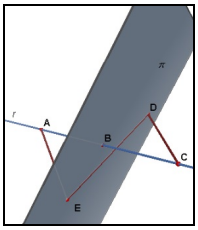
6. Geometria dello spazio ambiente

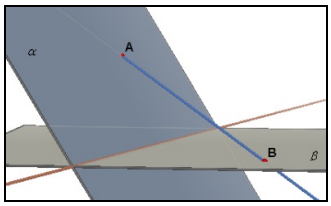
6.1 Rette e piani nello spazio

Posizioni reciproche di rette nello spazio

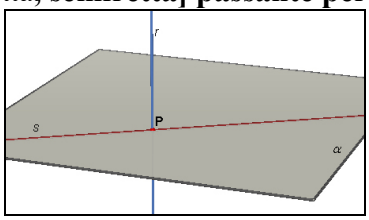
Di seguito sono presentate alcune figure e una loro descrizione a parole. All'interno di ciascuna descrizione scegliere fra le varie alternative i vocaboli che rendono corretta la descrizione.



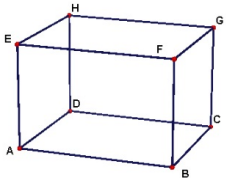
1. **Dato un piano π si fissi su di esso un** [punto, ~~**estremo**~~] ***B*** **e per esso si conduca una** [~~**semiretta**~~, retta] ***r*** **che sia** [incidente, ~~**parallela**~~] **a π. Si fissino poi i punti *A* e *C* su *r* in modo che** [~~**uno solo dei due**~~, tutti e due] **non appartengano a π. Da *A* si tracci** [un segmento, ~~**una retta**~~] **che incontri π in *E* e lo stesso si faccia con *C*, ottenendo il punto *D*** [~~**esterno**~~, appartenente] **a π. Infine si costruisca** [~~**la retta**~~, il segmento] ***DE*.**



2. **Siano i due** [~~**segmenti**~~, piani] **α e β fra loro** [incidenti, ~~**paralleli**~~]**. Fissiamo i punti** [$A \in \alpha$ e $B \in \beta$, ~~$B \in \alpha$ e $A \in \beta$~~]**. Tracciamo la** [retta, ~~**semiretta**~~] **passante per *A* e *B*.**



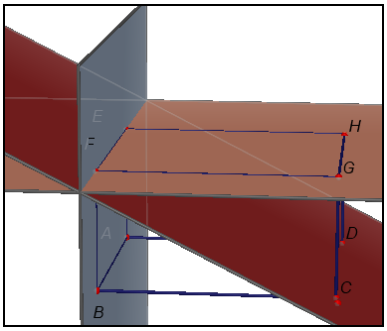
3. **Sul piano α fissiamo** [~~**un vertice**~~, un punto] ***P*. Tracciamo** [~~**il piano**~~, la retta] ***r* perpendicolare al** [piano, ~~**punto P**~~]**. Poi tracciamo una retta *s* passante per *P* e** [appartenente, ~~**non appartenente**~~] **ad α.**



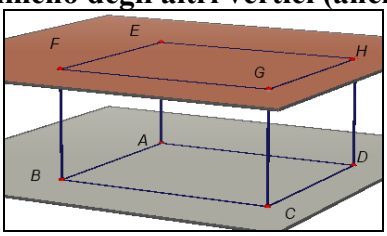
Con riferimento al modello di spazio in figura ***in cui ciascun segmento rappresenta una retta e ciascun quadrilatero un piano, rispondere alle seguenti richieste.***

4. **Individuare tutte le rette sghembe con *AD*.**
   Sono incidenti con *AD* le rette *AE, AB, DC* e *DH*; sono parallele con *AD* le rette *EH, BC* e *FG*. Le rette rimanenti sono perciò sghembe e sono *HG*, *EF*, *GC*, *FB*.

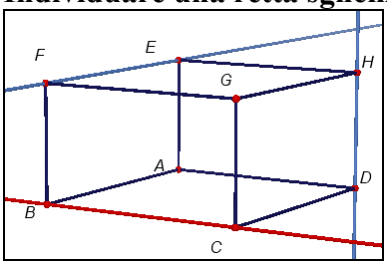
5. **Individuare tutte le rette parallele ad *AD*.**
   Sono *EH*, FG, *BC* che appartengono a piani passanti per *AD* e non hanno con essa punti in comune.
6. **Individuare tutti i distinti piani contenenti la retta per *EF* e uno almeno degli altri vertici (anche i piani non segnati). Quanti ve ne sono?**

3 

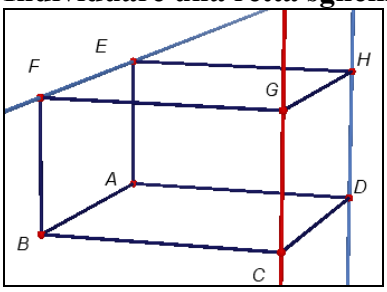
7. Individuare tutti i distinti piani paralleli a quello contenente i punti *A*, *C* e *D*, e contenenti uno almeno degli altri vertici (anche i piani non segnati). Quanti ve ne sono?

1 

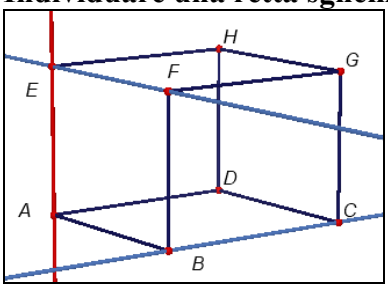
8. Individuare una retta sghemba sia con *EF* che con *HD*.



9. Individuare una retta sghemba con *EF* e parallela ad *HD*.



10. Individuare una retta sghemba con *BC* e incidente ad *EF*.



11. Individuare una retta sghemba sia con *EA* che con *GC*.
Non ce ne sono perché le rette sghembe con *EA* sono *FG*, *BC* e *CD* ciascuna delle quali è incidente con *GC*.

12. Individuare una retta sghemba con *AD* e parallela a *FG*.
Non ce ne sono perché le rette sghembe con *AD* sono *BF*, *CG* e *GH* ciascuna delle quali è incidente con *FG*.

13. Individuare una retta sghemba con *FG* e incidente ad *AD*.
Ve ne sono 4: *AE*, *HD*, *AB* e *CD*

14. Provare che esistono quattro punti non complanari.
Dato che tre punti non allineati determinano un piano e dato che esistono infiniti piani nello spazio, deve esistere un punto non appartenente a un piano dato.

15. Provare che esistono rette e piani che hanno un solo punto in comune.

Per il punto precedente la retta che contiene uno dei tre punti che individuano il piano e il quarto punto esterno al piano ha in comune con il piano un solo punto.

16. Provare che esistono punti non appartenenti a un piano assegnato.

Caso particolare del quesito 14.

17. Dati 5 punti non allineati nello spazio, quanti piani distinti contenenti ciascuno almeno tre dei punti dati, possono tracciarsi al massimo?

Il problema equivale a scegliere 3 punti da 5 in modo che l'ordine non conti, quindi se i punti sono *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, le possibilità sono (*A, B, C*), (*A, B, D*), (*A, B, E*), (*A, C, D*), (*A, C, E*), (*A, D, E*), (*B, C, D*), (*B, C, E*), (*B, D, E*), (*C, D, E*), per un totale di 10

18. Dati 6 punti non allineati nello spazio, quanti piani distinti contenenti ciascuno almeno tre dei punti dati, possono tracciarsi al massimo?

Ragionando come prima sono 20. Infatti siano i punti *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, possiamo scegliere *AB* e uno degli altri 4, *AC* e uno degli altri 3, *AD* e uno degli altri 2, *AEF*; *BC* con altri 3, *BD* con 2, *BEF*; *CDE*. *CDF* e *DEF*. Totale: 4 + 3 + 2 + 1 + 3 + 2 + 1 + 2 + 1 + 1 = 20

19. Dati 4 punti non allineati nello spazio, quanti piani distinti contenenti ciascuno almeno tre dei punti dati e tutti fra di loro paralleli, possono tracciarsi al massimo?

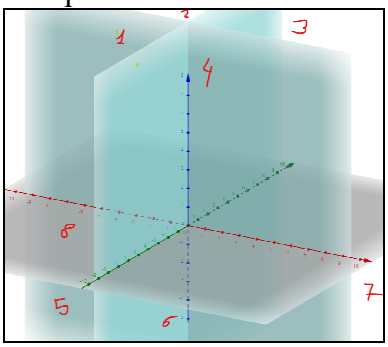
Per 4 punti passano 4 piani: (*A, B, C*), (*A, B, D*), (*A, C, D*), (*B, C, D*) e come si vede tutti hanno in comune con gli altri almeno un punto.

20. Dati 6 punti non allineati nello spazio, quanti piani distinti contenenti ciascuno almeno tre dei punti dati e tutti fra di loro paralleli, possono tracciarsi al massimo?

Abbiamo già visto che vi sono 20 piani possibili, perché i piani siano paralleli non debbono avere nessun punto in comune. Così per esempio (*A, B, C*) è parallelo solo a (*D*, *E*, *F*).

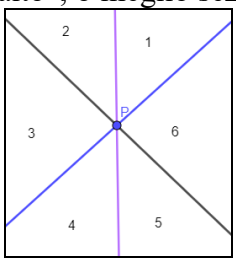
21. Due piani incidenti dividono lo spazio in 4 parti a due a due prive di punti comuni. Tre piani incidenti in un punto, in quante parti lo dividono?

Due piani incidenti dividono lo spazio in 4 parti, il terzo taglia ciascuna di queste parti in due, quindi 8



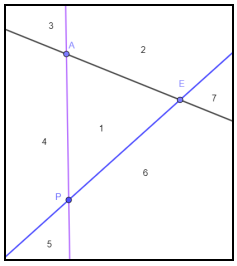
22. Tre piani con una retta in comune, in quante parti dividono lo spazio?

Guardiamo "dall'alto", o meglio sezioniamo i piani con un piano perpendicolare alla retta comune, ecco cosa vedremo:

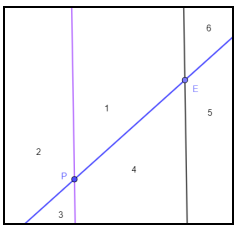


23. Tre piani a due a due con una retta in comune, ma senza punti in comune tutti e tre, in quante parti dividono lo spazio?

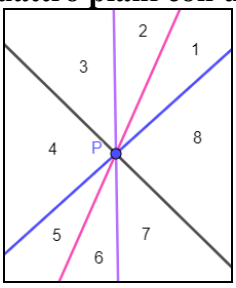
Guardando dall'Alto:



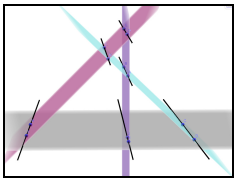
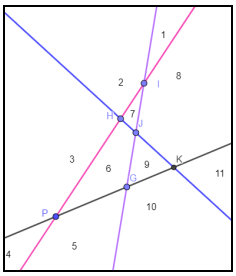
24. Due piani fra loro paralleli e un terzo che li incontra entrambi in una retta, in quante parti dividono lo spazio?

6: 

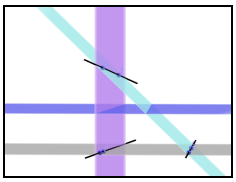
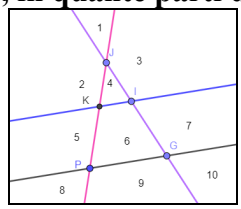
25. Quattro piani con una retta in comune, in quante parti dividono lo spazio?

8: 

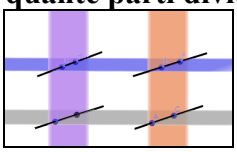
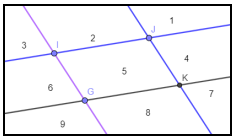
26. Quattro piani a due a due con una retta in comune, ma senza punti in comune a tre a tre, in quante parti dividono lo spazio?

11:  o dall'alto: 

27. Quattro piani di cui tre hanno a due a due con una retta in comune, ma senza punti in comune e il quarto parallelo a uno dei tre, in quante parti dividono lo spazio?

10:  o dall'alto: 

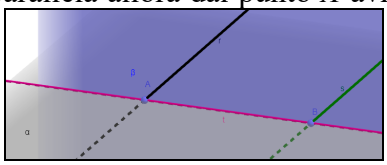
28. Due piani fra loro paralleli e altri due fra loro paralleli, che incontrano gli altri due in una retta, in quante parti dividono lo spazio?

9:  o dall'alto: 

29. Provare che una retta *r* parallela ad una retta *t* di un piano α e passante per un punto *A* esterno ad α è parallela ad α.

Consideriamo il piano β formato da *r* e *t*, questo piano incontra α in *t*. In questo piano *r* e *t* sono parallele, quindi *t* non ha alcun punto in comune con α.

30. Dimostrare che se due rette sono parallele ogni piano che incontra una delle due incontra anche l'altra.

Siano $r \,//\, s$ e sia il piano α tale che $\alpha \cap r = A$. Consideriamo il piano β determinato da *r* ed *s*. Ovviamente $\alpha \neq \beta$ perché α contiene solo *A*, mentre β contiene tutta *r*. Ovviamente $\alpha \cap \beta = t$, e $A \in t$, questa retta incontra anche *s* perché se fosse parallela allora dal punto *A* avremmo condotto due parallele ad *s* *r* e *t* e ciò contrasta con il V postulato. 

31. Provare che se da un punto *P* esterno ad un piano α si conducono due rette *r* ed *s* parallele al piano, il piano β determinato da queste rette è parallelo ad α.

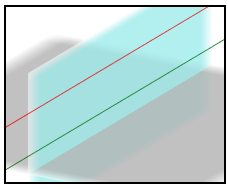
Se β non fosse parallelo ad α allora $\alpha \cap \beta = t$ e la retta *t* sarebbe o 1) parallela sia ad *r* che ad *s*; ma ciò

è assurdo perché allora da P traccerei due diverse parallele a t: oppure 2) incontra una almeno delle due rette, ma anche questo non è possibile perché allora una delle due rette incontra il piano α.

32. Nello spazio vale la proprietà transitiva del parallelismo fra piani? Giustificare la risposta.

Sì. Siano α // β e β //γ se non fosse α // γ vuol dire che vi è una retta comune ad α e γ,

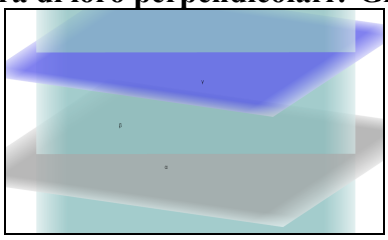
33. Se ad un piano α conduciamo due rette parallele *r* ed *s*, allora il piano β determinato da queste rette è sempre parallelo ad α? Giustificare la risposta.

No, si veda la figura 

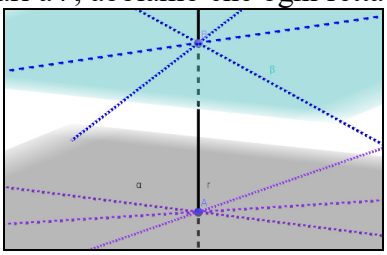
34. Provare che due piani perpendicolari a una stessa retta sono fra loro paralleli.

Se non fossero paralleli allora avrebbero una retta in comune. Preso un qualsiasi punto su questa retta, da esso traccerei due perpendicolari allo stesso piano, che non è possibile.

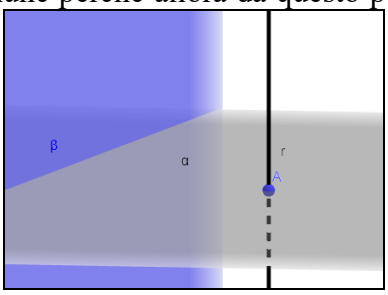
35. Se i piani α e β sono fra di loro perpendicolari e i piani β e γ sono fra loro perpendicolari, anche i piani α e γ sono fra di loro perpendicolari? Giustificare la risposta.

No, sono paralleli 

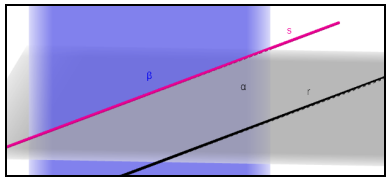
36. Se il piano α e la retta *r* sono perpendicolari e il piano α e il piano β sono fra loro paralleli, come sono fra di loro il piano β e la retta *r*? Giustificare la risposta.

r non può essere parallelo a β, perché allora dovrebbe esistere un piano γ // β che contiene r, ma ciò non è possibile perché allora dovrebbe essere anche γ // α mentre γ e α hanno un punto in comune, quindi $r \cap \beta = B$. Ora consideriamo una qualsiasi retta di β passante per B, questa è parallela a ogni retta di α passante per A e siccome tutte queste rette sono perpendicolari a r, abbiamo che ogni retta di β passante per B è perpendicolare ad r che perciò è perpendicolare a β 

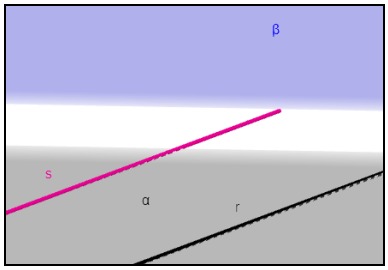
37. Se il piano α e la retta *r* sono perpendicolari e il piano α e il piano β sono fra loro perpendicolari, come sono fra di loro il piano β e la retta *r*? Giustificare la risposta.

r e β non possono avere punti in comune perché allora da questo punto potrei tirare due distinte perpendicolari ad α quindi sono paralleli. 

38. Se *r* ed *s* sono due rette parallele, ed *r* è parallela ad un piano α possiamo dire che anche *s* lo è? Giustificare la risposta.

Sì perché o come in figura  r ed s sono parallele, β contiene s ed è perpendicolare al piano α cui appartiene r, ovviamente r e β sono paralleli e s appartiene a β quindi per

definizione è ad esso parallelo. Oppure la situazione è come in quest'altra figura in cui se s fosse incidente con β in un punto P, allora α che contiene r ed s non sarebbe più parallelo a β.



39. Dimostrare che se una retta *r* è parallela a due piani α e β che hanno in comune una retta intersezione *s*, allora *r* ed *s* sono parallele.

Se $r \cap s = P$ allora anche $r \cap \alpha$ e $r \cap \beta$ non sarebbero vuoti, il che è assurdo.

40. Dimostrare che se due rette *r* ed *s* sono parallele ad una terza retta *t* allora *r* ed *s* sono parallele fra loro.

Se le rette appartengono allo stesso piano la proprietà è vera perché è stata dimostrata nella geometria del piano. Diversamente se $r \cap s = P$ allora da P traccerei due distinte parallele a t.

41. Dimostrare che se per un punto esterno ad un piano α conduciamo due rette *r* ed *s* parallele ad α, il piano β determinato da *r* ed *s* è anch'esso parallelo ad α.

Se così non fosse allora i piani avrebbero in comune una retta parallela ad r e s e di nuovo da un punto traccerei due distinte parallele alla stessa retta.

42. Dimostrare che se la retta *r* e la retta *s* sono fra di loro parallele ed un piano α che contiene *r* incontra un piano β che contiene *s*, in una terza retta *t*, allora *t* è parallela ad *r* ed *s*.

Se t avesse punti in comune con r e con s esisterebbe un piano che contiene le tre rette, quindi coincide con α e β che perciò non sarebbero distinti.

43. Dimostrare che se una retta *r* incontra due piani incidenti α e β fuori dalla loro retta intersezione *s*, allora *r* ed *s* sono sghembe.

Se non fossero sghembe allora il piano che le contiene coinciderebbe con α e β che perciò non sarebbero distinti.

44. Se due piani α e β sono paralleli, è vero che ogni retta di α è parallela ad ogni retta di β? Giustificare la risposta.

No, le rete possono essere sghembe, basta considerare il solito modello in cui per esempio AB ed EH sono sghembe ma appartengono a piani fra loro paralleli. È vero che non hanno punti in comune.

45. Dimostrare l'inverso del Teorema 5, ossia che se due rette sono parallele allora ogni piano perpendicolare a una di esse è perpendicolare anche all'altra.

Da quanto visto nell'esercizio 27, se $r // s$ e $\alpha \perp r$, allora α incontra anche s in un punto B. La perpendicolare t ad α in B è parallela a r per il Teorema 5. Ma allora $t = s$, dato che diversamente avrei tracciato due distinte parallele ad r per B.

46. Nello spazio vale la proprietà transitiva del parallelismo fra rette? Giustificare la risposta.

Sì. Sia $r // s$ e $s // t$, e sia un piano $\alpha \perp r$, per il quesito precedente abbiamo anche $\alpha \perp s$ e $\alpha \perp t$. Quindi per il Teorema 5 tutte e tre le rette sono fra loro parallele.

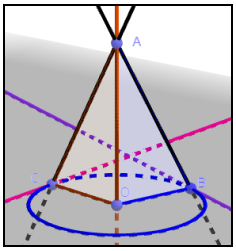
47. Provare che se tre rette non complanari si incontrano a due a due in un punto, allora le tre rette si incontrano nello stesso punto.

Sia $r \cap s = P$, $r \cap t = Q$ e $t \cap s = R$. Se i punti sono distinti allora il piano determinato da P, Q e R conterrebbe le tre rette, contro l'ipotesi.

48. Provare che se tre rette si incontrano a due a due in un punto, ma il detto punto non appartiene a tutte le rette, allora esse sono complanari.

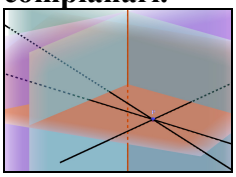
È l'inverso del precedente e si prova allo stesso modo, ma con procedimento diretto, ossia considerando il piano determinato dai tre punti intersezione.

49. Data una circonferenza in un piano, tracciamo una retta *r* perpendicolare al piano e passante per il centro della circonferenza. Dimostrare che ogni punto della detta perpendicolare ha la stessa distanza da tutte le tangenti alla circonferenza.



Consideriamo la figura, la distanza di *A* dalle tangenti si ottiene tracciando da *A* le perpendicolari al piano della circonferenza, per il teorema delle 3 perpendicolari le distanze sono appunto i segmentio che uniscono *A* con i punti di tangenza. I triangoli rettangoli *OB* e *AOC* sono evidentemente uguali, quindi la tesi.

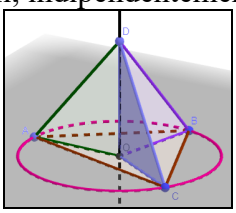
50. Consideriamo una retta e tutti i piani che la contengono, scegliamo un punto appartenente o no alla retta e tracciamo tutte le perpendicolari ai detti piani, provare che queste rette sono tutte complanari.



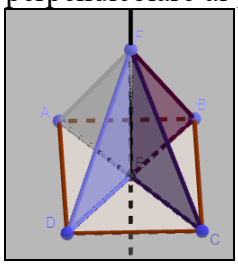
Consideriamo il piano perpendicolare alla retta e passante per il punto *P* scelto, questo piano contiene tutte le perpendicolari condotte da *P* ai piani passanti per la retta.

51. Dato un triangolo in un piano, qual è il luogo dei punti equidistanti dai suoi vertici? Giustificare la risposta.

La perpendicolare al piano del triangolo nel suo circocentro, come mostrato in figura, dato che i tre triangoli costruiti sono ovviamente uguali, indipendentemente dal punto scelto sulla retta.



52. Dato un rettangolo in un piano, qual è il luogo dei punti equidistanti dai suoi vertici? Giustificare la risposta.

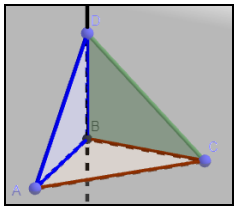
La perpendicolare al piano del rettangolo nel punto d'incontro delle diagonali, come mostrato in figura, 

dato che i quattro triangoli costruiti sono ovviamente uguali, indipendentemente dal punto scelto sulla retta.

53. Dato un quadrilatero convesso in un piano, quando accade che il luogo dei punti equidistanti dai suoi vertici è la retta perpendicolare al piano per il punto di incontro delle diagonali del quadrilatero? Giustificare la risposta.

Inverso del precedente, accade solo se il quadrilatero è un rettangolo, dato che dobbiamo avere diagonali uguali che si dividono scambievolmente a metà.

54. Dato un triangolo rettangolo in un piano, tracciamo la retta perpendicolare al piano per il vertice dell'angolo retto. Possiamo dire che essa è il luogo dei punti equidistanti dagli altri due vertici del triangolo? Giustificare la risposta. Se la risposta è negativa come può modificarsi la richiesta affinché risulti positiva?

No, anche perché la distanza dal vertice dell'angolo retto è nulla. La seconda richiesta diviene affermativa se il triangolo è isoscele, come mostrato in figura 

dove i triangoli *ABD* e

ABC sono ovviamente uguali poiché lo sono i cateti *AB* e *BC*.

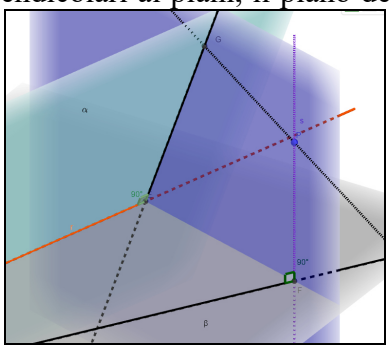
55. Sia data una retta *r* e un punto *P* fuori di essa, descrivere una procedura per determinare la retta passante per *P* e parallela a *r*.

Si consideri il piano che contiene *P* ed *r*, quindi su questo piano si costruisca la retta voluta

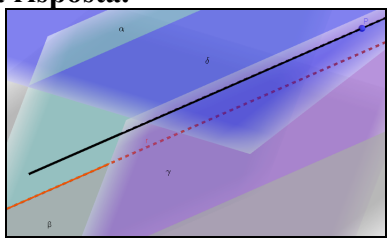
56. Sia data una retta *r* e un punto *P* fuori di essa, descrivere una procedura per determinare la retta passante per *P* e perpendicolare a *r*.

Si consideri il piano che contiene *P* ed *r*, quindi su questo piano si costruisca la retta voluta

57. Dati due piani incidenti, dimostrare che per un punto *P* fuori di essi, passa un unico piano perpendicolare a entrambi.

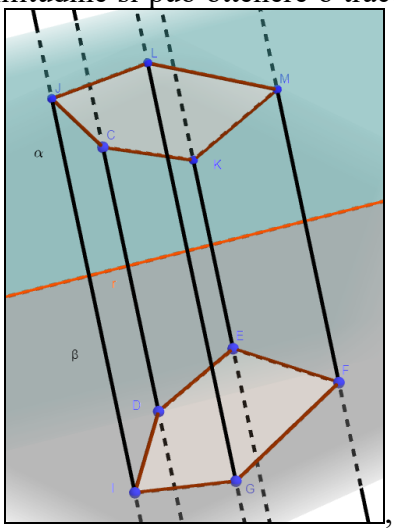
Per *P* tracciamo le rette *s* e *t* perpendicolari ai piani, il piano determinato da queste due rette è quello cercato, come mostrato in figura.  Infatti ogni piano che ha per asse *s* è perpendicolare ad α e ogni piano che ha per asse *t* è perpendicolare a β.

58. Dati due piani incidenti e un punto *P* non appartenente a nessuno dei due piani, quante rette parallele ai due piani possono condursi per *P*? Giustificare la risposta.

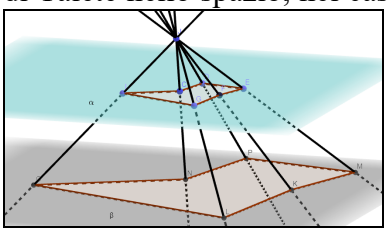


Una, l'intersezione dei piani paralleli ai dati e passanti per *P*:

59. In due piani distinti siano posti due poligoni simili, dimostrare che le rette che congiungono vertici corrispondenti nella similitudine o sono parallele o passano tutte per uno stesso punto.

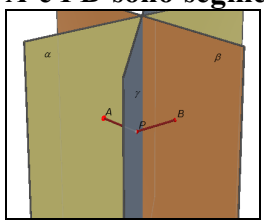
La similitudine si può ottenere o tracciando rette parallele con i piani su cui stanno i poligoni non paralleli. 

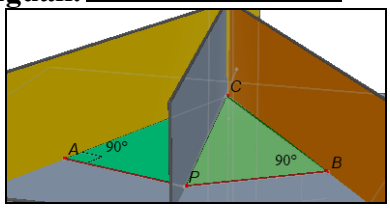
, oppure se i piani sono paralleli è una conseguenza del Teorema di Talete nello spazio, nel caso in cui le rette che tagliano i piani paralleli hanno un punto in comune.



60. Provare che nello spazio il piano bisettore, che divide un angolo diedro in due parti uguali, è il luogo dei punti dello spazio equidistanti da due piani distinti. In figura γ è il bisettore dell'angolo

determinato da α e β, *P* è un punto a caso su γ, *PA* e *PB* sono segmenti di perpendicolare ai due piani. Si deve provare che i segmenti sono uguali.

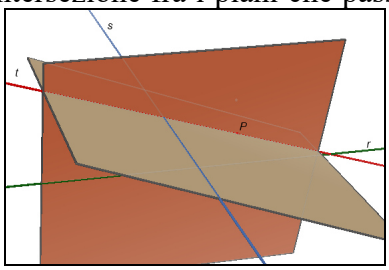




Consideriamo il piano che contiene *A,P* e *B*, che incontra i tre piani in *C*, i triangoli *APC* e *APB* sono rettangoli, hanno l'potenusa *PC* in comune e gli angoli acuti di vertice *C* uguali perché il piano è bisettore, quindi sono uguali e perciò *PA* e *PB* sono uguali.

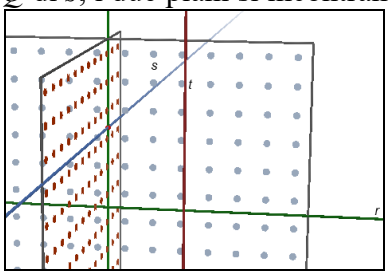
61. Dimostrare che date due rette sghembe e un punto non appartenente a nessuna di esse, per tale punto passa una sola retta complanare con entrambe le rette date.

Basta considerare la retta intersezione fra i piani che passano per *P* e una delle rette, che avendo *P* in comune non sono paralleli.

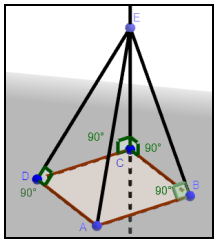


62. Dimostrare che date tre rette a due a due fra loro sghembe esiste una sola retta complanare con due di esse e parallela alla terza.

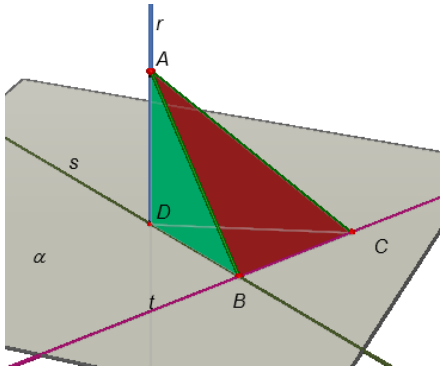
Chiamiamo *r, s* e *t* le rette. Consideriamo il piano parallelo a *t* e passante per un punto *P* di *r* e il piano parallelo a *t* e passante per un punto *Q* di *s*, i due piani si incontrano in una retta che è quella cercata.



63. Dato in un piano α un quadrato, tracciamo una perpendicolare *r* ad α per uno dei vertici del quadrato, provare che qualsiasi retta condotta da un punto qualunque di *r* non è perpendicolare agli altri lati del quadrato.



Gli angoli segnati sono tutti retti, come visto nella dimostrazione del Teorema delle 3 perpendicolari, pertanto ovviamente qualsiasi punto prendiamo su uno dei lati del quadrato, non possiamo avere un triangolo di vertice *E* e uno dei vertici del quadrato con due angoli retti.

64. In figura 

la retta *r* è perpendicolare al piano α, la retta *s* è perpendicolare alla retta *t*. Determinare le misure dei segmenti *AB*, *AC* e *CD*, sapendo che i segmenti *AD*, *BD* e *BC* misurano rispettivamente 3 *cm*, 4 *cm* e 3 *cm*.

Sempre come conseguenza del Teorema delle 3 perpendicolari abbiamo che tutti i triangoli sono rettangoli, quindi: $\overline{AB} = 5\,cm; \overline{AC} = \sqrt{5^2 + 3^2}\,cm = \sqrt{34}\,cm; \overline{CD} = 5\,cm$

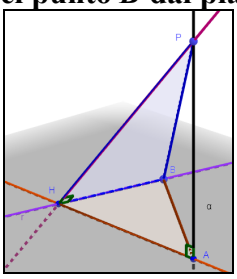
La sfida

1. In quante regioni viene diviso lo spazio da *n* piani a due a due incidenti, ma senza punti in comune a tre a tre?

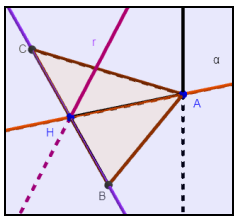
Dobbiamo generalizzare i risultati dei quesiti 23 e 26. Avevamo visto che le regioni erano rispettivamente 7 e 11. In particolare siamo passati da 7 a 11 perché abbiamo aggiunto un piano (una retta nella visione "dall'alto"), in questo modo abbiamo incontrato le 3 rette, quindi 4 delle regioni che abbiamo diviso in due, pertanto abbiamo aggiunto 4 regioni alle 7 che avevamo. Del resto lo stesso avevamo fatto prima con piano che divide lo spazio in 2 regioni, a cui abbiamo aggiunto un ulteriore piano secante che ha aggiunto 2 regioni e poi con un ulteriore piano siamo passati da 4 a 4 + 3 regioni. Se facciamo lo stesso con un'ulteriore piano, questo deve incontrare i rimanenti 4 piani, aggiungeremo ulteriori 5 regioni. E così via. Quindi in generale avremo $2 + (2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots + n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2+n^2+n}{2}$

Temi assegnati agli esami di stato

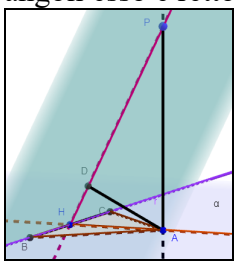
1. (Istituto magistrale 1997/98) Da un punto *P* esterno ad un piano α si conduca la perpendicolare *PA* al piano e la perpendicolare *PH* ad una qualsiasi retta *r* del piano non passante per *A*, essendo *H* ed *A* punti del piano α. a) Dimostrare che la retta *AH* è perpendicolare alla retta *r*. b) Considerati sulla retta *r* due punti distinti *B* e *C* tali che $\overline{BH} = \overline{CH} = \overline{AH}$, dimostrare che il triangolo *ABC* è rettangolo. c) Sapendo che $\overline{PA} = a$, dove *a* è una lunghezza nota, e che il piano dei punti *P*, *B*, *C* forma un angolo di 30° col piano α, determinare la distanza del punto *A* dal piano dei punti *P*, *B*, *C* e la distanza del punto *B* dal piano dei punti *P*, *A*, *C*.

a) Consideriamo la figura 

i triangoli *PHB*, *PAB* e *PAH* sono rettangoli per costruzione, dove *B* è un punto scelto a caso sulla retta *r*. Quindi abbiamo: $\overline{AP}^2 + \overline{AH}^2 = \overline{PH}^2$; $\overline{PH}^2 + \overline{BH}^2 = \overline{PB}^2; \overline{AP}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{PB}^2$. Dato che vogliamo provare che *AHB* è rettangolo in *H*, abbiamo: $\overline{AH}^2 + \overline{BH}^2 = \left(\overline{PH}^2 - \overline{AP}^2\right) + \left(\overline{PB}^2 - \overline{PH}^2\right) = \overline{PB}^2 - \overline{AP}^2 = \overline{AB}^2$. Ossia la tesi.

b) 

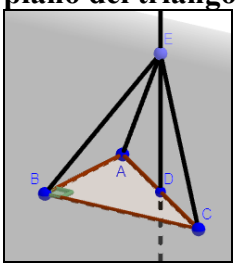
Per il punto a) AHC e AHB sono entrambi retti, e dato che i cateti sono uguali hanno angoli acuti che misurano 45°; dato che l'angolo in A di BAC è somma di due di questi angoli esso è retto.

c) 

Dobbiamo trovare la misura di AD perpendicolare al piano per P, B, C, sapendo che $P\hat{H}A = 30°$, quindi abbiamo: $\overline{PH} = 2\overline{PA} = 2a; \overline{AH} = \frac{\overline{PH}}{2}\sqrt{3} = \sqrt{3}a$, del resto anche ADH è un triangolo 30°-60°-90°, quindi: $\overline{AD} = \frac{\overline{AH}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. La distanza di B dal piano di P, A, C è ovviamente AB, che misura $\sqrt{2}\overline{AH} = \sqrt{6}a$

2. **(Liceo scientifico 2002/03) Dopo aver fornito la definizione di "rette sghembe", si consideri la seguente proposizione: "Comunque si prendano nello spazio tre rette *x*, *y*, z, due a due distinte, se *x* ed *y* sono sghembe e, così pure, se sono sghembe *y* e z allora anche *x* e z sono sghembe". Dire se è vera o falsa e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.**
Falsa, come abbiamo visto in esercizi precedenti.

3. **(Liceo scientifico 2010/2011) Si provi che, nello spazio ordinario a tre dimensioni, il luogo geometrico dei punti equidistanti dai tre vertici di un triangolo rettangolo è la retta perpendicolare al piano del triangolo passante per il punto medio dell'ipotenusa.**



Dobbiamo provare che scelto un punto E sulla retta perpendicolare al piano di ABC per il punto medio D dell'ipotenusa si ha: $\overline{EB} = \overline{EA} = \overline{EC}$. I triangoli EDA ed EDC sono uguali perché entrambi retti, con il cateto ED in comune e gli altri cateti uguali perché D è punto medio di AC. Quindi $\overline{EA} = \overline{EC}$. Sappiamo che BD, mediana relativa all'ipotenusa misura quanto metà ipotenusa, quindi anche il triangolo EBD sarà uguale ai due precedenti, il che equivale alla prima parte della tesi. Ora dobbiamo provare che non vi sono punti esterni alla retta ED che sono equidistanti dai vertici del triangolo. Ciò scaturisce dalla dimostrazione precedente, dato che scegliendo un punto al di fuori della retta i triangoli che prima erano uguali adesso non lo saranno più, dato che in generale non saranno nemmeno retti.

Test di Verifica

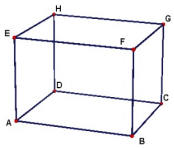
1. **Scegli le affermazioni false**
A Tre piani possono avere un solo punto in comune B Se le rette *a* e *b* sono sghembe e le rette *c* e *b* sono sghembe, allora le rette *a* e *c* possono non essere sghembe C Dati 4 punti non allineati nello spazio, non vi può essere un piano che li contiene tutti D Due rette che non hanno punti in comune sono parallele E Una retta e un piano possono avere fino a 3 punti in comune

Sono false C (i punti possono benissimo appartenere allo stesso piano); D (le rette possono essere sghembe); E (Una retta e un piano hanno 0, 1, o infiniti punti comuni)

2. Seleziona le affermazioni vere

A Se la retta *r* è incidente al piano α, e la retta *s* è parallela ad α, allora *r* e *s* sono incidenti B Se la retta *r* è incidente al piano α, e la retta *s* è parallela ad α, *r* e *s* possono essere parallele C Se i piani α e β sono paralleli allora esistono rette incidenti ad α ma non a β D Se le rette *r* e *s* sono parallele a uno stesso piano, esso è parallelo al piano determinato da *r* e *s* E Non vale la proprietà transitiva per la perpendicolarità fra piani

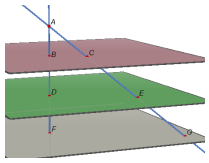
Sono vere D ed E. Sono false A (le rette possono essere sghembe o anche incidenti); B (se *r* e *s* fossero parallele allora *s* dovrebbe comportarsi come *r* e quindi essere incidente ad α); C (Ogni retta che incontra un piano incontra anche un qualsiasi piano a esso parallelo)

3. Con riferimento al modello di spazio in figura 

in cui ciascun segmento rappresenta una retta e ciascun quadrilatero un piano, quali rette sono complanari con *AG*?

A *AD* B *GH* C *HE* D *CG* E *BF*

Risposte corrette: A – B – D. *HE* e *BF* sono sghembe con *AG*.

4. Consideriamo la figura 
in cui le rette incontrano i piani fra loro paralleli, quali fra le seguenti uguaglianze sono corrette?

A $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{CE}}$ **B** $\frac{\overline{AF}}{\overline{DF}}=\frac{\overline{AG}}{\overline{EG}}$ **C** $\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{FD}}{\overline{AB}}$ **D** $\frac{\overline{AC}}{\overline{AG}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AF}}$ **E** $\frac{\overline{BC}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{FG}}{\overline{DE}}$

Risposte corrette: A – B – D. Invece si ha: $\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{CE}}{\overline{AE}}$ e $\frac{\overline{BC}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{FG}}{\overline{DE}}$ solo se i numeri sono uguali, cosa che non è

5. Seleziona le affermazioni vere

A Una retta è perpendicolare a un piano se è perpendicolare a tutte le rette del piano B Due rette perpendicolari a uno stesso piano sono fra loro parallele C La distanza fra due piani si può definire solo per piani paralleli D Dati 5 punti non allineati nello spazio, vi sono massimo 10 piani distinti contenenti ciascuno almeno tre dei punti dati E Tre piani che si incontrano a due a due dividono lo spazio in 6 parti

Risposte corrette: A C D. Sono false B (possono essere sghembe); E (lo dividono in 7 parti)

6. Una retta *r* si dice perpendicolare ad un piano α se (scegli l'opzione corretta)

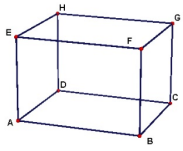
A esiste un piano β perpendicolare ad α, cui *r* appartiene B esistono due rette appartenenti ad α entrambe perpendicolari ad *r* C sono incidenti in *P* ed *r* è perpendicolare a ogni retta di α passante per *P* D *r* è perpendicolare a ogni retta di α E Nessuna delle precedenti

Risposta corretta C

7. Se $\alpha \perp \beta$, $\alpha \cap \beta = r$, $s \in \alpha$, $s \perp r$, quale fra le seguenti conclusioni è corretta?

A $s \perp \beta$ B $s \parallel \beta$ C $\alpha \cap \beta = s$ D $s \cap \beta = \varnothing$ E Nessuna delle precedenti

Risposta corretta A

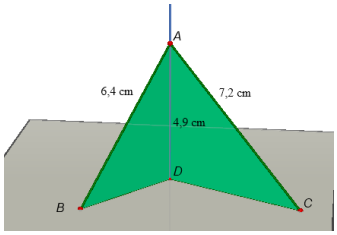
8. Con riferimento al modello di spazio in figura 

in cui ciascun segmento rappresenta una retta e ciascun quadrilatero un piano, quante fra le rette segnate sono sghembe con *AG*?

A 1 B 2 C 3 D 4 E Nessuna delle precedenti

Risposta corretta E. Sono 6, cioè *EH, EF, HD, CD, AB, FB*

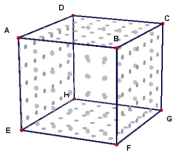
9. Dati tre piani aventi una retta in comune, in quante parti dividono lo spazio?
A 4 **B** 6 **C** 8 **D** Dipende dagli angoli che formano fra di loro **E** Nessuna delle precedenti
Risposta corretta B

10. In figura la retta *AD* è perpendicolare al piano, 

tenendo conto dei dati numerici, quale fra i seguenti è un valore approssimato di *BC*?
A 5,7 **B** 6,7 **C** 7,1 **D** Non si può determinare con i dati a disposizione **E** Nessuna delle precedenti

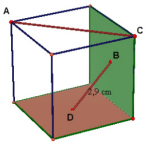
Risposta corretta B: $\overline{BC}=\sqrt{\overline{BD}^2+\overline{CD}^2}=\sqrt{\left(6,4^2-4,9^2\right)+\left(7,2^2-4,9^2\right)}=\sqrt{44,78}\approx 6,7$

11. Fra i segmenti segnati quale rappresenta la distanza fra le rette sghembe EH e BF?



Risposta corretta EF

12. Nel cubo in figura, in cui B e D sono centri delle rispettive facce, calcola la misura del segmento



AC, con una cifra decimale esatta.

$\overline{BD}=\sqrt{2}\cdot\frac{\ell}{2}\Rightarrow \ell=\sqrt{2}\cdot\overline{BD};\overline{AC}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\overline{BD}=2\cdot 2,9\,cm=5,8\,cm$

13. Confrontando i concetti di perpendicolarità fra rette nel piano e nello spazio, qual è una differenza fondamentale?
Nel piano per **un** punto su una retta passa una sola perpendicolare, nello spazio infinite

14. Se una retta *r* e un piano α hanno in comune più di un punto allora tutti **punti della retta sono** punti del piano **e si dice che la retta** giace sul piano

15. Due rette che non hanno punti in comune e sono complanari **si dicono** parallele**, viceversa si dicono** sghembe

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

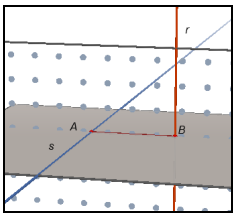
1. (Accademia Navale) Si dimostri che una qualunque retta *r* di un piano α ed una retta *s* non contenuta in α e che incontra α in un punto *P* non appartenente ad *r* sono sghembe.
Se esistesse un piano che contiene *r* ed *s* dovrebbe contenere *r* e *P*, quindi dovrebbe essere il piano α

2. (Accademia Navale) Si riconosca che tre rette aventi a due a due un punto in comune, o giacciono in un piano o passano per uno stesso punto.
Se non passano per lo stesso punto vuol dire che si ha: $r \cap s = P$, $r \cap t = Q$ e $t \cap s = R$; quindi appartengono al piano determinato da *P, Q* ed *R*.

3. (Accademia Navale) Dati una retta e un punto *P* non appartenente a essa, giustificare l'esistenza e l'unicità della retta per *P*, perpendicolare e incidente *r*.
R e *P* appartengono ad un unico piano e sul piano la retta per un punto e perpendicolare ad un'altra retta esiste ed è unica.

4. (Accademia Navale) Giustificare che i piani passanti per un punto e perpendicolari a un piano dato costituiscono un fascio proprio e descrivere la retta sostegno.
Il fascio è proprio perché ovviamente i detti piani non sono paralleli, passando tutti per lo stesso punto,

la retta sostegno è la perpendicolare al piano dato per il punto dato.

5. **(Accademia Navale) Date due rette sghembe *r* e *s* e un punto *P*, individuare una retta passante per *P* e complanare con *r* e *s*.**
   Essa è la retta intersezione dei due piani contenenti *P* e una delle due rette.
6. **(Accademia Navale) Date una retta *r* e un punto *P* (non necessariamente appartenente a *r*) giustificare che esistono infinite rette per *P* che formano un angolo acuto con *r*. Quante sono complanari con *r*?**
   Basta considerare il piano formato da *r* e *P*, è chiaro che su questo piano vi sono infinite rette passanti per *P*, che descrivono tutto l'angolo giro e quindi ve ne sono infinite che formano con *r* angoli acuti. Ovviamente sono tutte complanari con *r*.
7. **(Accademia Navale) Siano α e β due piani incidenti e sia *r* la loro retta intersezione. Si dimostri che fra le rette di α, quelle formanti angolo massimo con β sono le perpendicolari a *r*.**
   Ovviamente angolo massimo significa angolo retto e quindi sono proprio le perpendicolari
8. **(Accademia Navale) Verificare che fra tutti i segmenti aventi un estremo assegnato e l'altro appartenente a un dato piano, ne esiste uno di lunghezza minima.**
   È quello in cui l'altro estremo è la minima distanza, ossia il piede della perpendicolare condotta dal primo estremo al piano.
9. **(Accademia Navale) Verificare che fra tutti i segmenti aventi gli estremi appartenenti a due piani paralleli, ne esistono di lunghezza minima.**
   Sono quelli la cui misura è pari alla distanza fra i due piani
10. **(Accademia Navale) Individuare, mediante intersezioni con piani opportuni, il segmento di minima distanza tra due rette sghembe.**
    

    Consideriamo i piani contenenti una delle rette e perpendicolari all'altra. I piani si incontrano in una retta che determina due punti sulle due rette sghembe, il segmento avente per estremi tali punti è la distanza cercata.
11. **(Accademia Navale) Individuare tutte le rette equidistanti da due piani paralleli assegnati.**
    Tutte le rette appartenenti al piano bisettore della striscia di spazio delimitata dai piani.
12. **(Accademia Navale) È vero o falso che la distanza di un punto da un piano coincide con quella di tale punto da una qualsiasi retta contenuta nel piano? Giustificare la risposta.**
    Falso, dato che la distanza è quella minima e quindi quella fra il punto e il piede della sua perpendicolare al piano.
13. **(Accademia Navale) Individuare tutti i piani equidistanti da tre punti non allineati.**
    I piani perpendicolari alla retta intersezione dei piani assiali dei segmenti che hanno per estremi due dei tre punti