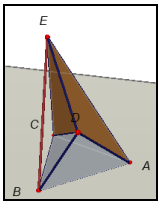
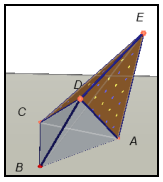
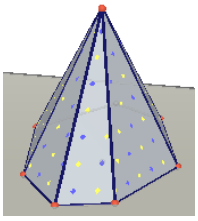
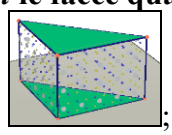
# 6. Geometria dello spazio ambiente

## 6.2 Geometria dei poliedri

## I poliedri

1. **Se sulla faccia di un tetraedro costruiamo un altro tetraedro con una faccia coincidente, il poliedro ottenuto è concavo o convesso? Giustificare la risposta.**

   La risposta dipende dalla costruzione, per esempio in questo caso 
   
   è concavo, il segmento *BE* è esterno al poliedro; mentre in quest'altro è convesso, 
   

2. **Dati i seguenti poliedri, contare quante facce ha ciascuno di essi.**
   
   H: consideriamo i piani paralleli alla base di appoggio, sono 6, altre 2 facce sono quelle a forma di H e infine altre 6 sono le rimanenti. Totale: 14;
   L: 3 parallele alla base di appoggio, 2 a forma di L e altre 3, totale: 8;
   T: 4 parallele alla base, 2 a T e altre 4, totale: 10
3. **Con riferimento al precedente esercizio, contare quanti spigoli ha ciascun poliedro.**
   H: gli spigoli appartenenti alle facce parallele alla base sono 24, quelli perpendicolari alla base sono 12, totale: 36; L: gli spigoli di facce parallele alla base sono 12, i rimanenti 6, totale: 18; T: Abbiamo 16 + 8 = 24
4. **Esistono poliedri concavi con quattro facce? Giustificare la risposta.**
   No perché solo i tetraedri hanno 4 facce e sono convessi.
5. **Una faccia di un poliedro è esagonale. Quante facce, minimo, può avere il poliedro?**
   Il numero minimo è di 6 facce che hanno uno spigolo comune all'esagono e dallo stesso esagono, ossia 7. Esempio: 
6. **a) Esistono poliedri che hanno tutte le facce triangolari meno una? b) Se la risposta è positiva, dette *n* le facce triangolari ($n \geq 4$), quanti lati ha il poligono non triangolo?**
   a) Sì; si consideri il poliedro dell'esercizio precedente;
   b) Sempre tenendo conto della stessa figura il poligono ha tanti lati quante le facce triangolari, quindi in generale *n*.
7. **a) Esistono poliedri che hanno tutte le facce quadrilatere meno una? b) Se la risposta è positiva, dette *n* le facce quadrilatere ($n \geq 4$), quanti lati ha il poligono non quadrilatera?**
   No perché in ogni vertice devono incontrarsi almeno 3 quadrilateri, quindi il minimo numero possibile sarebbero 6 quadrilateri, come una scatola, a questo punto però non possiamo sostituire una di queste facce con un'altra che non sia quadrilatera.
8. **a) Esistono poliedri che hanno tutte le facce quadrilatere meno due? b) Se la risposta è positiva, dette *n* le facce quadrilatere ($n \geq 3$), quanti lati hanno i poligoni non quadrilateri?**
   a) Sì,  ;

b) Considerando la figura precedente e generalizzandola, la risposta è ovviamente entrambi $n$

**9. Quanti triangoli equilateri possono concorrere in un vertice, al massimo?**

Dato che gli angoli interni di un triangolo equilatero misurano 60°, deve essere $60° \cdot n < 360°$, da cui $n < 6$, quindi al massimo 5.

**10. Quanti triangoli rettangoli e isosceli possono concorrere in un vertice? Studiare tutti i casi.**

Dato che gli angoli interni di un triangolo rettangolo isoscele misurano 90°, 45° e 45°, possiamo mettere tre triangoli dalla parte dell'angolo retto, oppure tre retti e uno acuto; o ancora 2 retti e 3 acuti; 1 retto e 4 acuti; 5 acuti; 6 acuti; 7 acuti. Quindi da un minimo di 3 a un massimo di 7, con tutti i casi intermedi.

**11. Quanti rettangoli possono concorrere in un vertice?**

Dato che gli angoli interni di un rettangolo misurano 90°, deve essere $90° \cdot n < 360°$, da cui $n < 4$, quindi al massimo 3.

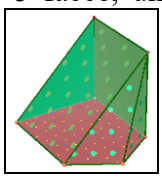
**12. Quanti triangoli equilateri e quadrati possono concorrere in un vertice? Studiare tutti i casi.**

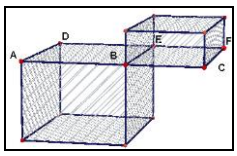
Possiamo mettere 4 triangoli e 1 quadrato ($4 \cdot 60° + 90° = 330°$); 3 triangoli e 1 quadrato ($3 \cdot 60° + 90° = 270°$); 2 triangoli e 2 quadrati ($2 \cdot 60° + 2 \cdot 90° = 300°$); 2 triangoli e 1 quadrato ($2 \cdot 60° + 90° = 210°$); 1 triangolo e 2 quadrati ($60° + 2 \cdot 90° = 240°$); 1 triangolo e 3 quadrati ($60° + 3 \cdot 90° = 350°$)

**13. Un poliedro ha 5 facce, quante di esse possono essere a) triangolari? b) quadrate? c) pentagonali?**

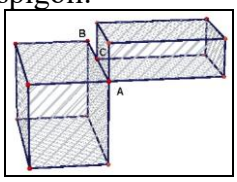
a) 4 basta vedere l'esercizio 5; b) 3, Vedi esercizio 8; c) Ovviamente 0, perché ogni suo spigolo dovrebbe essere associato a una diversa faccia, quindi vi sarebbero almeno 5 + 1 = 6 facce.

**14. a) Un poliedro ha una faccia pentagonale e una quadrata, quante facce minimo ha? b) E quanti lati hanno le rimanenti?**

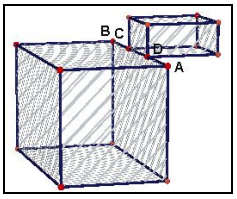
a) alla faccia pentagonale dobbiamo associare 5 facce, una delle quali può essere quella quadrata, quindi almeno 6; b) 3 triangoli e 1 quadrilatero, 

**15. Nel poliedro in figura *AC* è un unico spigolo o deve contarsi per due?** 


Per 2, dato che B è un vertice, in quanto concorrono in esso 4 spigoli.

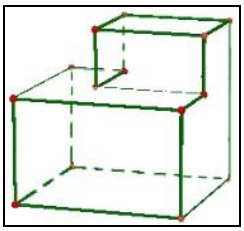
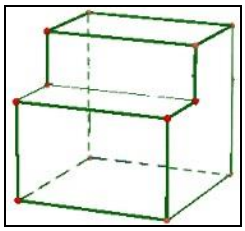
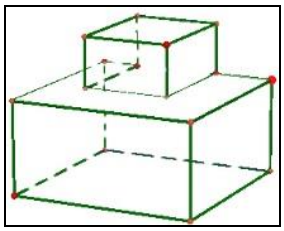
**16. Nel poliedro in figura quali fra *AB*, *AC* e *BC* sono spigoli?** 


Solo *BC*, dato che *AC* può eliminarsi poiché le due facce apparenti che esso divide in realtà sono un'unica faccia, dato che appartengono allo stesso piano.

**17. Nel poliedro in figura quali fra *AB*, *AC*, *AD*, *BC*, *BD*, *CD* sono spigoli?** 

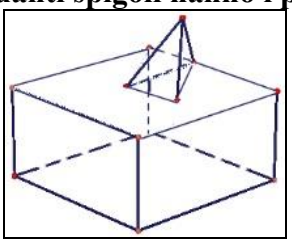
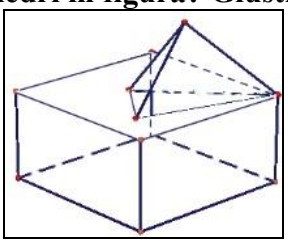
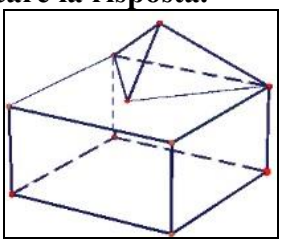

*AD* e *BC*, dato che le due facce separate dallo "spigolo" *CD* in realtà sono un'unica faccia, quindi *CD* non è spigolo

**18. Quante facce hanno i poliedri in figura? Giustificare la risposta.**

a)  b)  c) 

a) Abbiamo 3 facce parallele al "pavimento", 3 parallele al punto di vista e altre 3 nell'altra direzione, totale 9; b) Abbiamo 3 facce parallele al "pavimento", 3 parallele al punto di vista e altre 2 nell'altra direzione, totale 8; c) Abbiamo 3 facce parallele al "pavimento", 3 parallele al punto di vista e altre 4 nell'altra direzione, totale 10

**19. Quanti spigoli hanno i poliedri in figura? Giustificare la risposta.**

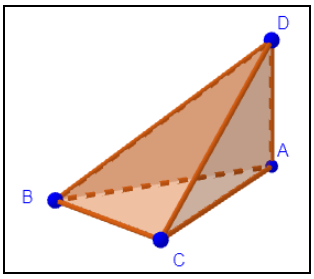
a)  b)  c) 

a) Abbiamo 11 spigoli appartenenti a facce parallele al "pavimento", e altre 7, totale: 18; b) Abbiamo 11 spigoli appartenenti a facce parallele al "pavimento", e altre 7, totale: 18; c) Abbiamo 10 spigoli appartenenti a facce parallele al "pavimento", e altre 7, totale: 17

**20. Possiamo costruire un tetraedro che ha tutte le facce che sono triangoli a) Rettangoli; b) Isosceli; c) Equilateri; d) Ottusangoli?**

Le risposte sono tutte Sì, dato che in ogni caso la somma degli angoli appartenenti a tre triangoli di qualunque tipo non supera 360°.

**21. Dimostrare che in un tetraedro quadrirettangolo (che ha tutte le facce che sono triangoli rettangoli), la somma dei quadrati degli spigoli che concorrono nei due vertici che sono retti per due delle facce cui appartengono è costante.**

Il riferimento è alla figura seguente 

i vertici in questione sono $A$ e $B$. abbiamo: $\overline{AB}^2+\overline{AD}^2+\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\left(\overline{BD}^2-\cancel{\overline{AB}^2}\right)+\left(\cancel{\overline{AB}^2}+\overline{BC}^2\right)=\overline{BD}^2+\overline{BA}^2+\overline{BC}^2$

**22. Dimostrare che in un tetraedro quadrirettangolo la somma dei quadrati di due facce con uno spigolo in comune che non sia cateto per entrambe, è costante.**

Il riferimento è alla figura del quesito precedente; dobbiamo provare che $\left(S_{ABD}\right)^2+\left(S_{BCD}\right)^2=\left(S_{ACD}\right)^2+\left(S_{ABC}\right)^2$. Si ha:

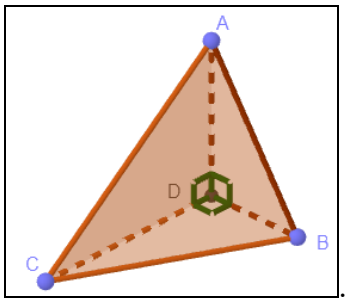
$$\left(S_{ABD}\right)^2+\left(S_{BCD}\right)^2=\frac{\overline{AB}^2\cdot\overline{AD}^2+\overline{BC}^2\cdot\overline{BD}^2}{4}=\frac{\overline{AB}^2\cdot\overline{AD}^2+\overline{BC}^2\cdot\left(\overline{AB}^2+\overline{AD}^2\right)}{4}=$$

$$=\frac{\overline{AD}^2\cdot\left(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2\right)+\overline{BC}^2\cdot\overline{AB}^2}{4}=\frac{\overline{AD}^2\cdot\overline{AC}^2+\overline{BC}^2\cdot\overline{AB}^2}{4}=\left(S_{ACD}\right)^2+\left(S_{ABC}\right)^2$$

**23. Quanti fra i sei spigoli di un tetraedro trirettangolo dobbiamo conoscere, al minimo, per potere determinare la misura della superficie?**

Ne bastano 3, per esempio quelli che determinano i 3 triangoli rettangoli permettono di trovare anche gli spigoli della quarta faccia, e perciò con il Teorema di Erone possiamo trovare anche la sua area.

**24. Dimostrare che in un tetraedro trirettangolo le altezze condotte da ciascun vertice alla faccia opposta si incontrano nel vertice trirettangolo.**

Ci riferiamo alla figura 

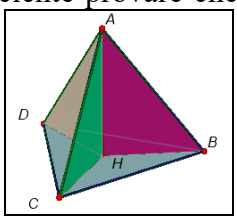
. Ovviamente l'altezza condotta da $A$ ha come piede proprio $D$ e analogamente l'altezza condotta da $D$ passa naturalmente per $D$. Per quanto riguarda le altre due, dato che $AD$ è perpendicolare al piano di $BCD$ ogni retta che passa per $D$ è perpendicolare ad $AD$ e quindi a ogni piano che lo contiene, perciò le altezze condotte da $B$ e $C$ hanno piede $D$.

**25. Dimostrare che in un tetraedro trirettangolo, il doppio della somma dei quadrati degli spigoli concorrenti negli angoli retti equivalgono alla somma dei quadrati dei rimanenti spigoli.**

Ci riferiamo alla figura del quesito precedente.

$$\overline{AC}^2+\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\left(\overline{AD}^2+\overline{CD}^2\right)+\left(\overline{AD}^2+\overline{BD}^2\right)+\left(\overline{BD}^2+\overline{CD}^2\right)=2\left(\overline{AD}^2+\overline{BD}^2+\overline{CD}^2\right)$$

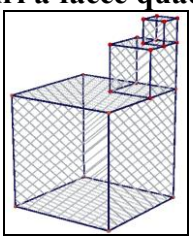
**26. Un tetraedro ha tre facce che sono triangoli isosceli e una equilatera. a) Provare che il tetraedro è ortocentrico. b) Possiamo dire che le 4 altezze sono uguali?**

a) Per essere ortocentrico è sufficiente provare che un'altezza ha il piede sull'ortocentro della faccia opposta. Consideriamo la figura 

in cui $BCD$ è la faccia equilatera, $AH$ è l'altezza condotta da $A$, vogliamo provare che $H$ è ortocentro di $BCD$. Consideriamo i triangoli $ADH$ e $ACH$, questi sono isometrici poiché sono triangoli rettangoli con il cateto $AH$ in comune e le ipotenuse $AD$ e $AC$ isometriche perché lati obliqui di uno stesso triangolo isoscele. Allo stesso modo si prova che anche $AHB$ è isometrico ai precedenti, ma allora le distanze $HB$, $HC$ E $HD$ sono uguali, ossia $H$ è circocentro di $BCD$, ma siccome $BCD$ è equilatero, $H$ è anche ortocentro. b) Ovviamente in generale l'altezza $AH$ non misura quanto le altre tre altezze che invece sono isometriche fra loro.

**27. Con riferimento al precedente problema, se i lati obliqui dei triangoli isosceli misurano 17 *cm* e l'altezza del tetraedro riferita alla faccia equilatera è 15 *cm*, determinare la misura del lato del triangolo equilatero.**

Basta considerare uno dei tre triangoli rettangoli già visti: $\overline{HC}=\sqrt{17^2-15^2}=8cm$, dato che $HC$ è parte di una mediana di $BCD$ e misura quanto 2/3 dell'intera mediana, che essendo anche altezza misura $\sqrt{3}/2$ volte il lato, abbiamo: $\overline{HC}=\frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\overline{BC}\Rightarrow\overline{BC}=\sqrt{3}\overline{HC}=8\sqrt{3}cm$

**28. In figura abbiamo costruito un poliedro incollando 3 esaedri a facce quadrate in modo che a due abbiano un vertice in comune e due spigoli sovrapposti.**  **Quante facce, vertici e spigoli ha questo solido?**

Le facce sono 4 + 4 + 4 = 12; i vertici: 4 + 6 + 6 + 4 = 20; gli spigoli: 4 + 6 + 6 + 4 + 3 + 3 + 4 = 30

**29. Generalizziamo il problema precedente usando *n* cubetti, quante sono le facce, i vertici e gli spigoli?**

Le facce sono $(n + 1) + (n + 1) + (n + 1) = 3 \cdot (n + 1)$; i vertici: $4 + 6 \cdot (n - 1) + 4 = 6n + 2$; gli spigoli: $4 + 6 \cdot (n - 1) + 4 + 3 \cdot (n - 1) + 4 = 9n + 3$

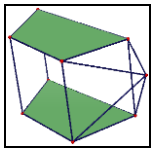
**30. Provare che in ogni poliedro convesso vi sono almeno due facce con lo stesso numero di lati.**

Se il poliedro ha $n$ facce, ogni faccia ha un numero di lati che può andare da 3 a $(n - 1)$ dato che ogni

lato di questa faccia è comune con un'altra faccia. Quindi devono esserci due facce con lo stesso numero di lati, dato che da 3 a ($n$ – 1) vi sono un totale di $n - 1 - 3 + 1 = n - 3$ numeri. Per esempio se il poliedro avesse 7 facce, ciascuna può avere da 3 a 6 facce, quindi possiamo avere al massimo 4 tipi diversi di poligoni con 3, 4, 5 o 6 facce. le rimanenti 3 devono avere un numero di lati uguali a 3, 4, 5 o 6.

## I prismi

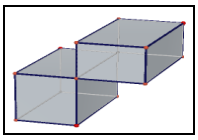
1. **È sufficiente dire che un prisma è un poliedro con due facce uguali appartenenti a piani paralleli? Giustificare la risposta.**

   No, si consideri la figura accanto 

2. **Con riferimento al precedente quesito cosa dobbiamo aggiungere alla definizione perché sia corretta?**

   Il caso precedente non funzionava perché abbiamo "attaccato" un altro poliedro a una faccia, rendendo il poliedro concavo, se avessimo voluto un poliedro convesso ciò sarebbe bastato.

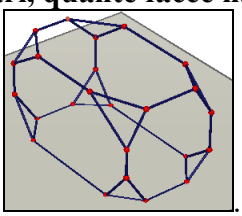
3. **Possiamo dire che un parallelepipedo rettangolo è un poliedro le cui facce sono tutte rettangoli? Se la risposta è negativa fornire un esempio di poliedro con facce rettangolari che non è un parallelepipedo rettangolo.**

   No, si consideri la figura seguente 

4. **Con riferimento al precedente problema, possiamo dire che un parallelepipedo rettangolo è un poliedro convesso le cui facce sono tutte rettangoli?**

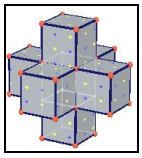
   Ancora una volta il problema è nato dall'avere "attaccato" altri poliedri e quindi di avere reso il poliedro concavo, quindi stavolta la risposta è positiva.

5. **Da un panetto di burro a forma di parallelepipedo rettangolo tagliamo gli angoli in modo da ottenere delle sezioni triangolari, quante facce ha il solido così ottenuto?**

   14, come mostrato in figura,  . Del resto le 6 facce del parallelepipedo rimangono, anche se diventano degli ottagoni, ma per ognuno degli 8 vertici si crea un triangolo, quindi abbiamo 6 + 8 = 14 facce.

6. **Con riferimento al precedente esercizio, quanti spigoli ha il solido ottenuto?**

   Per quanto detto abbiamo 16 spigoli delle due facce parallele al pavimento, altre 16 di altre due facce parallele, ma di questi spigoli 4 sono comuni a quelli già contati, quindi 12 spigoli. Infine delle due rimanenti facce gli spigoli già contati sono 8, perciò ne rimangono altri 8. Totale 16 + 12 + 8 = 36.

7. **Incolliamo 6 cubetti uguali, in modo da ottenere un poliedro a forma di croce, come mostrato in figura. Quanti vertici ha? Quanti spigoli? Quante facce?** 

   Abbiamo gli 8 vertici del cubo di partenza, ciascuno dei 6 cubetti incollati ha in comune con questo 4 vertici, quindi ne contiamo solo 4, totale $8 + 4 \cdot 6 = 32$; Gli spigoli sono i 12 del cubetto di partenza e 8 per ciascuno di quelli incollati, dato che ne hanno 4 in comune con il cubetto centrale, totale: $8 \cdot 6 + 12 = 60$; Le facce sono solo quelle dei cubetti incollati che non coincidono con il cubo di partenza, quindi $5 \cdot 6 = 30$

8. **In un parallelepipedo rettangolo uno spigolo misura 5 *cm* e la diagonale della faccia che ha per**

**dimensioni gli altri due spigoli misura 12 *cm*, determinare la misura della diagonale.**

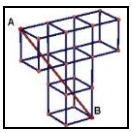
Noi sappiamo che la diagonale di un parallelepipedo di dimensioni a, b, c misura $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, se $a$ = 5 *cm*, avremo $b^2 + c^2 = 12$ *cm*, quindi: $d=\sqrt{5^2+12^2}cm=13cm$

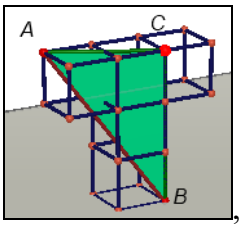
9. **In un parallelepipedo rettangolo la somma delle tre dimensioni è 21 cm e le dimensioni sono una doppia dell'altra, determinare tali dimensioni.**

Abbiamo: $\begin{cases} a+b+c=21 \\ a=2b \\ b=2c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+2c+c=21 \\ a=2b \\ b=2c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4c+3c=21 \\ a=4c \\ b=2c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7c=21 \\ a=4c \\ b=2c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=3 \\ a=12 \\ b=6 \end{cases}$

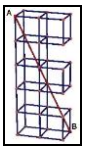
10. **In un parallelepipedo rettangolo due dimensioni sono uguali e doppie della terza, la diagonale misura 6 *cm*. Determinare la misura delle dimensioni.**

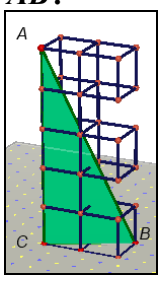
Abbiamo: $\begin{cases} a=b \\ a=2c \\ a^2+b^2+c^2=36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=b \\ a=2c \\ 4c^2+4c^2+c^2=36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=b \\ a=2c \\ 9c^2=36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=4 \\ a=4 \\ c=2 \end{cases}$

11. **Incolliamo 5 cubetti di lato 1 *cm*, in modo da ottenere un poliedro a forma di T, come mostrato in figura.**  **Quanto misura la distanza *AB*?**

Costruiamo il triangolo rettangolo in figura 

, abbiamo $\overline{AC}=\sqrt{1^2+2^2}cm=\sqrt{5}cm$, da cui: $\overline{AB}=\sqrt{\sqrt{5}^2+3^2}cm=\sqrt{14}\,cm$

12. **Incolliamo 8 cubetti di lato 1 *cm*, in modo da ottenere un poliedro a forma di E, come mostrato in figura.**  **Quanto misura la distanza *AB*?**

Costruiamo il triangolo rettangolo in figura, 

abbiamo $\overline{BC}=\sqrt{1^2+2^2}cm=\sqrt{5}\,cm$, da cui: $\overline{AB}=\sqrt{\sqrt{5}^2+5^2}cm=\sqrt{30}\,cm$

13. **Calcolare la superficie di un solido formato da un cubo di lato lungo 8 *cm*, con un altro cubo incollato sulla sua base superiore le cui facce hanno la diagonale che misura 6 *cm*.**

Se la diagonale misura 6 *cm*, il lato misura $\frac{6}{\sqrt{2}}cm=3\sqrt{2}\,cm$ quindi il cubetto è interno a quello più grande, e la superficie quindi è data dalla superficie del cubo grande più 4 facce del piccolo, dato che una faccia è nascosta e quella a questa parallela la aggiungiamo alla faccia parzialmente nascosta del cubo grande per completarla. Infine si ha: S = 6 · $8^2$ $cm^2$ + 4 · $\left(3\sqrt{2}\right)^2$ $cm^2$ = 456 $cm^2$.

14. **Calcolare la superficie di un solido formato da un cubo di lato che misura 4 *cm*, con un buco a forma di cubo di lato 2 *cm*.**

Anche se può sembrare strano questo caso equivale al precedente, quindi anche stavolta abbiamo: $6 \cdot 4^2\ cm^2 + 4 \cdot 2^2\ cm^2 = 112\ cm^2$

**15. In un parallelepipedo rettangolo, sommando a due a due le aree delle facce non parallele, si ottengono i numeri 27, 32, 35. Determinare la misura delle tre dimensioni.**

Abbiamo: $\begin{cases} ab+ac=27 \\ ab+bc=32 \\ ac+bc=35 \end{cases}$, sommando le prime due e sottraendo la terza otteniamo: $2ab = 24 \Rightarrow ab = 12$; sommando prima e terza e sottraendo la seconda: $2ac = 30 \Rightarrow ac = 15$; sommando seconda e terza e sottraendo la prima: $2bc = 40 \Rightarrow bc = 20$. Da cui: $\frac{ab \cdot ac}{bc} = a^2$, ma anche $\frac{ab \cdot ac}{bc} = \frac{12 \cdot 15}{20} = 9$, da cui $a = 3$. Facilmente otteniamo: $b = 4$, $c = 5$.

**16. Un prisma equilatero retto a basi triangolari ha superficie totale $\left(18 \cdot \sqrt{3} + 108\right) cm^2$, determinare la misura del perimetro di base.**

Chiamiamo $x$ la misura dello spigolo di base che è uguale all'altezza. La superficie totale vale quindi:

$$3x \cdot x + \cancel{2} \cdot \frac{x^2}{\cancel{4}_{2}} \sqrt{3} = \left(18 \cdot \sqrt{3} + 108\right) cm^2 \Rightarrow \left(6 + \sqrt{3}\right) x^2 = 36 \cdot \left(\sqrt{3} + 6\right) cm^2 \Rightarrow x^2 = 36\, cm^2 \Rightarrow = 6\, cm,$$

quindi il perimetro di base misura 18 *cm*

**17. Un prisma regolare a basi triangolari ciascuna di area $4 \cdot \sqrt{3}\, cm^2$, ha superficie totale $\left(8 \cdot \sqrt{3} + 84\right) cm^2$, determinare la misura della sua altezza.**

Chiamiamo $x$ la misura dell'altezza, il lato di base misura: $\frac{\ell^2}{4}\sqrt{3} = 4 \cdot \sqrt{3}\, cm^2 \Rightarrow \ell = 4\, cm$. La superficie laterale misura: $12x\ cm^2 = \left(8 \cdot \sqrt{3} + 84 - 8\sqrt{3}\right) cm^2 \Rightarrow 12x = 84 \Rightarrow x = 7\ cm$

**18. Un prisma regolare a basi triangolari di perimetro 18 *cm*, ha l'altezza lunga 4 *cm*, determinare la misura della sua superficie totale.**

La superficie laterale misura $18 \cdot 4\ cm^2 = 72\ cm^2$. Le basi sono triangoli equilateri di lato lungo 6 *cm*, quindi ciascuno ha area $\frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} cm^2 = 9 \cdot \sqrt{3}\, cm^2$, pertanto la superficie totale misura $\left(72 + 18 \cdot \sqrt{3}\right) cm^2$

**19. Un prisma retto ha per basi due triangoli rettangoli di cateti lunghi 3 *cm* e 4 *cm*, se l'altezza del prisma misura 6 *cm*, determinare la misura della superficie totale.**

L'ipotenusa misura 5 *cm*, quindi il perimetro misura 12 *cm*, l'area di base 6 $cm^2$. Infine la superficie totale misura: $(12\ cm \cdot 6\ cm + 2 \cdot 6\ cm^2) = 84\ cm^2$.

**20. Un prisma retto ha per basi due rombi di lato lungo 3 *cm* e con un angolo interno di 60°. Se l'altezza del prisma è lunga 5 *cm*, determinare la sua superficie totale.**

I rombi sono divisi dalla diagonale minore in due triangoli equilateri di lato 3 *cm*, quindi anche la detta diagonale ha questa misura. La diagonale maggiore è il doppio dell'altezza del triangolo equilatero, quindi misura $2 \cdot \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} cm = 3 \cdot \sqrt{3}\, cm$. L'area di base misura: $\frac{3\, cm \cdot 3 \cdot \sqrt{3}\, cm}{2} = \frac{9}{2} \cdot \sqrt{3}\, cm^2$ e la superficie totale: $12\, cm \cdot 5\, cm + 9 \cdot \sqrt{3}\, cm^2 = \left(60 + 9 \cdot \sqrt{3}\right) cm^2$

**21. Un prisma retto ha per basi due rombi di diagonali una doppia dell'altra ed altezza uguale alla diagonale maggiore, se la superficie totale del prisma è $\left(64 \cdot \sqrt{5} + 32\right) cm^2$, determinare la misura della diagonale minore.**

Indichiamo con $2x$ la misura della diagonale minore, quindi la maggiore e l'altezza misurano entrambe $4x$; il lato del rombo misura: $\sqrt{x^2 + 4x^2} = \sqrt{5}x$. Pertanto la superficie totale vale: $2 \cdot \frac{x \cdot 2x}{2} + 4 \cdot \sqrt{5}x \cdot 4x$: da cui: $2x^2 + 16 \cdot \sqrt{5}x^2 = \left(64 \cdot \sqrt{5} + 32\right) cm^2 \Rightarrow \left(2 + 16 \cdot \sqrt{5}\right) x^2 = 4 \cdot \left(16 \cdot \sqrt{5} + 2\right) cm^2$ $\Rightarrow x = 2\ cm$, perciò la diagonale minore è lunga 4 *cm*.

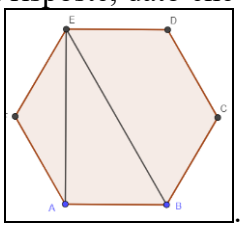
**22. Un prisma regolare a basi esagonali di lato lungo 4 *cm* ha altezza lunga 6 *cm*. Determinare la misura della sua superficie totale.**

Un esagono regolare è formato da 6 triangoli equilateri uguali, quindi la sua area misura: $6\cdot\frac{4^2\sqrt{3}}{4}cm^2 = 24\sqrt{3}cm^2$, quindi la superficie totale è: $48\sqrt{3}cm^2 + 6\cdot 4\cdot 6cm^2 = 48\cdot\left(\sqrt{3}+3\right)cm^2$.

**23. In un parallelepipedo rettangolo le dimensioni sono una doppia dell'altra, se tutte le misure sono intere, la somma delle tre dimensioni è multipla di quale numero?**

Chiamiamo $x$, $2x$ e $3x$ le misure delle tre dimensioni, la loro somma è $7x$. Quindi se $x$ è intero la somma è multipla di 7

**24. Un prisma regolare a basi esagonali, ha lo spigolo laterale lungo quanto una delle diagonali della base ed ha superficie laterale 27 *cm*², determinare la misura dello spigolo.**

Vi sono due possibili risposte, dato che le diagonali dell'esagono regolare non sono tutte uguali, come mostrato in figura: 

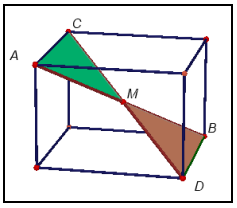
. $AEB$ è un triangolo rettangolo 30° – 60° – 90°, quindi $\overline{EB} = 2\cdot\overline{AB}; \overline{EA} = \frac{\overline{EB}}{2}\cdot\sqrt{3} = \overline{AB}\cdot\sqrt{3}$ .Perciò, indicando con $x$ la misura di $AB$, avremo le due possibilità: $6x\cdot 2x = 27\ cm^2 \vee 6x\cdot\sqrt{3}x = 27cm^2 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{4}cm^2 \vee x^2 = \frac{9}{2\sqrt{3}}cm^2 \Rightarrow x = \frac{3}{2}cm \vee x = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2}}cm$

**25. In un parallelepipedo rettangolo le dimensioni sono nel rapporto 1:2:3, la diagonale misura $2\cdot\sqrt{7}\ cm$. Determinare la misura della superficie totale.**

Le dimensioni del parallelepipedo misurano $x$, $2x$ e $3x$, la diagonale misura $\sqrt{1+4+9}x = \sqrt{14}x$, da cui $\sqrt{14}x = 2\cdot\sqrt{7}cm \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{2}}cm = \sqrt{2}cm$.

La superficie misura: $2\cdot\left(\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2} + \sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}\right)cm^2 = 44cm^2$

**26. Dimostrare che in un parallelepipedo rettangolo le diagonali si incontrano nel loro punto medio.**



Consideriamo i triangoli in figura, vogliamo provare che sono uguali. Essi hanno i lati $AC$ e $BD$ uguali, inoltre gli angoli $M\hat{C}A$ e $M\hat{D}B$ sono alterni interni rispetto alle parallele $AC$ e $BD$ tagliate dalla trasversale $CD$, gli angoli di vertici $M$ sono opposti al vertice. Ma allora $CM$ e $MD$ sono fra loro uguali, così come $AM$ e $MB$, ossia $M$ è il punto medio cercato.

**27. Di un prisma retto a base un triangolo rettangolo, conosciamo la misura della superficie totale, 4620 *cm*², la somma dei cateti, 41 *cm*, e dell'ipotenusa della base, 29*cm*, Determinare la misura dell'altezza.**

Chiamiamo $a$ e $b$ le misure dei cateti della base. Abbiamo:

$$\begin{cases} a+b=41 \\ a^2+b^2=29^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=41 \\ (a+b)^2-2ab=29^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=41 \\ 2ab=41^2-29^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=41 \\ ab=420 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z^2-41z+420=0 \Rightarrow z=\frac{41\pm\sqrt{1681-1680}}{2} = \begin{cases} 21 \\ 20 \end{cases}$$

I cateti misurano quindi 20 *cm* e 21 *cm*. Abbiamo allora (41 + 29) *cm* · *h* + 20 · 21 *cm*² = 4620 *cm*²

$$h = \frac{4620-420}{70}cm = 60\,cm$$

**28. Determinare una formula per il calcolo della superficie totale di un prisma regolare a basi triangolari, in funzione del lato $\ell$ della base e dell'altezza *h*.**

Si ha: $\cancel{2}\frac{\ell^2}{\cancel{4}^2}\sqrt{3}+3\ell\cdot h=\ell\cdot\left(3h+\frac{\sqrt{3}}{2}\ell\right)$

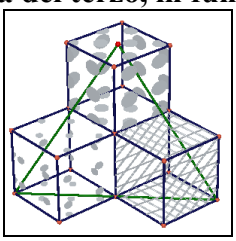
**29. Determinare una formula per il calcolo della superficie totale di un prisma retto a basi triangoli rettangoli, in funzione dei cateti della base, *a* e *b*, e dell'altezza *h*.**

Si ha: $\cancel{2}\cdot\frac{ab}{\cancel{2}}+\left(a+b+\sqrt{a^2+b^2}\right)\cdot h$

**30. Determinare una formula per il calcolo della superficie totale di un prisma retto a basi esagoni regolari, in funzione del lato $\ell$ della base e dell'altezza *h*.**

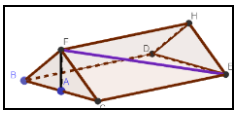
Si ha: $\cancel{2}\cdot\cancel{6}^3\cdot\frac{\ell^2}{\cancel{4}}\sqrt{3}+6\ell h=3\ell\cdot\left(2h+\sqrt{3}\ell\right)$

**31. In figura abbiamo sovrapposto tre cubi con un vertice in comune e a due a due uno spigolo in comune. Determinare la misura del perimetro e dell'area del triangolo i cui vertici sono un vertice di due cubi e il centro della faccia del terzo, in funzione del lato *L* dei cubi.**



Il triangolo è ovviamente isoscele, la cui base misura quanto il doppio della diagonale di una faccia del cubo, ossia $2\sqrt{2}L$. I lati obliqui invece sono ipotenuse di triangoli rettangoli i cui cateti misurano $2L$ e $\sqrt{2}L$, quindi misurano $\sqrt{4+2}L=\sqrt{6}L$. Pertanto il perimetro misura $\left(2\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)L=\sqrt{2}\left(2+\sqrt{3}\right)L$ e l'area $\frac{2\sqrt{2}L\cdot 2L}{2}=2\sqrt{2}L^2$.

**32. In figura è mostrata una tenda canadese a forma di prisma retto. La porta d'ingresso ha la massima ampiezza di 4 *m*, la lunghezza della tenda è 6 *m* e l'altezza di 1,5 *m*. Quanto è lungo un cavo teso che congiunge i punti *E* e *F*?**



Il triangolo *AFE* è ovviamente rettangolo, si ha:

$$\overline{FE}=\sqrt{\overline{AF}^2+\overline{AE}^2}=\sqrt{1,5^2+\left(\overline{AC}^2+\overline{CE}^2\right)}\,cm=\sqrt{2,25+4+36}\,cm=\sqrt{42,25}=6,5\,cm\ 6,5\ m$$

**33. Con riferimento al precedente problema determinare una formula per trovare *EF* in funzione dell'ampiezza *a*, la lunghezza $\ell$ e l'altezza *h*.**

$$\overline{FE}=\sqrt{h^2+\ell^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{4h^2+4\ell^2+a^2}}{2}$$

**34. In un prisma regolare a basi triangolari, la misura della superficie totale è $\left(50\sqrt{3}+600\right)cm^2$, quella della diagonale delle facce è $10\cdot\sqrt{5}\,cm$, inoltre l'altezza è *n* volte lo spigolo di base. Determinare *n*.**

Indichiamo con *x* la misura dello spigolo di base e con *nx* quella dell'altezza. Abbiamo:

$$\begin{cases} \cancel{2}\cdot\dfrac{x^2}{\cancel{4}^{\,2}}\sqrt{3}+3x\cdot nx=50\sqrt{3}+600 \\ x^2+(nx)^2=\left(10\sqrt{5}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{3}+6n\right)x^2=100\sqrt{3}+1200 \\ x^2\left(1+n^2\right)=500 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=\dfrac{100\sqrt{3}+1200}{\sqrt{3}+6n} \\ \dfrac{\cancel{100}\sqrt{3}+12\cancel{00}}{\sqrt{3}+6n}=\dfrac{5\cancel{00}}{1+n^2} \end{cases} \Rightarrow$$

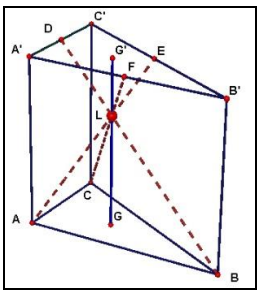
$$\Rightarrow\left(\sqrt{3}+12\right)\left(1+n^2\right)=5\sqrt{3}+30n\Rightarrow\left(\sqrt{3}+12\right)n^2-30n-4\sqrt{3}+12=0\Rightarrow n=\frac{15\pm\sqrt{225+\left(\sqrt{3}+12\right)\cdot\left(4\sqrt{3}-12\right)}}{\sqrt{3}+12}\Rightarrow$$

$$=\frac{15\pm\sqrt{225+12-12\sqrt{3}+48\sqrt{3}-144}}{\sqrt{3}+12}=\frac{15\pm\sqrt{93+36\sqrt{3}}}{\sqrt{3}+12}=\frac{15\pm\sqrt{81+12+36\sqrt{3}}}{\sqrt{3}+12}=\frac{15\pm\sqrt{\left(9+2\sqrt{3}\right)^2}}{\sqrt{3}+12}=$$

$$=\frac{15\pm\left(9+2\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}+12}=\prec\begin{array}{l}\dfrac{24+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+12}=2\\ \dfrac{6+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+12}\notin\mathbb{N}\end{array}$$

Una sola soluzione è accettabile perché l'altra non è intera.

**35. Dimostrare che in un prisma retto a basi triangolari, i segmenti che uniscono un vertice di una base con il punto medio del lato opposto nell'altra base, si incontrano in uno stesso punto, che è allineato con il segmento che unisce i baricentri delle basi. In che modo il punto d'incontro divide il segmento che ha per estremi i baricentri?**

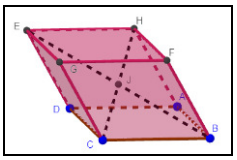



Ovviamente *AE* e *BD* si incontrano in un punto *L*, dato che sono complanari. I triangoli *DLE* e *ALB* sono fra loro simili, dato che hanno uguali gli angoli opposti al vertice *L*. *DE* //*AB* perché *DE* //*A'B'*, dato che *DE* unisce i punti medi dei lati di un triangolo, e siccome anche *AB* //*A'B'* possiamo applicare la transitività del parallelismo. Perciò gli angoli di vertice *D* e B sono uguali perché alterni interni rispetto alle dette parallele tagliate da *DB*. Non solo, ma *DE* è metà di *A'B'*, quindi anche di *AB*, perciò il rapporto di similitudine è ½. Ma questo si può ripetere anche con *AE* e *CF*, quindi tutti e tre i segmenti si incontrano in *L*. Per quanto detto *GL* = 2 *G'L*.

**36. Un prisma quadrangolare retto le cui facce opposte sono uguali è un parallelepipedo rettangolo? Giustificare la risposta.**

Se le facce opposte sono uguali vuol dire che i poligoni di base hanno i lati opposti uguali, pertanto in generale sono dei parallelogrammi, non dei rettangoli, quindi la risposta è negativa.

**37. Dimostrare che in un parallelepipedo le diagonali si incontrano in uno stesso punto che le divide tutte a metà.**




Consideriamo intanto una coppia di diagonali, per esempio *BG* e *CH*, esse sono diagonali del parallelogramma *BCEH*, quindi si dividono a metà. Con lo stesso ragionamento anche le altre diagonali lo fanno e quindi effettivamente tutte si incontrano nel loro punto medio *J*.

**38. Dimostrare che un parallelepipedo con le diagonali uguali è rettangolo.**

Dal precedente, le diagonali si incontrano nel loro punto medio, se sono anche uguali allora per esempio i triangoli *EBD* e *AHC* sono uguali, da cui sono uguali le diagonali *AC* e *BD* del parallelogramma di base, che perciò è un rettangolo. Quindi anche le facce laterali sono rettangoli.

**39. Consideriamo due cubi identici di lato $\ell$, su uno di questi sovrapponiamo un cubo di lato $\ell'<\ell$, sull'altro produciamo un buco a forma di cubo di lato $\ell'<\ell$. In che relazione sono le superfici dei due solidi?**

Sono uguali perché nel primo caso la superficie è dato da quella del cubo maggiore e da 4 facce di quello minore. Infatti una della facce del maggiore è mancante di un pezzo pari a una faccia del cubo minore, quindi la "completiamo" togliamo una delle 5 facce esterne del cubo minore. Allo stesso modo, facendo il buco, avremo da considerare sempre tutte le facce del cubo maggiore e 4 del minore.

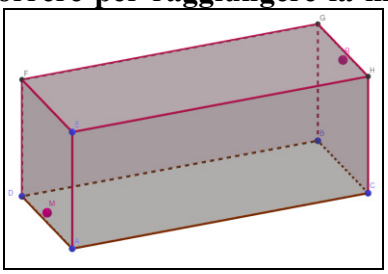
**40. La superficie di un parallelepipedo rettangolo è 9936 *cm*², la somma di tutti gli spigoli è 312 *cm*. Determinare la misura della diagonale.**

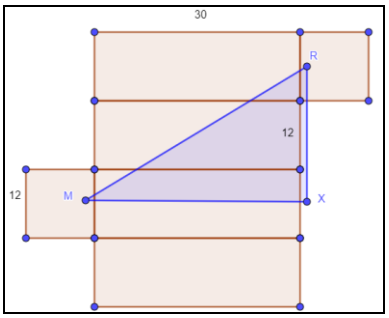
Il problema è apparentemente privo di soluzioni poiché il sistema risolutore $\begin{cases} 2\cdot(ab+ac+bc)=9936 \\ 2\cdot(a+b+c)=312 \end{cases}$ ha più incognite che equazioni. Ciò significa che non siamo in grado di trovare le misure delle dimensioni. Possiamo però trovare la misura della diagonale $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Infatti si ha: $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$, quindi: $d=\sqrt{(a+b+c)^2-2(ab+ac+bc)}=\sqrt{156^2-9936}\,cm=120\,cm$

**41. Esprimere la misura della diagonale di un parallelepipedo rettangolo mediante la superficie *S* e la somma *s* delle 3 dimensioni.**

$d=\sqrt{(a+b+c)^2-2(ab+ac+bc)}=\sqrt{s^2-S}$

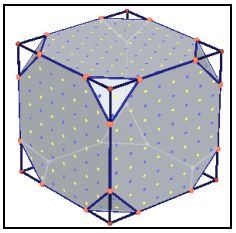
**42. Un problema di Dudeney. Una scatola a forma di parallelepipedo rettangolo ha dimensioni, in piedi, 12 × 30 × 12. Un ragno è sulla linea centrale di una parete terminale a 1 piede dal soffitto. Una mosca è sulla linea centrale della parete opposta, a 1 piede dal pavimento. Qual è la minima distanza che il ragno deve percorrere per raggiungere la mosca? *Suggerimento*: Espandere sul piano la superficie della scatola.**





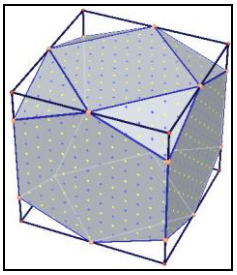

"Apriamo" la scatola, ottenendo la figura seguente Il minimo cammino è ovviamente *MR* che è l'ipotenusa di un triangolo di cateti lunghi 24 piedi e 32 piedi. Quindi in piedi: $\overline{MR}=\sqrt{24^2+32^2}=8\cdot\sqrt{3^2+4^2}=8\cdot 5=40$.

**43. Su ogni spigolo di un cubo scegliamo i due punti che lo dividono nel rapporto 1/4. Consideriamo il poliedro che ha per vertici tali punti. Quante facce, spigoli e vertici ha? Se lo spigolo del cubo misura 5 *cm*, quanto misura la superficie del nuovo poliedro?**



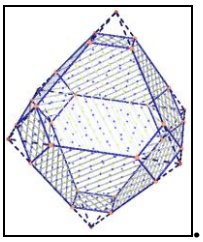
Le facce sono le 6 iniziali, che adesso hanno forma ottagonale e 8 triangolari che "prendono il posto" degli 8 vertici del cubo, quindi 14. I vertici sono quelli dei triangoli, quindi 24. Per gli spigoli ai 24 dei triangoli sommiamo quelli che li uniscono che sono 4 + 4 + 4 = 12, per un totale di 36. Per il calcolo della superficie, i triangoli sono equilateri di lato $\sqrt{2}\,cm$ e quindi hanno area

$\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{4}\sqrt{3}\,cm^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}cm^2$; l'area degli ottagoni la otteniamo sottraendo a quella del quadrato i 4 triangoli rettangoli che abbiamo eliminato, quindi vale (25 – 4 · ½) $cm^2$ = 23$cm^2$. Infine la superficie del poliedro misura $\left(\cancel{8}^{\,4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}+6\cdot 23\right)cm^2 = 2\cdot\left(2\sqrt{3}+69\right)cm^2$

**44. Sugli spigoli di due facce opposte di un cubo di spigolo lungo 10 *cm*, scegliamo i punti medi e nei rimanenti i punti che li dividono in 3 parti in modo che una sia tripla di ciascuna delle altre due, quindi uniamo tali punti ottenendo il poliedro convesso in figura.**  **Quanto misura la sua area?**

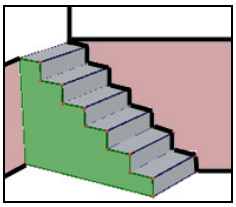
Abbiamo 4 facce a forma esagonale, 2 quadrate e 8 triangolari. Per il calcolo della superficie, i triangoli sono isosceli di base lunga $5\sqrt{2}\,cm$ e lato obliquo lungo $\sqrt{2^2+5^2}\,cm = \sqrt{29}\,cm$. L'altezza relativa alla base misura $\sqrt{29-\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2}\,cm = \sqrt{29-\frac{25}{2}}\,cm = \sqrt{\frac{33}{2}}\,cm$, ed area $\frac{5\cancel{\sqrt{2}}}{2}\cdot\sqrt{\frac{33}{\cancel{2}}}\,cm^2 = \frac{5\sqrt{33}}{2}cm^2$. I quadrati hanno area $\left(5\sqrt{2}\right)^2 cm^2 = 50\,cm^2$, mentre l'area degli esagoni la otteniamo sottraendo a quella del quadrato iniziale i 4 triangoli rettangoli che abbiamo eliminato, quindi vale (100 – 4 · 2 · 5 · ½) $cm^2$ = 80$cm^2$. Infine la superficie del poliedro misura

$$\left(\cancel{8}^{\,4}\cdot\frac{5\sqrt{33}}{\cancel{2}}+2\cdot 50+4\cdot 80\right)cm^2 = 20\cdot\left(\sqrt{33}+21\right)cm^2$$

**45. Su ogni spigolo di un ottaedro regolare scegliamo due punti che lo dividono nel rapporto ¼, quindi uniamo tali punti ottenendo il poliedro convesso in figura**  **. Sapendo che lo spigolo dell'ottaedro di partenza è 8 *cm*, quanto misura la sua area?**

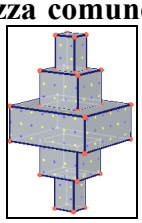
Abbiamo 8 facce a forma esagonale e 6 quadrate. I quadrati hanno lato lungo 2 *cm* e quindi area 4 $cm^2$; gli esagoni hanno area ottenuta dalla differenza fra quella del triangolo equilatero di partenza e i 3 triangoli equilateri a esso simili, quindi: $\left(\frac{8^2}{4}-3\cdot\frac{2^2}{4}\right)\sqrt{3}\,cm^2 = 13\sqrt{3}\,cm^2$, pertanto la superficie del poliedro misura $\left(8\cdot 13\sqrt{3}+6\cdot 4\right)cm^2 = 8\cdot\left(13\sqrt{3}+3\right)cm^2$.

**46. La dimensione dell'elemento parallela al verso di una scala si chiama pedata, la distanza verticale tra due elementi successivi si chiama alzata. Una scala è formata da 6 gradini, con alzata di 18 *cm* e pedata di 26 *cm*. Sapendo che per rivestire di marmo i gradini e la parte colorata in figura, sono necessari 25668 $cm^2$ di marmo, determinare la larghezza dei gradini.**



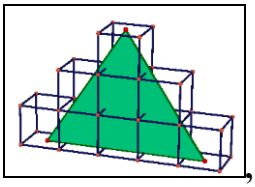
Ogni gradino ha area somma di due parti: $(18 \cdot x + 26 \cdot x)\ cm^2 = 44x\ cm^2$. Per quanto riguarda la parte laterale colorata in verde, si vede facilmente che può essere divisa in $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 21$ rettangoli uguali di dimensioni $18 \cdot 26\ cm^2$. Pertanto abbiamo: $6 \cdot 44x + 21 \cdot 18 \cdot 26 = 25668 \Rightarrow 22x + 21 \cdot 3 \cdot 13 = 2139 \Rightarrow 22x = 1320 \Rightarrow x = 60$.

**47. Un artista ha costruito una sua opera utilizzando 5 parallelepipedi rettangoli di uguale altezza, come mostrato in figura, in modo che le altre due dimensioni siano metà delle corrispondenti del parallelepipedo sulla cui faccia poggiano. Sapendo che le dimensioni del parallelepipedo maggiore sono 6 *cm*, 8 *cm* e *h cm* (altezza comune), e che per rivestire di legno l'opera, sono necessari 236 *cm*² di legno, determinare *h*.**



La superficie del solido si trova come somma della superficie del parallelepipedo centrale e solo delle facce laterali degli altri. Ciò perché i "tetti" dei parallelepipedi più piccoli "compensano" le parti nascoste. Pertanto abbiamo: $2 \cdot (6h + 8h + 6 \cdot 8) + 4 \cdot (3h + 4h + 1{,}5h + 2h) = 236 \Rightarrow 14h + 48 + 21h = 118 \Rightarrow 35h = 70 \Rightarrow h = 2$.

**48. Sovrapponiamo dei cubi di lato 1 *cm* come mostrato in figura.**

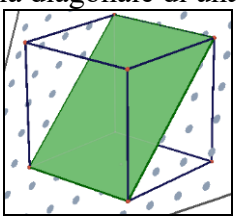


**, uniamo i centri dei cubi estremi, ottenendo un triangolo. a) Che tipo di triangolo otteniamo? b) Quanto misura la sua area? c) Continuando la costruzione con la stessa regola possiamo ottenere un totale di 2023 cubi? Giustificare la risposta. d) Quanti cubi dobbiamo sovrapporre affinché l'area del triangolo sia almeno 100 *cm*²?**

a) Il triangolo è isoscele di lati lunghi 4 *cm* e $\sqrt{2^2 + 3^2}\ cm = \sqrt{13}\ cm$.
b) La sua area misura $4\ cm \cdot 3\ cm \cdot ½ = 6\ cm^2$.
c) I cubi sono somma di numeri dispari consecutivi e $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$, quindi non è possibile poiché 2023 non è un quadrato perfetto.
d) Se abbiamo $n^2$ cubetti il triangolo avrà base lunga $(2n - 2)\ cm$ e altezza $n\ cm$, quindi avrà area $n \cdot (n - 1)\ cm^2$. Deve essere $n^2 - n - 100 \geq 0 \Rightarrow n \geq 11$, quindi un totale di $11^2 = 121$ cubi.

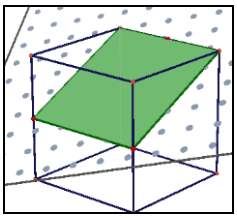
**49. Considerando il piano che passa per 3 vertici di un cubo, che tipo di sezioni si possono ottenere?**

Ovviamente è un quadrato se i vertici sono di una stessa faccia, dato che è la stessa faccia. Mentre è un rettangolo di dimensioni uguali al lato e alla diagonale di una faccia, come mostrato in figura

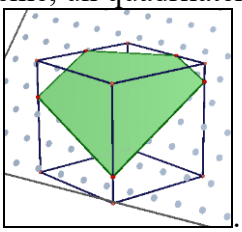
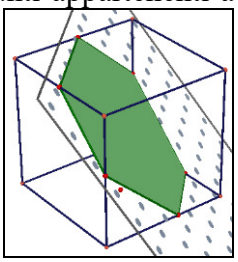


**50. Considerando il piano che passa per i punti medi di due spigoli paralleli e di un terzo spigolo non parallelo ai precedenti due, che tipo di sezioni si possono ottenere?**

Un rettangolo di dimensioni un lato e l'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cateti lunghi quanto un

lato e metà dello stesso lato, come mostrato in figura 

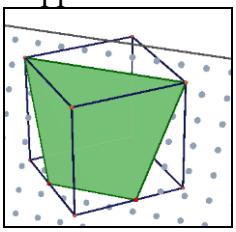
**51. Sezioniamo un cubo con un piano, ottenendo una sezione formata da un poligono regolare di *n* lati. Per quali valori di *n* si ha soluzione? Giustificare la risposta.**

Possiamo ottenere un triangolo come visto nel box Lavoriamo insieme, un quadrilatero come visto negli esercizi precedenti; un pentagono, come mostrato in figura  . Anche esagoni, considerando il piano passante per tre punti appartenenti a spigoli nessuno dei quali sta nella stessa faccia di un altro, come mostrato in figura 

**52. Come dobbiamo sezionare un cubo per ottenere sezioni a forma di quadrato?**

Ovviamente Con un piano parallelo a una delle facce.

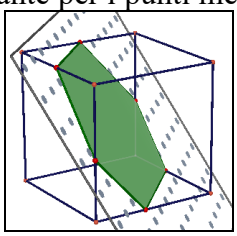
**53. Come dobbiamo sezionare un cubo per ottenere sezioni a forma di trapezio isoscele?**

Con un piano passante per due vertici opposti di una stessa faccia e secante altri due spigoli della faccia opposta, come mostrato in figura 

**54. E a forma di trapezio rettangolo?**

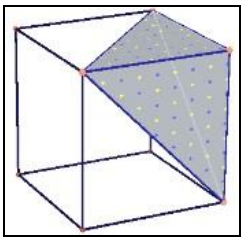
Non è possibile perché se la sezione forma due angoli retti da una parte deve formarli anche sezionando il piano in altri spigoli.

**55. E a forma di esagono regolare?**

Con un piano passante per i punti medi di 3 spigoli a due a due incidenti, senza punti in comune tutti e tre, come in figura 

## Le piramidi e i tronchi di piramide

**1. In figura abbiamo un cubo e una piramide che di fatto è un tetraedro trirettangolo. a) Che tipo di triangolo è la quarta faccia? b) Possiamo dire che la piramide è retta? Giustificare la risposta. c) Se lo spigolo del cubo è lungo 2 *m*, quanto misura la superficie del tetraedro?**



a) La quarta faccia ha per spigoli le diagonali di tre facce del quadrato, pertanto è un triangolo equilatero.
b) Per essere una piramide retta l'altezza deve avere uguale li altezze delle facce relative agli spigoli di base. Dato che queste facce sono tutte uguali anche le relative altezze lo sono.
c) La superficie misura: $3\cdot\frac{2\cdot 2}{2}m^2+\frac{\left(2\sqrt{2}\right)^2}{4}\sqrt{3}m^2=\left(6+2\sqrt{3}\right)m^2$

**2. Con riferimento al quesito precedente. Dividiamo a metà gli spigoli del cubo e tronchiamo il tetraedro trirettangolo. Quanto misura la superficie del tronco di piramide così ottenuto?**

Così facendo le facce laterali divengono trapezi di basi $\sqrt{2}m, 2\sqrt{2}m$ e altezza $\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot 2}{2\sqrt{2}}m=\frac{\sqrt{2}}{2}m$. La base minore ha area ¼ della maggiore, Quindi la superficie richiesta misura

$$\left(\frac{5}{\cancel{4}^{2}}\cdot\cancel{2}\sqrt{3}+3\cdot\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)m^2=\left(\frac{9+5\cdot\sqrt{3}}{2}\right)m^2$$

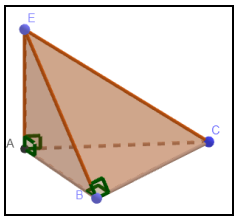
**3. Ripetiamo in un parallelepipedo rettangolo la costruzione effettuata nel cubo per ottenere un tetraedro trirettangolo. Possiamo dire che in generale si ottiene una piramide retta? Giustificare la risposta.**

No le altezze delle facce laterali in generale hanno diversa misura, dette *a*, *b*, e *c* le misure delle dimensioni le ipotenuse relative misureranno $\sqrt{a^2+b^2},\sqrt{a^2+c^2},\sqrt{b^2+c^2}$, pertanto le altezze misureranno $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}},\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$.

**4. Il tronco di piramide ottenuto sezionando una piramide con un piano passante per il punto medio dell'altezza, ha superficie laterale metà di quello della piramide? Se la risposta è negativa quanto vale il rapporto delle aree?**

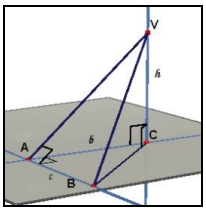
No perché le facce laterali del tronco di piramide avranno area ¼ delle corrispondenti facce della piramide iniziale. Pertanto il tronco avrà area ¾ di quella della piramide.

**5. Nella dimostrazione del Teorema delle 3 perpendicolari abbiamo costruito una particolare piramide le cui facce sono tutti triangoli rettangoli. Essa si chiama tetraedro quadrirettangolo. Quanti fra i sei spigoli dobbiamo conoscere, al minimo, per potere determinare la misura della superficie totale?**




Ne bastano 3, per esempio con riferimento alla figura, basta conoscere le misure di *EA*, *AB* e *AC*. Così determiniamo subito le aree di *AEB* e *ACE*. Con il teorema di Pitagora determiniamo la misura di *BC* e quindi le aree degli altri due triangoli.

**6. Determinare la misura della superficie del tetraedro quadrirettangolo in figura, in cui *b* = 21, *c* = 20, *h* = 28.**

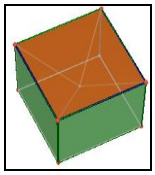


La superficie misura $\frac{\overline{VC}\cdot\overline{AC}}{2}+\frac{\overline{VC}\cdot\overline{BC}}{2}+\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{2}+\frac{\overline{VA}\cdot\overline{AB}}{2}$, determiniamo le misure incognite: $\overline{BC}=\sqrt{21^2+20^2}=29;\overline{VA}=\sqrt{\overline{VB}^2-20^2}=\sqrt{\left(28^2+29^2\right)-20^2}=\sqrt{1225}=35$, pertanto la superficie misura: $\frac{28\cdot21+28\cdot29+20\cdot21+35\cdot20}{2}=1260$.

7. **La scelta del punto *V* sulla retta per *C* perpendicolare al piano che contiene *ABC* incide sul fatto che il tetraedro sia quadrirettangolo? Giustificare la risposta.**
No perché in ogni caso il segmento *VA* risulta perpendicolare alla retta per *AB*.

8. **Tronchiamo un tetraedro quadrirettangolo con *b* = 6, *c* = 8, *h* = 10 (vedi figura es. 7) con un piano parallelo al piano determinato da *A*, *B* e *C*, in modo da dividere a metà *h*. Quanto misura la superficie del tronco così ottenuto?**
In questo modo le facce laterali avranno area ¾ di quella dei triangoli da cui sono state ottenute, e la base minore del tronco invece ha area ¼ della maggiore. Le aree delle facce laterali misureranno quindi: Quindi avremo: $\overline{BC}=10;\overline{VA}=\sqrt{\left(10\sqrt{2}\right)^2-8^2}=\sqrt{136}=2\sqrt{34}$ e la superficie del tronco misura: $\frac{3}{4}\cdot\frac{10\cdot10+10\cdot6+2\sqrt{34}\cdot8}{2}+\frac{5}{4}\cdot\frac{6\cdot8}{2}=6\cdot\left(15+\sqrt{34}\right)$

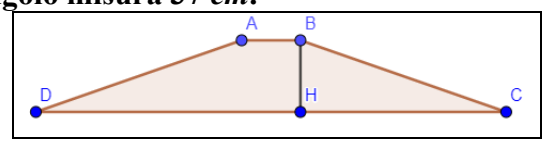
9. **Su una faccia di un cubo di lato 1 *m* scaviamo una cavità a forma di piramide, la cui base coincide con la faccia del cubo e il cui vertice è il centro dello stesso cubo. Quanto misura la superficie laterale di tale piramide?**



Le facce laterali sono triangoli isosceli di base lo spigolo del cubo e lati obliqui che sono ipotenuse di triangoli rettangoli che hanno come cateti uno spigolo del cubo e mezza diagonale di una faccia, e perciò misurano $\sqrt{1^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\,m=\sqrt{\frac{3}{2}}\,m$. L'altezza relativa alla base lunga 1 *m* di questi triangoli isosceli misura: $\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}\,m=\frac{\sqrt{5}}{2}m$. Infine la superficie laterale della piramide misura $4\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}m^2=\sqrt{\frac{15}{2}}\,m^2$

10. **Un tronco di piramide retta ha per base maggiore un triangolo rettangolo i cui cateti misurano 21 *cm* e 72 *cm*. Il perimetro della base minore misura 56 cm e l'altezza 18 *cm*. Determinare la misura dell'altezza della piramide dalla quale è stato ottenuto il tronco.**
L'ipotenusa della base maggiore misura $\sqrt{21^2+72^2}\,cm=75\,cm$, il perimetro misura 168 *cm*. IL rapporto di similitudine con la base minore è quindi 168/56 = 3. Quindi anche il rapporto fra l'altezza della piramide e quella della piramide che viene eliminata è 3. Pertanto l'altezza della piramide non troncata misura 3/2 · 18 *cm* = 27 *cm*.

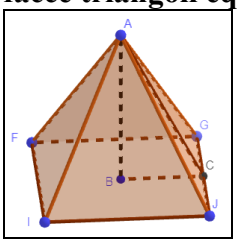
11. **Trovare la misura della superficie laterale di un tronco di piramide regolare a basi quadrate di lati 80 *cm* e 10 *cm* e il cui spigolo misura 37 *cm*.**




Determiniamo l'altezza del trapezio: $\overline{BH}=\sqrt{37^2-\left(\frac{80-10}{2}\right)^2}\,cm=12\,cm$. Quindi l'area laterale del

tronco misura: $\cancel{4}^{2}\cdot\frac{80+10}{\cancel{2}}\cdot 12\ cm^2 = 2160\,cm^2$.

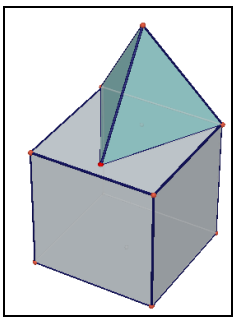
**12. Determinare la misura dell'altezza di una piramide regolare a base quadrata di lato $\sqrt{2}\,cm$ e di facce triangoli equilateri.**




Con riferimento alla figura abbiamo:

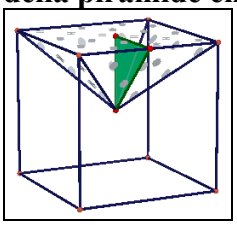
$$\overline{AB} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\ cm = \sqrt{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}\ cm = 1\,cm$$

**13. Determinare la misura dell'area della superficie di un solido composto da un cubo di lato $\ell$, sulla cui base maggiore è sovrapposta una piramide regolare a base triangolare che ha uno spigolo coincidente con uno del cubo.**



Basta osservare che la superficie è data da 5 facce del cubo più 3 facce della piramide meno la differenza fra una faccia del cubo e una della piramide. Più semplicemente dalla superficie del cubo aumentata da due facce della piramide. Queste facce sono triangoli equilateri di lato, quindi misura: $6\ell^2 + \cancel{2}\cdot\frac{\ell^2}{\cancel{4}^{2}}\sqrt{3} = \left(6+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\ell^2$.

**14. Consideriamo un cubo di lato 1 e il suo centro *O*. Determinare la misura della superficie laterale della piramide che ha per vertice *O* e per base una delle facce del cubo.**



L'altezza della piramide è mezzo spigolo del cubo, cioè ½. Quindi l'apotema misura $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, pertanto la superficie misura $2\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

**15. Calcolare la misura dell'altezza di una piramide a base quadrata di area 16 *cm*² e con uno spigolo lungo 5 *cm*.**

Lo spigolo di base misura 4 *cm*, quindi l'altezza $\sqrt{5^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2}\ cm = \sqrt{17}\ cm$

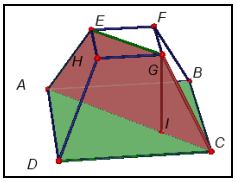
**16. Determinare la misura dello spigolo di base di una piramide regolare a base quadrata di lato e di facce triangoli equilateri, la cui altezza misura $\sqrt{8}\,cm$.**

Con riferimento alla figura dell'esercizio precedente:

$$\overline{AJ}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BJ}^2 \Rightarrow \ell^2 = 8cm^2 + \left(\frac{\ell}{2}\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow \ell^2 = 8cm^2 + \frac{\ell^2}{2} \Rightarrow \frac{\ell^2}{2} = 8cm^2 \Rightarrow \ell = 4cm$$

**17. In un tronco di piramide retto a basi quadrate, lo spigolo laterale forma con la diagonale della base maggiore un angolo di 60° e misura $2\cdot\sqrt{2}\ cm$. Sapendo che la differenza delle aree delle**

**due basi è 12 *cm*², determinare la misura della superficie totale del tronco.**



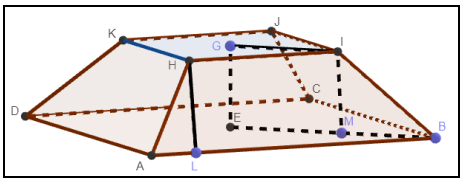

Con riferimento alla figura, *GIC* è un triangolo rettangolo 30° - 60° - 90° quindi $\overline{IC}=\frac{\overline{GC}}{2}=\sqrt{2}\,cm;\overline{GI}=\frac{\overline{GC}}{2}\sqrt{3}=\sqrt{6}\,cm;\overline{AC}=\sqrt{2}\cdot\overline{DC}=2\cdot\overline{IC}+\overline{EG}=2\sqrt{2}\,cm+\overline{EG}$. Abbiamo perciò: $\begin{cases}\overline{DC}^2-\overline{HG}^2=12\\ \sqrt{2}\overline{DC}=2\sqrt{2}+\sqrt{2}\overline{HG}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overline{DC}^2-\overline{HG}^2=12\\ \overline{DC}=2+\overline{HG}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4+\cancel{\overline{HG}^2}+4\overline{HG}-\cancel{\overline{HG}^2}=12\\ \overline{DC}=2+\overline{HG}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overline{HG}=2\,cm\\ \overline{DC}=4\,cm\end{cases}$.

Determiniamo l'apotema: $a=\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2-\left(\frac{4-2}{2}\right)^2}\,cm=\sqrt{8-1}\,cm=\sqrt{7}\,cm$. Infine la superficie totale misura: $(8+4)\cdot\sqrt{7}\,cm^2+\left(2^2+4^2\right)cm^2=\left(20+12\cdot\sqrt{7}\right)cm^2$.

**18. Il rapporto delle aree dei pentagoni di base di un tronco di piramide regolare è 16. Sapendo che la differenza dei lati delle due basi è 12 *cm* e che lo spigolo laterale forma con il lato della base maggiore un angolo di 60°, determinare la misura della superficie laterale.**

Essendo i pentagoni regolari, il rapporto delle loro aree è uguale al rapporto dei quadrati dei loro lati, pertanto abbiamo $\begin{cases}\frac{L^2}{\ell^2}=16\\ L-\ell=12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(12+\ell)^2=16\ell^2\\ L=12+\ell\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}12+\ell=4\ell\\ L=12+\ell\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\ell=4\,cm\\ L=16\,cm\end{cases}$. Determiniamo l'apotema, tenendo conto che esso è altezza di un triangolo equilatero di lato lo spigolo e quindi è uguale a $\sqrt{3}\cdot\frac{12}{2}cm=6\sqrt{3}\,cm$, quindi la superficie laterale misura $\frac{5}{2}\cdot(4+16)\cdot6\sqrt{3}\,cm^2=300\sqrt{3}\,cm^2$.

**19. I lati delle basi di un tronco di piramide quadrangolare regolare hanno per somma 46 *cm* e lo spigolo laterale forma con il lato della base maggiore un angolo di 45°. Se l'altezza del tronco misura $\frac{5\sqrt{6}}{2}cm$, determinare la misura delle basi.**




Indichiamo con $x$ e $y$ le misure delle basi, possiamo dire che lo spigolo laterale, che è lato obliquo del trapezio che forma le facce laterali, misura $\frac{x-y}{2}\sqrt{2}$, dato che è diagonale di un quadrato i cui lati sono l'altezza della faccia (*HL*) e la proiezione dello spigolo sulla base maggiore *AL*. D'altro canto lo spigolo è anche lato obliquo di un trapezio rettangolo di altezza quella del tronco (*GE*) e basi le semidiagonali delle basi dello stesso tronco. Quindi misura anche $\sqrt{\left(\frac{x-y}{4}\sqrt{2}\right)^2-\left(\frac{5\sqrt{6}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{(x-y)^2-300}{8}}$. Pertanto otteniamo il seguente sistema risolutivo:

$$\begin{cases}x+y=46\\ \frac{(x-y)^2-300}{8}=\left(\frac{x-y}{2}\sqrt{2}\right)^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=46\\ \frac{(x-y)^2-300}{8}=\frac{(x-y)^2}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=46\\ 3(x-y)^2=300\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=46\\ x-y=10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=28\\ y=18\end{cases}$$

**20. La superficie totale di una piramide regolare quadrangolare misura 800 *cm*². Trovare la misura della superficie laterale sapendo che l'altezza misura 15 *cm*.**

Indichiamo con $2x$ e $y$ rispettivamente le misure del lato di base e dell'apotema. Abbiamo:

$$\begin{cases} 4xy+4x^2=800 \\ x^2+15^2=y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{200-x^2}{x} \\ x^2+225=\left(\dfrac{200-x^2}{x}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{200-x^2}{x} \\ \cancel{x^4}+225x^2-40000-\cancel{x^4}+400x^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=17 \\ x=8 \end{cases}$$

Quindi la superficie laterale misura $4 \cdot 8\ cm \cdot 17\ cm = 544\ cm^2$.

**21. In una piramide quadrangolare regolare la superficie di base è 5/13 di quella laterale; sapendo che l'altezza misura 24 *cm* trovare la misura dell'apotema.**

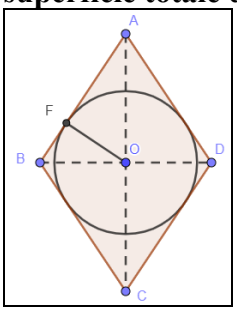
Indichiamo con $2x$ e $y$ rispettivamente le misure del lato di base e dell'apotema. Abbiamo:

$$\begin{cases} \cancel{4}x^{\cancel{2}} = \dfrac{5}{13}\cdot \cancel{4}\cancel{x}y \\ x^2+24^2=y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{13}y \\ \dfrac{25}{169}y^2+576=y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=10 \\ y=26 \end{cases}.$$

**22. Una piramide regolare a base quadrangolare ha l'altezza che misura quanto il semiperimetro di base. Quanto vale il rapporto fra l'apotema e lo spigolo di base?**

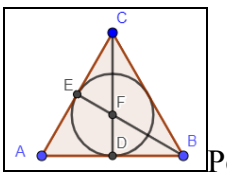
Indichiamo con $2x$ e $h$ rispettivamente le misure del lato di base e dell'altezza. Si ha: $h = 4x$, inoltre per il teorema di Pitagora, $h^2 + x^2 = a^2$, quindi $17x^2 = a^2$, da cui $\dfrac{a}{x}=\sqrt{17} \Rightarrow \dfrac{a}{2x}=\dfrac{\sqrt{17}}{2}$.

**23. Un rombo, di diagonale minore lunga 20 *cm*, è base di una piramide retta di altezza che misura 15 *cm*. Sapendo che il raggio del cerchio inscritto nel rombo è lungo 8 *cm*, trovare la misura della superficie totale della piramide.**




Il raggio del cerchio inscritto è altezza relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cateti le semidiagonali e ipotenusa il lato del rombo, quindi, indicando con $2x$ la misura della diagonale maggiore del rombo, il lato misura $\sqrt{x^2+100}$ e il raggio $\dfrac{10x}{\sqrt{x^2+100}}$ (cateto per cateto diviso ipotenusa), Da cui $\dfrac{\cancel{10}^{5}x}{\sqrt{x^2+100}}=\cancel{8}^{4} \Rightarrow 25x^2=16x^2+1600 \Rightarrow x=\dfrac{40}{3}cm$, quindi il lato misura $\sqrt{\dfrac{1600}{9}+100}\,cm=\dfrac{50}{3}cm$. L'apotema $\sqrt{8^2+15^2}\,cm=17\,cm$. Infine la superficie totale misura: $20\cdot\dfrac{40}{3}cm^2+2\cdot\dfrac{50}{3}\cdot 17cm^2=\dfrac{2500}{3}cm^2$

**24. Il raggio del cerchio inscritto nel triangolo di base di una piramide retta regolare è lungo 28 *cm*; trovare la misura della superficie laterale della piramide sapendo che l'altezza è lunga 45 *cm*.**

In un triangolo equilatero il raggio della circonferenza inscritta è 1/3 dell'altezza, dato che altezza e segmento di bisettrice coincidono. 

Pertanto si ha: $28=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\ell}{2}\sqrt{3} \Rightarrow \ell=56\sqrt{3}\,cm$. Per trovare l'apotema basta applicare il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo i cui cateti sono l''altezza e il detto raggio: $a=\sqrt{45^2+28^2}\,cm=53\,cm$. Infine la superficie laterale misura:

$$\frac{3\cdot \cancel{56}^{28}\sqrt{3}}{\cancel{2}}\cdot 53\,cm^2 = 4452\cdot\sqrt{3}\,cm^2$$

**25. In una piramide regolare a base quadrata l'altezza è 56/65 dell'apotema; trovare la misura della superficie laterale sapendo che quella totale misura 3234 *cm*².**

Determiniamo il lato della base in funzione di altezza e apotema: $(\ell/2)^2 = a^2 - h^2$. Pertanto possiamo impostare il sistema:

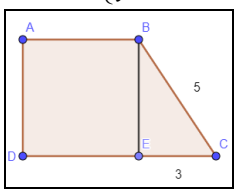
$$\begin{cases} h=\frac{56}{65}a \\ 4\left(a^2-h^2\right)+4\sqrt{a^2-h^2}\cdot a=3234 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h=\frac{56}{65}a \\ 2a^2-2\left(\frac{56}{65}a\right)^2+2\sqrt{a^2-\left(\frac{56}{65}a\right)^2}\cdot a=1617 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h=\frac{56}{65}a \\ 2a^2-\frac{6272}{4225}a^2+2\frac{33}{65}\cdot a^2=1617 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h=\frac{56}{65}a \\ \frac{6468}{4225}a^2=1617 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h=28 \\ a=\frac{65}{2} \end{cases}$$

Quindi: $\ell = 2\sqrt{\frac{4225}{4}-28^2}\,cm = \frac{33}{2}cm$ e la superficie laterale misura: 66 *cm* · 65/2 *cm* = 2145 *cm*²

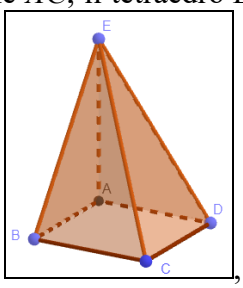
**26. Di un tronco di piramide a basi quadrate conosciamo la misura dell'apotema, 5 *cm*, la differenza degli spigoli di base, 6 *cm*, e il rapporto di questi ultimi: 3/4. Determinare la misura degli spigoli di base e dell'altezza.**

Indichiamo con $x$ e $y$ le misure delle basi: $\begin{cases} x-y=6 \\ y=3/4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3/4x=6 \\ y=3/4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=24 \\ y=18 \end{cases}$. Per quanto riguarda l'altezza essa misura ovviamente 4 *cm*, basta considerare la figura




**27. Uno spigolo di una piramide è perpendicolare alla base quadrata in un suo vertice, se il lato di base misura 3 e l'altezza 4, calcolare la misura della superficie totale.**

Proviamo che tutte le facce laterali sono triangoli rettangoli. Ovviamente lo sono *EAB* e *EAD* per costruzione. Considerando la diagonale *AC*, il tetraedro *EABC* è quadrirettangolo per il Teorema delle 3 perpendicolari (vedi esercizio 7)




, quindi è un triangolo rettangolo *EBC*. Ma ragionando su *EADC* possiamo dire che anche *EDC* è triangolo rettangolo. Non solo, ma i triangoli sono a due a due uguali, dato che la base è un quadrato. A questo punto la superficie misura:

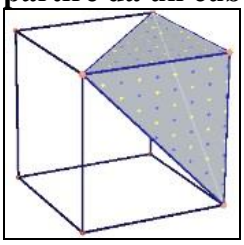
$$\frac{\cancel{2}\cdot\overline{AE}\cdot\overline{AB}+\cancel{2}\cdot\overline{BE}\cdot\overline{BC}}{\cancel{2}}+\overline{AB}^2 = 4\cdot 3+\sqrt{4^2+3^2}\cdot 3+3^2 = 12+15+9=36$$

**28. Dimostrare che in un tronco di piramide le basi sono poligoni simili, le cui aree stanno fra loro come i quadrati delle loro distanze dal vertice della piramide troncata.**

Non è altri che il teorema di Talete nello spazio, dato che considerando una faccia, abbiamo le rette cui appartengono gli spigoli che tagliano i piani cui appartengono le basi e quindi determinano segmenti fra loro proporzionali. E la costante di proporzionalità è sempre la stessa. Quindi il rapporto delle aree è il quadrato di tale costante. Sempre per il teorema di Talete anche il rapporto delle altezze della piramide di partenza e di quella che eliminiamo per ottenere la troncatura è sempre uguale al rapporto di similitudine dei poligoni di base.

**29. Determinare una formula per il calcolo della superficie di un tetraedro trirettangolo ottenuto a**

**partire da un cubo di spigolo $\ell$.**

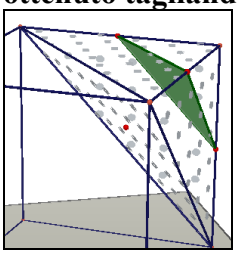


Per quanto visto nell'esercizio 1, la superficie è: $3\cdot\ell^2+\frac{\left(\ell\sqrt{2}\right)^2}{4}\sqrt{3}=\frac{6+\sqrt{3}}{2}\cdot\ell^2$

**30. Determinare una relazione fra l'altezza *h* di un tetraedro trirettangolo a base un triangolo equilatero e lo spigolo della base $\ell$.**

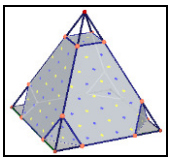
L'altezza è cateto di un triangolo rettangolo in cui l''altro cateto è 2/3 dell'altezza del triangolo equilatero e l'ipotenusa è lo spigolo del cubo. Quindi: $h^2=\ell^2-\left(\frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{\ell\sqrt{2}}{\cancel{2}}\sqrt{3}\right)^2\Rightarrow h^2=\left(1-\frac{2}{3}\right)\ell^2\Rightarrow\ell=\sqrt{3}h$

**31. Determinare una formula per il calcolo della superficie di un tronco di tetraedro trirettangolo ottenuto tagliando a metà gli spigoli $\ell$ del cubo generatore del tetraedro.**



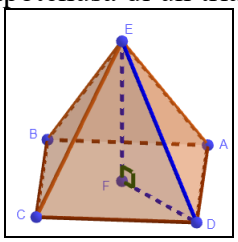
Le facce laterali sono trapezi di basi lunghe $\ell\sqrt{2},\frac{\ell}{2}\sqrt{2}$ e altezza $h=\sqrt{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2-\left(\frac{\ell\sqrt{2}-\ell\sqrt{2}/2}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{8}}\ell=\frac{\ell}{2\sqrt{2}}$. Quindi la superficie laterale misura $3\cdot\frac{\ell\cancel{\sqrt{2}}+\ell\cancel{\sqrt{2}}/2}{2}\cdot\frac{\ell}{2\cancel{\sqrt{2}}}=\frac{9}{8}\ell^2$. La superficie totale:

$$\frac{9}{8}\ell^2+\frac{\left(\sqrt{2}/2\ell\right)^2}{4}\sqrt{3}+\frac{\left(\sqrt{2}\ell\right)^2}{4}\sqrt{3}=\left(\frac{9}{8}+\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\ell^2=\frac{9+5\sqrt{3}}{8}\ell^2$$



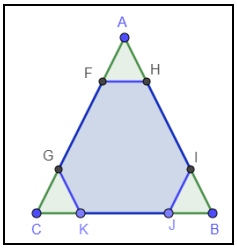
**32. Sugli spigoli di una piramide retta a base quadrata scegliamo i punti che li dividono nel rapporto 1/4, quindi uniamo tali punti ottenendo il poliedro convesso in figura. Quanto misura la sua area se il lato di base della piramide di partenza è uguale all'altezza e misura 8 *cm*?**

Lo spigolo laterale è ipotenusa di un triangolo rettangolo i cui cateti sono l'altezza e la semi diagonale del quadrato di base,

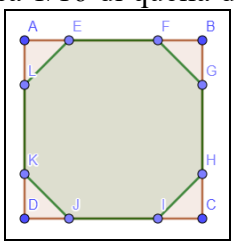



pertanto misura $\sqrt{8^2+\left(4\sqrt{2}\right)^2}\,cm=4\sqrt{6}\,cm$. Le facce laterali della piramide sono triangoli isosceli di base lunga 8 *cm* e lati obliqui lunghi quanto lo spigolo laterale, perciò l'altezza relativa alla base misura: $\sqrt{\left(4\sqrt{6}\right)^2-4^2}\,cm=4\sqrt{5}\,cm$, quindi hanno area $4\cdot4\sqrt{5}\,cm^2=16\sqrt{5}\,cm^2$. Il poliedro ha 4 facce esagonali, una quadrata, 4 triangolari e una ottagonale. La faccia quadrata ha lati lunghi ¼ di quelli della base della piramide, quindi 2 *cm* e perciò ha area 4 $cm^2$. Le 4 facce triangolari sono triangoli isosceli di base ¼ della diagonale del quadrato, quindi

$2\sqrt{2}\,cm$, e lato obliquo ¼ dello spigolo laterale, cioè $\sqrt{6}\,cm$; perciò hanno altezza relativa alla base

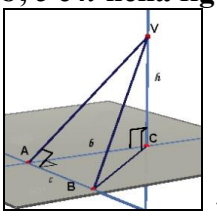



lunga $\sqrt{\sqrt{6}^2-\sqrt{2}^2}\,cm=2\,cm$, quindi hanno area $2\sqrt{2}\,cm^2$. Ciascuno degli esagoni ha area differenza fra l'area della faccia triangolare della piramide e 3 triangoli a essa simili di rapporto ¼, quindi di area 1/16 di quella del triangolo grande. Perciò ha area $\left(16\sqrt{5}-3\sqrt{5}\right)cm^2=13\sqrt{5}\,cm^2$.

Infine l'ottagono: 

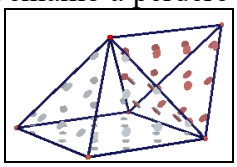
ha area che misura: $(64 - 4 \cdot 2^2)\ cm^2 = 48\ cm^2$. Quindi la superficie del poliedro misura: $\left(4+4\cdot 2\sqrt{2}+4\cdot 13\sqrt{5}+48\right)cm^2=4\cdot\left(13+13\sqrt{5}+2\sqrt{2}\right)cm^2$

**33. Determinare la misura della superficie di un tetraedro quadrirettangolo in funzione degli spigoli *b*, *c* e *h* nella figura dell'esercizio 7.**




$$\frac{b\cdot c+b\cdot h+\sqrt{b^2+c^2}\cdot h+c\cdot\sqrt{b^2+h^2}}{2}$$

**34. Su una faccia di una piramide regolare a facce triangolari, incolliamo una faccia di una piramide regolare a base quadrata e facce triangoli equilateri uguali a quelli della prima piramide. Quante facce ha il poliedro risultante?**

Con la procedura descritta veniamo a perdere due facce fra la somma delle facce dei due solidi, quindi avremo 4 + 5 – 2 = 7 facce. 

**35. Un poliedro convesso ha 12 vertici e 28 spigoli, quante facce ha?**

Per la formula di Eulero: F = S – V + 2 = 28 – 12 + 2 = 18

**36. Un poliedro convesso ha 8 facce e 13 spigoli, quanti vertici ha?**

Per la formula di Eulero: V = S – F + 2 = 13 – 8 + 2 = 7. Però vi è un problema, se ogni faccia ha minimo 3 vertici, anche se avessimo una piramide con 8 facce, questa avrebbe 8 vertici. Quindi il poliedro non esiste.

**37. Un poliedro convesso ha 12 facce e 10 spigoli, quanti vertici ha?**

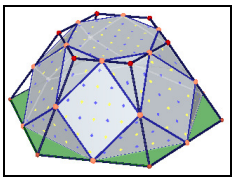
Non esiste perché ha più facce che spigoli

**38. Un poliedro ha 10 facce, 8 vertici e 15 spigoli, che tipo di poliedro è, concavo o convesso?**

Dato che 10 + 8 – 15 = 3, il poliedro non è euleriano e quindi non è convesso, ma concavo.

**39. Un poliedro ha 18 facce, 8 vertici e 24 spigoli, che tipo di poliedro è, concavo o convesso?**

Dato che 18 + 8 – 24 = 2, il poliedro è euleriano e quindi può essere sia convesso che concavo.



**40. Sugli spigoli di un tronco di piramide regolare a basi esagonali scegliamo i punti medi, quindi uniamo tali punti ottenendo il poliedro convesso in figura. Quante facce, vertici e**

**spigoli ha il poliedro?**
Le facce sono date dalle 8 iniziali, 6 delle quali adesso hanno forma quadrata, e da 12 triangolari che si trovano in corrispondenza dei 12 vertici del tronco di partenza. In totale 20. I vertici sono tanti quanti i punti medi scelti, che a loro volta sono quanti gli spigoli del tronco, cioè 18. Infine gli spigoli sono dati da quelli delle facce laterali, $6 \cdot 4 = 24$, aumentati da quelli delle basi, altri 12, totale 36.

**41. Sugli spigoli di un tronco di piramide regolare a basi quadrate scegliamo 2 punti che uniamo ottenendo i vertici di un nuovo poliedro convesso. Quante facce, vertici e spigoli ha?**
In questo modo ogni base quadrata diventa un ottagono. In corrispondenza di ciascuno degli 8 vertici avremo un triangolo, quindi ci saranno un totale di 14 facce. i vertici sono ovviamente i punti che abbiamo scelto e dato che il tronco aveva 12 spigoli sono 24. Infine gli spigoli possiamo trovarli con la formula di Eulero, dato che il poliedro è convesso: $14 + 24 – 2 = 36$.

**42. Un poliedro convesso ha *n* facce e *n* + 2 vertici, quanti spigoli ha?**
Per la formula di Eulero: $S = F + V – 2 = n + n + 2 – 2 = 2n$

**43. Un poliedro convesso ha *n* facce e *n* + 2 spigoli, quanti vertici ha?**
Per la formula di Eulero: $V = S – F + 2 = n + 2 – n + 2 = 4$. Il numero di vertici deve essere sempre maggiore o uguale di quello delle facce, quindi le facce dovrebbero essere al massimo 4, ma l'unico poliedro con 4 facce è il tetraedro che di vertici ne ha pure 4, quindi il poliedro è un tetraedro.

**44. Un poliedro convesso ha *n* + 1 facce e *n* vertici, quanti spigoli ha?**
Non esiste perché ha più facce che spigoli

**45. Dimostrare la validità della formula di Eulero per un poliedro euleriano su una delle cui facce è costruito un altro poliedro euleriano.**
Abbiamo $F + V = S + 2$ per il poliedro di partenza e $F' + V' = S' + 2$ per quello attaccato. Con questa procedura le facce del nuovo poliedro diventano $F'' = F + F' – 2$; i vertici sono $V'' = V + V' – n$, dove $n$ è il numero di vertici della faccia incollata; gli spigoli sono $S'' = S + S' – n$. Quindi abbiamo $F'' + V'' – S'' = F + F' – 2 + V + V' – n – S – S' + n = (F + V – S) + (F' + V' – S') – 1 = 2 + 2 – 2 = 2$

**46. Dimostrare la validità della formula di Eulero per un poliedro euleriano a cui tronchiamo uno dei suoi vertici.**
Abbiamo $F + V = S + 2$ per il poliedro di partenza, tronchiamo un vertice in cui convergono $n$ spigoli. Così le facce del nuovo poliedro diventano $F + 1$; i vertici $V + n – 1$ e gli spigoli $S + n$. Quindi abbiamo $F + 1 + V + n – 1 – S – n = 2$

***Calcolare la caratteristica di Eulero di ciascuno dei seguenti poliedri***

**47. a) A forma di E; b) A forma di F; c) A forma di L; d) A forma di H**

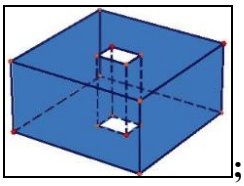
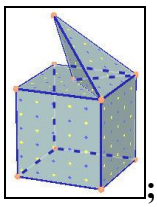
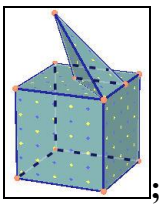
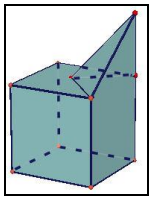
a) Abbiamo $(2 + 6 + 6) = 14$ facce, che abbiamo contato considerando quelle parallele ai tre piani che determinano lo spazio tridimensionale; $6 \cdot 4 = 24$ vertici (dei 6 rettangoli che formano le sezioni del solido con piani paralleli alla base); $(6 \cdot 4 + 12) = 36$ spigoli. Quindi $14 + 24 – 36 = 2$;

b) Abbiamo $(2 + 5 + 5) = 12$ facce; $5 \cdot 4 = 20$ vertici; $(5 \cdot 4 + 10) = 30$ spigoli. Quindi $12 + 20 – 30 = 2$;

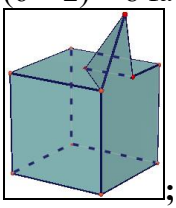
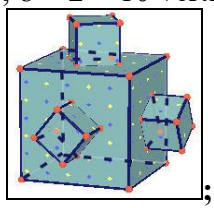
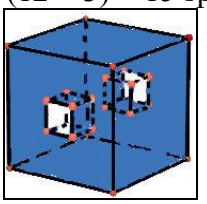
c) Abbiamo $(2 + 3 + 3) = 8$ facce; $3 \cdot 4 = 12$ vertici; $(3 \cdot 4 + 6) = 18$ spigoli. Quindi $8 + 12 – 18 = 2$;

d) Abbiamo (2 + 6 + 6) = 14 facce; 6 · 4 = 24 vertici; (6 · 4 + 12) = 36 spigoli. Quindi 14 + 24 – 36 = 2

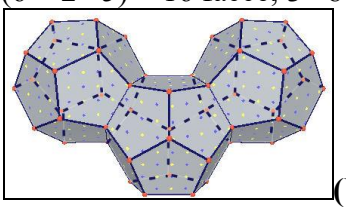
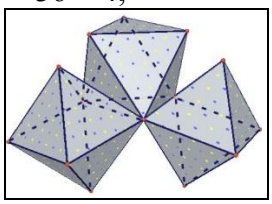
***Nelle figure seguenti le parti bianche indicano che il poliedro è bucato***

**48. a)**  **; b)**  **; c)**  **; d)** 

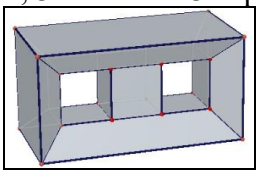
a) (6 + 4) = 10 facce; 4 · 4 = 16 vertici; 2 · 12 = 24 spigoli. Quindi 10 + 16 – 24 = 2;
b) (6 + 3) = 9 facce; 8 + 2 = 10 vertici; (12 + 5) = 17 spigoli. Quindi 9 + 10 – 17 = 2;
c) (6 + 3) = 9 facce; 8 + 3 = 11 vertici; (12 + 6) = 18 spigoli. Quindi 9 + 11 – 18 = 0;
d) (6 + 2) = 8 facce; 8 + 2 = 10 vertici; (12 + 3) = 15 spigoli. Quindi 8 + 10 – 15 = 3

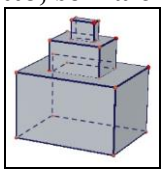
**49. a)**  **; b)**  **; c)** 

a) (6 + 2) = 8 facce; 8 + 3 = 11 vertici; 12 + 5 = 17 spigoli. Quindi 8 + 11 – 17 = 2;
b) (6 + 3 · 5) = 21 facce; 8 · 4 = 32 vertici; 4 · 12 = 48 spigoli. Quindi 21 + 32 – 48 = 5;
c) (6 + 2 · 5) = 16 facce; 3 · 8 = 24 vertici; 3 · 12 = 36 spigoli. Quindi 16 + 24 – 36 = 4;

**50. a)**  **(Un dodecaedro ha 30 spigoli e 20 vertici); b)** 

a) (2 · 11 + 10) = 32 facce; 3 · 20 – 2 · 5 = 50 vertici; 3 · 30 – 2 · 5 = 80 spigoli. Quindi 32 + 50 – 80 = 2;
b) 3 · 8 = 24 facce; 3 · 6 – 4 = 14 vertici; 3 · 12 – 2 = 34 spigoli. Quindi 24 + 14 – 34 = 4

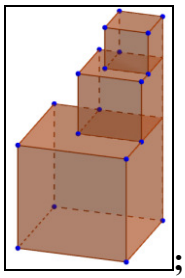
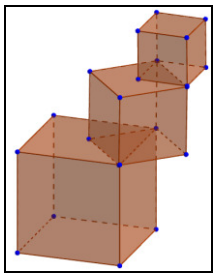
**51. Poliedro "doppia cornice" in figura** 
(10 + 8 + 6) = 24 facce; 4 · 4 = 16 vertici; 42 spigoli. Quindi 24 + 16 – 42 = –2

**52. Poliedro ottenuto sovrapponendo 20 parallelepipedi rettangoli tutti di diverse dimensioni, in modo che la base di quello posto di sopra sia interna alla base di quello di sotto, senza che vi siano né vertici né spigoli in comune. In figura vi è il caso con 3 parallelepipedi.** 

Sovrapponendone uno solo abbiamo 6 + 5 facce, 2 · 8 vertici e 2 · 12 spigoli. Se ne sovrapponiamo un terzo le facce diventano 6 + 2 · 5, i vertici 3 · 8 e gli spigoli 3 · 12. Non è difficile capire quindi che con 19 parallelepipedi sopra quello più grande avremo 6 + 19 · 5 = 101 facce, 20 · 8 = 160 vertici e 20 · 12 = 240 spigoli. Quindi 101 + 160 – 240 = 21

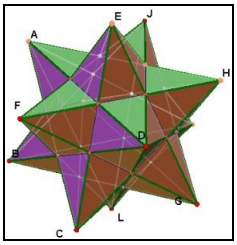
**53. Con riferimento al precedente quesito, sovrapponendo *n* parallelepipedi rettangoli.**
$6 + (n - 1) \cdot 5 + (n \cdot 8) - n \cdot 12 = n + 1$

**54. Con riferimento alle figure seguenti in cui i cubetti sono in numero di *n*.**

**a)**  **; b)** 

a) Tutti i cubi hanno due facce che contribuiscono a formare due uniche facce del poliedro. Quindi possiamo contare 6 facce per il cubo base, inglobando in esso anche le due facce concave che contengono le facce degli altri cubi, Per tutti gli altri non devo contare 3 delle 6 facce, per un totale di $6 + 3(n - 1) = 3n + 3$ facce. Analogamente per i vertici, di quelli intermedi ne contiamo 6 e di quelli estremi invece 7, quindi in totale sono $7 \cdot 2 + 6 \cdot (n - 2) = 6n + 2$ vertici. Infine per gli spigoli ne dobbiamo contare 9 per tutti, tranne quello base per cui ne contiamo 12, inglobando anche quello che rappresenta l'altezza del poliedro, per un totale di $12 + 9 \cdot (n - 1) = 9n + 3$ spigoli. Quindi $(3n + 3) + (6n + 2) - (9n + 3) = 2$. Il poliedro è euleriano.

b) Stavolta non ci sono facce che contribuiscono a formare un'unica faccia del poliedro; vi sono però facce parzialmente nascoste e vertici comuni, mentre non vi sono spigoli comuni. Le facce parzialmente nascoste non diminuiscono il numero di facce per ogni cubo, quindi in totale ne abbiamo $6n$. Per i vertici se contiamo 8 quello del cubo base, gli altri ne hanno in comune con quello su cui sta sovrapposto 2, quindi dobbiamo contarne solo 6, per un totale di $8 + 6(n - 1) = 6n + 2$ vertici. Infine per gli spigoli ne dobbiamo contare 12 per tutti, dato che non vi sono sovrapposizioni neppure parziali. Quindi $6n + (6n + 2) - 12n = 2$. Il poliedro è euleriano.

**55. Poliedro stellato di Keplero mostrato in figura,** 

**formato costruendo sulle facce pentagonali di un dodecaedro delle piramidi. Si tenga conto che i poligoni di uguale colore, come quello verde non sono considerati come 5 facce, ma come un'unica faccia, poiché giacciono sullo stesso piano.**

Le facce sono apparentemente $5 \cdot 12 = 60$, dato che contiamo solo le 5 facce laterali delle piramidi, ma abbiamo detto che ognuna di queste 5 facce forma un poligono stellato con altre 4 facce. Ed esse quindi sono quante le facce del dodecaedro di partenza, ossia 12. A questo punto i vertici sono anch'essi 12 che sono quelli dei vertici delle piramidi, e gli spigoli che sono quanti quelli del dodecaedro, cioè 30. Infine abbiamo: $12 + 12 - 30 = -6$

## I poliedri regolari

**1. Quanti tagli sono necessari per dividere un cubo di lato 3 *cm* in 27 cubi di lato 1 *cm*?**

Dobbiamo intanto dividere in 3 uno spigolo, con 2 tagli, ottenendo così 3 parallelepipedi rettangoli di dimensioni (1, 3, 3). Lo stesso facciamo adesso con uno degli spigoli lunghi 3 *cm*, avendo parallelepipedi rettangoli di dimensioni (1, 1, 3), ce con altri 2 tagli otteniamo quanto richiesto. Totale 6.

**2. Con 100 cubetti possiamo costruire un cubo più grande? Giustificare la risposta.**

No perché 100 non è un cubo perfetto.

**3. Con 125 cubetti possiamo costruire un cubo più grande? Giustificare la risposta.**

Sì perché $125 = 5^3$.

**4. Consideriamo un cubo di superficie 120 $cm^2$ e mediante piani paralleli ai lati lo dividiamo in 8 cubi uguali, quanto misura la superficie di ciascuno di questi cubi più piccoli?**

Il lato del cubo originario misura $\sqrt{\frac{120}{6}}\,cm = \sqrt{20}\,cm$. Per ottenere 8 cubetti uguali dobbiamo dividere ciascuno spigolo in 2 parti uguali, quindi il loro lato misura $\frac{\sqrt{20}}{2}\,cm = \frac{2\sqrt{5}}{2}\,cm = \sqrt{5}\,cm$, e l'area totale: $6 \cdot 5\ cm^2 = 30\ cm^2$.

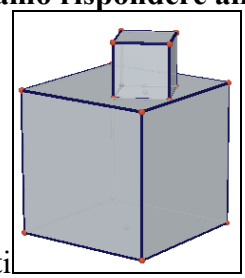
**5. Possiamo dividere il cubo del quesito precedente in 10 parti uguali con la stessa tecnica?**

No perché se dividiamo gli spigoli in 2 otteniamo 4 cubi; se li dividiamo in 3 ne otteniamo 27, quindi non possiamo ottenere mai 10 cubetti uguali con questa tecnica.

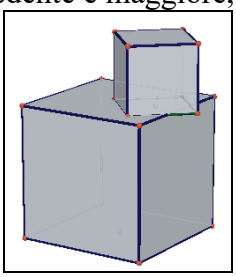
**6. In che rapporto sono le superfici di due cubi di spigolo uno doppio dell'altro?**

Abbiamo: $\frac{\cancel{6}\cdot(2\cancel{\ell})^2}{\cancel{6}\cdot\cancel{\ell^2}} = 4$.

**7. Su una faccia di un cubo di superficie 180 $cm^2$ incolliamo un cubo di spigolo metà di quello dato. Quanto misura la superficie di questo nuovo solido? Possiamo rispondere alla domanda?**



Osserviamo che è importante come incolliamo il cubo, infatti se il cubo incollato è interno alla faccia del cubo maggiore, allora la superficie del nuovo solido è uguale alla somma fra la supercie del cubo più grande aumentata di 4 facce del cubo più piccolo. Se invece solo una parte della faccia è comune al cubo maggiore la superficie rispetto alla precedente è maggiore, e abbiamo bisogno di sapere quanto vale l'area della parte esterna del cubo incollato



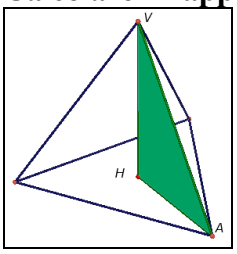
**8. Modificare il quesito precedente in modo che sia possibile risolverlo e fornire la soluzione.**

Per quanto detto avremo: $180\ cm^2 + 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{30}}{2}\right)^2 cm^2 = (180 + 30)\ cm^2 = 210\ cm^2$.

**9. Una diagonale di un cubo misura 1, quanto misura la superficie del cubo?**

Sappiamo che la diagonale di un cubo misura $\sqrt{3}\ell$, dato che un cubo è un parallelepipedo rettangolo di dimensioni uguali. Abbiamo perciò $3\ell^2 = 1 \Rightarrow \ell^2 = \frac{1}{3}$, quindi la superficie misura $6 \cdot (1/3) = 2$.

**10. Calcolare il rapporto fra l'altezza e lo spigolo di un tetraedro regolare.**

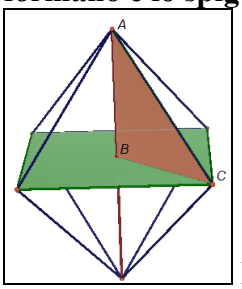



Il triangolo $VHA$ è rettangolo di cateti l'altezza e 2/3 dell'altezza del triangolo di base. Quindi possiamo dire che

$$\overline{VH}^2 + \overline{HA}^2 = \overline{VA}^2 \Rightarrow \overline{VH}^2 + \left(\frac{\cancel{2}}{3}\frac{\overline{VA}}{\cancel{2}}\sqrt{3}\right)^2 = \overline{VA}^2 \Rightarrow \overline{VH}^2 = \frac{2}{3}\overline{VA}^2 \Rightarrow \frac{\overline{VH}}{\overline{VA}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

**11. Dato un ottaedro regolare, calcolare il rapporto fra la distanza fra i vertici delle piramidi che lo**

**formano e lo spigolo.**




Dal triangolo rettangolo $ABC$ abbiamo:

$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2 \Rightarrow \overline{AB}^2+\left(\frac{\overline{AC}}{2}\sqrt{2}\right)^2=\overline{AC}^2 \Rightarrow \overline{AB}^2=\frac{1}{2}\overline{AC}^2 \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Il rapporto richiesto è ovviamente il doppio, quindi $\sqrt{2}$

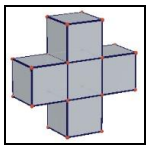
**12. Calcolare la misura della superficie di un ottaedro regolare di spigolo lungo 1.**

L'ottaedro è formato da 8 triangoli equilateri uguali, quindi: $\cancel{8}^{2}\cdot\frac{1}{\cancel{4}}\sqrt{3}=2\cdot\sqrt{3}$

**13. Calcolare la misura della superficie di un icosaedro regolare di spigolo lungo 1.**

L'icosaedro è formato da 20 triangoli equilateri uguali, quindi: $\cancel{20}^{5}\cdot\frac{1}{\cancel{4}}\sqrt{3}=5\cdot\sqrt{3}$

**14. Con 5 cubetti uguali formiamo un solido a forma di croce come in figura, la cui superficie è di 22 *m*². Quanto misura lo spigolo del cubetto iniziale?**



La superficie è formata da $4 \cdot 5 + 2 = 22$ quadrati, quindi la superficie misura $22x^2$, in cui $x$ è la misura del lato. Da cui $x = 1$ *m*.

**15. Determinare l'area della superficie di un solido composto da un cubo il cui lato misura 6 *cm*, e da un tetraedro regolare poggiato su una base del cubo, con uno spigolo in comune con esso.**

Basta sommare la superficie del cubo a 2 facce del tetraedro. Quindi: $\left(6\cdot 6^2+2\cdot\frac{6^2}{4}\sqrt{3}\right)cm^2=18\cdot\left(\sqrt{3}+12\right)cm^2$

**16. Calcolare la superficie di un solido formato da un cubo di lato che misura *L*, con un altro cubo incollato sulla sua base superiore di spigolo *L*/2.**

La superficie è somma di quella del cubo grande e di 4 facce di quello piccolo: $6\,L^2 + 4(L/2)^2 = 7L^2$

**17. Su ciascuna faccia di un cubo di lato 3, viene prodotto un foro a forma cubica di lato 1, in posizione concentrica a ciascuna faccia. Determinare la superficie del poliedro così ottenuto.**

Così facendo abbiamo aumentato la superficie del cubo non bucato di $4 \cdot 6 = 24$ quadrati di lato 1. Quindi avremo: $6 \cdot 3^2 + 24 = 54 + 24 = 78$.

**18. Calcolare la superficie di un solido formato da un cubo di lato che misura 5 *cm*, con una cavità a forma di cubo, con una faccia concentrica alla sua base superiore, in modo che la superficie rimasta della faccia bucata misuri 10 *cm*².**

L'area del "buco" misura $(5^2 - 10)\ cm^2 = 15\ cm^2$. La superfixiw swl aolido è somma della superficie del cubo grande aumentata di 4 facce della cavità: $(6 \cdot 5^2 + 4 \cdot 15)\ cm^2 = 210\ cm^2$.

**19. Consideriamo un cubo e mediante piani paralleli ai lati lo dividiamo in *n* cubi uguali, che valori può assumere *n*?**

Da quanto detto negli esercizi 6 e 7, $n$ deve essere un cubo perfetto.

**20. Possiamo dire che se dividiamo un cubo di superficie $6n^2$ in *k* cubi uguali la superficie dei cubi più piccoli è *n*/*k*? Giustificare la risposta.**

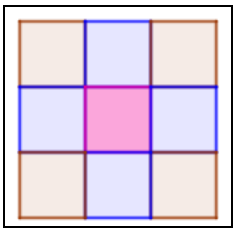
Tenuto conto del quesito precedente, $k = x^3$, dato che il lato del cubo iniziale è lungo $n$, i cubetti ottenuti dividendo ciascuno in $x$ parti uguali avrebbero lato lungo $n/x$ e quindi la loro superficie sarebbe $(6n^2/x^2)$ e la superficie di tutti: $x^3 \cdot (6n^2/x^2) = 6n^2x$. Quindi la risposta è negativa.

**21. Per opportuni valori di *k* possiamo fornire risposta affermativa al quesito precedente?**

La risposta è ancora negativa perché dovrebbe essere $x = 1$, cioè non dovremmo dividere il cubo iniziale.

**22. Un cubo è costruito usando 27 cubi più piccoli e tutti uguali fra loro. Coloriamo tutte le facce di giallo, quanti dei cubetti iniziali hanno rispettivamente 0, 1, 2 e 3 facce colorate?**

Dei 27 cubetti, uno è interno e quindi non avrà facce colorate, i rimanenti 26 cubetti hanno almeno una faccia "esterna". Consideriamo una faccia che dividiamo in 9 facce appartenenti ai cubetti.

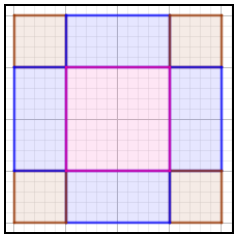


Possiamo dire che la faccia rossa appartiene a cubi che mostrano all'esterno solo quella faccia e sono in numero di 6, tante quante le facce del cubo grande. Quelle di colore blu ne mostrano 2, dato che appartengono a uno spigolo del cubo grande e sono in numero di 4 per faccia, ma appartengono a due facce, quindi in totale sono $4 \cdot 6 \cdot ½ = 12$. Gli altri hanno invece 3 facce esterne, quindi colorate, perché appartengono a 3 facce e sono quindi $4 \cdot 6 \cdot 1/3 = 8$. In effetti $1 + 6 + 12 + 8 = 27$.

**23. Con riferimento al precedente quesito, se coloriamo rispettivamente di blu, rosso e verde le facce dei cubetti che hanno 1, 2 e 3 facce colorate. Quante ve ne sono di ogni colore?**

Da quanto detto ne abbiamo 6 blu, $12 \cdot 2 = 24$ rosse e $3 \cdot 8 = 24$ verdi.

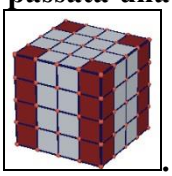
**24. Con riferimento al problema del box Lavoriamo insieme, quanti dei cubetti iniziali hanno a) una sola faccia colorata? b) Quanti due?**

a)  Ragionando come nel problema 18, stavolta avremo $6 \cdot 4 = 24$ cubetti con una faccia colorata;

b) E $8 \cdot 6 \cdot ½ = 24$ con 2 facce colorate.

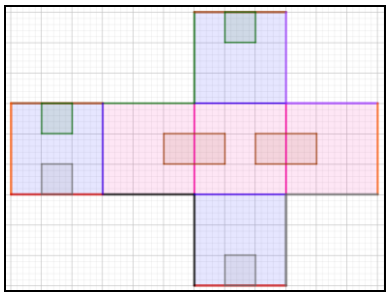
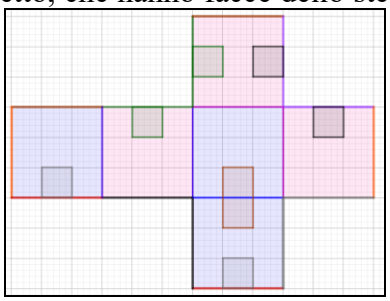
**25. Incolliamo fra loro 125 cubi a formare un cubo più grande, quindi coloriamo la superficie del cubo. Quanti dei 125 cubetti iniziali hanno facce colorate esattamente in numero di: a) 1; b) 2; c) 3; d) 4**

125 cubi significa che ne abbiamo 25 per ogni faccia. a) Tenuto conto del quesito precedente per ogni faccia ne avremo $(5 – 3)^2 = 9$ che formano il "centro" e quindi hanno una sola faccia colorata. in totale sono perciò $6 \cdot 9 = 54$; b) con 2 facce colorate sono $4 \cdot 3 = 12$, ma questi cubetti hanno appunto due facce, perciò per evitare di contarli due volte nel conteggio totale, dividiamo per due. Perciò sono $6 \cdot 12/2 = 36$; c) Quelli con 3 facce, indipendentemente dal numero di cubetti sono sempre 8; d) Non ve ne sono con 4 facce colorate.

**26. Sessantaquattro cubi di lato 1 *cm*, sono uniti a formare un cubo di lato 4 *cm*. Viene passata una mano di vernice a formare due strisce che si incontrano, come mostrato in figura**  **. Quanti cubi hanno a) almeno una faccia chiara; b) almeno una faccia scura; c) almeno due facce di diverso colore?**

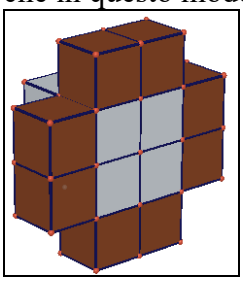
a) I cubetti esterni sono $64 – 16 = 48$, come già visto in casi analoghi. Di questi solo i 4 cubi che stanno negli "angoli" sono scure, che sono 16, quindi con le facce chiare sono $48 – 16 = 32$. B) da quanto detto sono 16; c) non ve ne sono.

**27. Un cubo è costruito usando 27 cubi più piccoli e tutti uguali fra loro. Sappiamo che tre delle facce del cubo grande sono verniciate di rosso e le altre tre di blu. Come minimo e come massimo quanti dei cubi che hanno due facce colorate le hanno dello stesso colore?**

Possiamo avere queste due situazioni:  in cui abbiamo colorato allo stesso modo gli spigoli che coincidono e abbiamo evidenziato, sempre con lo steso colore, le coppie di facce adiacenti quindi dello stesso cubetto, che hanno facce dello stesso colore. Pertanto abbiamo solo 4 cubetti. Il secondo caso è il seguente  ed analogamente la risposta è 4

**28. Incolliamo fra loro 1000 cubi di lato 1, ottenendo un cubo di lato 10. Quanti dei cubi incollati sono *invisibili*?**

Sono quelli che non hanno facce esterne. Dato che per "rivestire" un cubo di $2^3 = 8$ cubetti dobbiamo aggiungere un cubo a sinistra e uno a destra, uno sopra e uno sotto, come mostrato in figura, vuol dire che in questo modo avremo un cubo con $4^3$ cubetti. Perciò un cubo di $4^3$ cubetti ha $2^3$ cubetti "interni".



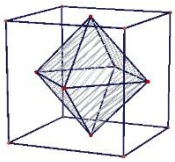
Pertanto un cubo di $10^3$ cubetti ha $8^3 = 512$ cubetti "interni".

**29. Con dei cubetti uguali vogliamo costruire un cubo più grande, che per ogni spigolo ha 6 dei cubetti. Poiché non ne abbiamo a sufficienza mettiamo solo i cubetti che si vedono. Di quanti ne abbiamo bisogno?**

Tenuto conto del precedente quesito $4^3$ sono interni, quindi la "buccia" esterna ne contiene $6^3 - 4^3 = 216 - 64 = 152$

**30. Aumentiamo ciascuno spigolo di un cubo del 50%, qual è l'aumento percentuale della superficie del cubo?**

Basta calcolare l'incremento della superficie di una faccia, che passa da $x^2$ a $(1{,}5x) = 2{,}25x^2$, con una differenza di $1{,}25x^2$, quindi un aumento del 125%.

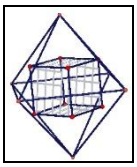


**31. Dimostrare che l'ottaedro duale del cubo è regolare.**

Dobbiamo provare che tutti gli spigoli dell'ottaedro sono uguali. Indichiamo con $\ell$ la misura del lato del cubo. I lati della base quadrata sono uguali perché uniscono fra loro i centri delle facce adiacenti del cubo, e misurano $\frac{\ell}{2}\sqrt{2} = \frac{\ell}{\sqrt{2}}$. Adesso lavoriamo su una delle piramidi che formano l'ottaedro. Se consideriamo i triangoli rettangoli che hanno come cateti l'altezza della piramide e mezza diagonale del quadrato di base, è ovvio che sono uguali, quindi hanno uguali le ipotenuse, ossia gli spigoli laterali delle piramidi. Questi spigoli misurano: $\sqrt{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\ell}{2}\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}\ell = \frac{\ell}{\sqrt{2}}$. Perciò tutti gli spigoli sono uguali.

**32. Detti $\ell_6$ la misura dello spigolo dell'esaedro e $\ell_8$ quella dello spigolo dell'ottaedro suo duale, determinare $\ell_6/\ell_8$.**

Tenuto conto dell'esercizio precedente: $\frac{\ell_6}{\ell_8}=\frac{\ell_6}{\ell_6/\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

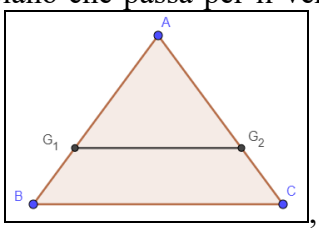


**33. Dimostrare che l'esaedro duale dell'ottaedro è regolare.**

Ogni spigolo ha per estremi i baricentri di due facce adiacenti, quindi hanno tutti la stessa misura.

**34. Detti $\ell_8$ la misura dello spigolo dell'ottaedro regolare e $\ell_6$ quella dello spigolo dell'esaedro suo duale, determinare $\ell_6/\ell_8$.**

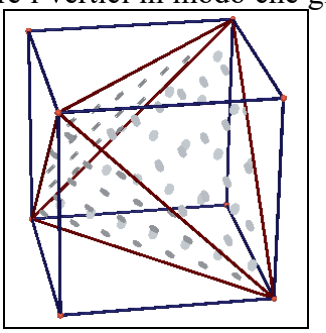
Sezioniamo l'ottaedro con un piano che passa per il vertice e i baricentri di due facce opposte, otteniamo la seguente figura piana:




, in cui $AB$ e $AC$ sono altezze delle facce equilatere triangolari, $G_1G_2$ è diagonale di una faccia del cubo duale e $BC$ è lungo quanto il lato dell'ottaedro. Per le proprietà dei baricentri essi sono a 2/3 dal vertice $A$, quindi $\ell_6\sqrt{2}=\frac{2}{3}\ell_8 \Rightarrow \frac{\ell_6}{\ell_8}=\frac{2}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

**35. Possiamo scegliere quattro degli otto vertici di un cubo in modo che rappresentino i vertici di un tetraedro regolare? Giustificare la risposta.**

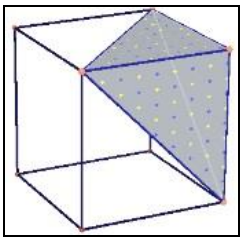
Sì basta scegliere i vertici in modo che gli spigoli siano diagonali di quattro facce del cubo, come mostrato in figura:



**36. Quanto misura la superficie del tetraedro precedente se il lato del cubo è lungo 1?**

Lo spigolo misura $\sqrt{2}$, quindi ogni triangolo ha area $\frac{\sqrt{2}^2}{4}\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ e perciò il tetraedro ha superficie $2\sqrt{3}$

**37. Dato un cubo di lato lungo 1,**



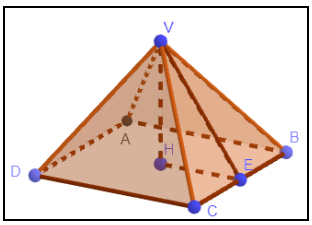
**calcolare l'area del tetraedro trirettangolo in figura.**

L'area misura $\frac{1\cdot1+1\cdot1+1\cdot1}{2}+\frac{\sqrt{2}^2}{4}\sqrt{3}=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$, dato che abbiamo tre triangoli rettangoli isosceli di cateto 1 e un triangolo equilatero di lato la diagonale di una faccia del quadrato.

**38. Calcolare la misura della superficie di un icosaedro regolare sapendo che il suo lato misura**

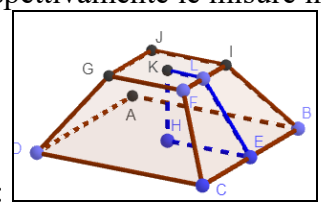
**quanto la metà di quello di un cubo di superficie 600 *cm*².**
Se la superficie del cubo è 600 *cm*², allora il lato misura 10 *cm* ($6 \cdot 10^2 = 600$). Pertanto lo spigolo dell'icosaedro misura 5 *cm* e la sua superficie: $\cancel{20}^{5} \cdot \frac{5^2}{\cancel{4}}\sqrt{3}cm^2 = 125\sqrt{3}cm^2$.

**39. Calcolare la superficie di un ottaedro regolare sapendo che il segmento che ha per estremi i vertici delle due piramidi che formano l'ottaedro misura 4 *cm*.**




L'altezza di una delle piramidi che formano l'ottaedro misura 4/2 *cm* = 2*cm*. Indichiamo con $2x$ la misura dello spigolo in *cm*, abbiamo (vedi figura): $2^2 + x^2 = 2^2 + x^2 = \left(x\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow 2x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{2}$. Quindi la superficie misura $\cancel{8}^{2} \cdot \frac{\left(2\sqrt{2}\right)^2}{\cancel{4}}\sqrt{3}cm^2 = 16\sqrt{3}cm^2$.

**40. Determinare la misura della superficie di un ottaedro regolare il cui lato di base ha la stessa misura dell'altezza di un tronco di piramide retta a basi quadrate, la cui superficie laterale misura 120 *cm*² ed in cui il lato della base maggiore supera l'apotema (uguale al lato della base minore) di 2 *cm*.**
Indichiamo con $x$ e $y$ rispettivamente le misure in *cm* della base maggiore e dell'apotema. Abbiamo allora il seguente sistema:




$$\begin{cases} \cancel{2}(x+y)\cdot y = \cancel{120}^{60} \\ x = y+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\cancel{2}y + \cancel{2}^{1}\right)\cdot y = \cancel{60}^{30} \\ x = y+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y+1)\cdot y = 5\cdot 6 \\ x = y+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5 \vee y = -6 \\ x = 7 \vee x = -4 \end{cases}$$

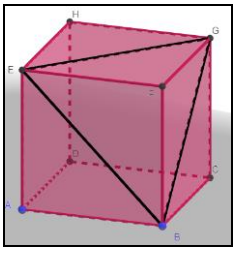
Ovviamente solo le soluzioni positive sono accettabili. Determiniamo adesso l'altezza del tronco: $\sqrt{5^2 - 1^2}\,cm = \sqrt{24}\,cm$. Infine la superficie dell'ottaedro: $\cancel{8}^{2} \cdot \frac{\sqrt{24}^2}{\cancel{4}}\sqrt{3}cm^2 = 48\cdot\sqrt{3}\,cm^2$

**41. Determinare la superficie di un tetraedro regolare, sapendo che il suo lato misura quanto la diagonale di un parallelepipedo rettangolo, di cui conosciamo la misura della superficie totale, 208 *cm*², e di uno spigolo, 4 *cm*, mentre le altre due dimensioni differiscono fra loro di 2 *cm*.**
Indichiamo con $a$ e $b$ le misure in *cm* delle 2 dimensioni incognite, possiamo impostare il sistema:

$$\begin{cases} \cancel{2}\cdot(4a+4b+ab) = \cancel{208}^{104} \\ a = b+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4b+8+4b+b^2+2b-104 = 0 \\ a = b+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2+10b-96 = 0 \\ a = b+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -5+\sqrt{121} = 6 \\ a = 8 \end{cases},$$

abbiamo eliminato in partenza la soluzione negativa non accettabile. La diagonale del parallelepipedo misura perciò: $\sqrt{4^2+6^2+8^2}\,cm = \sqrt{166}\,cm$. Infine la superficie del tetraedro: $116\cdot\sqrt{3}\,cm^2$.

**42. Consideriamo le diagonali di due facce adiacenti di un cubo, che si incontrano nello stesso vertice. Quanto misura l'angolo da esse formato? Giustificare la risposta.**

Come mostrato in figura  sono lati di un triangolo equilatero, pertanto formano un angolo di 60°.

**43. Su una faccia di un cubo di superficie $n^2$ $cm^2$ incolliamo un cubo di spigolo metà di quello dato, quanto misura la superficie di questo nuovo solido?**

La superficie del cubo grande più 4 facce del cubo piccolo, che ha area $(n/2)^2 = n^2/4$, quindi: $6n^2 + n^2 = 7n^2$

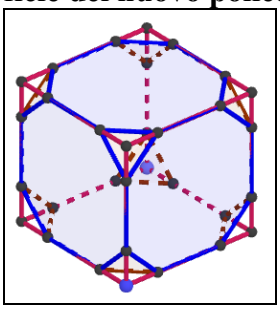
**44. Un cubo è costruito usando $n^3$ cubi più piccoli e tutti uguali fra loro. Coloriamo tutte le facce di bianco. Quanti dei cubetti iniziali hanno un numero di facce colorate pari a: a) 0; b) 1; c) 2; d) 3?**

a) Abbiamo già osservato che il cubo "interno" è formato con 2 cubi in meno di tutto il cubo, quindi: $(n-2)^3$; b) Anche in questo caso abbiamo già osservato che consideriamo per ognuna delle 6 facce il quadrato concentrico alla stessa faccia, ma con 2 quadrati in meno, quindi: $6 \cdot (n-2)^2$; d) In ogni faccia ne abbiamo 4 con 3 facce colorate, quindi quelle con 2 si ottengono come differenza e sono perciò: $n^2 - (n-2)^2 - 4 = 4n - 8$. Ma sono comuni a 2 facce, quindi il totale è $3 \cdot (4n - 8) = 12 \cdot (n - 2)$; e) Abbiamo già detto che sono sempre 8, indipendentemente da $n$.

**45. Abbiamo usato $n^3$ cubetti per formare un cubo più grande che abbiamo dipinto all'esterno. Quanto vale $n$ se i cubetti con a) una faccia colorata sono 288; b) una faccia colorata sono 1350; c) due facce colorate sono 48; d) tre facce colorate sono 8**

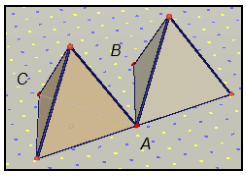
a) Dal problema precedente osserviamo che con una faccia colorata devono essere un multiplo di 6 per un quadrato perfetto, ma $288/6 = 48$ non è un quadrato perfetto, quindi è impossibile; b) Stavolta $1350/6 = 225 = 15^2$, quindi c'è soluzione. Ma sempre tenuto conto del quesito precedente osserviamo che il quadrato centrale ha 2 unità in meno del quadrato della faccia, quindi $n - 2 = 15$, da cui $n = 17$; c) Quelli che hanno due facce colorate sono invece $4 \cdot (n - 2)$ per faccia, ma dato che sono comuni a due facce, il totale sarà $12 \cdot (n - 2) = 48 \Rightarrow n = 6$; d) Solo gli 8 cubetti nei vertici hanno tre facce colorate, indipendentemente da quanti cubetti formano il cubo grande, quindi il problema è indeterminato.

**46. Su ogni spigolo di un cubo scegliamo i due punti che lo dividono nel rapporto $1/n$. Consideriamo il poliedro che ha per vertici tali punti. Se lo spigolo del cubo misura 1, quanto misura la superficie del nuovo poliedro?**

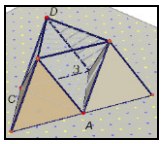


Il poliedro è formato da 6 ottagoni non regolari e da 8 triangoli equilateri di lato $\frac{\sqrt{2}}{n}$. L'area di ciascun ottagono è data dalla differenza fra l'area del quadrato e quella dei 4 triangoli rettangoli isosceli di cateti lunghi $1/n$, quindi vale $1 - \cancel{4}^{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}n^2} = \frac{n^2-2}{n^2}$. Infine l'area del poliedro è

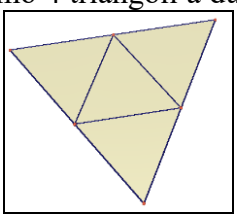
$$6 \cdot \frac{n^2-2}{n^2} + \cancel{8}^{2} \cdot \frac{1}{\cancel{4}} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right)^2 \sqrt{3} = \frac{6n^2 - 12 + 4\sqrt{3}}{n^2}$$

**47. Dimostrare che considerando due tetraedri regolari uguali che hanno un vertice in comune, come mostrato in figura,** 

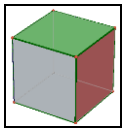
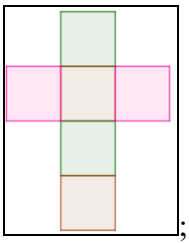
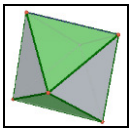
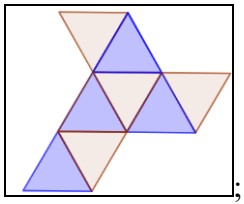
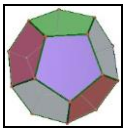
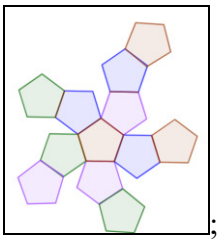
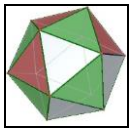
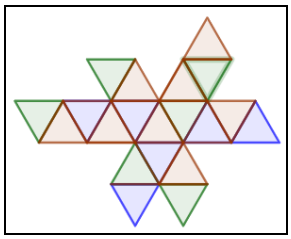
**possiamo *inserire* un ottaedro regolare di faccia *ABC*, in modo che abbia altre tre facce complanari con quelle dei tetraedri.**

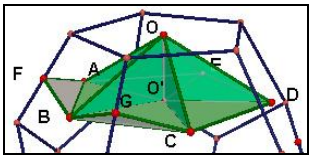
Consideriamo la figura  Ovviamente lo spazio lasciato dai due tetraedri con vertice comune in *A* è tale che gli spigoli che partono da *A* formano un angolo di 60°, quindi possiamo inserire un ottaedro regolare. Questo ha poi altre due facce coincidenti con i due tetraedri.

**48. Vogliamo colorare le facce di un tetraedro regolare in modo che non vi siano due facce con uno spigolo in comune che abbiano lo stesso colore, quanti colori dobbiamo usare al minimo?**

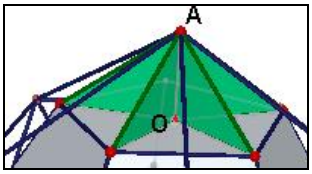
"aprendo" il tetraedro otteniamo 4 triangoli a due a due con uno spigolo in comune, quindi ogni faccia deve avere un colore diverso. 

**49. Vogliamo colorare le facce di un poliedro regolare in modo che non vi siano due facce con uno spigolo in comune che abbiano lo stesso colore, quanti colori dobbiamo usare al minimo, per i vari poliedri regolari, escluso il tetraedro?**

Per il cubo: 3   ; Per l'ottaedro: 2   ; Per il dodecaedro: 4   ; Per l'icosaedro: 3  

**50. Dimostrare che l'icosaedro duale del dodecaedro regolare è anch'esso regolare. Suggerimento: usare la figura seguente:** 

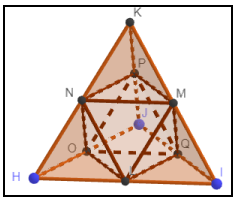

Dalla figura i triangoli di vertice comune *O* sono rettangoli e uguali fra loro, dato che *OO*' è comune e l'altro cateto è raggio della circonferenza circoscritta al pentagono regolare di vertici i centri delle 5 facce del dodecaedro. Perciò gli spigoli dell'icosaedro sono uguali e inoltre si incontrano tutti formando angoli uguali.

**51. Dimostrare che il dodecaedro duale dell'icosaedro regolare è anch'esso regolare. Suggerimento: usare la figura seguente:** 


Anche in questo caso si vede facilmente che i triangoli rettangoli sono fra loro uguali.

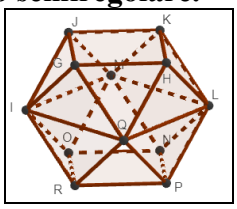
## I poliedri semiregolari

**1. Dimostrare che dividendo ciascuno spigolo di un tetraedro regolare in due parti uguali si ottengono i vertici di un ottaedro regolare.**




Intanto mostriamo che abbiamo un ottaedro, dato che congiungendo a due a due i punti medi abbiamo un totale di 12 spigoli (ognuno si collega ai 4 delle 2 facce con lo spigolo in comune, perciò sono 6 · 4 /2 = 12 spigoli). I vertici sono ovviamente quanti gli spigoli del tetraedro, cioè 6. Infine le facce sono 8. Queste facce sono tutte triangoli equilateri simili alla facce cui appartengono (4 di essi) o alle facce opposte (altri 4) con rapporto di similitudine ½. Quindi sono tutti uguali fra loro.

2. **Dimostrare che dividendo ciascuno spigolo di un ottaedro regolare in due parti uguali non si ottengono i vertici di un poliedro semiregolare.**

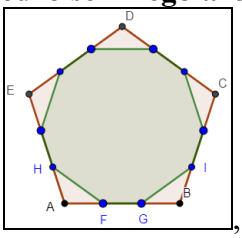
Si ottiene il poliedro in figura, 

formato da due quadrati e da 16 triangoli che non sono tutti equilateri. Per esempio lo è *HGQ* e gli altri sette che hanno un lato in comune con le facce quadrate, mentre i rimanenti sono triangoli isosceli, dato che per esempio $\overline{IQ} = \sqrt{2}\overline{GQ}$, quindi sono triangoli rettangoli isosceli. In ogni caso non potevamo avere un poliedro archimedeo perché in alcuni vertici si incontrano 6 triangoli e in altri un quadrato e 3 triangoli.

3. **Determinare la superficie di un poliedro come il precedente, ottenuto a partire da un ottaedro regolare di spigolo lungo 2 unità.**

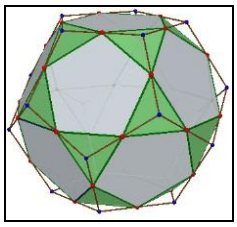
D quanto visto nell'esercizio precedente, gli spigoli del quadrato e dei triangoli equilateri misurano 1 e hanno aree rispettive che misurano, in unità quadrate, 1 e $\frac{\sqrt{3}}{4}$. I triangoli rettangoli isosceli hanno area ½. Infine la superficie del poliedro misura $2 + 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + 8 \cdot \frac{1}{2} = 6 + 2\sqrt{3}$.

4. **Dimostrare che dividendo gli spigoli di un dodecaedro regolare in tre parti uguali, non si ottengono i vertici di un poliedro semiregolare.**

Consideriamo la figura 

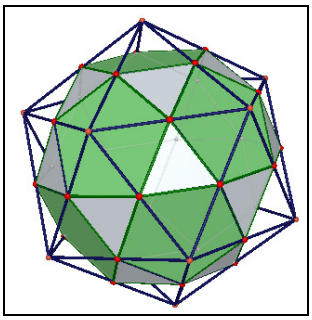
, il decagono verde che si ottiene unendo i vertici di una faccia del dodecaedro non è regolare, dato che per esempio il triangolo *AHF* è isoscele e ottusangolo, quindi il lato *HF* è maggiore degli altri due, i quali però misurano quanto *FG*.

5. **Dimostrare che dividendo gli spigoli di un dodecaedro regolare in due parti uguali, si ottengono i vertici di un icosidodecaedro.**



Consideriamo i pentagoni "piccoli" che sono certamente equilateri perché i triangoli verdi sono certamente equilateri, dato che uniamo fra loro i punti medi di due spigoli consecutivi di un pentagono regolare. I pentagoni sono anche equiangoli, dato che i triangoli isosceli che "eliminiamo" dalla faccia pentagonale del dodecaedro, sono uguali.

6. **Dimostrare che dividendo gli spigoli di un icosaedro regolare in due parti uguali, si ottengono i vertici di un l'icosidodecaedro.**



Consideriamo la figura i triangoli grigi misurano quanto ¼ di quelli delle facce dell'icosaedro, quindi sono equilateri, così come lo sono i pentagoni che sono anche equiangoli.

**7. Usando la formula di Eulero determinare il numero di spigoli del a) Cubottaedro; b) Icosidodecaedro; c) Dodecaedro troncato; d) Icosaedro troncato.**

a) ) Il cubottaedro ha 14 facce e 12 vertici (abbiamo scelto il punto medio su ogni spigolo di un cubo), quindi gli spigoli sono 14 + 12 – 2 = 24; l'icosidodecaedro ha 32 facce e 30 vertici (abbiamo scelto il punto medio su ogni spigolo di un icosaedro), quindi gli spigoli sono 32 + 30 – 2 = 60; c) Il dodecaedro troncato ha 32 facce e 60 vertici (abbiamo scelto due punti su ogni spigolo di un dodecaedro), quindi gli spigoli sono 32 + 60 – 2 = 90; d) L'icosaedro troncato ha 32 facce e 60 vertici (abbiamo scelto due punti su ogni spigolo di un icosaedro), quindi gli spigoli sono 90.

**8. Determinare una formula per il calcolo della superficie del tetraedro troncato in funzione della misura dello spigolo $\ell$.**

Dato che ogni esagono regolare si può dividere in 6 triangoli equilateri con lo stesso lato, la superficie cercata è formata da 24 + 4 = 28 triangoli equilateri di lato $\ell$ e area $\frac{\ell^2}{4}\sqrt{3}$. Quindi la superficie richiesta misura $28\cdot\frac{\ell^2}{4}\sqrt{3}=7\ell^2\sqrt{3}$.

**9. Un tetraedro troncato ha superficie di $14\cdot\sqrt{3}\,cm^2$, quanto misura il suo spigolo?**

Dal precedente si ha: $\cancel{7}\,\cancel{\sqrt{3}}\,\ell^2=\cancel{14}^{\,2}\cdot\cancel{\sqrt{3}}\,cm^2\Rightarrow\ell=\sqrt{2}\,cm$

**10. Determinare una formula per il calcolo della superficie dell'ottaedro troncato in funzione della misura dello spigolo $\ell$.**

L'area è formata da 6 quadrati e 8 esagoni regolari con lo stesso spigolo. Pertanto la superficie richiesta ha area: $6\ell^2+\cancel{8}^{\,2}\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{4}}\ell^2=6\cdot\left(1+2\sqrt{3}\right)\ell^2$.

**11. Un ottaedro troncato ha superficie di $\left(1+2\cdot\sqrt{3}\right)cm^2$, quanto misura lo spigolo?**

Dal precedente si ha: $6\cdot\cancel{\left(1+2\sqrt{3}\right)}\ell^2=\cancel{\left(1+2\sqrt{3}\right)}\,cm^2\Rightarrow\ell=\frac{\sqrt{6}}{6}\,cm$

**12. Determinare una formula per il calcolo della superficie del cubottaedro in funzione della misura dello spigolo $\ell$.**

La superficie è formata da 6 quadrati e 8 triangoli equilateri tutti di lato $\ell$, pertanto misura $6\ell^2+\cancel{8}^{\,2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{4}}\ell^2=2\cdot\left(3+\sqrt{3}\right)\cdot\ell^2$

**13. Un cubottaedro ha superficie di $\left(3+\sqrt{3}\right)cm^2$, quanto misura il suo spigolo?**

Dal precedente si ha: $2\cdot\cancel{\left(3+\sqrt{3}\right)}\cdot\ell^2=\cancel{\left(3+\sqrt{3}\right)}\,cm^2\Rightarrow\ell=\frac{\sqrt{2}}{2}cm$

**14. Determinare una formula per il calcolo della superficie del rombicubottaedro in funzione della misura dello spigolo $\ell$.**

La superficie ha 8 facce triangolari e 18 quadrate tutti di lato $\ell$, pertanto misura $18\ell^2+\cancel{8}^{\,2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{4}}\ell^2=2\cdot\left(9+\sqrt{3}\right)\cdot\ell^2$.

**15. Un rombicubottaedro ha superficie di $\left(27+3\cdot\sqrt{3}\right)cm^2$, quanto misura lo spigolo?**

Dal precedente si ha: $2\cdot\cancel{\left(9+\sqrt{3}\right)}\cdot\ell^2=3\cancel{\left(9+\sqrt{3}\right)}\,cm^2\Rightarrow\ell=\frac{\sqrt{6}}{2}cm$

**16. Determinare una formula per il calcolo della superficie del cubo camuso in funzione della misura dello spigolo $\ell$.**

La superficie ha 32 facce triangolari e 6 quadrate tutti di lato $\ell$, pertanto misura $6\ell^2+\cancel{32}^{8}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{4}}\ell^2=2\cdot\left(3+4\sqrt{3}\right)\cdot\ell^2$.

**17. Un cubo camuso ha superficie di $\left(15+20\cdot\sqrt{3}\right)cm^2$, quanto misura il suo spigolo?**

Dal precedente si ha: $2\cdot\cancel{\left(3+4\sqrt{3}\right)}\cdot\ell^2=5\cdot\cancel{\left(3+4\sqrt{3}\right)}\,cm^2\Rightarrow\ell=\frac{\sqrt{10}}{3}cm$.

**18. Determinare il rapporto fra la superficie del tetraedro troncato e quella del tetraedro da cui è stato ottenuto.**

Se il tetraedro ha lato $\ell$, il tetraedro troncato ha lato $\ell/3$. Quindi si ha: $\frac{7\left(\frac{\cancel{\ell}}{3}\right)^2\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{4}\frac{\cancel{\ell^2}}{\cancel{4}}\cancel{\sqrt{3}}}=\frac{7}{9}$

**19. Determinare il rapporto fra la superficie del cubottaedro e quella del cubo da cui è stato ottenuto.**

Se il cubo ha lato $\ell$, il cubottaedro ha lato $\frac{\sqrt{2}}{2}\ell$. Quindi si ha: $\frac{\cancel{2}\cdot\left(3+\sqrt{3}\right)\cdot\frac{\cancel{\ell^2}}{\cancel{2}}}{6\cancel{\ell^2}}=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$

**20. Determinare il rapporto fra la superficie dell'ottaedro troncato e quella dell'ottaedro da cui è stato ottenuto.**

Se l'ottaedro ha lato $\ell$, l'ottaedro troncato ha lato $\ell/3$. Quindi si ha:

$$\frac{\cancel{6}^{3}\cdot\left(1+2\sqrt{3}\right)\left(\frac{\cancel{\ell}}{3}\right)^2}{\cancel{8}^{2}\frac{\cancel{\ell^2}}{\cancel{4}}\sqrt{3}}=\frac{1+2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+6}{9}$$

**21. Uno dei motivi perché l'icosaedro troncato viene considerato come struttura di un pallone da calcio, risiede nel fatto che la somma degli angoli che concorrono in un vertici è di 348°, ossia molto vicino a 360°. Da questo punto di visto quale tra gli altri poliedri semiregolari quale potrebbe essere una migliore struttura per un pallone da calcio?**

L'icosidodecaedro troncato in ogni vertice si incontrano un quadrato, un esagono e un decagono, tutti regolari. Quindi la somma degli angoli è 90° + 120° + 144° = 354°

**22. Verificare la validità del Teorema 11 per a) una piramide con base un poligono di *n* vertici; un tronco di piramide con basi poligoni di *n* vertici.**

a) La piramide ha ($n$ + 1) facce, $n$ triangolari e una con $n$ vertici; ha ($n$ + 1) vertici, in uno dei quali si incontrano $n$ facce e negli altri 3; ha 2$n$ spigoli. Abbiamo quindi $n \cdot 3 + 1 \cdot n = 1 \cdot n + n \cdot 3 = 2 \cdot 2n$.

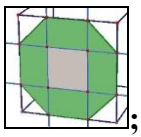
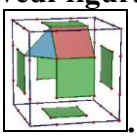
b) Il tronco di piramide ha ($n$ + 2) facce, $n$ quadrangolari e due con $n$ vertici; ha 2$n$ vertici in cui si incontrano 3 facce; ha 3$n$ spigoli. Abbiamo quindi $n \cdot 4 + 2 \cdot n = 2 \cdot n + n \cdot 4 = 2 \cdot 3n$.

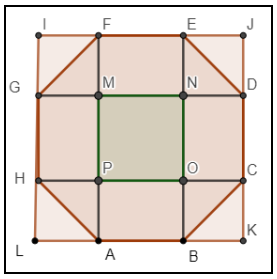
**23. Verificare la validità del Teorema 11 per i primi 8 poliedri archimedei.**

Ricordiamo il teorema: $\sum k\cdot F_k=\sum k\cdot V_k=2S$

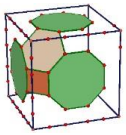
1. Tetraedro troncato. Ha 4 facce con 3 lati e 4 con 6, mentre ha 12 + 8 – 2 = 18 spigoli. Si ha: 4 · 3 + 4 · 6 = 36 = 2 · 18. Vi sono 8 vertici in cui si incontrano 3 facce. Si ha: 8 · 3 = 24 = 2 · 12.

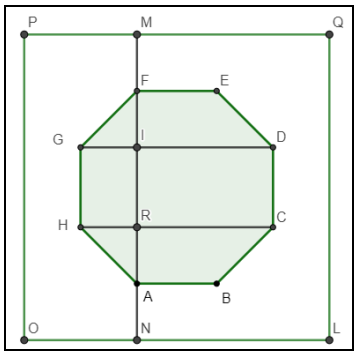
2. Cubottaedro. Ha 6 facce con 4 lati e 8 con 3, mentre ha 14 + 12 – 2 = 24 spigoli. Si ha: 6 · 4 + 8 · 3 = 48 = 2 · 24. Vi sono 12 vertici in cui si incontrano 4 facce. Si ha: 12 · 4 = 2 · 24.
3. Cubo troncato. Ha 6 facce con 8 lati e 8 con 3, mentre ha 14 + 24 – 2 = 36 spigoli. Si ha: 6 · 8 + 8 · 3 = 72 = 2 · 36. Vi sono 24 vertici in cui si incontrano 3 facce. Si ha: 24 · 3 = 2 · 36.
4. Ottaedro troncato. Ha 6 facce con 4 lati e 8 con 6, mentre ha 14 + 24 – 2 = 36 spigoli. Si ha: 6 · 4 + 8 · 6 = 72 = 2 · 36. Vi sono 24 vertici in cui si incontrano 3 facce. Si ha: 24 · 3 = 2 · 36.
5. Icosidodecaedro. Ha 20 facce con 3 lati e 12 con 5, mentre ha 32 + 30 – 2 = 60 spigoli. Si ha: 20 · 3 + 12 · 5 = 120 = 2 · 60. Vi sono 30 vertici in cui si incontrano 4 facce. Si ha: 30 · 4 = 2 · 60.
6. Dodecaedro troncato. Ha 20 facce con 3 lati e 12 con 10, mentre ha 32 + 60 – 2 = 90 spigoli. Si ha: 20 · 3 + 12 · 10 = 180 = 2 · 90. Vi sono 60 vertici in cui si incontrano 3 facce. Si ha: 60 · 3 = 2 · 90.
7. Icosaedro troncato. Ha 12 facce con 5 lati e 20 con 6, mentre ha 32 + 60 – 2 = 90 spigoli. Si ha: 12 · 5 + 20 · 6 = 180 = 2 · 90. Vi sono 60 vertici in cui si incontrano 3 facce. Si ha: 60 · 3 = 2 · 90.
8. Rombicubottaedro. Ha 8 facce con 3 lati e 18 con 4, mentre ha 26 + 24 – 2 = 48 spigoli. Si ha: 8 · 3 + 18 · 4 = 96 = 2 · 48. Vi sono 24 vertici in cui si incontrano 4 facce. Si ha: 24 · 4 = 2 · 48.

**24. Il rombicubottaedro si ottiene con la costruzione seguente: sulle facce di un cubo si costruisce un ottagono regolare (vedi figura)**  **; quindi si uniscono i vertici fra loro come mostrato nella figura seguente**  **. Dimostrare che i triangoli ottenuti sono equilateri e che gli altri quadrilateri sono quadrati.**




Consideriamo il quadrato e l'ottagono in esso inscritto. Abbiamo che $\overline{IF} = \overline{FM} = \frac{\ell_8}{\sqrt{2}}$. Per calcolare i lati del quadrilatero che uniscono due lati dei quadrati verditracciamo le perpendicolari alle facce cui appartengono, formano un triangolo rettangolo i cui cateti sono lunghi quanto $FM$ e la cui ipotenusa è proprio il lato cercato. Esso quindi misura $\frac{\ell_8}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = \ell_8$. Perciò abbiamo che il quadrilatero marrone è un rombo, in effetti è un quadrato perché ha gli angoli retti. Pertanto tutti i quadrilateri sono quadrati uguali e perciò tutti i triangoli sono equilateri uguali con lo stesso lato dei quadrati.

**25. Per il cubottaedro troncato si usa la costruzione mostrata in figura:**  **l'ottagono il quadrilatero e l'esagono costruiti devono essere regolari. Determinare quanto deve misurare il lato di tutti e tre i poligoni regolari, in funzione dello spigolo $\ell$ del cubo.**

Consideriamo la figura 

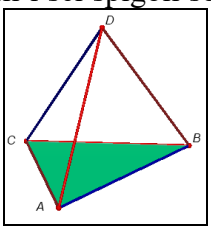
Il lato dell'esagono è ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele di cateti lunghi quanto $\overline{MF}=\dfrac{\overline{MN}-\overline{AF}}{2}=\dfrac{\ell-\cancel{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}\ell_8}{\cancel{2}}-\ell_8}{2}=\dfrac{\ell-\left(\sqrt{2}+1\right)\ell_8}{2}$. Quindi $\ell_6=\dfrac{\ell-\left(\sqrt{2}+1\right)\ell_8}{2}\sqrt{2}$. Dobbiamo avere

$$\ell_6=\ell_8\Rightarrow\frac{\ell-\left(\sqrt{2}+1\right)\ell_8}{2}\sqrt{2}=\ell_8\Rightarrow\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}+1\right)\ell_8=\ell\Rightarrow\ell_8=\frac{\ell}{2\sqrt{2}+1}=\frac{2\sqrt{2}+1}{7}\ell$$

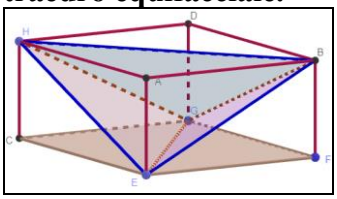
**26. Sugli spigoli di un cubottaedro scegliamo i punti medi e costruiamo il poliedro che ha tali punti per vertici. a) Quanti vertici e spigoli ha? b) Quante facce e di che tipo sono?**
a) Stiamo scegliendo 1 punto su 24 spigoli, quindi vi sono 24 vertici; gli spigoli diventano 48; b) Le facce sono 48 + 2 – 24 = 26 e sono 6 quadrati, 8 triangoli equilateri e 12 rettangoli.

## La sfida

**Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi.**

**1. Un tetraedro con tutte le facce uguali si chiama *equifacciale*. Dimostrare che in un tetraedro equifacciale gli spigoli sono a due a due uguali, così come gli angoli diedri opposti.**
Dato che le facce sono uguali i sei spigoli sono formati da tre coppie di spigoli uguali che devono appartenere a facce opposte. 

Consideriamo la figura. Lo spigolo $AC$ non può essre uguale a nessuno degli spigoli delle facce cui appartiene, quindi deve essere uguale a $BD$, con lo stesso ragionamento otteniamo che $AB = CD$ e $BC = AD$. A questo punto in ogni vertice concorrono tre angoli piani che sono somma di angoli uguali. Per esempio in $A$ concorrono $C\hat{A}D, D\hat{A}B, C\hat{A}B$, i quali sono uguali rispettivamente a $A\hat{D}B, C\hat{D}A, C\hat{D}B$ che sono appunto gli angoli che concorrono nel vertice opposto $D$.

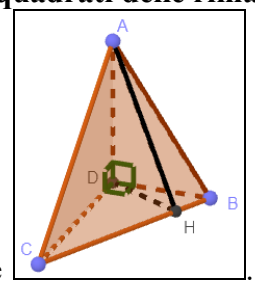
**2. Congiungendo opportunamente 4 dei vertici di un parallelepipedo rettangolo, costruire un tetraedro equifacciale.**

I lati di ciascuna delle 4 facce sono diagonali di tre diverse facce del parallelepipedo, quindi le facce sono uguali.

**3. Dimostrare che in un tetraedro equifacciale gli angoli piani che si incontrano in un vertice misurano quanto un angolo piatto.**
Basta vedere quanto detto nel quesito 1.

**4. Dimostrare che in un tetraedro equifacciale tutte le mediane sono uguali.**

Dato che le facce sono uguali i baricentri occupano tutti la stessa posizione, d'altro canto considerando una faccia i tre spigoli che collegano i suoi vertici al quarto vertice sono uguali a quelli che fanno lo stesso in un'altra faccia, quindi i segmenti che collegano punti in uguale posizione devono anch'essi essere uguali.

**5. Dimostrare che in un tetraedro trirettangolo il quadrato dell'area della faccia che non è un triangolo rettangolo è somma dei quadrati delle rimanenti facce.**

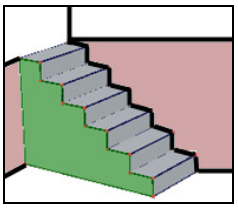
Il riferimento è alla figura seguente 

. Tracciamo l'altezza *AH* relativa alla base *BC* del triangolo non rettangolo. *H* è piede anche dell'altezza del triangolo *BCD* relativa alla base *B*. Ciò perché *AD* è perpendicolare al piano di *BCD* e quindi è perpendicolare a tutte le rette del piano per *D*. Quindi:

$$(S_{ABC})^2 = \frac{\overline{BC}^2 \cdot \overline{AH}^2}{4} = \frac{\left(\overline{BD}^2 + \overline{CD}^2\right)\cdot\left(\overline{AD}^2 + \overline{DH}^2\right)}{4} = \frac{4(S_{ABC})^2 + 4(S_{ACD})^2 + \overline{BC}^2 \cdot \overline{DH}^2}{4} =$$

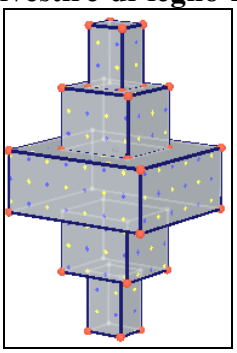
$$= (S_{ABC})^2 + (S_{ACD})^2 + (S_{BCD})^2$$

**6. Una scala è formata da *n* gradini, con alzata 18 *cm*, pedata 26 *cm* e larghezza 50 *cm*. Se necessitassero 79940 *cm*² di marmo per rivestirla, quanti gradini avrebbe la scala?**



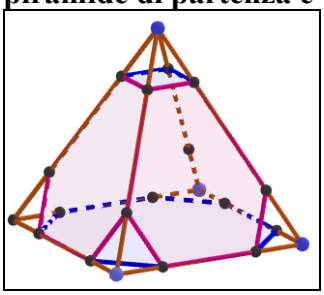
*n* gradini hanno superficie, in $cm^2$, $n \cdot (18 \cdot 50 + 26 \cdot 50) = 2200n$. La parte laterale, in verde nella figura, si può dividere in $1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n + 1)/2$ rettangoli ciascuno di area, in $cm^2$, $18 \cdot 26 = 468$. Pertanto dobbiamo avere: $2200n + 234n(n + 1) = 79940 \Rightarrow 117n^2 + 1217n - 39970 = 0$, che ha una sola soluzione intera, ossia $n = 14$.

**7. Un artista ha costruito una sua opera utilizzando 2*n* + 1 parallelepipedi rettangoli di uguale altezza, come in figura, in modo che le altre due dimensioni siano metà delle corrispondenti del parallelepipedo sulla cui faccia poggiano. Sapendo che le dimensioni del parallelepipedo maggiore sono 6 *cm*, 8 *cm* e 5 *cm* (altezza comune), e che per rivestire di legno l'opera, sono necessari 511,625 *cm*² di legno, quanti sono i parallelepipedi usati?**



La superficie può calcolarsi come somma fra la superficie totale del parallelepipedo centrale e la somma delle superfici laterali degli altri parallelepipedi. Quindi, in $cm^2$, abbiamo: $2 \cdot (6 \cdot 8 + 6 \cdot 5 + 5 \cdot 8) + 4 \cdot [5 \cdot (6/2 + 8/2 + 6/4 + 8/4 + \ldots + 6/2^n + 6/2^n) = 511{,}625 \Rightarrow 236 + 20 \cdot 14 \cdot (½ + ¼ + 1/8 + \ldots + 1/2^n) = 511{,}625 \Rightarrow 236 + 280 \cdot (1 - ½^n) = 511{,}625$; dato che $1 + ½ + \ldots 1/2^n = 2 - ½^n$. Per cui $½^n = 0{,}015625 \Rightarrow n = 6$, quindi vi sono 13 parallelepipedi.

**8. Sugli spigoli di una piramide retta a base quadrata scegliamo i punti che li dividono nel rapporto 1/*n*, quindi uniamo tali punti ottenendo un poliedro convesso. Sapendo che il lato di base della piramide di partenza è uguale all'altezza e misura 1, quanto misura la sua area?**



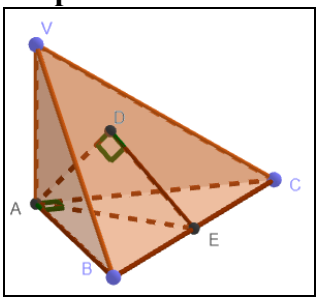
Lo spigolo laterale della piramide è lungo $\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{2}}$. Il poliedro è formato da 4 esagoni non regolari, da 1 quadrato di lato $1/n$, da 4 triangoli isosceli di base $\frac{\sqrt{2}}{n}$ e di lato obliquo $\frac{1}{n}\sqrt{\frac{3}{2}}$ e da un ottagono non regolare. L'area dell'ottagono è data dalla differenza fra l'area del quadrato di base e l'area dei 4 triangoli rettangoli isosceli di cateti lunghi $1/n$, quindi vale $1-\cancel{4}^{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}n^2}=\frac{n^2-2}{n^2}$. L'area degli esagoni è differenza fra l'area della faccia e i tre triangoli simili di rapporto $1/n$, quindi è $(1-3/n^2)$ l'area della faccia laterale, ossia $\frac{n^2-3}{n^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{n^2-3}{n^2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{4}$. Infine l'area del poliedro è

$$\cancel{4}\cdot\frac{n^2-3}{n^2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\cancel{4}}+\frac{n^2-2}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\cancel{4}^{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{n}\sqrt{\left(\frac{1}{n}\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2n}\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(n^2-3\right)\sqrt{5}+n^2-2+1}{n^2}+\frac{\sqrt{2}}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)n^2-1+\sqrt{2}-3\sqrt{5}}{n^2}$$

## Temi assegnati agli esami di stato

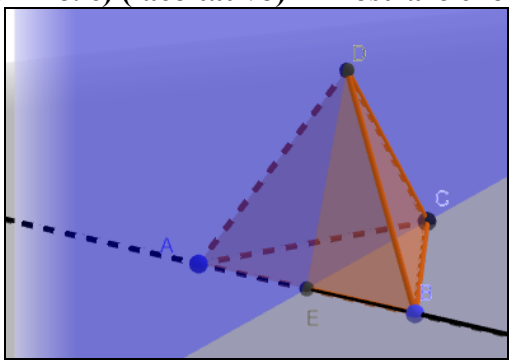
**1. (Liceo scientifico 1993/94) Una piramide ha per base il triangolo *ABC*, isoscele e rettangolo in *A*, e ha per altezza il segmento *AV*. Inoltre la faccia *VBC* forma un angolo di 45° col piano della base e lo spigolo *VB* è lungo $2\sqrt{3}h$, dove *h* è una lunghezza nota. Calcolare la distanza del vertice *A* dal piano della faccia *VBC* e trovare per quale valore di *h* tale distanza vale $4\sqrt{2}$.**



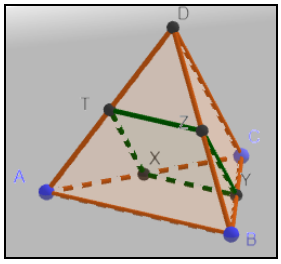

Consideriamo il triangolo *ADE* rettangolo in *D*, con l'ipotenusa *AE* altezza relativa a *BC*. Per quanto detto $D\hat{E}A=45°$, quindi *AD* e *DE* sono fra loro uguali, inoltre anche il triangolo rettangolo *AVE* è rettangolo e isoscele, quindi anche *AV* = *AE* = *BE*. Chiamiamo *x* la misura

di $AB$. Abbiamo: $\overline{BC}=\sqrt{2}x; \overline{AV}=\overline{BE}=\frac{\sqrt{2}}{2}x; \overline{VB}^2=\overline{AV}^2+\overline{AB}^2 \Rightarrow 12h^2=\frac{x^2}{2}+x^2 \Rightarrow x=2\sqrt{2}h$. Infine: $\overline{DE}=\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{AE}=\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\sqrt{2}h=\sqrt{2}h$. Deve aversi: $\sqrt{2}h=4\sqrt{2} \Rightarrow h=4$.

**2. (Istituto magistrale 1996/97) È assegnato il tetraedro regolare di vertici *A*, *B*, *C*, *D* e di spigolo lungo *s*. a) Dopo aver dato sufficiente spiegazione della costruzione geometrica del piano α, condotto per il punto *D* perpendicolarmente alla retta dello spigolo *AB*, calcolare l'area della sezione *S'* di α con il tetraedro e la distanza del punto *A* dal piano α. b) Chiamati *X*, *Y*, *Z*, *T* i punti medi rispettivamente degli spigoli *AC*, *BC*, *BD*, *AD*, dimostrare che la figura *XYZT* è un parallelogrammo. c) (facoltativo) Dimostrare che il parallelogrammo *XYZT* è un quadrato.**

a) 

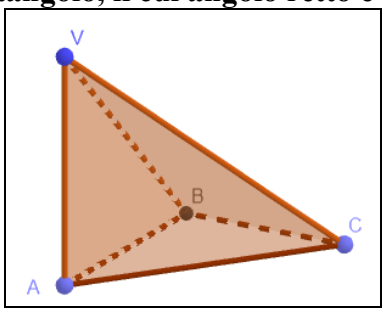
Il piano α vista la simmetria del tetraedro regolare, incontra $AB$ nel suo punto medio e inoltre passa per il vertice $C$. la sezione è quindi il triangolo isoscele $CDE$ di base $CD$ e lati obliqui le altezze delle facce $ABD$ e $ABC$. Pertanto la sua area misura $\frac{1}{2}\cdot s\cdot\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right)^2-\left(\frac{s}{2}\right)^2}=\frac{s}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}s}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}s^2$. La distanza di $A$ dal piano è ovviamente mezzo spigolo, cioè $s/2$.

b) 

Lavorando su $ABC$ diciamo che il segmento $XY$ è parallelo ad $AB$, mentre lavorando su $ABD$, $TZ$ è parallelo a $XY$, quindi $XY//TZ$. In modo analogo si prova che $TX // ZY$.

c) Dato che le facce sono triangoli equilateri uguali i 4 segmenti misurano quanto metà degli spigoli, quindi il quadrilatero è un rombo. Del resto le diagonali $TY$ e $XZ$ sono uguali perché i triangoli $TZX$ e $XYZ$ sono uguali, quindi il rombo è un quadrato.

**3. (Liceo scientifico PNI 1998/99) In un piano α è assegnato il triangolo *ABC*, retto in *B*, i cui cateti *AB* e *BC* misurano rispettivamente 4 e 3. Si conduca per il punto *A* la perpendicolare al piano α e sia *V* un punto di questa per cui $\overline{VA}=\overline{AB}$. Il candidato a) dimostri, geometricamente o algebricamente, che, come tutte le altre facce del tetraedro *VABC*, anche la faccia *VBC* è un triangolo rettangolo, il cui angolo retto è $V\hat{B}C$; b) calcoli la superficie totale del tetraedro.**

a) 

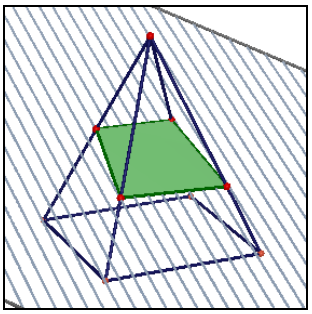
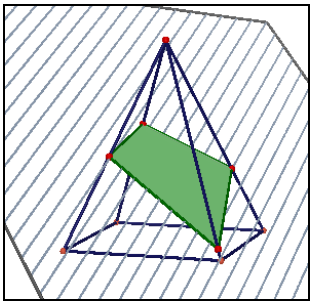
Abbiamo: $\overline{VB}^2+\overline{BC}^2=\left(\overline{VA}^2+\overline{AB}^2\right)+\overline{BC}^2=\overline{VA}^2+\overline{AC}^2=\overline{VC}^2$

quindi $VBC$ è rettangolo di vertice $B$;

b) Abbiamo:

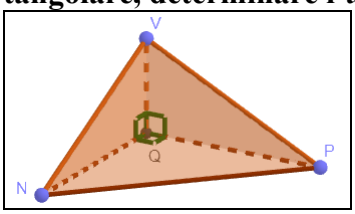
$$\frac{\overline{VA}\cdot\overline{AB}+\overline{VA}\cdot\overline{AC}+\overline{AB}\cdot\overline{BC}+\overline{VB}\cdot\overline{VC}}{2}=\frac{4\cdot4+4\cdot5+4\cdot3+4\sqrt{2}\cdot3}{2}=24+6\sqrt{2}=6\cdot\left(4+\sqrt{2}\right)$$

**4. (Liceo scientifico 2002/2003) Un piano interseca tutti gli spigoli laterali di una piramide quadrangolare regolare: descrivere le caratteristiche dei possibili quadrilateri sezione a seconda della posizione del piano rispetto alla piramide.**

Quadrilatero convesso che può diventare un quadrato, un trapezio isoscele  o un aquilone ossia un quadrilatero con i lati a due a due paralleli ma non uguali 

## Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

**1. (S 1957) Un vertice di un tetraedro si chiama trirettangolare se i tre spigoli che in esso concorrono sono a due a due perpendicolari. Dette *A*, *B* e *C* le aree delle facce adiacenti al vertice trirettangolare, determinare l'area della quarta faccia, opposta al detto vertice.**

2. 

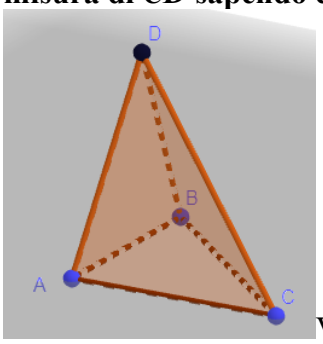
Indichiamo con $\overline{VQ}=a;\overline{NQ}=b;\overline{PQ}=c;\overline{VE}=h$, con *VE* altezza relativa al lato *NP*. Inoltre diciamo *A* = *ab*/2, *B* = *ac*/2 e *C* = *bc*/2. Abbiamo anche: $\overline{VN}=\sqrt{a^2+b^2}=x;\overline{VP}=\sqrt{a^2+c^2}=y;\overline{NP}=\sqrt{b^2+c^2}=z$. L'area di *VNP* vale, usando il teorema di Erone: $\frac{\sqrt{(x+y+z)\cdot(x+y-z)\cdot(x-y+z)\cdot(-x+y+z)}}{4}$, dato che per esempio $\frac{x+y+z}{2}-x=\frac{x+y+z-2x}{2}=\frac{-x+y+z}{2}$. Pertanto: $\frac{\sqrt{\left[(x+y)^2-z^2\right]\cdot\left[z^2-(x-y)^2\right]}}{4}$, sostituendo i valori con *a*, *b* e *c* otteniamo: $\frac{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}}{2}=\sqrt{A^2+B^2+C^2}$.

**3. (AHSME 1985) Un cubo di legno è formato da $n^3$ cubetti bianchi incollati insieme. Coloriamo di rosso la superficie esterna del cubo maggiore e poi separiamo di nuovo i cubetti. Se i cubetti che hanno rossa una sola faccia è uguale al numero di cubetti rimasti tutti bianchi, quanti sono i cubetti?**

Abbiamo già visto che i cubetti non colorati sono in numero di $(n-2)^3$ e quelli con una sola faccia colorata sono $6(n-2)^3$, quindi deve essere $(n-2)^3 = 6(n-2)^2 \Rightarrow n-2=6 \Rightarrow n=8$.

**4. (AHSME 1988) I sei spigoli del tetraedro *ABCD* misurano 7, 13, 18, 27, 36 e 41. Determinare la**

**misura di *CD* sapendo che $\overline{AB}$ = 41.**




Vale la disuguaglianza triangolare, quindi nelle facce *ABC* e *ABD* gli altri due lati possono misurare (7; 36), (13; 36), (18; 27), (18; 36) oppure (27; 36). In pratica dobbiamo considerare due coppie fra queste 5 fatte tutte da elementi distinti, quindi possiamo già escludere (18; 36) e (27; 36) perché non hanno una coppia disponibile. Vediamo quindi le diverse possibilità nella seguente tabella, nelle cui ultime due colonne controlliamo la validità della disuguaglianza triangolare nei due triangoli che contengono *CD*.

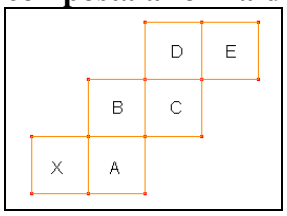
| *AC* | *BC* | *AD* | *BD* | *CD* | *ACD* | *BCD* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **7** | **36** | **18** | **27** | **13** | **7 + 13 < 36** | **27 + 13 > 36** |
| 7 | 36 | 27 | 18 | 13 | 7 + 13 > 27 | 13 + 18 < 36 |
| 36 | 7 | 18 | 27 | 13 | 18 + 13 < 36 | 7 + 13 < 27 |
| **36** | **7** | **27** | **18** | **13** | **13 + 27 > 40** | **7 + 13 > 18** |
| 18 | 27 | 7 | 36 | 13 | 7 + 13 > 18 | 13 + 27 < 36 |
| 18 | 27 | 36 | 7 | 13 | 18 + 13 < 36 | 13 + 7 < 27 |
| 27 | 18 | 7 | 36 | 13 | 7 + 13 < 27 | 13 + 18 < 36 |
| **27** | **18** | **36** | **7** | **13** | **13 + 27 > 36** | **13 + 7 > 18** |
| 18 | 27 | 13 | 36 | 7 | 7 + 13 > 18 | 7 + 27 < 36 |
| 27 | 18 | 13 | 36 | 7 | 7 + 13 < 27 | 7 + 18 < 36 |
| 18 | 27 | 36 | 13 | 7 | 7 + 18 < 36 | 7 + 13 < 27 |
| 27 | 18 | 36 | 13 | 7 | 7 + 27 < 36 | 7 + 13 > 18 |
| 13 | 36 | 18 | 27 | 7 | 7 + 13 > 18 | 7 + 27 < 36 |
| 13 | 36 | 27 | 18 | 7 | 7 + 13 < 27 | 7 + 18 < 36 |
| 36 | 13 | 18 | 27 | 7 | 7 + 18 < 36 | 7 + 13 < 27 |
| 36 | 13 | 27 | 18 | 7 | 7 + 27 < 36 | 7 + 13 > 18 |

Si vede che sono possibili solo 3 casi e in tutti *CD* = 13.

5. **(AHSME 1993) Quale dei seguenti insiemi non può costituire l'insieme delle misure delle diagonali delle facce di un parallelepipedo rettangolo? A) {4, 5, 6} B) {4, 5, 7} C) {4, 6, 7} D) {5, 6, 7} E) {5, 7, 8}**

Dette $a$, $b$ e $c$ le dimensioni del parallelepipedo, i quadrati delle diagonali delle facce misurano $x^2 = a^2 + b^2$; $y^2 = a^2 + c^2$; e $z^2 = b^2 + c^2$, da cui $z^2 = x^2 + y^2 - 2a^2 < x^2 + y^2$. Delle terne proposte solo la B non verifica questa proprietà: $7^2 > 4^2 + 5^2$.

6. **(AHSME 1995) La figura mostrata può essere ricomposta a forma di cubo. Nel cubo risultante, quale delle lettere è opposta alla faccia con la X?**

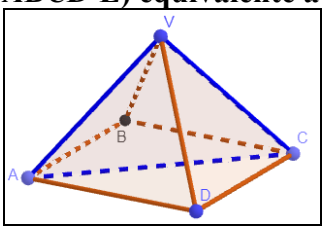



Se A è la base, allora B è una faccia a essa adiacente, pertanto X diventa la faccia alla sinistra di A e C la sua faccia destra, che perciò è opposta a X.

7. **(AHSME 1996) La somma delle lunghezze dei 12 spigoli di un parallelepipedo rettangolo è 140, e la distanza da un vertice al vertice più lontano è 21. Calcolare la superficie totale del parallelepipedo.**

Si ha: $\begin{cases} 140 = 4a + 4b + 4c \\ 21^2 = a^2 + b^2 + c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c = 35 \\ (a+b+c)^2 - 2(ab+ac+bc) = 441 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c = 35 \\ 2(ab+ac+bc) = 784 \end{cases}$. La seconda relazione è proprio la superficie cercata.

8. **(O 1997) In una piramide *ABCDV*, la base *ABCD* è un quadrato e le facce laterali sono triangoli equilateri. Il triangolo *ACV* è A) rettangolo B) ottusangolo C) equilatero D) equivalente alla base *ABCD* E) equivalente a una faccia laterale**

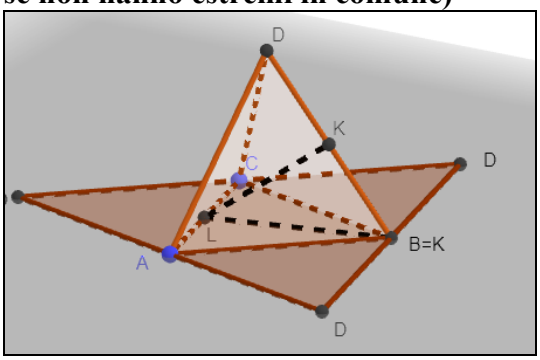



*ACV* è isoscele sulla base *AC*, con il lato lungo $\ell$, ma $\overline{AC} = \ell\sqrt{2}$, perciò è un triangolo rettangolo isoscele. Risposta A.

9. **(AHSME 1998) Un cubo di lato 9 è formato da 27 cubi di lato 3. Il cubo grande viene 'forato' nel modo seguente. Prima sono eliminati i 6 cubi di lato 3 che formano il centro di ogni faccia, così come il cubo, sempre di lato 3, centro del cubo. Poi ognuno dei 20 cubi di lato 3 rimasti è "forato" allo stesso modo, ovviamente con cubi di lato 1. Quanto vale l'area del solido ottenuto?**
Dopo il primo foro rimangono 20 cube, 8 dei quali sono "angolari" e 12 sono negli spigoli. Pertanto ognuno dei cubi del primo tipo contribuisce con un'area di 27 unità e ognuno del secondo tipo con una di 36 unità. Con la seconda foratura eliminiamo 3 unità di area da ognuno degli 8 cubi angolari ma ne aggiungiamo 24 unità. I 12 cubi perdono 4 unità ma ne guadagnano 24. Infine la superficie totale della figura è: 8 · (27 − 3 + 24) + 12 · (36 − 4 + 24) = 384 + 672 = 1056.

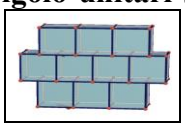
10. **(O 1999) Considerando i 6 piani delle facce di un cubo, quante coppie di piani perpendicolari tra loro si possono trovare? A) 3 B) 6 C) 8 D) 12 E) 24**
Ogni faccia è perpendicolare alle 4 facce a essa adiacenti, ma ovviamente in questo modo conteremmo due volte le stesse copie, pertanto sono ½ · 4 · 6 = 12. Risposta C.

11. **(AMC 2001) Un insetto vive sulla superficie di un tetraedro regolare di spigolo lungo 1. Esso vuole viaggiare sulla superficie del tetraedro dal punto medio di uno spigolo al punto medio dello spigolo opposto. Qual è la lunghezza del cammino più corto? (Nota: due spigoli sono opposti se non hanno estremi in comune)**




Sviluppando il tetraedro, osserviamo che il percorso *KL* diventa il percorso piano *BL* che misura quanto l'altezza del triangolo equilatero di lato 1, quindi $\frac{\sqrt{3}}{2}$

12. **(HSMC 2006) Dieci cubi di spigolo unitari sono incollati come mostrato in figura. Quanto vale l'area del solido così ottenuto?**



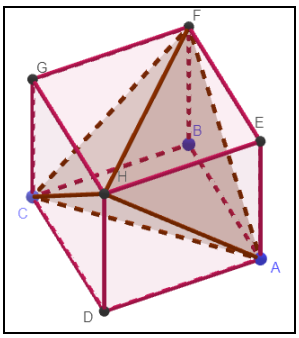
La superficie è formata da 2 · (10 + 3 + 3 + 1) = 34 quadrati unitari.

13. **(HSMC 2007) Il coperchio di una scatola ha area 120, le facce laterali hanno aree rispettive 96 e 80. Determinare l'altezza della scatola.**

Si ha: $\begin{cases} ab = 120 \\ ac = 96 \\ bc = 80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{b}{c} = \dfrac{5}{4} \\ bc = 80 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\cancel{5}}{4} c^2 = \cancel{80}^{16} \Rightarrow c = 8$.

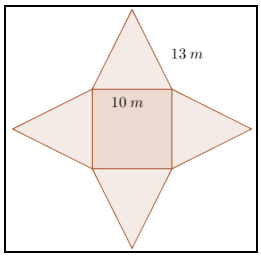
**14. (NC 2007) Quante facce ha un poliedro convesso con 18 vertici e 32 spigoli?**
Per la formula di Eulero: F + 18 = 32 + 2 ⇒ F = 34 – 18 = 16.

**15. (AHSME 1980) Four of the eight vertices of a cube are the vertices of a regular tetrahedron. Find the ratio of the surface area of the cube to the surface area of the tetrahedron.**
*Quattro degli* 8 *vertici di un cubo sono vertici di un tetraedro regolare. Determinare il rapporto fra la superficie del cubo e quella del tetraedro.*




Il tetraedro è quello in figura di lato lungo $\ell\sqrt{2}$, quindi di superficie: $\cancel{4} \cdot \dfrac{\left(\ell\sqrt{2}\right)^2}{\cancel{4}} \sqrt{3} = 2\sqrt{3}\ell^2$. Perciò il rapporto richiesto è: $\dfrac{6\ell^2}{2\sqrt{3}\ell^2} = \dfrac{6\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3}$

**16. (AHSME 1984) The total area of all the faces of a rectangular solid is 22 *cm*², and the total length of all its edges is 24 *cm*. Then the length in cm of any one of its interior diagonals is?**
*L'area di tutte le facce di un solido rettangolare è* 22 *cm*², *e la lunghezza totale dei suoi spigoli è* 24 *cm. Quanto vale in cm la lunghezza di ognuna delle sue diagonali interne*?
Si ha:
$\begin{cases} 2(ab+ac+bc) = 22 \\ a+b+c = 6 \end{cases} \Rightarrow (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc) \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{36-22}\,cm = \sqrt{14}\,cm$




**17. (MT1994) Find the total area of the unfolded square pyramid.**
*Trovare l'area totale della piramide sviluppata sul piano.*
Dalla figura si evince che il lato di base misura 10*m* e lo spigolo laterale 13 *m*, pertanto l'apotema misura $\sqrt{13^2 - 5^2}\,m = 12\,m$ e l'area misura: (20 · 12 + 10²) *m*² = 340 *m*².

**18. (AHSME1996) How many line segments have both their endpoints located at the vertices of a given cube?**
*Quanti segmenti vi sono che hanno entrambi gli estremi ai vertici di un dato cubo*?
Ci sono 12 spigoli, 12 diagonali relative a una faccia e 4 diagonali relative al cubo, per un totale diof 12 + 12 + 4 = 28.

**19. (HSMC 2000) A 4×4×4 cube made of white styrofoam[1] is painted maroon and then cut into 64 unit cubes. How many of these small cubes will have paint on exactly two faces?**
*Un cubo* 4×4×4 *fatto di polistirolo è dipinto di marrone e tagliato in* 64 *cubi unitari. Quanti di questi hanno dipinte esattamente due facce*?
Abbiamo già visto che sono 6 · (4 – 2)² = 24

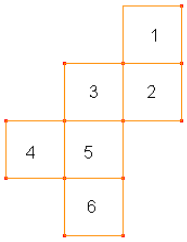
**20. (NC 2002) The height of a square pyramid formed by four equilateral triangles is 10. What is the surface area of one of these triangles?**

[1] Polistirolo

*L'altezza di una piramide quadrata formata da* 4 *triangoli equilateri è* 10. *Quanto vale l'area di uno di questi triangoli*?

Fra l'apotema l'altezza e il lato di base della piramide vale l'uguaglianza: $10^2+\left(\frac{\ell}{2}\right)^2=\left(\frac{\ell}{2}\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow \ell=10\sqrt{2}$. Quindi l'area cercata misura $\frac{\left(10\sqrt{2}\right)^2}{4}\sqrt{3}=50\sqrt{3}$

**21. (HSMC2004) When this net of six squares is cut out and folded to form a cube, what is the product of the numbers on the four faces adjacent to the one labelled with a 1?**




*Quanfo questo reticolo di* 6 *quadrati è compost a formare un cubo, quanto vale il prodotto dei numeri posti nelle 4 facce adiacenti a quella etichettata con* 1?

Ovviamente sono adiacenti tutte tranne quella etichettata con 5 che è opposta, pertanto la risposta è

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 = 144$$

**22. (NC 2004) Consider a regular pyramid of unknown height and a 12 ×12 meter square base. If the height is increased by 2 meters, the lateral surface area is increased by 24 square meters. How high is the original pyramid? (The lateral surface does not include the pyramid's base.)**

*Consideriamo una piramide regolare di altezza incognita e base quadrata di* 12 ×12 $m^2$. *Se l'altezza è aumentata di* 2 *metri, la superficie laterale aumenta la sua area di* 24 $m^2$. *Quanto è alta la piramide originale*? *La superficie laterale non include base della piramide)*

La superficie laterale prima dell'incremento misura $24\cdot\sqrt{h^2+36}$, dopo l'incremento diventa: $24\cdot\sqrt{(h+2)^2+36}$. Deve aversi:

$$\cancel{24}\cdot\sqrt{h^2+36}+\cancel{24}=\cancel{24}\cdot\sqrt{(h+2)^2+36}\Rightarrow \cancel{h^2}+\cancel{36}+1+2\sqrt{h^2+36}=\cancel{h^2}+4h+4+\cancel{36}\Rightarrow$$

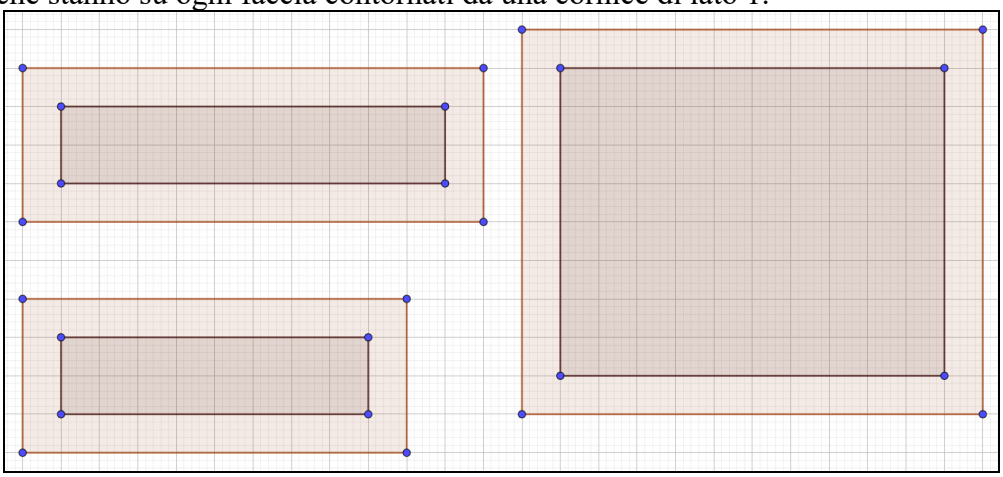
$$\Rightarrow 2\sqrt{h^2+36}=4h+3\Rightarrow 4h^2+144=16h^2+24h+9\Rightarrow 12h^2+24h-135=0\Rightarrow h=\frac{-12+\sqrt{144+1620}}{12}=\frac{5}{2}$$

Abbiamo scartato in partenza la soluzione negativa dell'equazione.

**23. (NC 2007) A rectangular solid with a black surface area and dimensions 10 × 12 × 4 is cut into unit cubes. Assuming the solid's interior is not black, what fraction of these cubes has only one black side?**

*Un solido rettangolare con la superficie nera ha dimensioni* 10 × 12 × 4. *Lo tagliamo in cubi unitari. Supposto che l'interno non sia nero, quale frazione dei cubetti ha una sola faccia nera*?

Sono i cubi che stanno su ogni faccia contornati da una cornice di lato 1.



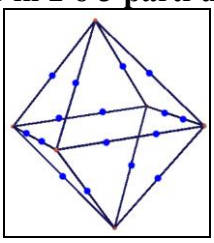
Quindi sono 2 · (8 · 10 + 8 · 2 + 10 · 2) = 232. Perciò si ha: 232/480 = 29/60.

**24. (Rice 2010) Suppose we have a polyhedron consisting of triangles and quadrilaterals, and each vertex is shared by exactly 4 triangles and one quadrilateral. How many vertices are there?**

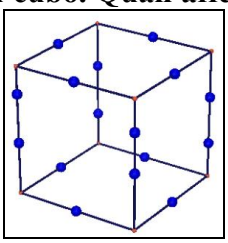
*Supponiamo di avere un poliedro fatto da triangoli e quadrilateri e ogni vertice sia comune ad esattamente* 4 *triangoli e un quadrilatero. Quanti vertici vi sono?*
Possiamo dire che si ha $V = 4F_4$ (il numero di face quadrangolari) ma anche $4V = 3F_3$ (quelle traignoalri). Da ogni vertice escono 5 spigoli, quindi $5V = 2S$. Così $F_4 = ¼\ V$; $F_3 = 4/3V$; $S = 5/V$. Adesso possiamo applicare la formula di Eulero: $V – 5/2V + ¼\ V + 4/3V = 2 \Rightarrow 1/12V = 2 \Rightarrow V = 24$.

# Test di Verifica

1. **Quali fra le seguenti affermazioni sono false?**
**A Un poliedro non può avere facce di tre tipi diversi B Esistono più di 10 poliedri semiregolari C Tutti i poliedri convessi sono euleriani D Un prisma ha le facce non parallele formate da rettangoli E Un tronco di piramide le cui basi hanno *n* lati, ha 2*n* + 2 spigoli**
Sono false la A: per esempio possiamo costruire su 3 delle facce di un cubo dei poliedri con facce con 3, 5 e 6 lati; la D: le facce di un prisma non retto sono parallelogrammi; la E: gli spigoli sono 3*n*.
2. **Come mostrato in figura, abbiamo diviso gli spigoli di un ottaedro regolare in 2 o 3 parti uguali.**



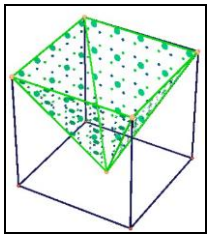
**Quali affermazioni sono vere sul poliedro che ha questi punti come vertici?**
**A Ha 30 spigoli B È un poliedro regolare C Ha 18 vertici e 18 facce D In ogni vertice si incontrano 4 poligoni E Ha 8 facce triangolari**
Sono false la B perché le facce non sono neanche dello stesso tipo, e la C perché i vertici sono quanti i punti scelti, perciò $2 \cdot 4 + 4 \cdot 2 = 16$.
3. **Come mostrato in figura, abbiamo scelto alcuni punti sugli spigoli di un cubo. Quali affermazioni sono false relativamente al poliedro che ha questi punti come vertici?**



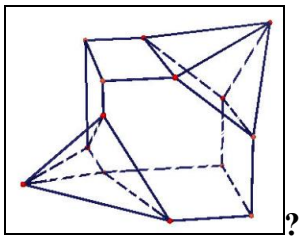
**A Ha più facce che vertici B Le sue facce sono esagoni e triangoli C Ha 18 vertici e 30 spigoli D In ogni vertice si incontrano 3 o 4 poligoni E Ha 6 facce triangolari**
Sono false la A, perché abbiamo 16 vertici (i punti che abbiamo scelto) e 14 facce (8 triangolari in corrispondenza degli angoli diedri del cubo e 6 quadrangolari in corrispondenza delle facce del cubo). Da questa spiegazione consegue la falsità delle B, C ed E.
4. **Quali fra le seguenti affermazioni relative ad un tetraedro sono vere?**
**A Il baricentro divide ciascuna mediana nel rapporto ¼ B Solo quelli regolari hanno l'ortocentro C Se il piede di un'altezza è ortocentro della faccia opposta è ortocentrico D Se incolliamo per una faccia due tetraedri regolari uguali, otteniamo un poliedro regolare E In un tetraedro regolare baricentro ed ortocentro coincidono**
Sono false la A perché il rapporto è 1/3; la B perché vi sono tetraedri ortocentrici non regolari; la D perché avremo angoli diedri interni non tutti uguali.
5. **Quali fra le seguenti affermazioni relative a poliedri archimedei sono vere?**
**A Quello ottenuto dividendo ciascuno spigolo di un cubo in due parti uguali ha 12 facce B Il numero di facce è sempre pari C I diversi tipi di poligoni che formano le facce sono meno di 4 D Non tutti sono euleriani E Uno si ottiene dividendo ciascuno spigolo di un cubo in 3 parti uguali**

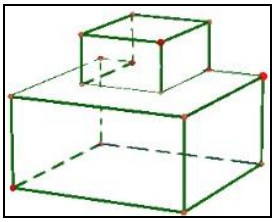
Sono false la A: le facce sono 14; la D: sono tutti convessi, quindi euleriani; la E: Il cubo troncato si ottiene dividendo il cubo in 3 parti ma non uguali fra loro

**6. Quale fra le seguenti affermazioni è vera?**
**A Un poliedro si dice semiregolare se non tutte le sue facce sono poligoni regolari B Ogni piramide ha l'apotema C Un prisma ha le basi formate da poligoni convessi D Un tronco di piramide le cui basi hanno *n* lati, ha 3*n* spigoli E Tutte le precedenti sono false**
Solo la D è vera

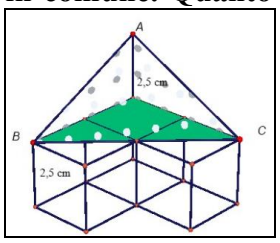
**7. Dato il solido in figura, formato da un cubo in cui vi è un buco a forma di piramide la cui altezza misura quanto lo spigolo del cubo. Se la sua superficie misura 14,4 $m^2$, quanti *m* misura, all'incirca, il lato del cubo?**  **A 1,2 B 2 C 2,3 D 3,5 E Nessuno dei precedenti è corretto**
L'altezza misura *x* come il lato, abbiamo:

$$x^2+2x\cdot\sqrt{x^2+\frac{x^2}{4}}=14,4\Rightarrow\left(1+\sqrt{5}\right)x^2=14,4\Rightarrow x=\sqrt{\frac{14,4}{1+\sqrt{5}}}\approx 2$$ . Risposta B

**8. Il numero di vertici, facce e spigoli del poliedro in figura è**  **?**
**A (16; 14; 26) B (14; 16; 26) C (14; 14; 26) D (14; 14; 28) E Nessuna delle terne precedenti**
I vertici sono 5 + 2 + 5 + 2 = 14; le facce sono 4 + 6 + 4 = 14; gli spigoli sono 8 + 8 + 10 = 26. Risposta C

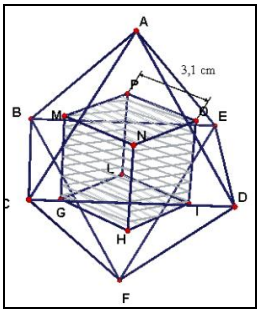
**9. Continuiamo la costruzione in figura**  **con altri 4 parallelepipedi. Quanti vertici avrà il poliedro ottenuto? A 20 B 22 C 18 D 24 E Nessuno dei precedenti**
Il parallelepipedo base ne ha 8, ogni volta che ne mettiamo uno di sopra aumentiamo di 8 il numero di vertici, che perciò saranno 4 · 8 = 32. Risposta E

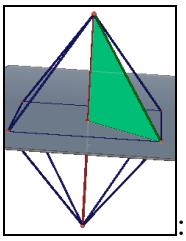
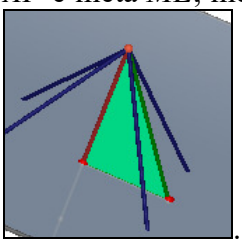
**10. Quale fra i seguenti numeri non può essere caratteristica di Eulero di un poliedro qualsiasi?**
**A –1 B 0 C 1 D 154 E Qualsiasi numero intero va bene**
Abbiamo dato esempi dei primi 3 tipi. Abbiamo anche visto che sovrapponendo dei parallelepipedi uno sull'altro in modo che non abbiamo né vertici, né spigoli in comune aumentiamo di uno la caratteristica di Eulero, pertanto sovrapponendo 153 parallelepipedi la caratteristica sarà proprio 154.E

**11. Dato il solido in figura, formato da una piramide appoggiata su tre cubi aventi a due a due una faccia in comune. Quanto misura il perimetro del triangolo ABC, approssimato al primo decimale?** 

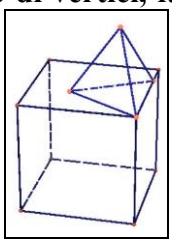
Il triangolo è rettangolo isoscele, i cui cateti misurano $5cm$, quindi il perimetro misura $\left(2\cdot 5+5\cdot\sqrt{2}\right)cm \approx 17\,cm$

**12. ABCDEF è un ottaedro regolare, G, H, I, L, M, N, O, P, sono i centri delle facce. Determinare la misura dello spigolo dell'ottaedro, con una cifra decimale esatta.**




Metà di $AF$ si trova usando la figura seguente  : $\sqrt{\ell^2-\left(\frac{\sqrt{2}\ell}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ell$. $AF$ incontra la faccia $MNOP$ nel suo centro formando un triangolo rettangolo i cui cateti misurano 2/3 della metà di $AF$ e metà $ME$, mentre l'ipotenusa è 2/3 dell'altezza del triangolo equilatero della faccia dell'ottaedro  . Perciò adesso avremo:

$$\sqrt{\left(\frac{3,1}{2}\sqrt{2}\right)^2+\left(\frac{\cancel{2}\sqrt{2}\ell}{\cancel{6}3}\right)^2}=\frac{\cancel{2}}{3}\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\ell\Rightarrow\frac{961}{200}cm^2+\frac{2}{9}\ell^2=\frac{1}{3}\ell^2\Rightarrow\frac{1}{9}\ell^2=\frac{961}{200}cm^2\Rightarrow\ell=\frac{93}{10\sqrt{2}}cm\approx 6,5\,cm$$

**13. Determinare il numero di vertici, facce e spigoli del poliedro in figura, formato da un tetraedro appoggiato a un cubo.** 

I vertici sono: 8 + 3 = 11; le facce: 6 + 3 = 9; gli spigoli: 12 + 5 = 17

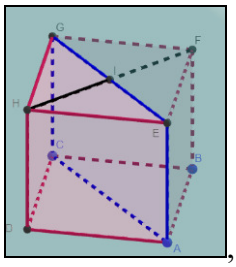
14. **Un tetraedro troncato ha** 18 **spigoli. Fra i poliedri regolari ha 30 spigoli il** Dodecaedro. **Il duale di un tetraedro regolare è un** Tetraedro regolare

15. **Ogni vertice di un poliedro è incontro di non meno di** 3 **facce e di non meno di** 3 **spigoli. In ogni vertice si possono incontrare poligoni tali che la somma degli angoli interni che hanno quel tale vertice in comune sia inferiore a** 360°

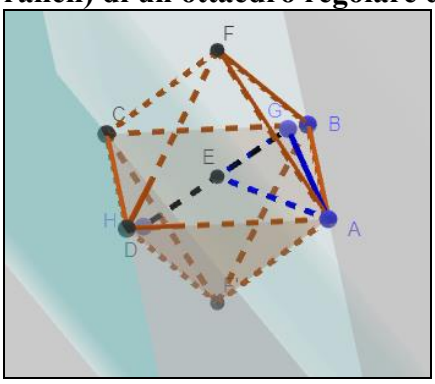
## Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

**1. (Accademia Navale) Determinare perimetro e area della figura individuata dalle intersezioni di un cubo di spigolo L con un piano perpendicolare a una diagonale del cubo nel suo punto medio.**

L'intersezione è un rettangolo di lati la diagonale della faccia e il lato del cubo, come mostrato in figu-

ra:  , pertanto si ha: $2p=\left(2+2\sqrt{2}\right)L, A=\sqrt{2}L^2$

2. **(Accademia Navale) Determinare la distanza tra due facce opposte (ovvero situate su piani paralleli) di un ottaedro regolare di spigolo L.**

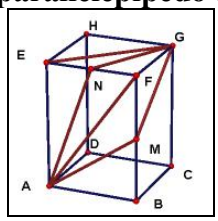



Consideriamo la figura, la distanza fra i piani è la distanza *GH* fra i baricentri delle due facce. Consideriamo il piano che contiene il quadrato che formano 4 degli spigoli dell'ottaedro, questo dimezza la distanza cercata. Consideriamo adesso il triangolo rettangolo *EGB* e si ha: $\overline{EG}=\sqrt{\overline{EA}^2-\overline{GA}^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}L\right)^2-\left(\frac{\cancel{2}}{3}\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}L\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}L=\frac{L}{\sqrt{6}}$, infine la distanza cercata è $\frac{2L}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}L$

3. **(Scuola Superiore di Catania) Una piramide e un prisma hanno, ciascuno, 12 spigoli. Il numero delle facce della piramide è maggiore, minore o uguale al numero delle facce del prisma? Il numero dei vertici della piramide è maggiore, minore o uguale al numero dei vertici del prisma? Rispondere alle domande precedenti se gli spigoli totali sono 18. Rispondere alle domande precedenti se gli spigoli totali sono uno stesso numero *s*. Che valori può assumere *s*?**
Le facce della piramide sono sempre più di quelle del prisma, i vertici del prisma sono sempre più di quelle della piramide. *N* è un multiplo di 6 maggiore o uguale a 12

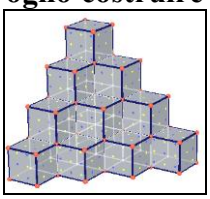
4. **(Medicina 2000) Il parallelepipedo è una figura solida con A) 8 vertici, 12 spigoli, 4 diagonali B) 8 vertici, 8 spigoli, 2 diagonali C) 4 vertici, 8 spigoli, 2 diagonali D) 8 vertici, 14 spigoli, 4 diagonali E) 12 vertici, 8 spigoli, 4 diagonali**
Risposta corretta A

5. **(Architettura 2002) Dire quale tra le seguenti coppie di figure piane non può essere ottenuta sezionando un cubo con un piano. 1: Triangolo rettangolo 2: Rettangolo 3: Trapezio isoscele 4: Rombo 5: Triangolo scaleno. A) 1 – 5 B) 1 – 4 C) 3 – 4 D) 1 – 3 E) 3 – 5**
Risposta corretta B, come abbiamo già visto

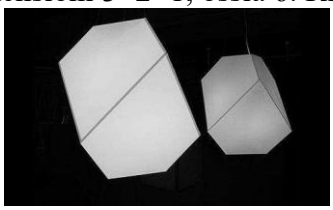
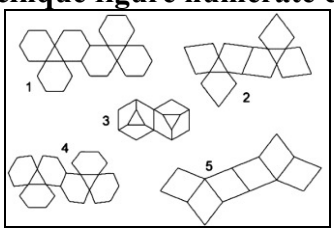
6. **(Veterinaria 2005) Il solido in figura è un parallelepipedo retto di altezza 2*a* e base quadrata di lato *a*, *N* e M sono punti medi di *EF* e *BF*.** 

**Per andare dal vertice *A* al vertice *G* qual è il percorso più breve tra quelli indicati? A) *AEG* B) *ANG* C) *AFG* D) *AMG* E) *ABFG***
Risposta corretta D. Infatti il percorso *AEG* misura $\left(2+\sqrt{2}\right)a$; *ANG* invece misura:

$\sqrt{4a^2-\frac{a^2}{4}}+\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}=\frac{\left(\sqrt{15}+\sqrt{5}\right)}{2}a$; *AFG*: $\sqrt{4a^2+a^2}+a=\left(\sqrt{5}+1\right)a$; *AMG*: $2\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}=\sqrt{5}a$; *ABFG*: $4a$.

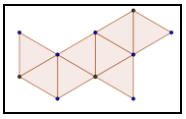
7. **(Architettura 2007) Voglio costruire una piramide alta 4 livelli con pietre a forma di cubi, come indicato nella figura:**  **al livello più alto c'è un solo cubo, al livello immediatamente inferiore ne abbiamo 3 e così via. Quanti cubi devo utilizzare in totale? A) 16 B) 18 C) 19 D) 20 E) 22**
Dobbiamo considerare anche quelli che non si vedono che per ogni livello sono tanti quanti quelli dei livelli superiori: 1 + 3 + 6 + 10 = 20. Risposta corretta D

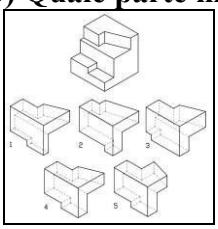
8. **(Architettura 2007) Abbiamo 60 contenitori uguali di forma cubica disposti in modo da formare un parallelepipedo le cui dimensioni misurano 5×4×3. Alla fine dell'inverno scopriamo che si sono rovinati i contenitori che avevano almeno una faccia verso l'esterno o sul fondo del parallelepipedo. Quanti sono i contenitori rimasti integri? A) 6 B) 12 C) 24 D) 30 E) 0**
Non si sono rovinati quelli che stavano all'interno di una "buccia" di spessore uno, quindi quelli di un parallelepipedo di dimensioni 3×2×1, ossia 6. Risposta corretta A

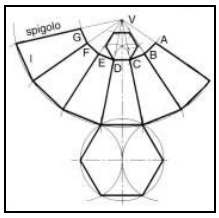
9. **(Architettura 2007)**  **La foto mostra la lampada Melancolía di Santa&Cole (2005), ispirata alla celebre incisione di Dürer del 1514, che propone la geometria di un poliedro. Quale delle cinque figure numerate costituisce il corretto sviluppo geometrico del paralume della lampada?** 

**A) Figura 1 B) Figura 2 C) Figura 3 D) Figura 4 E) Figura 5**
Risposta corretta D

10. **(Architettura 2008) Quale dei seguenti poliedri, se opportunamente sezionato da un piano, può generare tutte le seguenti figure: rettangolo, quadrato, esagono regolare e irregolare, pentagono, triangolo? A) cubo B) cono C) prisma triangolare retto D) cilindro E) tetraedro**
Risposta corretta B, dato che il cubo non genera esagoni irregolari. Cono e cilindro solo triangoli e rettangoli rispettivamente, il tetraedro solo triangoli e quadrilateri.

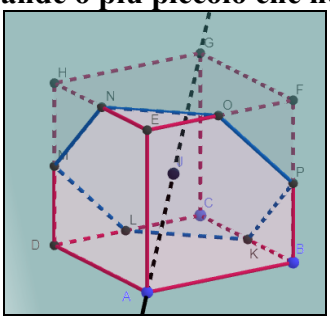
11. **(Architettura 2009) Di quale solido è rappresentato lo sviluppo in figura?** 
**A) ottaedro B) esaedro C) tetraedro D) nessun solido E) prisma a base triangolare**
Avendo 8 facce può essere solo un ottaedro e così è. Risposta corretta A

12. **(Architettura 2010) Quale parte manca per completare il solido qui riportato, in maniera tale da ottenere un cubo?**  **A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5**
Risposta corretta A

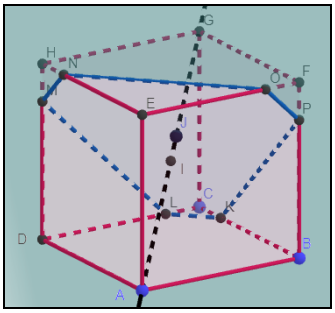



**13. (Architettura 2010) A quale solido appartiene lo sviluppo in figura?**
**A) Ad un tronco di piramide a base esagonale regolare B) Ad un prisma esagonale C) Ad un tronco di piramide a base ottagonale D) Ad una piramide a base esagonale regolare E) Ad un tronco di cono a base esagonale regolare**
Risposta corretta A

**14. (Scuola superiore di Catania) Un piano ortogonale alla retta passante per due vertici opposti di un cubo di lato 2 taglia le sei facce del cubo formando un esagono. a) Calcolare il perimetro nel caso che il piano passi per il centro del cubo. b) Calcolare il perimetro nel caso che il piano non passi per il centro del cubo, ma formi sempre un esagono. In questo caso il perimetro è più grande o più piccolo che nel caso precedente?**

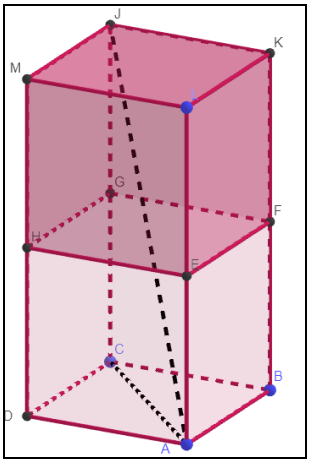
a) 

L'esagono è equilatero, quindi: $2p = 6\overline{NO} = 6 \cdot \sqrt{2}$;

b) 

L'esagono non è equilatero, ma ha lo stesso perimetro del precedente, dato che i lati opposti hanno per somma la diagonale di una faccia.

**15. (Corso di laurea in Informatica, Udine 2009) Un solido S è costituito da due cubi sovrapposti, in modo che due facce dei cubi coincidano. Se lo spigolo di ciascun cubo misura 1, qual è la massima lunghezza possibile di un segmento che unisce due punti di S? A)** $2 \cdot \sqrt{2}$ **B)** $2 \cdot \sqrt{3}$ **C)** $\sqrt{5}$ **D)** $\sqrt{6}$



La massima distanza è quella fra $J$ e $A$ o una simile e vale $\sqrt{2^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{6}$.

Risposta corretta D