5^{2x+1}-2}<0$

a) $\begin{cases}2^{3x+1}-3\geq 0\\ 4^{x+2}-5>0\end{cases}\vee\begin{cases}2^{3x+1}-3\leq 0\\ 4^{x+2}-5<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x+1\geq log_2(3)\\ x+2>log_4(5)\end{cases}\vee\begin{cases}3x+1\leq log_2(3)\\ x+2<log_4(5)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geq\dfrac{log_2(3)-1}{3}\\ x>log_4(5)-2\end{cases}\vee\begin{cases}x\leq\dfrac{log_2(3)-1}{3}\\ x<log_4(5)-2\end{cases}\Rightarrow;$

$\Rightarrow\begin{cases}x\geq log_2\left(\sqrt[3]{3/2}\right)\\ x>log_4(5/16)\end{cases}\vee\begin{cases}x\leq log_2\left(\sqrt[3]{3/2}\right)\\ x<log_4(5/16)\end{cases}\Rightarrow x\geq log_2\left(\sqrt[3]{3/2}\right)\vee x<log_4(5/16)$

b) $\begin{cases}4^{5x-1}-1>0\\ 5^{2x+1}-2<0\end{cases}\vee\begin{cases}4^{5x-1}-1<0\\ 5^{2x+1}-2>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5x-1>0\\ 2x+1<log_5(2)\end{cases}\vee\begin{cases}5x-1<0\\ 2x+1>log_5(2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>1/5\\ x<\dfrac{log_5(2)-1}{2}\end{cases}\vee\begin{cases}x<1/5\\ x>\dfrac{log_5(2)-1}{2}\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases}x>1/5\\ x<log_5\left(\sqrt{2/5}\right)\end{cases}\vee\begin{cases}x<1/5\\ x>log_5\left(\sqrt{2/5}\right)\end{cases}\Rightarrow log_5\left(\sqrt{2/5}\right)<x<\dfrac{1}{5}$

65. **a)** $3^{1+2x}\cdot 4^{2x-1}\leq 12^{3x-2}$**; b)** $2^{3-4x}\cdot 5^{x+1}>10^{2x-1}$

a) $3^{1+2x}\cdot 4^{2x-1}\leq 3^{3x-2}\cdot 4^{3x-2}\Rightarrow 3^{1+2x-3x+2}\leq 4^{3x-2-2x+1}\Rightarrow 3^{3-x}\leq 4^{x-1}\Rightarrow (3-x)log(3)\leq (x-1)log(4)$ $\Rightarrow [log(3)+log(4)]x\geq 3log(3)+log(4)\Rightarrow log(12)x\geq log(108)\Rightarrow x\geq log(108)/log(12)\Rightarrow x\geq log_{12}(108)$

b) $2^{3-4x}\cdot 5^{x+1}>2^{2x-1}\cdot 5^{2x-1}\Rightarrow 2^{3-4x-2x+1}>5^{2x-1-x-1}\Rightarrow 2^{4-6x}>5^{x-2}\Rightarrow (4-6x)log(2)>(x-2)log(5)\Rightarrow [log(5)+6log(2)]x<2log(5)+4log(2)\Rightarrow log(320)x<log(400)\Rightarrow x<log(400)/log(320)$ $\Rightarrow x<log_{320}(400)$

66. **a)** $\dfrac{2^{4x-5}-6}{2^{3x+1}-7}>0$ **; b)** $\dfrac{5^{3x-2}+2}{3^{4x-1}-2}\leq 0$

a) $\begin{cases}2^{4x-5}-6>0\\ 2^{3x+1}-7>0\end{cases}\vee\begin{cases}2^{4x-5}-6<0\\ 2^{3x+1}-7<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4x-5>log_2(6)\\ 3x+1>log_2(7)\end{cases}\vee\begin{cases}4x-5<log_2(6)\\ 3x+1<log_2(7)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>\dfrac{log_2(6)+5}{4}\\ x>\dfrac{log_2(7)-1}{3}\end{cases}\vee\begin{cases}x<\dfrac{log_2(6)+5}{4}\\ x<\dfrac{log_2(7)-1}{3}\end{cases}\Rightarrow;$

$\Rightarrow\begin{cases}x>log_2\left(\sqrt[4]{150}\right)\\ x>log_2\left(\sqrt[3]{7/2}\right)\end{cases}\vee\begin{cases}x<log_2\left(\sqrt[4]{150}\right)\\ x<log_2\left(\sqrt[3]{7/2}\right)\end{cases}\Rightarrow x<log_2\left(\sqrt[3]{7/2}\right)\vee x>log_2\left(\sqrt[4]{150}\right)$

b) $\begin{cases}5^{3x-2}+2\leq 0\\ 3^{4x-1}-2>0\end{cases}\vee\begin{cases}5^{3x-2}+2\geq 0\\ 3^{4x-1}-2<0\end{cases}\Rightarrow\varnothing\vee\begin{cases}\forall x\in\mathbb{R}\\ 4x-1<log_3(2)\end{cases}\Rightarrow x<\dfrac{log_3(2)+1}{4}=log_3\left(\sqrt[4]{6}\right)$

67. **a)** $\dfrac{7^{3x+2}-3}{4^{2x}-3}\geq 0$**; b)** $\dfrac{12^{3-x}-3}{18^{2-3x}-2}>0$

a) $\begin{cases} 7^{3x+2}-3\ge 0 \\ 4^{2x}-3>0 \end{cases} \vee \begin{cases} 7^{3x+2}-3\le 0 \\ 4^{2x}-3<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{-2+log_7(3)}{3} \\ x>\dfrac{log_4(3)}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x\le \dfrac{-2+log_7(3)}{3} \\ x<\dfrac{log_4(3)}{2} \end{cases} \Rightarrow$;

$\Rightarrow \begin{cases} x\ge log_7\left(\sqrt[3]{\dfrac{3}{49}}\right) \\ x>log_4\left(\sqrt{3}\right) \end{cases} \vee \begin{cases} x\le log_7\left(\sqrt[3]{\dfrac{3}{49}}\right) \\ x<log_4\left(\sqrt{3}\right) \end{cases} \Rightarrow x<log_4\left(\sqrt{3}\right) \vee x\ge log_7\left(\sqrt[3]{\dfrac{3}{49}}\right)$

b) $\begin{cases} 12^{3-x}-3>0 \\ 18^{2-3x}-2>0 \end{cases} \vee \begin{cases} 12^{3-x}-3<0 \\ 18^{2-3x}-2<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<log_{12}(576) \\ x<log_{18}(162) \end{cases} \vee \begin{cases} x>log_{12}(576) \\ x>log_{18}(162) \end{cases} \Rightarrow x<log_{18}(162) \vee x>log_{12}(576)$

68. **a)** $\dfrac{2^{\frac{x+1}{2}}-3^{\frac{4x+1}{3}}}{2^{2x-1}-3^{2x+1}}<0$ **; b)** $\dfrac{3^{2x-1}-2^{3-2x}}{4^x-3^{2-x}}\ge 0$

$\begin{cases} 2^{\frac{x+1}{2}}-3^{\frac{4x+1}{3}}>0 \\ 2^{2x-1}-3^{2x+1}<0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2^{\frac{x+1}{2}}-3^{\frac{4x+1}{3}}<0 \\ 2^{2x-1}-3^{2x+1}>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x+1}{2}log(2)>\dfrac{4x+1}{3}log(3) \\ (2x-1)log(2)<(2x+1)log(3) \end{cases} \vee \ldots \Rightarrow$

a) $\Rightarrow \begin{cases} \left[3log(2)-8log(3)\right]x>2log(3)-3log(2) \\ \left[2log(2)-2log(3)\right]x<log(3)+log(2) \end{cases} \vee \ldots \Rightarrow \begin{cases} log(8/6561)x>log(9/8) \\ log(4/9)x<log(6) \end{cases} \vee \ldots \Rightarrow$;

$\Rightarrow \begin{cases} x<log_{8/6561}(9/8) \\ x>log_{4/9}(6) \end{cases} \vee \begin{cases} x>log_{8/6561}(9/8) \\ x<log_{4/9}(6) \end{cases} \Rightarrow log_{4/9}(6)<x<log_{8/6561}(9/8)$

b) $\begin{cases} 3^{2x-1}-2^{3-2x}\ge 0 \\ 4^x-3^{2-x}>0 \end{cases} \vee \begin{cases} 3^{2x-1}-2^{3-2x}\le 0 \\ 4^x-3^{2-x}<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} log(36)x\ge log(24) \\ log(12)x>log(9) \end{cases} \vee \begin{cases} log(36)x\le log(24) \\ log(12)x<log(9) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x\ge log_{36}(24) \\ x>log_{12}(9) \end{cases} \vee \begin{cases} x\le log_{36}(24) \\ x<log_{12}(9) \end{cases} \Rightarrow x<log_{12}(9) \vee x\ge log_{36}(24)$

69. **a)** $\dfrac{6^{2x-3}-4^{x+2}}{4^{5x-2}-6^{3+2x}}\le 0$ **; b)** $\mathbf{2^{2x-1}\cdot 3^{1-x}\le 6^x}$

a) $\begin{cases} 6^{2x-3}-4^{x+2}\le 0 \\ 4^{5x-2}-6^{3+2x}>0 \end{cases} \vee \begin{cases} 6^{2x-3}-4^{x+2}\ge 0 \\ 4^{5x-2}-6^{3+2x}<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\le log_9(3456) \\ x>log_{256/9}(3456) \end{cases} \vee \begin{cases} x\ge log_9(3456) \\ x<log_{256/9}(3456) \end{cases} \Rightarrow log_{256/9}(3456)<x\le log_9(3456)$

b) $2^{2x-1}\cdot 3^{1-x}\le 2^x\cdot 3^x \Rightarrow 2^{x-1}\le 3^{2x-1} \Rightarrow [log(2)-2log(3)]x\le log(2)-log(3) \Rightarrow log(2/9)x\le log(2/3)$
$\Rightarrow x\ge log_{2/9}(2/3)$

70. **a)** $\dfrac{3\cdot 2^{2^x}-4^{2^x}-2}{9^x-3^x-1}\ge 0$ **; b)** $\dfrac{2\cdot 5^{2x}-5^x-2}{49^x-2\cdot 7^x-1}\le 0$

a) $\begin{cases} 4^{2^x}-3\cdot 2^{2^x}+2\le 0 \\ 9^x-3^x-1>0 \end{cases} \vee \begin{cases} 4^{2^x}-3\cdot 2^{2^x}+2\ge 0 \\ 9^x-3^x-1<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{2^x}\le 1 \vee 2^{2^x}\ge 2 \\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}<3^x<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} 1\le 2^{2^x}\le 2 \\ 3^x<\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \vee 3^x>\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow$;

$\Rightarrow \begin{cases} 2^x\le 0 \vee 2^x\ge 1 \\ 3^x<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} 0\le 2^x\le 1 \\ 3^x>\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x<log_3\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases} \vee \begin{cases} x\le 0 \\ x>log_3\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow 0\le x<log_3\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

b) $\begin{cases} 2\cdot 5^{2x}-5^x-2\le 0 \\ 49^x-2\cdot 7^x-1>0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2\cdot 5^{2x}-5^x-2\ge 0 \\ 49^x-2\cdot 7^x-1<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1-\sqrt{17}}{4}\le 5^x\le \frac{1+\sqrt{17}}{4} \\ 7^x<1-\sqrt{2}\vee 7^x>1+\sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} 5^x\le \frac{1-\sqrt{17}}{4}\vee 5^x\ge \frac{1+\sqrt{17}}{4} \\ 1-\sqrt{2}<7^x<1+\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 5^x\le \frac{1+\sqrt{17}}{4} \\ 7^x>1+\sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} 5^x\ge \frac{1+\sqrt{17}}{4} \\ 7^x<1+\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\le log_5\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right) \\ x>log_7\left(1+\sqrt{2}\right) \end{cases} \vee \begin{cases} x\ge log_5\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right) \\ x<log_7\left(1+\sqrt{2}\right) \end{cases} \Rightarrow log_5\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)\le x<log_7\left(1+\sqrt{2}\right)$

71. **Un capitale iniziale di € 15000,00 è investito in un'obbligazione che paga un interesse annuo del 2,87%, che viene però aggiunto al capitale. Quale sarà la somma liquidata dopo 15 anni?**
€15000,00 · $(1 + 0{,}0287)^{15}$ = € 22930,97
72. **Con riferimento al problema precedente, se l'inflazione annua è mediamente del 1,38% annuo, quale sarà il valore reale del capitale finale? L'inflazione deve intendersi come una capitalizzazione a interesse negativo.**
€ 22930,97 · $(1 – 0{,}0138)^{15}$ = € 18616,47
73. **Dopo quanti anni, minimo, un capitale di € 18000, diventa € 24000 o più, in regime di capitalizzazione composta al tasso del 2,15% annuo?**
€ 24000,00 · $(1 + 0{,}0215)^n \ge$ € 24000,00 $\Rightarrow n \ge 14$
74. **Dopo quanti anni, minimo, un capitale, in regime di capitalizzazione composta al tasso del 3,19% annuo, raddoppia?**
$(1 + 0{,}0319)^n \ge 2 \Rightarrow n \ge 23$
75. **Con riferimento al problema della capitalizzazione composta, se il capitale investito raddoppia, senza calcolare l'inflazione, dopo 23 anni, qual è l'interesse annuo?**
$(1 + i)^{23} \ge 2 \Rightarrow i \ge 3{,}06\%$
76. **La popolazione di una città è inizialmente formata da 214000 abitanti, sapendo che essa aumenta in media del 3,12% l'anno, determinare dopo quanti anni raddoppia di numero. Il dato sul numero degli abitanti è necessario per risolvere il problema?**
$(1 + 0{,}0312)^n \ge 2 \Rightarrow n \ge 22{,}57$; no dato che chiediamo una percentuale e non un determinato valore
77. **Per eliminare i parassiti viene spruzzato un prodotto medicinale sulle arance, che assorbono il 100% del prodotto e ogni 4 giorni dimezzano il loro contenuto di tossicità. Dato che una percentuale superiore al 10% di residuo tossico fa sì che le arance non vengano dichiarate commestibili, qual è il minimo numero di giorni che devono attendersi affinché le arance possano essere mangiate?**
$(1 – 0{,}5)^n \le 0{,}1 \Rightarrow n \ge 3{,}32$. Questi sono il numero di periodi, non di giorni, quindi $g \ge 3{,}32 \cdot 4 \ge 14$
78. **In una immaginaria nazione la crisi economica produce un'inflazione del 5% mensile. Se gli stipendi vengono adeguati mensilmente all'inflazione, un operaio che a Gennaio guadagna 2000 monete, quante monete guadagnerà il successivo Dicembre?**
$2000 \cdot (1 + 0{,}05)^{11} = 3420{,}68$
79. **Una coltura batterica triplica di numero ogni 35 minuti. a) Se inizialmente è formata da 450 batteri, dopo quanti minuti avremo almeno un milione di batteri? b) Se invece raggiungessimo i 100 milioni dopo 1000 minuti, quale sarebbe il tasso di accrescimento al minuto?**
   a) $450 \cdot (1 + 2)^n \ge 10^6 \Rightarrow n \ge 7{,}01$. Questi sono il numero di periodi, non di minuti, quindi $m \ge 7{,}01 \cdot 35 \ge 246$
   b) $450 \cdot (1 + i)^{1000} \ge 10^8 \Rightarrow i \ge 0{,}012 = 1{,}2\%$.
80. **Un capitale di € 15000 viene investito in regime di capitalizzazione composta al 2,75% annuo, se dopo 12 anni il valore reale del capitale, al netto dell'inflazione, è di € 16703,64, quanto vale il tasso di inflazione medio?**
€ 15000 · $(1 + 0{,}275)^{12}$ = € 20771,76 ⇒ € 20771,76 · $(1 + i)^{12}$ = € 16703,64 ⇒ $i = –1{,}85\%$
81. **Un capitale di € 15000 viene investito in regime di capitalizzazione composta al 3,25% annuo, se dopo *x* anni il valore reale del capitale, al netto dell'inflazione al 1,7% medio annuo, è di € 19591,86, quanto vale *x*?**
€ 15000 · $(1 + 0{,}0325)^x \cdot (1 – 0{,}017)^x$ = € 19591,86 $\Rightarrow x = 18$

Equazioni e disequazioni logaritmiche

Risolvi le seguenti equazioni logaritmiche

Per i primi esercizi non è necessario considerare la condizione di realtà sull'argomento, dato che l'equazione la contiene.

1. **a) $log_2(2x^2 - x) = 1$; b) $log_3(1 - x) = 2$; c) $log_{1/2}(3x - 1) = 3$; d) $log_{\sqrt{2}}(2x+1) = 2$; e) $log_4(x^2 - 1) = -1$**

   a) $2x^2 - x = 1 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$; b) Come prima: $1 - x = 9 \Rightarrow x = -8$; c) $3x - 1 = 1/8 \Rightarrow x = 3/8$;

   d) $2x + 1 = 2 \Rightarrow x = ½$; e) $x^2 - 1 = ¼ \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$

2. **a) $log_{3/4}(x^2 + x - 1) = -2$; b) $log(3x - 2) = 2$; c) $log(2 + 5x) = -1$; d) $ln(1 - x) = 2$; e) $log_2(x^2 - 2x + 1) = -2$**

   a) $x^2 + x - 1 = 16/9 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{109}}{6}$; b) $3x - 2 = 100 \Rightarrow x = 34$; c) $2 + 5x = 1/10 \Rightarrow x = -19/50$;

   d) $1 - x = e^2 \Rightarrow x = 1 - e^2$; e) $x^2 - 2x + 1 = ¼ \Rightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = \frac{3}{2}$

3. **a) $log_3(2x^2 + x) = -1$; b) $ln(x^2 - 2x + e) = -1$; c) $log_{\sqrt[3]{2}}(x^2 + 3x) = 9$; d) $log_{1/\sqrt{2}}(4x^2 - 2x - 1) = -4$**

   a) $2x^2 + x = 1/3 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{12}$; b) $x^2 - 2x + e = 1/e \Rightarrow \varnothing$; c) $x^2 + 3x = 8 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{41}}{2}$;

   d) $4x^2 - 2x - 1 = 4 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{4}$

4. **a) $log(x^2 + 100) = 2$; b) $log(100x^2 + 101) = 2$; c) $log(x^2 - x + 999) = 3$; d) $ln(x^2 - e) = 2$; e) $ln(x^2 + x) = 1$**

   a) $x^2 + 100 = 100 \Rightarrow x = 0$; b) $100x^2 + 101 = 100 \Rightarrow \varnothing$; c) $x^2 - x + 999 = 1000 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$;

   d) $x^2 - e = e^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{e^2 + e}$; e) $x^2 + x = e \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4e}}{2}$

5. **a) $log_4(x^2 + x + 2) = 1/2$; b) $log_2(x^2 - 3) = 1/2$; c) $log_2(2x^2 + 1) = -1/2$; d) $log_{½}(1 - x^2) = -½$**

   a) $x^2 + x + 2 = 2 \Rightarrow x = -1 \vee x = 0$; b) $x^2 - 3 = \sqrt{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{2 + \sqrt{3}}$; c) $2x^2 + 1 = 1/\sqrt{2} \Rightarrow \varnothing$;

   d) $1 - x^2 = \sqrt{2} \Rightarrow \varnothing$

6. **a) $log^2(x - 1) + 3\,log(x - 1) + 2 = 0$; b) $log^3(x^2 - 2) = 1$; c) $log^2(2 - x) = log(2 - x)$**

   a) $\begin{cases} x - 1 > 0 \\ log(x-1) = \frac{-3 \pm 1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ log(x-1) = \prec \begin{matrix} -2 \\ -1 \end{matrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x - 1 = 1/100 \vee x - 1 = 1/10 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{101}{100} \vee x = \frac{11}{10}$;

   b) $log(x^2 - 2) = 1 \Rightarrow x^2 - 2 = 10 \Rightarrow x = \pm 2 \cdot \sqrt{3}$;

   c) $log(2 - x) = 0 \vee log(2 - x) = 1 \Rightarrow 2 - x = 1 \vee 2 - x = 10 \Rightarrow x = 1 \vee x = -8$

7. **a) $log^2_2(x - 2) - 5log_2(x - 2) = 6$; b) $2log^2_2(2x + 1) + log_2(2x + 1) - 1 = 0$; c) $log_8(1 - x^2) = 1/3$**

   a) $\begin{cases} x - 2 > 0 \\ log_2(x-2) = \frac{5 \pm 7}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ log_2(x-2) = \prec \begin{matrix} 6 \\ -1 \end{matrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x - 2 = 64 \vee x - 2 = 1/2 \end{cases} \Rightarrow x = 66 \vee x = \frac{5}{2}$;

   b) $\begin{cases} 2x + 1 > 0 \\ log_2(2x+1) = \frac{-1 \pm 3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1/2 \\ log_2(2x+1) = \prec \begin{matrix} 1/2 \\ -1 \end{matrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1/2 \\ 2x + 1 = \sqrt{2} \vee 2x + 1 = 1/2 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \vee x = -\frac{1}{4}$;

   c) $1 - x^2 = 2 \Rightarrow \varnothing$

8. **a)** $\log_3(x-3)-\log_3(3x+2)=\log_3(1+x)$; **b)** $\log_4(3-4x)+\log_4(5+2x)=\log_4(3x+7)$

a) $\log_3(x-3)=\log_3[(3x+2)(1+x)] \Rightarrow \begin{cases} x-3>0 \\ 3x+2>0 \\ 1+x>0 \\ x-3=3x^2+5x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>3 \\ x>-2/3 \\ x>-1 \\ 3x^2+4x+8=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>3 \\ \Delta=16-96<0 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$;

b) $\begin{cases} 3-4x>0 \\ 5+2x>0 \\ 3x+7>0 \\ -8x^2-14x+15=3x+7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<3/4 \\ x>-5/2 \\ x>-7/3 \\ 8x^2+17x-8=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{7}{3}<x<\frac{3}{4} \\ x=\frac{-17\pm\sqrt{545}}{16} \end{cases} \Rightarrow x=\frac{-17\pm\sqrt{545}}{16}$

9. **a)** $\log(x+8)-\log(1-5x)=\log(2+3x)$; **b)** $\log_\pi(13+3x)+\log_\pi(7-3x)=\log_\pi(5x-2)$

a) $\begin{cases} x+8>0 \\ 1-5x>0 \\ 2+3x>0 \\ x+8=2-7x-15x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-8 \\ x<1/5 \\ x>-2/3 \\ 15x^2+8x+6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{2}{3}<x<\frac{1}{5} \\ \Delta=64-240<0 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$;

b) $\begin{cases} 13+3x>0 \\ 7-3x>0 \\ 5x-2>0 \\ 91-18x-9x^2=5x-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-13/2 \\ x<7/3 \\ x>2/5 \\ 9x^2+23x-93=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{5}<x<\frac{7}{3} \\ x=\frac{-23\pm\sqrt{3877}}{18} \end{cases} \Rightarrow x=\frac{-23+\sqrt{3877}}{18}$

10. **a)** $\ln(x^2-3)-\ln(x+2)=\ln(3-2x)$; **b)** $\log_{2/3}(x+2)-\log_{2/3}(3x-2)=2$

a) $\begin{cases} x^2-3>0 \\ x+2>0 \\ 3-2x>0 \\ x^2-3=6-x-2x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-\sqrt{3} \vee x>\sqrt{3} \\ x>-2 \\ x<3/2 \\ 3x^2+x-9=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2<x<-\sqrt{3} \\ x=\frac{-1\pm\sqrt{109}}{6} \end{cases} \Rightarrow x=\frac{-1-\sqrt{109}}{6}$;

b) $\begin{cases} x+2>0 \\ 3x-2>0 \\ x+2=\frac{4}{9}(3x-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x>2/3 \\ 9x+18=12x-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>\frac{2}{3} \\ x=\frac{26}{3} \end{cases} \Rightarrow x=\frac{26}{3}$

11. **a)** $\log_4(1+3x)+\log_4(11-5x)=\log_4(x^2-x+1)$; **b)** $\log_3(x+1)-\log_3(2x)=-1$

a) $\begin{cases} 1+3x>0 \\ 11-5x>0 \\ x^2-x+1>0 \\ 11+28x-15x^2=x^2-x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1/3 \\ x<11/5 \\ \forall x\in\mathbb{R} \\ 16x^2-29x-10=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3}<x<\frac{11}{5} \\ x=\frac{29\pm\sqrt{1481}}{32} \end{cases} \Rightarrow x=\frac{29\pm\sqrt{1481}}{32}$;

b) $\begin{cases} x+1>0 \\ 2x>0 \\ x+1=2x\cdot 1/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x>0 \\ 3x+3=2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x=-3 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$

12. **a)** $\log(2x^2+x)-\log(x-4)=\log(1+3x)$; **b)** $\log(2-3x)+\log(4x-1)=\log(3x^2-x+1)$

a) $\begin{cases} 2x^2+x>0 \\ x-4>0 \\ 1+3x>0 \\ 2x^2+x=3x^2-11x-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x\in\mathbb{R} \\ x>4 \\ x>-1/3 \\ x^2-12x-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>4 \\ x=6\pm\sqrt{40} \end{cases} \Rightarrow x=6+2\sqrt{10}$;

b) $\begin{cases} 2-3x>0 \\ 4x-1>0 \\ 3x^2-x+1>0 \\ 11x-12x^2-2=3x^2-x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<2/3 \\ x>1/4 \\ \forall x\in\mathbb{R} \\ 15x^2-12x+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}<x<\frac{2}{3} \\ \varnothing \end{cases} \Rightarrow \varnothing$

13. **a)** $log_{\sqrt{2}}\left(2x^2-3x+1\right)-log_{\sqrt{2}}\left(1+x\right)=log_{\sqrt{2}}\left(4-x\right)$**; b)** $\boldsymbol{log_2(2x-3)-log_2(3)=1}$

a) $\begin{cases} 2x^2-3x+1>0 \\ 1+x>0 \\ 4-x>0 \\ 2x^2-3x+1=4-x^2+3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<1\vee x>2 \\ x>-1 \\ x<4 \\ x^2-2x-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1<x<1\vee 2<x<4 \\ x=1\pm\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow x=1\pm\sqrt{2}\,;$

b) $\begin{cases} 2x-3>0 \\ 2x-3=3\cdot 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>\frac{3}{2} \\ x=\frac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow x=\frac{9}{2}$

14. **a)** $\boldsymbol{log_3(1+2x)+log_3(3x-1)=log_3(x^2+4)}$**; b)** $\boldsymbol{log_2(2x+1)+log_2(1-x)=2}$

a) $\begin{cases} 1+2x>0 \\ 3x-1>0 \\ x^2+4>0 \\ x+6x^2-1=x^2+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1/2 \\ x>1/3 \\ \forall x\in\mathbb{R} \\ 5x^2+x-5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{3} \\ x=\frac{-1\pm\sqrt{101}}{10} \end{cases} \Rightarrow x=\frac{-1+\sqrt{101}}{10}\,;$

b) $\begin{cases} 2x+1>0 \\ 1-x>0 \\ x-2x^2+1=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1/2 \\ x<1 \\ 2x^2-x+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}<x<1 \\ \varnothing \end{cases} \Rightarrow \varnothing$

15. **a)** $\boldsymbol{2log_2(x-1)-log_2(3x+2)=2}$**; b)** $\boldsymbol{log(x^2-1)-log(3x+1)=1}$

a) $\begin{cases} x-1>0 \\ 3x+2>0 \\ (x-1)^2=4\cdot(3x+2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ x>-2/3 \\ x^2-14x-7=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ x=7\pm\sqrt{56} \end{cases} \Rightarrow x=7+\sqrt{56}\,;$

b) $\begin{cases} x^2-1>0 \\ 3x+1>0 \\ x^2-1=10\cdot(3x+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-1\vee x>1 \\ x>-1/3 \\ x^2-30x-11=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ x=15\pm\sqrt{236} \end{cases} \Rightarrow x=15+\sqrt{236}$

16. **a)** $log_{\frac{1}{2}}\left(1-3x\right)+log_{\frac{1}{2}}\left(4+x\right)=-3$**; b)** $\boldsymbol{log(x-2)+log(1+x)=-1}$

a) $\begin{cases} 1-3x>0 \\ 4+x>0 \\ (1-3x)(4+x)=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<1/3 \\ x>-4 \\ 3x^2+11x+4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4<x<1/3 \\ x=\frac{-11\pm\sqrt{73}}{6} \end{cases} \Rightarrow x=\frac{-11\pm\sqrt{73}}{6}\,;$

b) $\begin{cases} x-2>0 \\ 1+x>0 \\ (x-2)(1+x)=1/10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>2 \\ x>-1 \\ 10x^2-10x-21=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>2 \\ x=\frac{5\pm\sqrt{235}}{10} \end{cases} \Rightarrow x=\frac{5+\sqrt{235}}{10}$

17. **a)** $\boldsymbol{ln(x^2+x)-ln(3x+2)=-1}$**; b)** $\boldsymbol{ln(4x+1)+ln(3-2x)=2}$

a) $\begin{cases} x^2+x>0 \\ 3x+2>0 \\ x^2+x=(3x+2)/e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-1\vee x>0 \\ x>-2/3 \\ ex^2+(e-3)x-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2/3<x<-1\vee x>0 \\ x=\frac{3-e\pm\sqrt{e^2+2e+9}}{2e} \end{cases} \Rightarrow x=\frac{3-e+\sqrt{e^2+2e+9}}{2e}\,;$

b) $\begin{cases} 4x+1>0 \\ 3-2x>0 \\ -8x^2+10x+3=e^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1/4 \\ x<3/2 \\ 8x^2-10x-3+e^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1/4<x<3/2 \\ \frac{\Delta}{4}=25+24-8e^2<0 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$

18. **a) $log_2(2x + 3) = log_{1/2}(3x – 2)$; b) $log_{1/4}(5 – 3x) + log_4(3 – 5x) = 0$**

a) $log_2(2x + 3) + log_2(3x – 2) = 0$; b) $log_{1/4}(5 – 3x) = log_{1/4}(3 – 5x)$

$$\begin{cases} 2x+3>0 \\ 3x-2>0 \\ 6x^2+5x-6=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-3/2 \\ x>2/3 \\ 6x^2+5x-7=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>2/3 \\ x=\frac{-5\pm\sqrt{193}}{12} \end{cases} \Rightarrow x=\frac{-5+\sqrt{193}}{12}$$

b) $\begin{cases} 5-3x>0 \\ 3-5x>0 \\ 5-3x=3-5x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<5/3 \\ x<3/5 \\ 2x=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<5/3 \\ x=-1 \end{cases} \Rightarrow x=-1$

19. **a) $log_2(3x + 1) = log_4(2 – x)$; b) $log_2(1 + x) – log_8(5x^2 + 8x – 5) = 0$**

a) $log_2(3x + 1) = log_2(2 – x)/2 \Rightarrow log_2(3x+1)=log_2\sqrt{2-x}$;

$$\begin{cases} 3x+1>0 \\ 2-x>0 \\ 3x+1=\sqrt{2-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1/3 \\ x<2 \\ 9x^2+6x+1=2-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1/3<x<2 \\ 9x^2+7x-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1/3<x<2 \\ x=\frac{-7\pm\sqrt{85}}{18} \end{cases} \Rightarrow x=\frac{-7+\sqrt{85}}{18}$$

b) $log_2(1 + x) – log_2(5x^2 + 8x – 5)/3 = 0 \Rightarrow log_2(1+x)=log_2\sqrt[3]{5x^2+8x-5}$

$$\begin{cases} 1+x>0 \\ 5x^2+8x-5>0 \\ 1+x=\sqrt[3]{5x^2+8x-5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x<-2 \vee x>\frac{2}{5} \\ 1+x^3+3x^2+3x=5x^2+8x-5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x>2/5 \\ x^3-2x^2-5x+6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>2/5 \\ x=-2 \vee x=1 \vee x=3 \end{cases} \Rightarrow x=1 \vee x=3$$

20. **a) $log_9(x^2 + 2x + 1) = log_3(2x – 1)$; b) $log_9(2 – 8x^2 + 3x) + log_{1/3}(2x + 1) = 0$**

a) $log_3[(x + 1)^2]/2 = log_3(2x – 1) \Rightarrow log_3(x + 1) = log_3(2x – 1)$; $\begin{cases} x+1>0 \\ 2x-1>0 \\ x+1=2x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x>1/2 \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow x=2$;

b) $log_9(2 – 8x^2 + 3x) + log_9(2x + 1)/(–2) = 0 \Rightarrow (2 – 8x^2 + 3x)/(2x + 1)^2 = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2-8x^2+3x>0 \\ 2x+1>0 \\ 2-8x^2+3x=4x^2+4x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3-\sqrt{73}}{16}<x<\frac{3+\sqrt{73}}{16} \\ x>-1/2 \\ 12x^2+x-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3-\sqrt{73}}{16}<x<\frac{3+\sqrt{73}}{16} \\ x=-\frac{1}{3} \vee x=\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow x=-\frac{1}{3} \vee x=\frac{1}{4}$$

21. **a) $log_2(3 + 5x) = log_{\sqrt{2}}(3x)$; b) $log_{\frac{1}{3}}(1+7x)+log_{\sqrt{3}}(4x-1)=0$**

a) $log_2(3+5x)=log_2(9x^2) \Rightarrow \begin{cases} 3+5x>0 \\ 3x>0 \\ 3+5x=9x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-5/3 \\ x>0 \\ 9x^2-5x-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x=\frac{5\pm\sqrt{133}}{18} \end{cases} \Rightarrow x=\frac{5+\sqrt{133}}{18}$;

b) $log_{\frac{1}{3}}(1+7x)+log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{(4x-1)^2}=0 \Rightarrow log_{\frac{1}{3}}(1+7x)=log_{\frac{1}{3}}\left[(4x-1)^2\right]$

$$\begin{cases} 1+7x>0 \\ 4x-1>0 \\ 1+7x=16x^2-8x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1/7 \\ x>1/4 \\ 16x^2-15x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1/4 \\ x=0 \vee x=\frac{15}{16} \end{cases} \Rightarrow x=\frac{15}{16}$$

22. **a)** $\boldsymbol{log_{2x}(3x + 2) - log_{2x}(1 + x^2) + log_{2x}(5 - 7x) = 0}$**; b)** $2 \cdot log_{x^4-1}\left(3x^2-1\right)=1$

a) $\begin{cases} 2x>0 \\ 2x\neq 1 \\ 3x+2>0 \\ 1+x^2>0 \\ 5-7x>0 \\ (3x+2)(5-7x)=1+x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 1/2 \\ x>-2/3 \\ \forall x\in\mathbb{R} \\ x<5/7 \\ 22x^2-x-9=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<x<\dfrac{5}{7}, x\neq\dfrac{1}{2} \\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{793}}{44} \end{cases} \Rightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{793}}{44}$;

b) $\begin{cases} x^4-1>0 \\ x^4-1\neq 1 \\ 3x^2-1>0 \\ \left(3x^2-1\right)^2=x^4-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-1\vee x>1 \\ x\neq 0 \\ x<-1/\sqrt{3}\vee x>1/\sqrt{3} \\ 8x^4-6x^2+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-1\vee x>1 \\ \Delta=36-64<0 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$

23. **a)** $log_{x^2-1}(1-x)-log_{x^2-1}\left(3x^2+x\right)+log_{x^2-1}(1+3x)=0$**; b)** $log_{\frac{1}{4}}\left[log_9\left(x^2-x\right)\right]=\dfrac{1}{2}$

a) $\begin{cases} x^2-1>0 \\ x^2-1\neq 1 \\ 1-x>0 \\ 3x^2+x>0 \\ 1+3x>0 \\ (1-x)(1+3x)=3x^2+x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-1\vee x>1 \\ x\neq\pm\sqrt{2} \\ x<1 \\ x<-3\vee x>0 \\ x>-1/3 \\ 6x^2-x-1=0 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$;

b) $log_9\left(x^2-x\right)=\sqrt{\dfrac{1}{4}} \Rightarrow \begin{cases} x^2-x>0 \\ x^2-x=\sqrt{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<0\vee x>1 \\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2} \end{cases} \Rightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$

24. **a)** $\boldsymbol{log_4[log_3(x^2 + 2)] = 1/2}$**; b)** $log_2\left\{log_{1/3}\left[log_{\sqrt{2}}\left(1-x^2\right)\right]\right\}=1$**; c)** $log_2\left[log_{\sqrt{3}}\left(x^2-x\right)\right]=2$

a) $log_3(x^2+2)=2 \Rightarrow \begin{cases} x^2+2>0 \\ x^2+2=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x\in\mathbb{R} \\ x=\pm\sqrt{7} \end{cases} \Rightarrow x=\pm\sqrt{7}$;

b) $\Rightarrow log_{\sqrt{2}}\left(1-x^2\right)=\dfrac{1}{9} \Rightarrow \begin{cases} 1-x^2>0 \\ 1-x^2=\sqrt[18]{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-1\vee x>1 \\ x^2=1-\sqrt[18]{2} \end{cases} \Rightarrow \varnothing$;

c) $log_{\sqrt{3}}\left(x^2-x\right)=4 \Rightarrow \begin{cases} x^2-x>0 \\ x^2-x=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<0\vee x>1 \\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{37}}{2} \end{cases} \Rightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{37}}{2}$

25. **a)** $log_{\sqrt{2}}\left[log_2\left(2x^2+1\right)\right]=4$**; b)** $\boldsymbol{log_3\{log_2[log_4(3x + 1)]\} = 0}$**; c)** $\boldsymbol{log_{81}[log_3(3 + 2x)] = 1/4}$

a) $log_2\left(2x^2+1\right)=4 \Rightarrow \begin{cases} 2x^2+1>0 \\ 2x^2+1=16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x\in\mathbb{R} \\ x=\pm\sqrt{\dfrac{15}{2}} \end{cases} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{15}{2}}$;

b) $log_2[log_4(3x + 1)] = 1 \Rightarrow log_4(3x + 1) = 2 \Rightarrow \begin{cases} 3x+1>0 \\ 3x+1=16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1/3 \\ x=5 \end{cases} \Rightarrow x=5$;

c) $log_3(3 + 2x) = 3 \Rightarrow \begin{cases} 3+2x>0 \\ 3+2x=27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-3/2 \\ x=12 \end{cases} \Rightarrow x=12$

26. **a)** $log_{\sqrt{2}}\left[log_3(3x-1)\right]=2$**; b)** $log_{x^2}\left(1-3x^2+x\right)=1/2$

a) $log_3(3x-1)=2 \Rightarrow \begin{cases} 3x-1>0 \\ 3x-1=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1/3 \\ x=10/3 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{10}{3}$;

b) $\begin{cases} x^2>0 \\ x^2\neq 1 \\ 1-3x^2+x>0 \\ 1-3x^2+x=\sqrt{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq \pm 1 \\ \frac{1-\sqrt{13}}{6}<x<\frac{1+\sqrt{13}}{6} \\ 1-3x^2+x=\pm x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1-\sqrt{13}}{6}<x<\frac{1+\sqrt{13}}{6}, x\neq 0 \\ 3x^2-1=0 \vee 3x^2-2x+1=0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1-\sqrt{13}}{6}<x<\frac{1+\sqrt{13}}{6}, x\neq 0 \\ x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}} \vee x=-\frac{1}{3} \vee =1 \end{cases} \Rightarrow x=-\frac{1}{3} \vee x=\sqrt{\frac{1}{3}}$

Spiegare, senza effettuare alcun calcolo, perché le seguenti equazioni logaritmiche non hanno soluzioni

27. **a)** $\boldsymbol{log_2(x^2-2)+log_2(-x^2)=x}$**; b)** $\boldsymbol{log_2(x-2)-log_3(2-x)=1}$**; c)** $\boldsymbol{log^2(2x-1)=-5}$

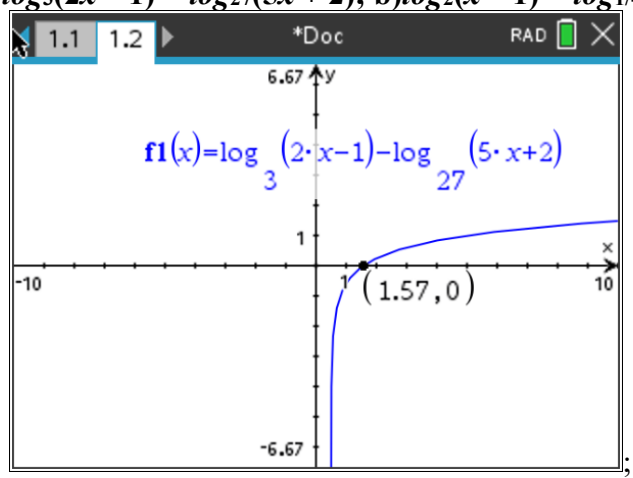
a) $log_2(-x^2)$ non è reale, dato che l'argomento non è mai positivo;
b) Se il primo argomento è positivo il secondo è negativo e viceversa;
c) Il primo membro non è mai negativo mentre il secondo lo è

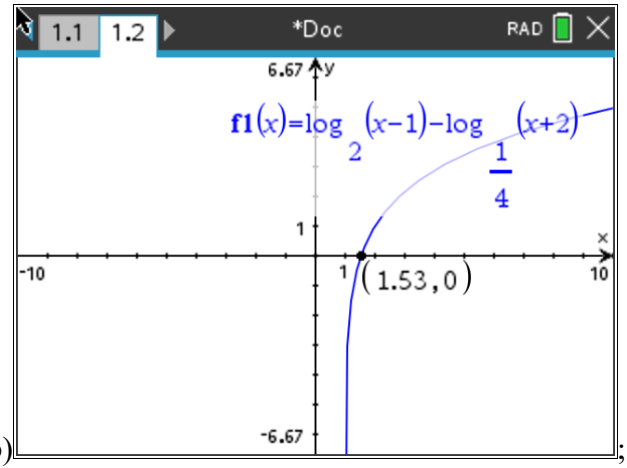
28. **a)** $\boldsymbol{log_{x-1}(x-1)=2}$ **; b)** $log_{x^2-3x+1}\left(\frac{x-1}{2-2x}\right)=3$**; c)** $\boldsymbol{log(x^2+2)=-2}$

a) Base e argomento hanno segni opposti; b) L'argomento, per $x = 1$ non ha significato, per $x \neq 1$ è negativo c) Base e argomento sono entrambi maggiori di 1, qauindi il logaritmo non può essere negativo

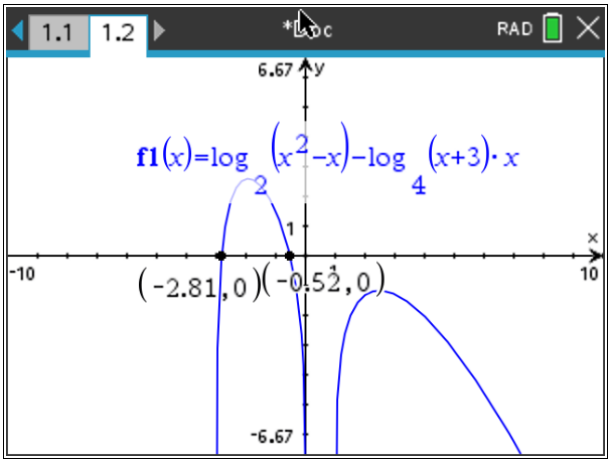
Per la risoluzione di queste equazioni usa una calcolatrice grafica o un software grafico

29. **a)** $\boldsymbol{log_3(2x-1)=log_{27}(5x+2)}$**; b)**$\boldsymbol{log_2(x-1)=log_{1/4}(x+2)}$**; c)**$\boldsymbol{log_2(x^2-x)=log_4(x+3)x}$

a) 

; b) 

;

c) 

30. **a)** $\begin{cases} log_4(x)-log_4(y)=0 \\ log_4(x)+log_4(y)=1 \end{cases}$ **; b)** $\begin{cases} log_2(x)+log_2(y)=-1 \\ 2\cdot log_2(x)-3\cdot log_2(y)=2 \end{cases}$ **; c)** $\begin{cases} log_3(x+1)-log_3(y-1)=2 \\ log_3(x+1)-2\cdot log_3(y-1)=-1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} log_4(x)=log_4(y) \\ 2log_4(y)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} log_4(x)=1/2 \\ log_4(y)=1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases};$

b) $\begin{cases} log_2(x)=-log_2(y)-1 \\ -2\cdot log_2(y)-2-3\cdot log_2(y)=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} log_2(x)=4/5-1 \\ log_2(y)=-4/5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2^{-1/5} \\ y=2^{-4/5} \end{cases};$

c) $\begin{cases} log_3(x+1)=2+log_3(y-1) \\ 2+log_3(y-1)-2\cdot log_3(y-1)=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} log_3(x+1)=5 \\ log_3(y-1)=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1=243 \\ y-1=27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=242 \\ y=28 \end{cases}$

31. **a)** $\begin{cases} log_2(x+2)+3\cdot log_3(y)=4 \\ 3\cdot log_2(x+2)-log_3(y)=5 \end{cases}$ **; b)** $\begin{cases} log_{\sqrt{2}}(2x+1)-2\cdot log_{\sqrt{3}}(4y-1)=2 \\ 3\cdot log_{\sqrt{2}}(2x+1)-4\cdot log_{\sqrt{3}}(4y-1)=0 \end{cases}$ **; c)** $\begin{cases} log_2(x^2)+3\cdot log_4(y^2)=4 \\ 2\cdot log_2(x)-4\cdot log_4(\sqrt{y})=1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} log_2(x+2)=4-3\cdot log_3(y) \\ 12-9\cdot log_3(y)-log_3(y)=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} log_2(x+2)=4-21/10 \\ log_3(y)=7/10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2=2^{19/10} \\ y=3^{7/10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2^{19/10}-2 \\ y=3^{7/10} \end{cases};$

b) $\begin{cases} log_{\sqrt{2}}(2x+1)=2+2\cdot log_{\sqrt{3}}(4y-1) \\ 6+6\cdot log_{\sqrt{3}}(4y-1)-4\cdot log_{\sqrt{3}}(4y-1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} log_{\sqrt{2}}(2x+1)=-4 \\ log_{\sqrt{3}}(4y-1)=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+1=1/4 \\ 4y-1=\sqrt{3}/9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{3}{8} \\ y=\dfrac{\sqrt{3}+9}{36} \end{cases};$

c) $\begin{cases} 2\cdot log_2(x)+6\cdot log_4(y)=4 \\ 2\cdot log_2(x)-4\cdot log_4(\sqrt{y})=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\cdot log_2(x)=4-6\cdot log_4(y) \\ 4-6\cdot log_4(y)-2\cdot log_4(y)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\cdot log_2(x)=4-9/4 \\ log_4(y)=3/8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2^{7/8} \\ y=2^{3/4} \end{cases}$

32. **a)** $\begin{cases} 2\cdot log(2x+1)+5\cdot log(1-2y)=1 \\ 4\cdot log(2x+1)-3\cdot log(1-2y)=-3 \end{cases}$ **; b)** $\begin{cases} 3\cdot log(x+y)+2\cdot log(x-y)=1 \\ log(x-y)-log(x+y)=4 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2\cdot log(2x+1)=1-5\cdot log(1-2y) \\ 2-10\cdot log(1-2y)-3\cdot log(1-2y)=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\cdot log(2x+1)=1-25/13 \\ 1-2y=10^{5/13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+1=10^{-6/13} \\ 1-2y=10^{5/13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{10^{-6/13}-1}{2} \\ y=\dfrac{1-10^{5/13}}{2} \end{cases};$

b) $\begin{cases} 3\cdot log(x+y)+8+2\cdot log(x+y)=1 \\ log(x-y)=4+log(x+y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} log(x+y)=-7/5 \\ log(x-y)=13/5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=10^{-7/5} \\ x-y=10^{13/5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{10^{-7/5}+10^{13/5}}{2} \\ y=\dfrac{10^{-7/5}-10^{13/5}}{2} \end{cases}$

33. **a)** $\begin{cases} log_{1/3}(3x+1)-4/3\cdot log_3(4y)=4/3 \\ 3/2\cdot log_3(4y)+2/3\cdot log_{1/3}(3x+1)=-3/4 \end{cases}$ **; b)** $\begin{cases} log_{1/2}(x+1)+4\cdot log_2(y-2)=1/2 \\ 2/5\cdot log_2(y-2)-5/2\cdot log_{1/2}(x+1)=1/3 \end{cases}$

a) $\begin{cases} log_{1/3}(3x+1)=4/3\cdot log_3(4y)+4/3 \\ 3/2\cdot log_3(4y)+8/9\cdot log_3(4y)+8/9=-3/4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} log_{1/3}(3x+1)=18/43 \\ log_3(4y)=-59/86 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+1=3^{-18/43} \\ 4y=3^{-59/86} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3^{-61/43}-3^{-1} \\ y=3^{-59/86}/4 \end{cases};$

b) $\begin{cases} log_{1/2}(x+1)=1/2-4\cdot log_2(y-2) \\ 2/5\cdot log_2(y-2)-5/4+10\cdot log_2(y-2)=1/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} log_{1/2}(x+1)=-17/156 \\ log_2(y-2)=95/624 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2^{17/156}-1 \\ y=2^{95/624}+2 \end{cases}$

34. **a)** $\begin{cases} log_3\left(\dfrac{x+1}{2}\right)+\dfrac{2}{3}\cdot log_2\left(\dfrac{y-1}{3}\right)=\dfrac{4}{5} \\ log_3\left(\dfrac{x+1}{2}\right)-\dfrac{1}{3}\cdot log_2\left(\dfrac{y-1}{3}\right)=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$ **; b)** $\begin{cases} ln(x+2y)+ln(3x-y)=4 \\ 3\cdot ln(3x-y)+2\cdot ln(x+2y)=-3 \end{cases}$ **; c)** $\begin{cases} log_x(y)=2 \\ log_y(x)=1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} log_2\left(\frac{y-1}{3}\right)=\frac{23}{10} \\ log_3\left(\frac{x+1}{2}\right)=-\frac{11}{15} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y-1}{3}=2^{\frac{23}{10}} \\ \frac{x+1}{2}=3^{-\frac{11}{15}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1+3\cdot 2^{\frac{23}{10}} \\ x=2\cdot 3^{-\frac{11}{15}}-1 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} ln(x+2y)=4-ln(3x-y) \\ 3\cdot ln(3x-y)+8-2\cdot ln(3x-y)=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ln(x+2y)=15 \\ ln(3x-y)=-11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=e^{15} \\ 3x-y=e^{-11} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{e^{15}-2e^{-11}}{7} \\ y=\frac{3e^{15}-e^{-11}}{7} \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ y>0 \\ y\neq 1 \\ y=x^2 \\ x=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ y>0 \\ y\neq 1 \\ y=y^2 \\ x=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ y>0 \\ y\neq 1 \\ y=0\vee y=1 \\ x=0\vee x=1 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$

35. **a)** $\begin{cases} log_{x+1}(y)=2 \\ log_{y-1}(x+1)=1 \end{cases}$ **; b)** $\begin{cases} ln(x)+ln(y)=5 \\ ln(x)\cdot ln(y)=6 \end{cases}$ **; c)** $\begin{cases} log_3(x-3)+log_3(2y+1)=4 \\ log_3(x-3)\cdot log_3(2y+1)-1=2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x+1>0 \\ x+1\neq 1 \\ y-1>0 \\ y-1\neq 1 \\ y>0 \\ x+1>0 \\ y=(x+1)^2 \\ x+1=y-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x\neq 0 \\ y>1 \\ y\neq 2 \\ y>0 \\ x>-1 \\ x+2=(x+1)^2 \\ y=x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1, x\neq 0 \\ y>1, y\neq 2 \\ x^2+x-1=0 \\ y=x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1, x\neq 0 \\ y>1, y\neq 2 \\ x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \\ y=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1, x\neq 0 \\ y>1, y\neq 2 \\ x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ y=\frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$;

b) $\begin{cases} ln(x)=5-ln(y) \\ [5-ln(y)]\cdot ln(y)=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ln(x)=5-ln(y) \\ ln^2(y)-5ln(y)+6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ln(x)=3\vee ln(x)=2 \\ ln(y)=2\vee ln(y)=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=e^3 \\ y=e^2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=e^2 \\ y=e^3 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} log_3(x-3)=4-log_3(2y+1) \\ [4-log_3(2y+1)]\cdot log_3(2y+1)-1=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} log_3(x-3)=4-log_3(2y+1) \\ log_3^2(2y+1)-4log_3(2y+1)+3=0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} log_3(x-3)=3\vee log_3(x-3)=1 \\ log_3(2y+1)=1\vee log_3(2y+1)=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3=27 \\ 2y+1=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x-3=3 \\ 2y+1=27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=30 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=6 \\ y=13 \end{cases}$

36. **a)** $\begin{cases} log_3(x^2)+log_3(y^3)=7 \\ log_3(x^3)-log_3(y^2)=-9 \end{cases}$ **; b)** $\begin{cases} log_2(x^3)+log_2(y^2)=14 \\ log_2(x^2)-log_2(y^3)=-8 \end{cases}$ **; c)** $\begin{cases} log_3^2(x)+log_2^2(y)=13 \\ log_3(x)\cdot log_2(y)=6 \end{cases}$

a) $\begin{cases} log_3(x^2)+log_3(y^3)=7 \\ log_3(x^3)-log_3(y^2)=-9 \end{cases}$; b) $\begin{cases} log_2(x^3)+log_2(y^2)=14 \\ log_2(x^2)-log_2(y^3)=-8 \end{cases}$; c)

$\begin{cases} log_3^2(x)+log_2^2(y)=13 \\ log_3(x)\cdot log_2(y)=6 \end{cases}$

[a) $x=1/3, y=2/7$; b) $x=4, y=16$; c) $x=1/27, y=1/4\vee x=1/9, y=1/8\vee x=9, y=8\vee x=27, y=4$]

37. $\begin{cases} log_3(x+1)+log_3(y-1)=5 \\ log_3^2(x+1)\cdot log_3^2(y-1)=36 \end{cases}$

$$\begin{cases} log_3(x+1)=5-log_3(y-1) \\ \left[5-log_3(y-1)\right]^2\cdot log_3^2(y-1)=36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} log_3(x+1)=5-log_3(y-1) \\ log_3^4(y-1)-10log_3^3(y-1)+25log_3^2(y-1)-36=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} log_3(x+1)=6 \vee log_3(x+1)=3 \vee log_3(x+1)=2 \vee log_3(x+1)=-1 \\ log_3(y-1)=-1 \vee log_3(y-1)=2 \vee log_3(y-1)=3 \vee log_3(y-1)=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1=729 \\ y-1=1/3 \end{cases} \vee \begin{cases} x+1=27 \\ y-1=9 \end{cases}$$

$$\vee \begin{cases} x+1=9 \\ y-1=27 \end{cases} \vee \begin{cases} x+1=1/3 \\ y-1=729 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=728 \\ y=4/3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=26 \\ y=10 \end{cases} \vee \begin{cases} x=8 \\ y=28 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-2/3 \\ y=730 \end{cases}$$

38. **a)** $\begin{cases} log_x(y)=2 \\ log_y(x)=1/2 \end{cases}$ **; b)** $\begin{cases} log_x(y)=2 \\ log_y(x+1)=1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x>0, x\neq 1 \\ y>0, y\neq 1 \\ y=x^2 \\ x=\sqrt{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0, x\neq 1 \\ y>0, y\neq 1 \\ y=x^2 \\ y=x^2 \end{cases} \Rightarrow x>0, x\neq 1, y>0, y\neq 1;$

b) $\begin{cases} x>0, x\neq 1 \\ y>0, y\neq 1 \\ y=x^2 \\ x+1=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0, x\neq 1 \\ y>0, y\neq 1 \\ y=x^2 \\ x^2-x-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0, x\neq 1 \\ y>0, y\neq 1 \\ y=\left(\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^2 \\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ y=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Risolvere le seguenti disequazioni logaritmiche

39. **a)** $log_{4/3}(4x-1)<log_{4/3}(x-2)$**; b)** $log_{1/2}(x^2)<-2$**; c)** $log_3(x^2-x)\geq log_3(x-1)$

a) $\begin{cases} 4x-1>0 \\ x-2>0 \\ 4x-1<x-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1/4 \\ x>2 \\ x<-1/3 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$; b) $x^2>4 \Rightarrow x<-2 \vee x>2;$

c) $\begin{cases} x^2-x>0 \\ x-1>0 \\ x^2-x\geq x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<0 \vee x>1 \\ x>1 \\ x^2-2x+1\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ \forall x\in\mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow x>1$

40. **a)** $log(2x-1)<log(2-3x)$**; b)** $log_{4/5}(2-x)\leq log_{4/5}(x+1)$**; c)** $ln(1-x)>2$

a) $\begin{cases} 2x-1>0 \\ 2-3x>0 \\ 2x-1<2-3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1/2 \\ x<2/3 \\ x<3/5 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{5}$; b) $\begin{cases} 2-x>0 \\ x+1>0 \\ 2-x\geq x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<2 \\ x>-1 \\ x\leq 1/2 \end{cases} \Rightarrow -1<x\leq\dfrac{1}{2};$

c) $\begin{cases} 1-x>0 \\ 1-x>e^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<1 \\ x<1-e^2 \end{cases} \Rightarrow x<1-e^2$

41. **a)** $log_{1/4}(3x^2+2x-1)-log_{1/4}(2-x^2)<0$**; b)** $log(x)\geq 1$

a) $\begin{cases} 3x^2+2x-1>0 \\ 2-x^2>0 \\ 3x^2+2x-1>2-x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-1 \vee x>\dfrac{1}{3} \\ -\sqrt{2}<x<\sqrt{2} \\ 4x^2+2x-3>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{2}<x<-1 \vee 1/3<x<\sqrt{2} \\ x<\dfrac{-1-\sqrt{13}}{4} \vee x>\dfrac{-1+\sqrt{13}}{4} \end{cases} \Rightarrow$; b) $x\geq 10$

$$\Rightarrow -\sqrt{2}<x<\frac{-1-\sqrt{13}}{4} \vee \frac{-1+\sqrt{13}}{4}<x<\sqrt{2}$$

42. **a)** $log_{\sqrt{2}}(2x+3)-log_{\sqrt{2}}(3x)<1$; **b)** $\boldsymbol{log_{3/4}(2-x^2) > log_{3/4}(5x-4)}$

a) $\begin{cases}2x+3>0\\3x>0\\2x+3<3\sqrt{2}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>-3/2\\x>0\\x>\dfrac{3}{3\sqrt{2}-2}\end{cases}\Rightarrow x>\dfrac{3\left(3\sqrt{2}+2\right)}{14}$;

b) $\begin{cases}5x-4>0\\2-x^2>0\\2-x^2<5x-4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>4/5\\-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}\\x^2+5x-6>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4/5<x<\sqrt{2}\\x<-6\vee x>1\end{cases}\Rightarrow 1<x<\sqrt{2}$

43. **a)** $\boldsymbol{log_7(1+x)-log_7(x^2-1)+log_7(3-4x)\le 0}$; **b)** $\boldsymbol{log_{2/3}(3x+2)-log_{2/3}(3x^2+1)+log_{2/3}(1+3x)>0}$

a) $\begin{cases}1+x>0\\x^2-1>0\\3-4x>0\\(1+x)(3-4x)\le x^2-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>-1\\x<-1\vee x>1\\x<3/4\\5x^2+x-4\ge 0\end{cases}\Rightarrow\varnothing$;

b) $\begin{cases}3x+2>0\\3x^2+1>0\\1+3x>0\\(3x+2)(1+3x)<3x^2+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>-2/3\\\forall x\in\mathbb{R}\\x>-1/3\\6x^2+9x+1<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>-1/3\\\dfrac{-9-\sqrt{57}}{12}<x<\dfrac{-9+\sqrt{57}}{12}\end{cases}\Rightarrow -\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{-9+\sqrt{57}}{12}$

44. **a)** $\boldsymbol{log_{2/5}(2x-x^2)+log_{2/5}(4-3x)\ge 0}$; **b)** $\boldsymbol{log^2_{3/5}(x)-3log_{3/5}(x)+2>0}$; **c)** $log^2_{3/5}(x)-3log_{3/5}(x)+2<0$

a) $\begin{cases}2x-x^2>0\\4-3x>0\\(2x-x^2)(4-3x)\le 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<x<2\\x<4/3\\3x^3-10x^2+8x-1\le 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<x<4/3\\(x-1)(3x^2-7x+1)\le 0\end{cases}\Rightarrow$;

$\Rightarrow\begin{cases}0<x<4/3\\x\le\dfrac{7-\sqrt{37}}{6}\vee 1\le x\le\dfrac{7+\sqrt{37}}{6}\end{cases}\Rightarrow 0<x\le\dfrac{7-\sqrt{37}}{6}\vee 1\le x<\dfrac{4}{3}$

b) $\begin{cases}x>0\\1<log_{3/5}(x)<2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0\\x<\dfrac{9}{25}\vee x>\dfrac{3}{5}\end{cases}\Rightarrow 0<x<\dfrac{9}{25}\vee x>\dfrac{3}{5}$;

c) $\begin{cases}x>0\\log_{3/5}(x)<1\vee log_{3/5}(x)>2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0\\\dfrac{9}{25}<x<\dfrac{3}{5}\end{cases}\Rightarrow\dfrac{9}{25}<x<\dfrac{3}{5}$

45. **a)** $\boldsymbol{2\cdot log^2_5(4x+1)-log_5(4x+1)-1\le 0}$; **b)** $\boldsymbol{8\cdot log^2_{1/2}(3-4x)-31\cdot log_{1/2}(3-4x)-4\le 0}$

a) $\begin{cases}4x+1>0\\-1/2\le log_5(4x+1)\le 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>-1/4\\\dfrac{1}{\sqrt{5}}<4x+1<5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>-1/4\\\dfrac{\sqrt{5}-5}{20}<x<1\end{cases}\Rightarrow\dfrac{\sqrt{5}-5}{20}<x<1$;

b) $\begin{cases}3-4x>0\\-1/8\le log_{1/2}(3-4x)\le 4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<3/4\\3-4x\le\sqrt[8]{2}\vee 3-4x\ge 1/16\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<3/4\\\dfrac{3-\sqrt[8]{2}}{4}\le x\le\dfrac{47}{64}\end{cases}\Rightarrow\dfrac{3-\sqrt[8]{2}}{4}\le x\le\dfrac{47}{64}$

46. **a)** $2\cdot log^2_{\sqrt{2}}(x^2+1)+9\cdot log_5(x^2+1)+4<0$; **b)** $9\cdot log^2_{1/\sqrt{3}}(2-x^2)-26\cdot log_{1/\sqrt{3}}(2-x^2)-3\ge 0$

a) $-4<log_{\sqrt{2}}(x^2+1)<-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{1}{4}<x^2+1<\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}\Rightarrow\varnothing$;

$$\begin{cases} 2-x^2>0 \\ log_{1/\sqrt{3}}\left(2-x^2\right)\le -1/9 \vee log_{1/\sqrt{3}}\left(2-x^2\right)\ge 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{2}<x<\sqrt{2} \\ 2-x^2\ge \sqrt[18]{3} \vee 2-x^2\le \sqrt{3}/9 \end{cases} \Rightarrow$$

b) $$\Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{2}<x<\sqrt{2} \\ -\sqrt{2-\sqrt[18]{3}}\le x\le \sqrt{2-\sqrt[18]{3}} \vee x\le -\dfrac{\sqrt{18-\sqrt{3}}}{3} \vee x\ge \dfrac{\sqrt{18-\sqrt{3}}}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\sqrt{2-\sqrt[18]{3}}\le x\le \sqrt{2-\sqrt[18]{3}} \vee x\le -\frac{\sqrt{18-\sqrt{3}}}{3} \vee x\ge \frac{\sqrt{18-\sqrt{3}}}{3}$$

47. **a)** $log^2_{\sqrt{3}}\left(2x^2+1\right)-2\cdot log_{\sqrt{3}}\left(2x^2+1\right)-8\ge 0$ **; b)** $log^2_{\sqrt{8}}\left(x+x^2\right)+2\cdot log_{\sqrt{8}}\left(x+x^2\right)-8<0$

a) $$log_{\sqrt{3}}\left(2x^2+1\right)\le -2 \vee log_{\sqrt{3}}\left(2x^2+1\right)\ge 4 \Rightarrow 2x^2+1\le 1/3 \vee 2x^2+1\ge 9 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x^2\le -2/3 \vee 2x^2\ge 8 \Rightarrow x\le -2 \vee x\ge 2 \quad ;$$

b) $$\begin{cases} x+x^2>0 \\ -4<log_{\sqrt{8}}\left(x+x^2\right)<2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-1 \vee x>0 \\ \dfrac{1}{64}<x+x^2<8 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x<-1 \vee x>0 \\ -\dfrac{1+\sqrt{33}}{2}<x<-\dfrac{4-\sqrt{17}}{8} \vee \dfrac{-4+\sqrt{17}}{8}<x<\dfrac{-1+\sqrt{33}}{2} \end{cases} \Rightarrow -\frac{1+\sqrt{33}}{2}<x<-\frac{4-\sqrt{17}}{8} \vee \frac{-4+\sqrt{17}}{8}<x<\frac{-1+\sqrt{33}}{2}$$

48. **a)** $log_{3/2}\left(x^2-3x\right)-log_{3/2}\left(2-x^2\right)\le 1$ **;b)** $\boldsymbol{log_4(4-7x+x^2)-log_4(x^2-2)\ge 1/2}$**; c)** $\dfrac{log^2_3\left(2x+1\right)-1}{log^2_2\left(1-3x\right)-4}\le 0$

a) $$\begin{cases} x^2-3x>0 \\ 2-x^2>0 \\ x^2-3x\le 3\left(2-x^2\right)/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<0 \vee x>3 \\ -\sqrt{2}<x<\sqrt{2} \\ 5x^2-6x-6\le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{2}<x<0 \\ \dfrac{3-\sqrt{39}}{5}\le x\le \dfrac{3+\sqrt{39}}{5} \end{cases} \Rightarrow \frac{3-\sqrt{39}}{5}\le x<0\,;$$

b) $$\begin{cases} 4-7x+x^2>0 \\ x^2-2>0 \\ 4-7x+x^2\ge 2x^2-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<\dfrac{7-\sqrt{33}}{2} \vee x>\dfrac{7+\sqrt{33}}{2} \\ x<-\sqrt{2} \vee >\sqrt{2} \\ x^2+7x-8\le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-\sqrt{2} \vee x>\dfrac{7+\sqrt{33}}{2} \\ -8\le x\le 1 \end{cases} \Rightarrow -8\le x\le 1\,;$$

$$\begin{cases} 2x+1>0 \\ 1-3x>0 \\ log^2_3\left(2x+1\right)-1\ge 0 \\ log^2_2\left(1-3x\right)-4<0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x+1>0 \\ 1-3x>0 \\ log^2_3\left(2x+1\right)-1\le 0 \\ log^2_2\left(1-3x\right)-4>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1/2 \\ x<1/3 \\ log_3\left(2x+1\right)\le -1 \vee log_3\left(2x+1\right)\ge 1 \\ -2<log_2\left(1-3x\right)<2 \end{cases} \vee$$

c) $$\vee \begin{cases} x>-1/2 \\ x<1/3 \\ -1\le log_3\left(2x+1\right)\le 1 \\ log_2\left(1-3x\right)<-2 \vee log_2\left(1-3x\right)>2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1/2<x<1/3 \\ 2x+1\le 1/3 \vee 2x+1\ge 3 \\ 1/4<1-3x<4 \end{cases} \vee \begin{cases} -1/2<x<1/3 \\ 1/3\le 2x+1\le 3 \\ 1-3x<1/4 \vee 1-3x>4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1/2<x<1/3 \\ x\le -1/3 \vee x\ge 1 \\ -1<x<1/4 \end{cases} \vee \begin{cases} -1/2<x<1/3 \\ -1/3\le x\le 1 \\ x>1/4 \vee x<-1 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{2}<x\le -\frac{1}{3} \vee \frac{1}{4}\le x<\frac{1}{3}$$

49. **a)** $\dfrac{2\cdot log_3\left(x+1\right)-1}{3\cdot log_4\left(3x\right)+2}\le 0$ **; b)** $\dfrac{ln^2\left(x^2\right)-ln\left(x^2\right)}{log^2\left(x\right)+log\left(x\right)}>0$ **; c)** $\dfrac{1+2\cdot log\left(3-x\right)}{1-2\cdot log\left(3-x\right)}-\dfrac{4}{1-4\cdot log^2\left(3-x\right)}-1\le 0$

a) $$\begin{cases} x+1>0 \\ 3x>0 \\ 2log_3(x+1)-1\geq 0 \\ 3log_4(3x)+2<0 \end{cases} \vee \begin{cases} x+1>0 \\ 3x>0 \\ 2log_3(x+1)-1\leq 0 \\ 3log_4(3x)+2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x>0 \\ x+1\geq\sqrt{3} \\ 3x<4^{-2/3} \end{cases} \vee \begin{cases} x>-1 \\ x>0 \\ x+1\leq\sqrt{3} \\ 3x>4^{-2/3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x>0 \\ x\geq\sqrt{3}-1 \\ x<4^{-2/3}/3 \end{cases} \vee \begin{cases} x>-1 \\ x>0 \\ x\leq\sqrt{3}-1 \\ x>4^{-2/3}/3 \end{cases} \Rightarrow \varnothing \vee \frac{4^{-2/3}}{3}<x\leq\sqrt{3}-1$$

b) $$\begin{cases} x>0 \\ ln^2(x^2)-ln(x^2)>0 \\ log^2(x)+log(x)>0 \end{cases} \vee \begin{cases} x>0 \\ ln^2(x^2)-ln(x^2)<0 \\ log^2(x)+log(x)<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ ln(x^2)<0 \vee ln(x^2)>1 \\ log(x)<-1 \vee log(x)>0 \end{cases} \vee$$

$$\vee \begin{cases} x>0 \\ 0<ln(x^2)<1 \\ -1<log(x)<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x^2<1 \vee x^2>e \\ x<1/10 \vee x>1 \end{cases} \vee \begin{cases} x>0 \\ 1<x^2<e \\ 1/10<x<1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ -1<x<1 \vee x<-\sqrt{e} \vee x>\sqrt{e} \\ x<1/10 \vee x>1 \end{cases} \vee;$$

$$\vee \begin{cases} x>0 \\ -\sqrt{e}<x<-1 \vee 1<x<\sqrt{e} \\ 1/10<x<1 \end{cases} \Rightarrow \left(0<x<\frac{1}{10} \vee x>\sqrt{e}\right) \vee \varnothing \Rightarrow 0<x<\frac{1}{10} \vee x>\sqrt{e}$$

c) $$\frac{[1+2\cdot log(3-x)]^2-4-1+4\cdot log^2(3-x)}{1-4\cdot log^2(3-x)}\leq 0 \Rightarrow \frac{{}^{2}\cancel{8}\cdot log^2(3-x)+\cancel{4}\cdot log(3-x)-\cancel{4}^{1}}{1-4\cdot log^2(3-x)}\leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3-x>0 \\ 2log^2(3-x)+log(3-x)-1\geq 0 \\ 1-4\cdot log^2(3-x)<0 \end{cases} \vee \begin{cases} 3-x>0 \\ 2log^2(3-x)+log(3-x)-1\leq 0 \\ 1-4\cdot log^2(3-x)>0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x<3 \\ log(3-x)\leq -1 \vee log(3-x)\geq 1/2 \\ log(3-x)<-1/2 \vee log(3-x)>1/2 \end{cases} \vee \begin{cases} x<3 \\ -1\leq log(3-x)\leq 1/2 \\ -1/2<log(3-x)<1/2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x<3 \\ log(3-x)\leq -1 \vee log(3-x)>1/2 \end{cases} \vee \begin{cases} x<3 \\ -1/2<log(3-x)<1/2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{29}{10}\leq x<3 \vee x<3-\sqrt{10}\right) \vee \left(3-\sqrt{10}<x<\frac{30-\sqrt{10}}{10}\right) \Rightarrow \frac{29}{10}\leq x<3 \vee x<\frac{30-\sqrt{10}}{10}$$

50. **a)** $\frac{4\cdot ln(x)-1}{3\cdot ln(x)-5}-\frac{2\cdot ln(x)+7}{ln(x)+1}+3>0$; **b)** $\frac{6\cdot log_2(x)-1}{5\cdot log_2(x)+3}-\frac{4\cdot log_2(x)+7}{3\cdot log_2(x)+5}\leq 2$

$$\frac{[4\cdot ln(x)-1]\cdot[ln(x)+1]-[2\cdot ln(x)+7]\cdot[3\cdot ln(x)-5]+3\cdot[3\cdot ln(x)-5]\cdot[ln(x)+1]}{[3\cdot ln(x)-5]\cdot[ln(x)+1]}>0 \Rightarrow$$

a) $$\Rightarrow \frac{7ln^2(x)-14ln(x)+19}{[3\cdot ln(x)-5]\cdot[ln(x)+1]}>0 \Rightarrow \begin{cases} 7ln^2(x)-14ln(x)+19>0 \\ [3\cdot ln(x)-5]\cdot[ln(x)+1]>0 \end{cases} \vee \begin{cases} 7ln^2(x)-14ln(x)+19<0 \\ [3\cdot ln(x)-5]\cdot[ln(x)+1]<0 \end{cases} \Rightarrow;$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ 0<x<1/e \vee x>\sqrt[3]{e^5} \end{cases} \vee \varnothing \Rightarrow 0<x<1/e \vee x>\sqrt[3]{e^5}$$

b) $$\frac{[4\cdot log_2(x)+7]\cdot[log_2(x)+1]}{[3\cdot log_2(x)+5]\cdot[5\cdot log_2(x)+3]}\geq 0 \Rightarrow \begin{cases}[4\cdot log_2(x)+7]\cdot[log_2(x)+1]\geq 0\\ [3\cdot log_2(x)+5]\cdot[5\cdot log_2(x)+3]>0\end{cases} \vee$$

$$\vee \begin{cases}[4\cdot log_2(x)+7]\cdot[log_2(x)+1]\leq 0\\ [3\cdot log_2(x)+5]\cdot[5\cdot log_2(x)+3]<0\end{cases} \Rightarrow 0<x\leq \frac{1}{\sqrt[4]{128}} \vee \frac{1}{\sqrt[3]{32}}<x\leq \frac{1}{2} \vee x>\frac{1}{\sqrt[5]{8}}$$

51. **a) $log_x(x-1)+log_x(2x+3)\leq log_x(4x^2+1)$; b)** $x^{log_2(x)}>8$

a) $$\begin{cases}x>0\\ x\neq 1\\ x-1>0\\ 2x+3>0\\ 4x^2+1>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x>0\\ x\neq 1\\ x>1\\ x>-3/2\\ \forall x\in\mathbb{R}\end{cases} \Rightarrow x>1.$$ $log_x[(x-1)(2x+3)]\leq log_x(4x^2+1)$, dato che $x>1$, possiamo scrivere: $2x^2+x-3\leq 4x^2+1 \Rightarrow 2x^2-x+4\geq 0 \Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}$, dato che è $\Delta=1-32<0$. Pertanto la soluzione è $x>1$.

b) $$log_2\left[x^{log_2(x)}\right]>log_2(8)\Rightarrow log_2(x)\cdot log_2(x)>3\Rightarrow log_2^2(x)>3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x>0\\ log_2(x)<-\sqrt{3}\vee log_2(x)>\sqrt{3}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x>0\\ x<2^{-\sqrt{3}}\vee x>2^{\sqrt{3}}\end{cases} \Rightarrow 0<x<2^{-\sqrt{3}}\vee x>2^{\sqrt{3}}$$

52. **a) $log_{x-1}(2x-1)+log_{x-1}(3-x)>log_{x-1}(3x^2+x-1)$; b)** $x^{log_3(x)}\leq\sqrt{3}$

a) $$\begin{cases}0<x-1<1\\ 2x-1>0\\ 3-x>0\\ 3x^2+x-1>0\\ (2x-1)(3-x)<3x^2+x-1\end{cases} \vee \begin{cases}x-1>1\\ 2x-1>0\\ 3-x>0\\ 3x^2+x-1>0\\ (2x-1)(3-x)>3x^2+x-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}1<x<2\\ x>1/2\\ x<3\\ x<\frac{-1-\sqrt{13}}{6}\vee x>\frac{-1+\sqrt{13}}{6}\\ 5x^2-6x+2>0\end{cases} \vee$$

$$\vee \begin{cases}x>2\\ x>1/2\\ x<3\\ x<\frac{-1-\sqrt{13}}{6}\vee x>\frac{-1+\sqrt{13}}{6}\\ 5x^2-6x+2<0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}1<x<2\\ \forall x\in\mathbb{R}\end{cases} \vee \begin{cases}2<x<3\\ \varnothing\end{cases} \Rightarrow 2<x<3.$$

b) $$log_3\left[x^{log_3(x)}\right]\leq log_3\left(\sqrt{3}\right)\Rightarrow log_3^2(x)\leq 1/2\Rightarrow \begin{cases}x>0\\ -\sqrt{1/2}\leq log_3(x)\leq\sqrt{1/2}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x>0\\ 3^{-1/\sqrt{2}}\leq x\leq 3^{1/\sqrt{2}}\end{cases} \Rightarrow 3^{-1/\sqrt{2}}\leq x\leq 3^{1/\sqrt{2}}$$

53. **$log_{3x+1}(4x-1)+log_{3x+1}(5x-2)\geq log_{3x+1}(2x^2-1)$; b)** $x^{log_{1/4}(x)}\leq\sqrt[3]{2}$

a)
$$\begin{cases} 0<3x+1<1 \\ 4x-1>0 \\ 5x-2>0 \\ 2x^2-1>0 \\ (4x-1)(5x-2)\le 2x^2-1 \end{cases} \vee \begin{cases} 3x+1>1 \\ 4x-1>0 \\ 5x-2>0 \\ 2x^2-1>0 \\ (4x-1)(5x-2)\ge 2x^2-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1/3<x<0 \\ x>1/4 \\ x>2/5 \\ x<-\sqrt{1/2}\vee x>1/\sqrt{2} \\ 18x^2-9+2\le 0 \end{cases} \vee$$
$$\vee \begin{cases} x>0 \\ x>1/4 \\ x>2/5 \\ x<-\sqrt{1/2}\vee x>1/\sqrt{2} \\ 18x^2-9+2\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \varnothing \vee \begin{cases} x>\sqrt{2}/2 \\ \forall x\in\mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow x>\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

b) $log_{1/4}\left[x^{log_{1/4}(x)}\right]\le log_{1/4}\left(\sqrt[3]{2}\right)\Rightarrow log^2_{1/4}(x)\ge -1/6\Rightarrow x>0$

54. $log_{x^2-1}(4x+1)+log_{x^2-1}(5+2x)<log_{x^2-1}\left(x^2-3x-2\right)$

$$\begin{cases} 0<x^2-1<1 \\ 4x+1>0 \\ 5+2x>0 \\ x^2-3x-2>0 \\ (4x+1)(5+2x)>x^2-3x-2 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2-1>1 \\ 4x+1>0 \\ 5+2x>0 \\ x^2-3x-2>0 \\ (4x+1)(5+2x)<x^2-3x-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{2}<x<-1\vee 1<x<\sqrt{2} \\ x>-1/4 \\ x>-5/2 \\ x<\frac{3-\sqrt{17}}{2}\vee x>\frac{3+\sqrt{17}}{2} \\ 5x^2-6x+2>0 \end{cases} \vee$$

$$\vee \begin{cases} x<-\sqrt{2}\vee x>\sqrt{2} \\ x>-1/4 \\ x>-5/2 \\ x<\frac{3-\sqrt{17}}{2}\vee x>\frac{3+\sqrt{17}}{2} \\ 5x^2-6x+2<0 \end{cases} \Rightarrow \varnothing \vee \begin{cases} x>\frac{3+\sqrt{17}}{2} \\ \varnothing \end{cases} \Rightarrow \varnothing$$

L'angolo della MateFisica

1. La formula di Pogson: $m_x = -2{,}5 \cdot log(F_x)$ viene usata per misurare la magnitudine apparente di una stella, in cui F_x è il flusso osservato nella banda x. Venere ha magnitudine –4,4, Marte –2,8. Quante volte Venere è più luminoso di Marte?

Si ha: $m_x = log\left(F_x^{-2,5}\right) \Rightarrow 10^{m_x} = F_x^{-2,5} \Rightarrow F_x = 10^{-\frac{m_x}{2,5}}$, pertanto $\dfrac{10^{\frac{4,4}{2,5}}}{10^{\frac{2,8}{2,5}}} = 10^{\frac{1,6}{2,5}} \approx 4,3$

2. Il sole ha una magnitudine apparente di –26,8 mentre la luna piena di –12,6. Quindi possiamo dire che il sole è quante volte circa più luminoso della luna piena?

Tenuto conto del precedente esercizio: $10^{(26,8-12,6)/2,5} \approx 478630$

3. Una differenza di h unità fra le magnitudini apparenti comporta una luminosità maggiore di quanto?

$10^{h/2,5}$

4. La scala Richter misura la magnitudine di un terremoto in base alla quantità di energia liberata all'epicentro è di tipo logaritmico. Per esempio un terremoto di magnitudine 4 rispetto a uno di magnitudine 3 è 10 volte più disastroso, in generale per passare da una magnitudine alla successiva si moltiplica per 10. Quante volte è più disastroso un terremoto di magnitudo 6 rispetto a uno di magnitudo 2?

$10^{6-2} = 10000$

5. Un terremoto che è 1500 volte più disastroso di uno di magnitudo 3, ha magnitudo circa?

$10^{m-3} = 1500 \Rightarrow m - 3 = log(1500) \Rightarrow m \approx 6{,}17$

6. La Coca Cola ha un pH di 2,5 il succo d'arancia di 3,5. Quante volte la Coca Cola è più acida del succo d'arancia?

$log(C) = 2{,}5$, $log(A) = 3{,}5 \Rightarrow A/C = 10^{3,5}/10^{2,5} = 10$. Dato che minore è il pH è più acido il prodotto abbiamo considerato il rapporto opposto. Al contrario avremmo fatto per la basicità.

7. Il sangue ha un pH di circa 7,4 un sapone per le mani standard, di circa 9. Quante volte circa il sapone è più basico del sangue?

$10^{9-7,4} \approx 40$

8. Una differenza di h unità fra i pH comporta un'acidità o basicità maggiore di quanto?

10^h

9. Quanto è in decibel la soglia di udibilità?

$10 \cdot log(I_0/I_0) = 10 \cdot log(1) = 0$ dB

10. Calcolare in decibel l'intensità del rumore in una discoteca, che è 10^{-2} W/m^2.

$[10 \cdot log(10^{-2}) + 120]$dB = 100 dB

11. Il rumore di un colpo di pistola a 1 m è di circa 140 dB, quanto vale in W/m^2?

$10 \cdot log(I) + 120 = 140 \Rightarrow log(I) = 2 \Rightarrow I = 100$ W/m^2

12. Quanto vale in dB, il suono emesso da 100 sorgenti ciascuna delle quali emette uno stesso suono di 10dB?

Ovviamente non possiamo dire che valga 100 · 10 dB, anche perché sarebbe ovviamente un valore troppo eccessivo. Quindi trasformiamo in W/m^2, moltiplichiamo per 100 e poi ritrasformiamo in dB. $10 \cdot log(I) + 120 = 10 \Rightarrow log(I) = -11 \Rightarrow I = 10^{-11}$ W/m^2. Perciò 100 sorgenti hanno un'intensità di $100 \cdot 10^{-11}$ W/m^2 = 10^{-9} W/m^2 =$[10 \cdot log(10^{-9}) + 120]$ dB = 30 dB

13. Quante sorgenti che emettono uno stesso suono di 10dB, equivalgono a una sorgente che emette un suono di 20 dB?

Abbiamo già visto che 10dB = 10^{-11} W/m^2; mentre $10 \cdot log(I) + 120 = 20 \Rightarrow I = 10^{-10}$ W/m^2. Quindi $n \cdot 10^{-11}$ W/m^2 = 10^{-10} W/$m^2 \Rightarrow n = 10$

14. Se una sorgente emette un suono di x dB, n sorgenti uguali emetteranno complessivamente un suono di quanti dB?

$10 \cdot log(I) + 120 = x \Rightarrow I = 10^{x/10-12}$ W/$m^2 \Rightarrow 10 \cdot log(n10^{x/10-12}) + 120 = 10 \cdot log(n) + x - 120 + 120 = x + 10\, log(n)$

15. n sorgenti emettono ciascuna un suono di x dB, m sorgenti emettono ciascuna un suono di y dB. Se le due intensità complessive sono uguali, in che relazione sono m, n, x e y?

Dal precedente quesito: $x + 10\ log(n) = y + 10\ log(m) \Rightarrow x - y = 10 \cdot log(m/n)$

16. Se *n* sorgenti uguali emettono un suono di intensità *I* dB, *m* sorgenti uguali alle precedenti emetteranno un suono di quanti dB?

Si ha: $10 \cdot log(x) + 120 = I \Rightarrow x = 10^{I/10\ -12}$ W/m^2, quindi una sorgente ha un'intensità di $10^{I/10\ -12}/n$ W/m^2, quindi m sorgenti hanno un'intensità di $m/n \cdot 10^{I/10\ -12}$ W/m^2, che in dB equivale a $10 \cdot log(m/n \cdot 10^{I/10\ -12}) + 120 = 10 \cdot log(m/n) + I - 120 + 120 = I + 10 \cdot log(m/n)$

17. a) Il tempo per il dimezzamento del livello di radioattività dell'Uranio 237 è di 6,75 giorni, dopo quanto tempo si riduce al 5%? b) Se un certo materiale riduce il suo livello radioattivo al 18% dopo 44 giorni, qual è il suo tempo di dimezzamento?

a) Dobbiamo risolvere l'equazione $0{,}5^x = 0{,}05$, in cui x è il numero di periodi di 6,75 giorni. Abbiamo quindi: $x\ log(0{,}5) = log(0{,}05) \Rightarrow x = log(0{,}05)/log(0{,}5) \approx 4{,}3$ per $4{,}3 \cdot 6{,}75 \approx 29$ giorni;

b) $0{,}5^x = 0{,}18 \Rightarrow x = log(0{,}18)/log(0{,}5) \approx 2{,}47$. Da cui $2{,}47p = 44 \Rightarrow p \approx 17{,}8$ giorni

18. L'aspirina viene eliminata dai reni in ragione del 50% del farmaco presente ogni mezz'ora. a) Dopo quanto tempo nel corpo è rimasto il 10% dell'aspirina inizialmente somministrata? b) Se avessimo ingerito del Cefotaxime, avremmo avuto bisogno di circa 4 ore e 6 minuti per smaltirne l'85%, qual è il tempo di dimezzamento di questo antibiotico?

a) $0{,}5^x = 0{,}1 \Rightarrow x = log(0{,}1)/log(0{,}5) \approx 3{,}3 \Rightarrow 3{,}3 \cdot 0{,}5^h \approx 1^h\ 40^m$;

b) $0{,}5^x = 0{,}15 \Rightarrow x = log(0{,}15)/log(0{,}5) \approx 2{,}73 \Rightarrow 2{,}73 \cdot d \approx 4{,}1^h \Rightarrow d \approx 1{,}5^h$

19. Il Ca_{45} perde il 90% della sua radioattività in circa 548 giorni, mentre il Ta_{182} in circa 382 giorni. a) Qual è il rapporto fra i tempi di dimezzamento dei due isotopi? b) Ci sono dati inutili?

a) Dato che $0{,}5^x = 0{,}1 \Rightarrow x = log(0{,}1)/log(0{,}5) \approx 3{,}3$. Avremo che i tempi di dimezzamento non dipendono dal periodo trovato, ma solo dal numero dei giorni, quindi semplicemente $548/382 \approx 1{,}44$; b) da quanto detto la percentuale è inutile

20. Nel tempo in cui le reni smaltiscono il 90% dell'antibiotico Meropenem, smaltiscono il 40% di Aztreonam. Se quest'ultimo ha un tempo di emivita di circa 1,7 ore, qual è il tempo di emivita del Meropenem?

$0{,}5^x = 0{,}1 \Rightarrow x = log(0{,}1)/log(0{,}5) \approx 3{,}3$. Quindi il tempo di emivita è $3{,}3t$; $0{,}5^x = 0{,}6 \Rightarrow x = log(0{,}6)/log(0{,}5) \approx 0{,}74 \Rightarrow 0{,}74 \cdot 1{,}7^h = 1{,}26^h \Rightarrow$ e quindi $3{,}3t \approx 1{,}26^h \Rightarrow t \approx 0{,}38^h$.

21. Per stimare l'età di alcuni reperti archeologici si usa il metodo del Carbonio 14, un isotopo del Carbonio, il quale dimezza il suo contenuto radioattivo ogni 5730 anni. a) Se in un certo reperto abbiamo trovato una percentuale radioattiva del 27%, possiamo dire che il manufatto è stato costruito quanti anni fa circa? b) Se avessimo misurato il Torio 230 invece ne avremmo trovato una percentuale di circa il 90,5 %. Quanto vale il tempo di dimezzamento di Th_{230}?

a) $0{,}5^x = 0{,}27 \Rightarrow x = log(0{,}27)/log(0{,}5) \approx 1{,}89 \Rightarrow 1.89 \cdot 5730 \approx 10824$ anni;

b) $0{,}5^x = 0{,}905 \Rightarrow x = log(0{,}905)/log(0{,}5) \approx 0{,}14 \Rightarrow 0.14 \cdot t \approx 10824 \Rightarrow t \approx$ circa 75161 anni

22. Un condensatore da 52μF è collegato in serie con una resistenza di 3,0 kΩ a una differenza di potenziale di 30V e a un interruttore. Se all'istante *t* = 0 chiudi l'interruttore quanta carica vi è sul condensatore dopo 5,0 *ms*?

$$Q(5{,}0 \cdot 10^{-3}s) = 30\text{V} \cdot 52 \cdot 10^{-6}\ \text{F} \cdot \left(1 - e^{\frac{-5{,}0 \cdot 10^{-3}\,s}{3{,}0 \cdot 0^3\,\Omega \cdot 52 \cdot 10^{-6}\,F}}\right) = 0{,}49\ \mu\text{C}$$

23. Un condensatore da 45μF è collegato in serie con una resistenza di 120Ω a una differenza di potenziale di X V e a un interruttore. All'istante *t* = 0 chiudi l'interruttore, determina X sapendo che dopo 2,5 *ms* sul condensatore ci sono 90 μC.

$$\text{Si ha XV} \cdot 45 \cdot 10^{-6}\ \text{F} \cdot \left(1 - e^{\frac{-2{,}5 \cdot 10^{-3}\,s}{120\Omega \cdot 45 \cdot 10^{-6}\,F}}\right) = 90 \cdot 10^{-6}\ \text{C} \Rightarrow \text{X} = \frac{2}{\left(1 - e^{\frac{-2{,}5}{5{,}4}}\right)} V = 5{,}4V$$

24. Un condensatore da 12 μF è collegato in serie con una resistenza di X Ω a una differenza di potenziale di 15V e a un interruttore. All'istante *t* = 0 chiudi l'interruttore, determina X sapendo che dopo 2,5 *ms* sul condensatore ci sono 60 μC.

Si ha 15V · 12 · 10^{-6} F · $\left(1-e^{\frac{-2,5\cdot 10^{-3}\,s}{X\Omega\cdot 12\cdot 10^{-6}\,F}}\right)$ = 60 · 10^{-6} C ⇒ $1-e^{\frac{-2,5}{X\cdot 12\cdot 10^{-3}}}$ = 1/3 ⇒ $e^{\frac{-2,5}{X\cdot 12\cdot 10^{-3}}}$ = 2/3

$$\Rightarrow \frac{-2,5}{X\cdot 12\cdot 10^{-3}} = ln\left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow X = \frac{-2,5}{ln\left(\frac{2}{3}\right)\cdot 12\cdot 10^{-3}}\Omega = 0,51k\Omega \text{ X} =$$

25. Un condensatore da 72μF è collegato in serie con una resistenza di 850Ω a una differenza di potenziale di 36 V e a un interruttore. All'istante *t* = 0 chiudi l'interruttore, sapendo che dopo X *ms* sul condensatore ci sono 70 μC, determina X.

Si ha 36V · 72 · 10^{-6} F · $\left(1-e^{\frac{-Xs}{850\Omega\cdot 72\cdot 10^{-6}\,F}}\right)$ = 70 · 10^{-6} C ⇒$e^{-0,061X}$ = 0,027 ⇒ X = *ln*(0,027)/(–0,061) = 1,7 *ms*

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi.

1. **Quanti sono i distinti fattori primi di N, sapendo che $log_2\{log_3[log_5(log_7(N)]\} = 11$?**

   $log_3[log_5(log_7(N)] = 2^{11} \Rightarrow log_5(log_7(N)] = 3^{2^{11}} \Rightarrow log_7(N) = 5^{3^{2^{11}}} \Rightarrow N = 7^{5^{3^{2^{11}}}}$, quindi ha un solo fattore primo. Questo accade in generale per qualsiasi catena di logaritmi le cui basi sono numeri primi.

2. **Sia *k* un numero positivo diverso da 1. Se $log_k(x) \cdot log_3(k) = 2$, determinare *x*.**

   $$log_k(x)\cdot\frac{log_k(k)}{log_k(3)} = 2 \Rightarrow log_k(x) = 2log_k(3) \Rightarrow log_k(x) = log_k(9) \Rightarrow x = 9$$

3. **Semplificare** $log_2(3)\cdot log_3(4)\cdot log_4(5)\cdot\ldots\cdot log_{2^n-1}(2^n)$.

   $$\cancel{log_2(3)}\cdot\frac{\cancel{log_2(4)}}{\cancel{log_2(3)}}\cdot\frac{\cancel{log_2(5)}}{\cancel{log_2(4)}}\cdot\frac{\cancel{log_2(6)}}{\cancel{log_2(5)}}\cdot\ldots\cdot\frac{log_2(2^n)}{\cancel{log_2(2^{n-1})}} = n$$

4. **Semplificare** $log_3(4)\cdot log_4(5)\cdot log_5(6)\cdot\ldots\cdot log_{3^{n-1}}(3^n)$

   $$\cancel{log_3(4)}\cdot\frac{\cancel{log_3(5)}}{\cancel{log_3(4)}}\cdot\frac{\cancel{log_3(6)}}{\cancel{log_3(5)}}\cdot\frac{\cancel{log_3(7)}}{\cancel{log_3(6)}}\cdot\ldots\cdot\frac{log_3(3^n)}{\cancel{log_3(3^{n-1})}} = n$$

5. **Semplificare** $log_n(n+1)\cdot log_{n+1}(n+2)\cdot log_{n+2}(n+3)\cdot\ldots\cdot log_{n^m-1}(n^m)$

   $$\cancel{log_n(n+1)}\cdot\frac{\cancel{log_n(n+2)}}{\cancel{log_n(n+1)}}\cdot\frac{\cancel{log_n(n+3)}}{\cancel{log_n(n+2)}}\cdot\frac{\cancel{log_n(n+4)}}{\cancel{log_n(n+3)}}\cdot\ldots\cdot\frac{log_n(n^m)}{\cancel{log_n(n^{m-1})}} = m$$

6. **Risolvere: $log_{3x}(36) = x$**

   Osserviamo che $log_6(36) = 2$, quindi $x = 2$

7. **Risolvere: $log_2\{log_3[log_4(log_5(x)]\} = 0$**

   $log_3[log_4(log_5(X)] = 1 \Rightarrow log_4(log_5(X)] = 3log_5(X) = 4^3 = 64 \Rightarrow X = 5^{64}$.

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

1. **(AHSME 1951) Sapendo che *log*(8) ≈ 0,9031 e *log*(9) ≈ 0,9542, quale dei seguenti numeri NON può essere calcolato, nemmeno in modo approssimato, senza l'uso della calcolatrice o delle tavole? Calcolare dei valori approssimati per gli altri valori. *log*(17); *log*(5/4); *log*(15); *log*(600); *log* (0,4).**

   log (17). Mentre da *log*(8) ≈ 0,9031 ⇒ *log*(2) ≈ 0,3010; *log*(4) ≈ 0,6021; *log*(5) = 1 – *log*(2) ≈ 0,6990 e

da $log(9) \approx 0{,}9542 \Rightarrow log(3) \approx 0{,}4771$. Pertanto $log\ (5/4) = log(5) - log(4) \approx 0{,}6990 - 0{,}6021 = 0{,}0969$; $log\ (15) = log(3) + log(5) \approx 0{,}4771 + 0{,}6990 = 1{,}1761$; $log\ (600) = log(2) + log(3) + 2 \approx 0{,}3010 + 0{,}4771 + 2 = 2{,}7781$; $log\ (0{,}4) = log(4) - 1 \approx 0{,}6021 - 1 = -0{,}3979$

2. **(AHSME 1952) In che relazione devono essere *p* e *q* affinché si abbia la validità della seguente uguaglianza : $log(p) + log(q) = log(p + q)$?**

   Deve essere $pq = p + q \Rightarrow p = \dfrac{q}{q-1}$. Per esempio $log(4/3) + log(4) = log(4/3 + 4) = log(16/3)$

3. **(AHSME 1954) Sapendo che $log(2) \approx 0{,}3010$ e $log(3) \approx 0{,}4771$ e $3^{x+3} = 135$, determinare un valore approssimato di *x*.**

   $3^{x+3} = 135 \Rightarrow (x + 3)log(3) = log(135) \Rightarrow x\ log(3) + log(27) = log(27) + log(5) \Rightarrow x = [log(10) - log(2)]/log(3) \Rightarrow x = [1 - log(2)]/log(3) \approx (1 - 0{,}3010)/0{,}4771 = 0{,}6990/0{,}4771 \approx 1{,}47$

4. **(AHSME 1955) Risolvere $log(x) - 5log(3) = -2$.**

   $log(x) = log(243) - log(100) = log(2{,}43) \Rightarrow x = 2{,}43$

5. **(AHSME 1958) Se $P = \dfrac{s}{(1+k)^n}$, ricavare *n*.**

   $$(1+k)^n = \frac{s}{P} \Rightarrow nlog(1+k) = log(s/P) \Rightarrow n = \frac{log(s/P)}{log(1+k)}$$

6. **(AHSME 1958) Risolvere in *x*: $log_k(x) \cdot log_5(k) = 3$, *k* è positivo e diverso da 1.**

   $$\frac{log_5(x)}{\cancel{log_5(k)}} \cdot \cancel{log_5(k)} = log_5(5^3) \Rightarrow x = 125$$

7. **(AHSME 1959) Risolvere in *y*: $log_3(x) \cdot log_x(2x) \cdot log_{2x}(y) = log_x(x^2)$.**

   $$\cancel{log_3(x)} \cdot \frac{\cancel{log_3(2x)}}{\cancel{log_3(x)}} \cdot \frac{log_3(y)}{\cancel{log_3(2x)}} = 2 \Rightarrow log_3(y) = log_3(9) \Rightarrow y = 9$$

8. **(AHSME 1960) Risolvere: $log_{2x}(216) = x$.**

   $log_{2x}(6^3) = log_{2x}[(2x)^x] \Rightarrow (2 \cdot 3)^3 = (2x)^x \Rightarrow x = 3$

9. **(AHSME 1961) Consideriamo i grafici delle funzioni: $y = 2 \cdot log(x)$, $y = log(2x)$, si intersecano e se sì in quanti punti?**

   $log(x^2) = log(2x) \Rightarrow x^2 = 2x \Rightarrow x = 0$ (non accettabile) $\vee\ x = 2$. Quindi si incontrano in $(2; log(4))$

10. **(AHSME 1961) Se $log(2) = a$ e $log(3) = b$, determinare $log_5(12)$.**

    $$log_5(12) = log_5(3 \cdot 2^2) = log_5(3) + 2log_5(2) = \frac{log(3)}{log(5)} + 2 \cdot \frac{log(2)}{log(5)} = \frac{log(3) + 2log(2)}{log(10/2)} = \frac{b + 2a}{1 - a}$$

11. **(AHSME 1962) Se $log_8(225) = a$ e $log_2(15) = b$, determinare *a* in funzione di *b*.**

    $$log_8(225) = \frac{log_2(15^2)}{log_2(8)} = \frac{2log_2(15)}{3} = \frac{2b}{3}$$

12. **(AHSME 1962) Risolvere $x^{\log_{10}(x)} = x^3/100$**

    $$log\left[x^{\log(x)}\right] = log\left(\frac{x^3}{100}\right) \Rightarrow log(x) \cdot log(x) = log(x^3) - log(100) \Rightarrow log^2(x) = 3log(x) - 2 \Rightarrow log(x) = 1 \vee log(x) = 2 \Rightarrow$$

    $x = 10 \vee x = 100$

13. **(AHSME 1964) Risolvere in *x*: $log_{b^2}(x) + log_{x^2}(b) = 1$, $b \neq 1 \wedge x \neq 1$.**

    $$\frac{log_{x^2}(x)}{log_{x^2}(b^2)} + log_{x^2}(b) - 1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{4log_{x^2}(b)} + log_{x^2}(b) - 1 = 0 \Rightarrow 4log^2_{x^2}(b) - 4log_{x^2}(b) + 1 = 0 \Rightarrow$$

    $$\Rightarrow \left[2log_{x^2}(b) - 1\right]^2 = 0 \Rightarrow 2log_{x^2}(b) - 1 = 0 \Rightarrow log_{x^2}(b) = \frac{1}{2} \Rightarrow b = x$$

14. **(AHSME 1965) Risolvere in *x*: $log_a(x) \cdot log_b(x) = log_a(b)$.**

$$log_a(x)\cdot\frac{log_a(x)}{log_a(b)}=log_a(b)\Rightarrow log_a^2(x)=log_a^2(b)\Rightarrow x=b\vee x=\frac{1}{b}$$

15. (AHSME 1965) Provare che comunque si sceglie un numero positivo A, allora esiste $x > 2/3$ in modo che $log(x^2 + 3) – 2 \cdot log(x)$ sia più piccolo di A.

$log(x^2 + 3) – 2 \cdot log(x) < A \Rightarrow log(x^2 + 3) – log(x^2) < A$

$$\Rightarrow log\left(\frac{x^2+3}{x^2}\right)<A\Rightarrow log\left(1+\frac{3}{x^2}\right)<A\Rightarrow 1+\frac{3}{x^2}<10^A\Rightarrow\frac{3}{x^2}<10^A-1\Rightarrow x^2>\frac{3}{10^A-1}\Rightarrow x>\sqrt{\frac{3}{10^A-1}}$$

16. (AHSME 1966) Se $log_M(N) = log_N(M)$, $M \neq N$, $M \cdot N > 0$, $M, N \neq 1$, determinare $M \cdot N$.

Si ha: Se $log_M(N) \cdot log_N(M) = 1$ e tenuto conto che Se $log_M(N) = log_N(M)$ si ha: $log_M^2(N)=1$, quindi o $log_M(N) = 1$ cioè $M = N$, che è impossibile, o $log_M(N) = –1 \Rightarrow M = 1/N \Rightarrow MN = 1$

17. (AHSME 1971) Se $log_2[log_3(log_4(x))] = log_3[log_4(log_2(y))] = log_4[log_2(log_3(z))] = 0$, calcolare $x + y + z$.

$log_2[log_3(log_4(x))] = 0 \Rightarrow log_3(log_4(x)) = 1 \Rightarrow log_4(x) = 3 \Rightarrow x = 64$;
$log_3[log_4(log_2(y))] = 0 \Rightarrow log_4(log_2(y)) = 1 \Rightarrow log_2(y) = 4 \Rightarrow y = 16$;
$log_4[log_2(log_3(z))] = 0 \Rightarrow log_2(log_3(z))] = 1 \Rightarrow log_3(z) = 2 \Rightarrow z = 9$. Quindi $x + y + z = 64 + 16 + 9 = 89$.

18. (AHSME 1972) Data $f(x)=log\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$, $–1 < x < 1$, calcolare $f\left(\frac{3x+x^3}{1+3x^2}\right)$ ed esprimerla mediante $f(x)$.

$$f\left(\frac{3x+x^3}{1+3x^2}\right)=log\left(\frac{\frac{3x+x^3}{1+3x^2}+1}{1-\frac{3x+x^3}{1+3x^2}}\right)=log\left(\frac{3x+x^3+1+3x^2}{1+3x^2-3x-x^3}\right)=log\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3\right]=3log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=3\cdot f(x)$$

19. (AHSME 1972) Risolvere $|x – log(y)| = x + log(y)$.

$$\begin{cases}x-log(y)=x+log(y)\\x\geq log(y)\end{cases}\vee\begin{cases}x-log(y)=-x-log(y)\\x<log(y)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}log(y)=0\\x\geq log(y)\end{cases}\vee\begin{cases}x=0\\x<log(y)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}y=1\\x\geq 0\end{cases}\vee\begin{cases}x=0\\0<log(y)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=1\\x\geq 0\end{cases}\vee\begin{cases}x=0\\y>1\end{cases}$$

20. (AHSME 1974) Se $log_8(3) = p$, $log_3(5) = q$, determinare $log(5)$.

$$log(5)=\frac{log_3(5)}{log_3(10)}=\frac{q}{log_3(2)+q};log_3(2)=\frac{log_8(2)}{log_8(3)}=\frac{1/3}{p}\Rightarrow log(5)=\frac{q}{\frac{1}{3p}+q}=\frac{3pq}{1+3pq}$$

21. (AHSME 1981) Risolvere in x: $(2x)^{log_b(2)}-(3x)^{log_b(3)}=0$, $b > 1$, $x > 0$.

$$(2x)^{log_b(2)}=(3x)^{log_b(3)}\Rightarrow log_b\left[(2x)^{log_b(2)}\right]=log_b\left[(3x)^{log_b(3)}\right]\Rightarrow log_b(2)\cdot log_b(2x)=log_b(3)\cdot log_b(3x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow log_b(2)\cdot\left[log_b(2)+log_b(x)\right]=log_b(3)\cdot\left[log_b(3)+log_b(x)\right]\Rightarrow\left[log_b(2)-log_b(3)\right]log_b(x)=$$

$$=log_b^2(3)-log_b^2(2)\Rightarrow log_b(x)=-log_b(2)-log_b(3)\Rightarrow log_b(x)=log_b(1/6)\Rightarrow x=1/6$$

[1/6]

22. (AHSME 1982) Se $a > 1$, $b > 1$, $p=\frac{log_b[log_b(a)]}{log_b(a)}$, determinare a^p.

$$p\cdot log_b(a)=log_b[log_b(a)]\Rightarrow log_b(a^p)=log_b[log_b(a)]\Rightarrow a^p=log_b(a)$$

23. (AHSME 1986) Indichiamo con $\lfloor x\rfloor$, il massimo intero contenuto in x, così per esempio $\lfloor 1{,}23\rfloor = 1$, $\lfloor –2{,}14\rfloor = – 3$. Determinare il valore dell'espressione $\sum_{N=1}^{1024}\lfloor log_2(N)\rfloor$.

Si ha $\lfloor log_2(N) \rfloor = h, 2^{h-1} < N \le 2^h$, quindi $\sum_{N=1}^{1024} \lfloor log_2(N) \rfloor = 0 + 2 \cdot 1 + 2^2 \cdot 2 + 2^3 \cdot 3 + \ldots + 2^9 \cdot 9 + 10$ $= 8204$

24. (AHSME 1988) Se $log_9(p) = log_{12}(q) = log_{16}(p + q)$, determinare quanto vale q/p.

$log_9(p) = x \Rightarrow p = 9^x$; $q = 12^x$; $p + q = 16^x \Rightarrow 9^x + 12^x = 16^x \Rightarrow$

$$1+\left(\frac{4}{3}\right)^x = \left(\frac{16}{9}\right)^x \Rightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^{2x} - \left(\frac{4}{3}\right)^x - 1 = 0 \Rightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{q}{p}$$

25. (AHSME 1990) Se $log_x(y) + log_y(x) = 10/3$, $x, y > 0$, $xy = 144$, calcolare $\frac{x+y}{2}$.

$$log_x(y) + \frac{log_x(x)}{log_x(y)} = \frac{10}{3} \Rightarrow \frac{log_x^2(y)+1}{log_x(y)} = \frac{10}{3} \Rightarrow 3log_x^2(y) - 10log_x(y) + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow log_x(y) = \prec \begin{matrix} 1/3 \\ 3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} y = x^{1/3} \\ xy = 144 \end{cases} \vee \begin{cases} y = x^3 \\ xy = 144 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 144 = x^{4/3} \\ y = 144/x \end{cases} \vee \begin{cases} 144 = x^4 \\ y = 144/x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{12^3} \\ y = \sqrt{12} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \sqrt{12} \\ y = \sqrt{12^3} \end{cases} \Rightarrow \frac{x+y}{2} = \frac{12\sqrt{12} + \sqrt{12}}{2} = 13 \cdot \sqrt{3}$$

26. (AHSME 1996) Se $3 = k \cdot 2^r$ e $15 = k \cdot 4^r$, quanto vale r?

$2^r = 3/k$ e $4^r = 15/k \Rightarrow 9/k^2 = 15/k \Rightarrow 3/k = 5 \Rightarrow k = 3/5 \Rightarrow 2^r = 5 \Rightarrow r = log_2(5)$

27. (AHSME 1997) La retta $x = k$ incontra il grafico di $y = log_5(x)$ e quello di $y = log_5(x + 4)$. La distanza fra i punti di intersezione è 0,5. Se $k = a + \sqrt{b}; a, b \in \mathbb{Z}$, quanto è $a + b$?

I punti di intersezione sono $(k; log_5(k))$ e $(k; log_5(k + 4))$, che distano $log_5(k + 4) - log_5(k) = 0{,}5 \Rightarrow$

$$log_5\left(\frac{k+4}{k}\right) = log_5\left(\sqrt{5}\right) \Rightarrow 1 + \frac{4}{k} = \sqrt{5} \Rightarrow k = \frac{4}{\sqrt{5}-1} \Rightarrow a + \sqrt{b} = 1 + \sqrt{5} \Rightarrow a + b = 6.$$

28. (AHSME 1997) Per ogni numero naturale n, sia $f(n) = \begin{cases} log_8(n) & \text{se } log_8(n) \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$. Quanto vale $\sum_{n=1}^{1997} f(n)$?

$log_8(N)$ è un numero razionale se n è potenza di 2, quindi solo per $n = 2^h$, $1 \le h \le 10$, per cui $\sum_{n=1}^{1997} f(n)$ $= \sum_{n=1}^{10} log_8(2^h) = \sum_{n=1}^{10} \frac{h}{3} = \frac{10 \cdot 11}{2 \cdot 3} = \frac{55}{3}$

29. (AMC 2000) Quanti interi positivi b sono tali che $log_b(729)$ sia un intero positivo?

$log_b(729) = log_b(3^6)$ è intero positivo solo se $b = 3^h$ con h divisore di 6, quindi per 4 valori: 3, 9, 27, 729.

30. (HSMC 2006) Calcolare $log_a\left(\sqrt{x} \cdot y^2\right)$, se $log_a\left(x^2\right) = 1, log_a\left(\sqrt{y}\right) = 2$.

$$log_a\left(\sqrt{x} \cdot y^2\right) = log_a\left(\sqrt{x}\right) + log_a\left(y^2\right) = log_a\left[\left(x^2\right)^{1/4}\right] + log_a\left(\sqrt{y}^4\right) = \frac{1}{4} log_a\left(x^2\right) + 4log_a\left(\sqrt{y}\right) = \frac{1}{4} \cdot 1 + 4 \cdot 2 = \frac{33}{4}$$

31. (HSMC 2007) Se $log_a(x) = 1/2$, $log_b(x) = 1/3$, $log_c(x) = -1/4$, $log_d(x) = -1/5$, calcolare $log_{abcd}(x)$.

Si ha: $x = a^{½} = b^{1/3} = c^{-¼} = d^{-1/5} \Rightarrow a = x^2$; $b = x^3$; $c = x^{-4}$; $d = x^{-5} \Rightarrow abcd = x^{2+3-4-5} = x^{-4} \Rightarrow log_{abcd}(x)$ $= -¼$

32. (RICE 2007) Determinare è il minimo numero reale x per cui $log_3(27) \cdot log_x(7) = log_{27}(x) \cdot log_7(3)$.

$$\frac{3}{log_7(x)} = log_{27}(x)\cdot log_7(3) \Rightarrow 3 = log_7(x)\cdot\frac{log_x(x)}{log_x(27)}\cdot log_7(3) \Rightarrow 3 = log_7(x)\cdot\frac{1}{3\cdot log_x(3)}\cdot log_7(3) \Rightarrow$$

$$9 = log_7(x)\cdot log_3(x)\cdot log_7(3) \Rightarrow 9 = log_7(x)\cdot\frac{log_7(x)}{\cancel{log_7(3)}}\cdot \cancel{log_7(3)} \Rightarrow log_7^2(x) = 9 \Rightarrow log_7(x) = \pm 3 \Rightarrow x = \prec \begin{matrix} 343 \\ 1/343 \end{matrix}$$

e la minima è 1/343

33. (ARML 2008) L'equazione $\frac{log_{12}\{log_8[log_4(x)]\}}{log_5(log_4\{log_y[log_2(x)]\})} = 0$ ha una soluzione per *x*, se 1 < *y* < *b*, *y* ≠ *a*. Calcolare la coppia ordinata (*a*, *b*) con *b* il massimo possibile.

$$\begin{cases} log_{12}\{log_8[log_4(x)]\} = 0 \\ log_5(log_4\{log_y[log_2(x)]\}) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} log_8[log_4(x)] = 1 \\ log_4\{log_y[log_2(x)]\} \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} log_4(x) = 8 \\ log_y[log_2(x)] \neq 4 \end{cases} \Rightarrow$$

, quindi $a = 2$,

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 4^8 \\ log_2(x) \neq y^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2^{16} \\ y^4 \neq 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2^{16} \\ y \neq 2 \end{cases}$$

mentre il denominatore ha senso solo se $log_4\{log_y[log_2(x)]\} > 0 \Rightarrow log_2(x) > y \Rightarrow y < 16$ e quindi $b = 16$

Questions in English

34. (AHSME 1995) Positive integers A, B, and C, with no common factor greater than 1, exist such that is valid: A $log_{200}(5)$ + B $log_{200}(2)$ = C. What is A + B + C?

Sapendo che si ha $A \cdot log_{200}(5) + B \cdot log_{200}(2) = C$, con A, B e C numeri naturali senza fattori comuni diversi da 1, determinare $A + B + C$.

$log_{200}(5^A) + log_{200}(2^B) = log_{200}(200^C) \Rightarrow log_{200}(5^A \cdot 2^B) = log_{200}(200^C) \Rightarrow 5^A \cdot 2^B = 2^{3C} \cdot 2^{2C} \Rightarrow$ $\begin{cases} A = 2C \\ B = 3C \end{cases} \Rightarrow A + B + C = 6C$. Dato che i tre numeri non hanno fattori comuni, $C = 1$ e la somma è 6.

35. (HSMC1999) Suppose *x*, *b* > 0 and $log_{b^2}(x) + log_{x^2}(b) = 1$. Find *x*.

$$log_{b^2}(x) + \frac{log_{b^2}(b)}{log_{b^2}(x^2)} = 1 \Rightarrow log_{b^2}(x) + \frac{1/2}{2log_{b^2}(x)} = 1 \Rightarrow 4log_{b^2}^2(x) - 4log_{b^2}(x) + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [2log_{b^2}(x) - 1]^2 = 0 \Rightarrow log_{b^2}(x^2) = 1 \Rightarrow x^2 = b^2 \Rightarrow x = b$$

36. (HSMC1999) Given that $log_a(32) - log_a(4) = -3$, find *a*.

$log_a(32/4) = -3 \Rightarrow a^{-3} = 8 \Rightarrow a = ½$

37. (HSMC2005) What is the value of $log_2\{log_2[log_2(16)]\}$?

$log_2\{log_2[log_2(16)]\} = log_2[log_2(4)] = log_2(2) = 1$

38. (HSMC2006) Find all possible real values of *x* satisfying the equation: $log(x^2) = 0{,}25\ log(4x + 3)^4$.

Se $4x + 3 > 0$, $x > -¾$ si ha: $log(x^2) = log(4x + 3) \Rightarrow x^2 = 4x + 3 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{7}$. Se $x < -¾$ si ha: $log(x^2) = log(-4x - 3) \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \vee x = -1$.

39. (HSMC2006) Given that $log_a(27) = b$, express $log_{\sqrt{3}}(\sqrt[6]{a})$ in terms of *b*.

$$log_{\sqrt{3}}(\sqrt[6]{a}) = \frac{1}{6}log_{\sqrt{3}}(a) = \frac{1}{6}\frac{log_a(a)}{log_a(\sqrt{3})} = \frac{1}{log_a(27)} = \frac{1}{b}$$

40. (HSMC2006) Simplify the expression $(\sqrt{2})^{log_2(9)}$

$$\left[2^{log_2(9)}\right]^{1/2} = \sqrt{9} = 3$$

41. (HSMC2006) What is the value of $\frac{log_2(3)\cdot log_4(5)\cdot log_6(7)}{log_4(3)\cdot log_6(5)\cdot log_8(7)}$**?**

$$\frac{\cancel{log_2(3)}\cdot \cancel{log_4(5)}\cdot \cancel{log_6(7)}}{\frac{\cancel{log_2(3)}}{log_2(4)}\cdot\frac{\cancel{log_4(5)}}{log_4(6)}\cdot\frac{\cancel{log_6(7)}}{log_6(8)}}=2\cdot log_4(6)\cdot log_6(8)=2\cdot\cancel{log_4(6)}\cdot\frac{log_4(8)}{\cancel{log_4(6)}}=2\cdot\frac{3}{2}=3$$

Test di Verifica

QUESITI A SCELTA MULTIPLA CON PIÙ RISPOSTE ESATTE

Per ogni quesito traccia un segno nell'apposito quadratino sulle scelte corrette.

1. Quali delle seguenti affermazioni NON sono sicuramente vere?
A Se $log_b(a) + log_c(a) = 0$ allora $b + c = 0$ B $log_{b^n}(a) = n \cdot log_a(b)$ C Se $log_b(a) > 1$ allora $a > b$
D $log_3(2) + log_3(4) - log_3(5) = log_3(8/5)$ E Se $b > 1$ e $a > 1$ e $n > 0$, allora $log_b(a^n) > 0$

A: per esempio $log_2(2) + log_3(1/3) = 0$, ma $2 + 3 = 5$;

B: $log_{b^n}(a)=\frac{log_a(a)}{log_a(b^n)}=\frac{1}{n\cdot log_a(b)}\neq n\cdot log_a(b)$

C: se $0 < b < 1$, si ha $a < b$, per esempio $log_{½}(¼) = 2 > 1$, ma $½ > ¼$

D: $log_3(2 \cdot 4/5) = log_3(8/5)$ E: $a > 1$ e $n > 0 \Rightarrow a^n > 1 \Rightarrow log_b(a^n) > 0$

2. Seleziona le affermazioni corrette. A $log_2(13) > log_3(14)$ B Se $log_b(30) > 2$ allora $b > 5$ C $log_a(b) \cdot log_b^3(a^3) = 3$ D $log_{a^n}(b^n) - n \cdot log_a(b) = 0$ E $m \cdot log_{b^n}(b^m) = m^2/n$

A: $log_2(13) \approx 3{,}8$; $log_3(14) \approx 3{,}7$; B: $log_6(30) \approx 1{,}9$; C: $log_a(b)=\frac{log_a(a^3)}{log_a(b^3)}=\frac{3}{3\cdot log_a(b)}=\frac{1}{log_a(b)}$;

D: $\frac{log_a(b^n)}{log_a(a^n)}-n\cdot log_a(b)=\frac{n\cdot log_a(b)}{n}-n\cdot log_a(b)=(1-n)\cdot log_a(b)\neq 0, n\neq 1, b\neq 1$;

E: $m \cdot m/n = m^2/n$

3. Quali fra le seguenti funzioni esistono in [1; 3]? A $log_{3-3x}(x^2 - 9)$ B $log_{1+x}(x + 2)$ C $log_{1+x^2}(10 - x^2)$ D $log_x(4 - x)$ E $log_{3x}(x^2 - 9)$

A: $\begin{cases}3-3x>0\\3-3x\neq 1\\x^2-9>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<1\\x\neq 2/3\\x<-3\vee x>3\end{cases}\Rightarrow x<-3$; **B**: $\begin{cases}1+x>0\\1+x\neq 1\\x+2>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>-1\\x\neq 0\\x>-2\end{cases}\Rightarrow x<-1, x\neq 0$;

C: $\begin{cases}1+x^2>0\\1+x^2\neq 1\\10-x^2>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\forall x\in\mathbb{R}\\x\neq 0\\-\sqrt{10}<x<\sqrt{10}\end{cases}\Rightarrow -\sqrt{10}<x<\sqrt{10}, x\neq 0$;

D: $\begin{cases}x>0\\x\neq 1\\4-x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0\\x\neq 1\\x<4\end{cases}\Rightarrow 0<x<4, x\neq 1$; E: $\begin{cases}3x>0\\3x\neq 1\\x^2-9>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0\\x\neq 1/3\\x<-3\vee x>3\end{cases}\Rightarrow x>0, x\neq 1/3$

4. Quali fra le seguenti uguaglianze sono corrette? A $2 = 3^{log_2(3)}$ B $3^4 = 5^{log_5(81)}$
C $ln(x^2) = 2ln(x), \forall x\in\mathbb{R}$ D $ln^2(x) = 2ln(x), \forall x > 0$ E $ln(12) = 2ln(2) + ln(3)$

A: $3^{log_2(3)}\approx 5{,}7\neq 2$; **B**: $5^{log_5(81)}=81=3^4$; C: $ln(x)$ ha significato solo se $x > 0$ D: $ln^2(e) = 1$ mentre $2ln(e) = 2$; **E**: $ln(12) = ln(2^2 \cdot 3) = 2ln(2) + ln(3)$

5. Quali fra le seguenti equazioni o disequazioni, hanno fra le loro soluzioni $x = 0{,}3$?

A $ln(2x + 1) + ln(x - 1) > ln(x + 1)$ **B** $log_2(2x) + log_2(x + 1) < log_4(1 - x)$ **C** $log(4x + 1) - log(x) \geq 1$ **D** $log_3(4x + 3) - log_3(x) \leq log_3(2x - 3)$ **E** $log(3x) - 2log(1 - 2x) > 0$

A: $ln(0,3 - 1)$ non ha significato; **B**: $log_2(0,6) + log_2(1,3) < log_4(0,7) \Leftrightarrow log_2(0,78) < log_2(0,7)/2 \Leftrightarrow log_2(0,78) < log_2\left(\sqrt{0,7}\right)$, vero perché $\sqrt{0,7} > 0,78$; C: $log(2,2) - log(0,3) \geq 1 \Leftrightarrow log(2,2/0,3) \geq log(10)$ falso perché $10 > 2,2/3$; D: $log_3(0,6 - 3)$ non ha significato; **E**: $log(0,9) - 2log(0,4) > 0 \Leftrightarrow log(0,9/0,16) > 0 \Leftrightarrow log(90/16) > 0$

QUESITI A SCELTA MULTIPLA CON UNA SOLA RISPOSTA ESATTA

Per ogni quesito tracciare un segno nell'apposito quadratino sull'unica scelta corretta.

6. **Quale fra i seguenti numeri rappresenta l'espressione** $\dfrac{log_{12}(1/3)\cdot log_{14}\left(\sqrt{3}\right)\cdot log_{15}(1/9)}{log_{144}(1/27)\cdot log_{196}\left(\sqrt[3]{3}\right)\cdot log_{15}\left(\sqrt{3}\right)}$ **?**

A **1** **B** **2** C 3 D –8 E Nessuno dei precedenti

$$\frac{-log_{12}(3)\cdot log_{14}\left(\sqrt{3}\right)\cdot\left[-2\,\cancel{log_{15}(3)}\right]}{\dfrac{log_{12}(1/27)}{2}\cdot\dfrac{log_{14}\left(\sqrt[3]{3}\right)}{2}\cdot\dfrac{\cancel{log_{15}(3)}}{2}}=\frac{2\,\cancel{log_{12}(3)}\cdot\cancel{log_{14}(3)}\cdot 4}{-\cancel{3}\,\cancel{log_{12}(3)}\cdot\dfrac{\cancel{log_{14}(3)}}{\cancel{3}}}=-8\text{, risposta D}$$

7. **Una soluzione approssimata dell'equazione** $7^{2x-3} = 9^{2-3x}$ **è? A 0,74 B –0,48 C 0,97 D 1,24 E Nessuna delle precedenti**

$log(7)(2x - 3) = log(9)(2 - 3x) \Rightarrow [2log(7) + 3log(9)]x = 2log(9) + 3log(7) \Rightarrow log(49 \cdot 729)x = log(81 \cdot 343) \Rightarrow x = log(27783)/log(35721) \approx 0,97$. Risposta C

8. **Quale fra i seguenti è l'insieme di esistenza della funzione** $log_{8-3x}(4x - 9)$**? A** $9/4 < x < 8/3$ **B** $x < 9/4 \vee x > 8/3, x \neq 7/3$ **C** $9/4 < x < 8/3$ **e** $x \neq 7/3$ **D** $x < 9/4$ **E** $\varnothing$

$$\begin{cases}8-3x>0\\8-3x\neq 1\\4x-9>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<8/3\\x\neq 7/3\\x>9/4\end{cases}\Rightarrow\frac{9}{4}<x<\frac{8}{3},x\neq\frac{7}{3}\text{. Risposta C}$$

9. **Se** $log_b(a) = N$**, quanto vale** $log_{b^4}(a^9)$**? A –4N/9 B 4N/9 C –9N/4 D 9N/4 E Nessuno dei precedenti**

$$log_{b^4}\left(a^9\right)=\frac{log_b\left(a^9\right)}{log_b\left(b^4\right)}=\frac{9N}{4}\text{. Risposta D}$$

10. **Quante cifre ha** 2022^{2023}**? A Fra 1000 e 2000 B Fra 2000 e 3000 C Fra 3000 e 4000 D Fra 4000 e 5000 E Nessuno dei precedenti**

$log(2022^{2023}) = 2023log(2022) \approx 6687,6$. Risposta E: 6688

QUESITI A RISPOSTA APERTA (Punti 10 per ogni risposta completa, punteggi intermedi per risposte incomplete)

Rispondi brevemente alle seguenti domande

11. **Un capitale iniziale di € 10000 è investito in un'obbligazione che paga un interesse annuo del 3.31%, che viene però aggiunto al capitale. Se l'inflazione annua è mediamente del 1.29% annuo, dopo 14 anni quale sarà il valore reale del capitale finale?**

Capitale maturato: $10000 \cdot 1,0331^{14} \approx 15775,86$. Con l'inflazione diventa $15775,86 \cdot (1 - 0,0129)^{14} \approx 13153,74$

12. **Risolvi l'equazione seguente** $log_2(5x + 2) = log_4(3 - 4x)$**. Scrivi il risultato approssimato con 2 cifre decimali.**

$$\begin{cases} log_2(5x+2)=\dfrac{log_2(3-4x)}{log_2(4)} \\ x>-\dfrac{2}{5} \\ x<\dfrac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} log_2(5x+2)=log_2\left(\sqrt{3-4x}\right) \\ -\dfrac{2}{5}<x<\dfrac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x+2=\sqrt{3-4x} \\ -\dfrac{2}{5}<x<\dfrac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 25x^2+24x+1=0 \\ -\dfrac{2}{5}<x<\dfrac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-12\pm\sqrt{119}}{25} \\ -\dfrac{2}{5}<x<\dfrac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow x=\frac{-12+\sqrt{119}}{25}\approx -0,04$$

13. Risolvi $log_x(x + 1) + log_x(3x - 1) > log_x(x^2 + 1)$

L'insieme di esistenza è $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ x+1>0 \\ 3x-1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ x>-1 \\ x>1/3 \end{cases} \Rightarrow x>\frac{1}{3}, x\neq 1$. Quindi abbiamo:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3}<x<1 \\ 3x^2+2x-1<x^2+1 \end{cases} \vee \begin{cases} x>1 \\ 3x^2+2x-1>x^2+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{3}<x<1 \\ 2x^2+2x-2<0 \end{cases} \vee \begin{cases} x>1 \\ x^2+x-1>0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{3}<x<1 \\ \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}<x<\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x>1 \\ x<\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \vee x>\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{3}<x<\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \vee x>1$$

QUESITI A COMPLETAMENTO Completa le seguenti frasi

14. Possiamo esprimere $log_3(4)$ come un logaritmo in base 4, ottenendo: $log_3(4)=\dfrac{1}{log_4(3)}$. **Possiamo perciò dire che $log_3(4)$ e $log_4(3)$ sono fra di loro** reciproci **mentre $log_3(4)$ e $log_{1/3}(1/4)$ sono fra di loro** uguali

15. Un'equazione si dice logaritmica se l'incognita è base o argomento di un logaritmo **per risolverla conviene innanzitutto determinare l'insieme** di esistenza **e quindi le eventuali soluzioni trovate con la successiva risoluzione devono** appartenere **a tale insieme**

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. **(Accademia militare) Per $a, b, c, d > 0$ e a diverso da 1, allora** $log_a\left[\dfrac{(a\cdot b^2)^3\cdot c}{d}\right]$ **è uguale a: A) $log(b) + log(c) - log(d)$ B) $3 + 6\,log(b) + log(c) - log(d)$**
C) $log(a) + 2\,log(b) + 3\,log(c) - log(d)$ D) $log(b) - log(c) + log(d)$
$log_a\left(\left(a\cdot b^2\right)^3\right)+log_a(c)-log_a(d)=3log_a(a)+3log_a(b^2)+log_a(c)-log_a(d)=3+6log_a(b)+log_a(c)-log_a(d)$
Risposta B
2. **(Accademia militare) Individuare l'ordine, per valore crescente, dei seguenti logaritmi:**
$a = log(9/2)$, $b = log(15/4)$, $c = log(36/7)$, $d = log(8)$.
A) $b < a < c < d$ B) $c < a < b < d$ C) $a < c < b < d$ D) nessuna delle risposte date
Essendo la base maggiore di 1, l'ordine è quello degli argomenti, quindi: Risposta A
3. **(Accademia militare) Stabilire la base b dei logaritmi per cui si abbia $log_b(1/8) = 3$.**

A) 2B) 1/8 C) 1 D) ½

$log_{½}(1/8) = 3$ Risposta D

4. **(Medicina 2000) L'espressione $log(x^2)$ equivale a**

A) 2 $log(x)$ B) $log(2)$ C) 2 $log(|x|)$ D) $log\left(\sqrt{x}\right)$ **E) $log\ (2|x|)$**

Dato che l'argomento è variabile dobbiamo imporre che sia certamente positivo: Risposta C

5. **(Medicina 2000) Quale di questi numeri: 10; *e*; 0,1; 100 possono essere presi come BASE di logaritmi? A) Solo *e* B) Solo i numeri minori di 100 C) Solo i numeri maggiori di 1 D) Solo 10 ed *e* E) Tutti quelli indicati (e altri)**

Risposta E: tutte i numeri positivi e diversi da 1

6. **(Ingegneria – Politecnico di Torino 1999). L'equazione $log(4x) + log(9x) = 2$ è verificata per**

A) $x = \pm 10/6$ B) $x = 10/6$ C) $x = 100/36$ D) $x = 20/13$ E) $x = 100/13$

$log(36x^2) = log(100) \Rightarrow 36x^2 = 100 \Rightarrow x = 10/6 = 5/3$. Risposta B

7. **(Ingegneria – Politecnico di Torino 2000). Quale dei seguenti numeri ha logaritmo in base 10 strettamente compreso tra 5 e 7? A) $10^7 – 10^4$ B) $–10^6$ C) $–10^{–6}$ D) $10^2 + 10^4$ E) 12345**

$5 = log(10^5) < log(10^7 – 10^4) < log(10^7) = 7$; $log(–10^6)$ non esiste; $log(–10^{–6})$ non esiste; D) $log(10^2 + 10^4) < log(10^5) = 5$ E) $log(12345) < log(10^5) = 5$. Risposta A

8. **(Ingegneria – Varie università 2002). Posto $a = 0{,}21$;** $b = \frac{1}{5}; c = \frac{1}{log_2(5)}$ **si ha**

A) $c < b < a$ B) $a < c < b$ C) $a < b < c$ D) $c < a < b$ E) $b < a < c$

$0{,}21 > 0{,}20 = 1/5$; $log_2(5) < log_2(8) = 3 \Rightarrow 1/ log_2(5) > 1/3 > 0{,}21$. Risposta E

9. **(Ingegneria – Varie università 2002). L'espressione** $7^{2+log_7(x)}$ **è uguale a**

A) $49x$ B) $7^2 + x$ C)$49 + log_7(x)$ D) $49\ log_7(x)$ E) $7x$

$7^2 \cdot 7^{log_7(x)} = 49 \cdot x$. Risposta A

10. **(Ingegneria 2005) Sia $a > 1$, l'espressione** $log_a\sqrt{\frac{a^2\sqrt{a}}{a^{5/2}}}$ **è uguale a A) –1 B) a C) e D) 0 E) 1**

$\frac{1}{2}\left[log_a\left(a^2\sqrt{a}\right) - log_a\left(a^{5/2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[log_a\left(a^{5/2}\right) - log_a\left(a^{5/2}\right)\right] = 0$. Risposta D

11. **(Ingegneria, 2009) Dato un qualunque numero reale positivo x, allora $log(x^3) – log(x^2)$ è uguale a A) $log(x^5)$ B) $log(x^3)/log(x^2)$ C) $log(x)$ D) 0 E) $log(x^3 – x^2)$**

$log(x^3/x^2) = log(x)$. Risposta C

12. **(Ingegneria, 2009) L'espressione** $log\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right) \cdot log(1000)$ **vale A)** $log\left[\frac{1000 \cdot \left(x^2+1\right)}{3}\right]$

B) $log\left(x^2+1\right)$ **C)** $log\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right) + log(1000)$ **D)** $\frac{1}{3} \cdot log\left[1000 \cdot \left(x^2+1\right)\right]$ **E)** $log\left(1000 \cdot \sqrt[3]{x^2+1}\right)$

$\frac{1}{3} log\left(x^2+1\right) \cdot 3 = log\left(x^2+1\right)$. Risposta B

13. **(Ingegneria – Università di Padova 2010). Il numero $log_{25}(125)$ è uguale a**

A) 2/3 B) 3/2 C) 5 D) Nessuna delle precedenti possibilità è corretta

$log_{5^2}\left(5^3\right) = \frac{3}{2}$. Risposta B

14. **(Ingegneria – Università di Padova 2010). Sia x un numero reale diverso da zero. L'espressione $log(5x^2)$ si può anche scrivere: A) 2 $log\ (5x)$ B)** $2 \cdot log\left(\sqrt{5}x\right)$ **C)** $2 \cdot log\left(\sqrt{5}|x|\right)$ **D) $log(10x)$**

$log\left[\left(\sqrt{5}x\right)\right]^2 = 2 \cdot log\left(\sqrt{5}|x|\right)$. Risposta C

15. **(Ingegneria – Università di Padova 2010). Siano x e y numeri reali. Da $log_{1/2}(x) < log_{1/2}(y)$ si deduce:**

A) $x > y > 0$ B) $0 < x < y$ C) $|x| \le |y|$ D)Nessuna delle precedenti possibilità è corretta

Basta assicurarsi che gli argomenti siano positivi e il primo maggiore del secondo perché la base è minore di 1. Risposta A

16. **(Ingegneria – Università di Padova 2010). Le soluzioni reali della disequazione $e^{2x} + 2\,e^{x} - 8 \le 0$ sono: A) $x \le ln(2)$ B) $-ln(4) \le x \le ln(2)$ C) $0 \le x \le ln(2)$ D) Nessuna delle precedenti possibilità è corretta**

$-4 \le e^{x} \le 2 \Rightarrow e^{x} \le 2 \Rightarrow x \le ln(2)$. Risposta A

17. **(Ingegneria – Università di Padova 2010). L'equazione $log(x - 2) + log(2x - 3) = 2 \cdot log(x)$ ha soluzioni: A) $x = 1, x = 6$ B) $x = 1$ C) l'equazione non ha soluzioni D) $x = 6$**

$$\begin{cases} x-2>0 \\ 2x-3>0 \\ x>0 \\ 2x^2-7x+6=x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>2 \\ x>3/2 \\ x>0 \\ x^2-7x+6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>2 \\ x=1 \vee =6 \end{cases} \Rightarrow x=6 \text{ Risposta D}$$

18. **(Ingegneria – Università di Padova 2010). Quale delle seguenti affermazioni è vera?**
A) $log_2(3) < log_3(2)$ B) $log_2(3) < 3/2$ C) $log_3(2) < 2/3$ D) Nessuna delle precedenti

$2=\sqrt[3]{8}<\sqrt[3]{9} \Rightarrow log_3(2) < log_3\left(\sqrt[3]{9}\right)=\frac{2}{3}$. Risposta C