6. Geometria dello spazio ambiente

6.3 Geometria dei solidi di rotazione

Il cilindro, il cono e il tronco di cono

1. **Determina una formula per il calcolo della superficie totale di un cilindro equilatero in funzione del solo raggio.**
   In un cilindro equilatero $h = 2r$, quindi $S_t = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(2r + r) = 6\pi \cdot r^2$
2. **Determina una formula per il calcolo della superficie totale di un cilindro equilatero in funzione della sola altezza.**
   Stavolta: $S_t = \pi h^2 + \pi h^2/2 = 3/2\pi \cdot h^2$
3. **La somma dell'altezza e del raggio di un cilindro retto è 12 *cm*, la loro differenza 7 *cm*. Determinare la misura della superficie laterale.**
   $\begin{cases} h+r=12 \\ h-r=7 \end{cases} \vee \begin{cases} h+r=12 \\ r-h=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h=9,5 \\ r=2,5 \end{cases} \vee \begin{cases} h=2,5 \\ r=9,5 \end{cases}$, in ogni caso la superficie laterale non varia: $S_L = 47,5\pi\ cm^2$.
4. **Con riferimento al precedente quesito, quanto vale la superficie totale?**
   Stavolta vi sono due distinte risposte: $S'_T = (47,5\pi + 6,25\pi)\ cm^2 = 53,75\ cm^2$, oppure $S''_T = (47,5\pi + 90,25\pi)\ cm^2 = 137,5\ cm^2$.
5. **La superficie totale di un cilindro equilatero è 150 π, determinare la misura di raggio ed altezza.**
   $6\pi \cdot r^2 = 150\pi \Rightarrow r = 5$; $3/2\pi \cdot h^2 = 150\pi \Rightarrow h = 10$.
6. **Il rapporto della misura dell'altezza rispetto a quella del raggio di un cilindro retto è 5/3, se la superficie laterale è 15 π, determinare la superficie totale.**
   $\begin{cases} h/r = 5/3 \\ 2\pi rh = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = 5r/3 \\ 2r^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow r^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow S_T = 15\pi + 2\cdot 9/2\pi = 24\pi$.
7. **Determinare il rapporto delle superfici laterali di due cilindri retti, i cui raggi sono uno doppio dell'altro e le altezze una metà dell'altra.**
   $\frac{\cancel{2\pi}\left(\cancel{2}\cancel{r}\right)\cdot\left(\cancel{h}/\cancel{2}\right)}{\cancel{2\pi r}\cancel{h}} = 1$.
8. **Con riferimento all'esercizio precedente, possiamo dire che anche le superfici totali sono uguali? Giustificare la risposta.**
   No: $S_T = S_L + 2A_B \Rightarrow \frac{S'_T}{S''_T} = \frac{\cancel{2\pi} r'(h'+r')}{\cancel{2\pi} r(h+r)} = \frac{2\cancel{r}(h/2+2r)}{\cancel{r}(h+r)} = \frac{h+4r}{h+r}$, che non è neanche costante.
9. **La somma dell'altezza e del raggio di un cilindro retto è 15 *cm*, la superficie laterale è 24π *cm*², determinare la misura del raggio.**
   $\begin{cases} h+r=15 \\ rh=12 \end{cases} \Rightarrow r^2 - 15r + 12 = 0 \Rightarrow r = \frac{15 \pm \sqrt{225-48}}{2} = \frac{15 \pm \sqrt{177}}{2}$. Il sistema è simmetrico, quindi le soluzioni sono interscambiabili.
10. **La differenza fra l'altezza e il raggio di un cilindro retto è 23 *cm*, la superficie totale è 37π *cm*², determinare la misura del raggio.**
    $\begin{cases} h-r=23 \\ 2rh+r^2=37 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h=23+r \\ 3r^2+46r-37=0 \end{cases} \Rightarrow r = \frac{-23+\sqrt{529+111}}{3} = \frac{8\sqrt{10}-23}{3} \left[\frac{\sqrt{677}-23}{4} cm\right]$
11. **Determinare il rapporto fra le superfici laterali di un cilindro retto e del cubo in esso inscritto.**
    Nel box lavoriamo insieme abbiamo mostrato che in questo caso nel cilindro si ha $\ell = h = \sqrt{2}r$. Perciò il rapporto richiesto misura: $\frac{\cancel{2}\pi\sqrt{2}r^2}{\cancel{4}^{2}\ell^2} = \frac{\pi\sqrt{2}\cancel{\ell^2}/2}{2\cancel{\ell^2}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}$.

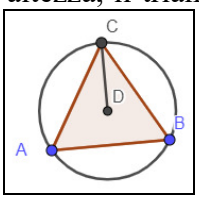
12. Possiamo sempre circoscrivere un cubo a un cilindro retto? Se la risposta è negativa, per che tipi di cilindro ciò è possibile?

L'altezza del cubo deve essere lungo quanto lo spigolo del cubo, che a sua volta deve essere quanto il diametro di base del cilindro. Quindi può farsi solo per cilindri equilateri.

13. Tenendo conto del precedente esercizio, determinare il rapporto fra le superfici laterali del cubo e del cilindro.

$$\frac{\cancel{4}\ell^2}{\cancel{4}\pi r^2}=\frac{\cancel{\ell^2}}{\pi\cancel{\ell^2}/4}=\frac{4}{\pi}$$

14. Un prisma regolare a basi triangolari è inscritto in un cilindro retto, determina il rapporto della superficie laterale del cilindro con quella del prisma.

Prisma e cilindro hanno uguale altezza, il triangolo equilatero di base del prisma è inscritto nella circonferenza di base del cilindro, 

quindi il raggio vale 2/3 dell'altezza del triangolo, cioè $r=\frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\ell=\frac{\sqrt{3}}{3}\ell$. Perciò $\frac{2\pi r\cancel{h}}{3\ell\cancel{h}}=\frac{2\pi\sqrt{3}\cancel{\ell}}{9\cancel{\ell}}=\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$.

15. Un prisma regolare a basi esagonali è inscritto in un cilindro retto, determina il rapporto della superficie laterale del cilindro con quella del prisma.

Stavolta il raggio della base del cilindro misura quanto lo spigolo del prisma: $\frac{\cancel{2}\pi\cancel{\ell}\cancel{h}}{\cancel{6}^3\cancel{\ell}\cancel{h}}=\frac{\pi}{3}$.

16. Una piramide regolare a base quadrata è inscritta in un cilindro retto, cioè la base è inscritta in uno dei cerchi e il vertice della piramide è il centro dell'altro cerchio di base del cilindro. Se il raggio è metà dell'altezza, determina il rapporto della superficie laterale del cilindro con quella della piramide.

Abbiamo $h = 2r$, la superficie laterale del cilindro è $2\pi rh = 4\pi r^2$. La piramide ha altezza pari a quella del cilindro, il quadrato di base ha il diametro del cilindro come diagonale, quindi $\ell\sqrt{2}=2r\Rightarrow\ell=\frac{2r}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}r$, l'apotema è altezza del triangolo equilatero di lato ℓ, quindi misura $\frac{\ell}{2}\sqrt{3}=\frac{\sqrt{2}r\cdot\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}r$, perciò la superficie laterale della piramide misura $2\sqrt{2}r\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}r=2\sqrt{3}r^2$. Infine il rapporto cercato è $\frac{4\pi r^2}{2\sqrt{3}r^2}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

17. Un parallelepipedo rettangolo con due facce quadrate è circoscritto a un cilindro retto. Determina il rapporto della superficie laterale del cilindro con quella del parallelepipedo.

Ovviamente la base circoscritta è quella quadrata, dato che un rettangolo non quadrato non è circoscrivibile. Quindi il raggio di base del cilindro misura quanto metà del lato della base quadrata, mentre l'altezza coincide con la terza dimensione del parallelepipedo. Infine: $\frac{\cancel{2}\pi r\cancel{h}}{\cancel{4}^2a\cancel{h}}=\frac{\pi\cancel{r}}{4\cancel{r}}=\frac{\pi}{4}$.

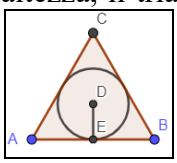
18. Un parallelepipedo rettangolo con due facce quadrate è inscritto in un cilindro retto, in modo che siano le facce quadrate inscritte nelle basi del cilindro. Determina il rapporto della superficie laterale del cilindro con quella del parallelepipedo.

In questo caso la base inscritta può essere quella quadrata o una delle altre rettangolari. Nel primo caso il diametro della base del cerchio misura quanto la diagonale del quadrato: $\frac{\cancel{2}\pi r\cancel{h}}{\cancel{4}^2a\cancel{h}}=\frac{\pi\sqrt{2}/2\cancel{a}}{2\cancel{a}}=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$.

19. Con riferimento al quesito precedente, se inscriviamo le basi rettangolari, il risultato precedente cambia? Giustificare la risposta.

In questo caso il diametro misura quanto la diagonale del rettangolo e l'altezza quanto il lato del quadrato: $\frac{\cancel{2}\pi r \cancel{h}}{\cancel{4}^{2} a \cancel{h}} = \frac{\pi\sqrt{a^2+h^2}}{2}$, quindi il rapporto non è costante.

20. Un prisma regolare a basi triangolari è circoscritto a un cilindro retto, determina il rapporto della superficie laterale del cilindro con quella del prisma.

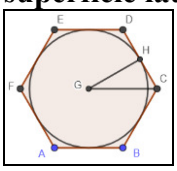
Prisma e cilindro hanno uguale altezza, il triangolo equilatero di base del prisma è inscritto nella circonferenza di base del cilindro, 

quindi il raggio vale 1/3 dell'altezza del triangolo, cioè $r = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\ell = \frac{\sqrt{3}}{6}\ell$. Perciò $\frac{2\pi r \cancel{h}}{3\ell \cancel{h}} = \frac{\cancel{2}\pi\sqrt{3}\cancel{\ell}}{\cancel{18}^{9}\cancel{\ell}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

21. Con riferimento al quesito precedente, se inscriviamo una della basi rettangolari, il risultato precedente cambia? Giustificare la risposta.

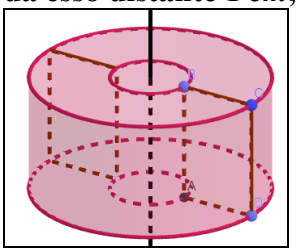
Sì, il rapporto non è più costante, basta seguire la falsariga del quesito 19.

22. Un prisma regolare a basi esagonali è circoscritto a un cilindro retto, determina il rapporto della superficie laterale del cilindro con quella del prisma.

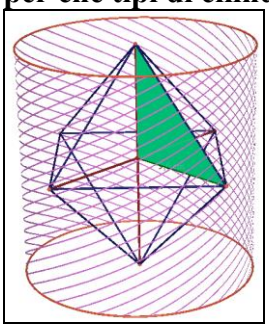


Il raggio della circonferenza di base del cilindro misura $\sqrt{\ell^2 - \frac{\ell^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell$. Il rapporto è: $\frac{\cancel{2}\pi\sqrt{3} / \cancel{2}\cancel{\ell}\cancel{h}}{6\cancel{\ell}\cancel{h}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$.

23. Un rettangolo di lati lunghi 2 *cm* e 3 *cm* ruota attorno a una retta parallela al suo lato più lungo, da esso distante 1 *cm*, quanto misura la superficie totale del solido così ottenuto?


Otteniamo un cilindro "bucato", la cui superficie laterale perciò è la somma fra le superfici laterali dei due cilindri di altezza 3 *cm* e raggi rispettivi 3 *cm* e 1 *cm*, mentre le basi sono corone circolari. Pertanto $S = 2\pi \cdot [3 \cdot (3 + 1) + (3^2 - 1^2)]\ cm^2 = 40\pi\ cm^2$.

24. Possiamo sempre inscrivere un ottaedro regolare in un cilindro retto? Se la risposta è negativa, per che tipi di cilindro ciò è possibile?

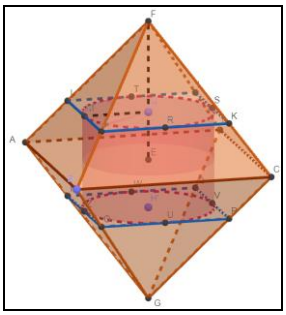
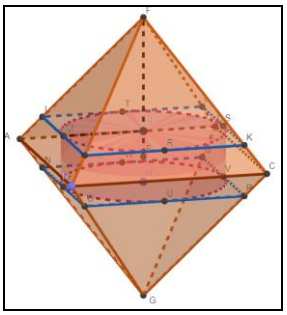

La distanza fra i vertici delle due piramidi a base quadrata comune deve essere uguale all'altezza del cilindro e il raggio di base del cilindro deve essere lungo quanto mezza diagonale della stessa base quadrata. La prima distanza è il doppio dell'altezza della piramide e vale: $2\cdot\sqrt{\ell^2 - \left(\frac{\sqrt{2}\ell}{2}\right)^2} = 2\frac{1}{\sqrt{2}}\ell = \sqrt{2}\ell$. Quindi deve essere: $\begin{cases} h = \sqrt{2}\ell \\ r = \frac{\sqrt{2}}{2}\ell \end{cases} \Rightarrow \frac{h}{r} = 2$, cioè il cilindro deve essere

equilatero.

25. Tenendo conto del precedente esercizio, determinare il rapporto fra le superfici totali del cilindro e dell'ottaedro.

$$\frac{6\pi r^2}{8\sqrt{3}\ell^2/4}=\frac{3\pi r^2}{\sqrt{3}\ell^2}=\frac{\sqrt{3}\pi\cancel{\ell^2}}{2\cancel{\ell^2}}=\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$$

26. Possiamo sempre circoscrivere un ottaedro regolare a un cilindro retto? Se la risposta è negativa, per che tipi di cilindro ciò è possibile?

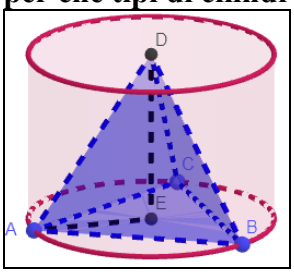
Sempre, come mostrano le figure:  

27. Tenendo conto del precedente esercizio, determinare la misura del raggio del cilindro equilatero inscritto in funzione dello spigolo ℓ dell'ottaedro.

Se il cilindro è equilatero il diametro misura quanto l'altezza. Considerando i triangoli rettangoli simili in cui il maggiore ha per cateti mezza distanza fra i vertici dell'ottaedro e mezzo lato del quadrato comune, avremo la proporzione:

$$\frac{\cancel{\ell}\sqrt{2}/\cancel{2}}{\cancel{\ell/2}}=\frac{\ell\sqrt{2}/2-h/2}{r}\Rightarrow\frac{\ell\sqrt{2}-2r}{2}=\sqrt{2}r\Rightarrow r=\frac{\ell\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+2}=\frac{\ell\left(2-\sqrt{2}\right)}{2}.$$

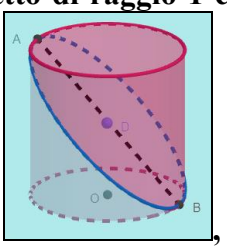
28. Possiamo sempre inscrivere un tetraedro regolare in un cilindro retto? Se la risposta è negativa, per che tipi di cilindro ciò è possibile?



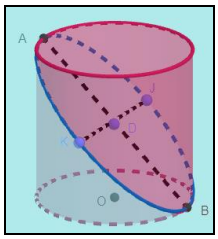
Dato che l'altezza di un tetraedro regolare verifica la proprietà: $h=\sqrt{\ell^2-\left(\frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\ell\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{3}}\ell$ mentre il raggio misura $\frac{\sqrt{3}}{3}\ell$, quindi può farsi solo per cilindri in cui l'altezza è $\sqrt{2}$ volte il raggio.

29. Tenendo conto del precedente esercizio, determinare il rapporto fra le superfici totali del cilindro e del tetraedro.

$$\frac{2\sqrt{2}\pi r^2+2\pi r^2}{4\sqrt{3}\ell^2/4}=\frac{2\left(\sqrt{2}+1\right)\pi\left(\sqrt{3}/3\cancel{\ell}\right)^2}{\sqrt{3}\cancel{\ell^2}}=\frac{2\left(\sqrt{2}+1\right)\pi}{3\sqrt{3}}=\frac{2\left(\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)\pi}{9}$$

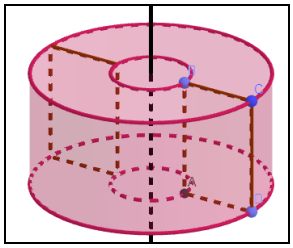
30. Sezioniamo un cilindro retto di raggio 1 con un piano che contiene la "diagonale" del cilindro, come mostrato in figura 

, ottenendo un'ellisse il cui asse maggiore supera del 50% quello minore. Quanto misurano tali assi?

Consideriamo la figura: 

vediamo che il semiasse minore misura quanto il diametro della base del cilindro, cioè 2, quindi l'asse maggiore misura 2 + 1 = 3.

31. Un rettangolo di lati lunghi *a* e *b* ruota attorno a una retta parallela al lato lungo *a*, da esso distante *c*, quanto misura la superficie totale del solido così ottenuto?

Basta generalizzare il problema 23: 

$S = 2\pi \cdot [a \cdot (b + c) + ac + (b + c)^2 - c^2] = 2\pi \cdot (ab + 2ac + b^2 + 2bc)$

32. Un rettangolo di lati lunghi *a* e *b* ruota prima attorno a una retta parallela al lato lungo *a*, e poi a una retta parallela all'altro lato, in entrambi i casi le rette distano *c* dai lati, quanto misura la differenza fra le superfici totali dei due solidi così ottenuti?

Tenuto conto del precedente esercizio abbiamo: $2\pi \cdot (ab + 2ac + b^2 + 2bc) - 2\pi \cdot (ab + 2bc + a^2 + 2ac) = 2\pi \cdot (b^2 - a^2)$

33. Determinare la superficie laterale di un cono retto in funzione del raggio e dell'altezza.

$\pi ra = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$

34. Calcolare la misura della superficie laterale di un cono retto di raggio 3 *cm* e altezza 4 *cm*.

Tenuto conto del precedente: $3\pi\sqrt{3^2 + 4^2}\, cm^2 = 15\pi\, cm^2$

35. Determinare la superficie laterale di un cono retto in funzione dell'apotema e dell'altezza.

$\pi ar = \pi \cdot a \cdot \sqrt{a^2 - h^2}$

36. Calcolare la misura della superficie laterale di un cono retto di apotema 17*m* e altezza 15*m*.

Tenuto conto del precedente: $\pi \cdot 17 \cdot \sqrt{17^2 - 15^2}\, m^2 = 136\pi\, m^2$.

37. Calcolare la misura dell'apotema di un cono retto di superficie laterale 1484π*m*² e altezza 45*m*.

$$\begin{cases} \pi ra = 1484\pi \\ a^2 - r^2 = 45^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 1484/a \\ a^2 - 2202256/a^2 - 2025 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 1484/a \\ a^4 - 2025a^2 - 2202256 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{45 + 3593}{2}} = 53$$

38. Trovare la misura dell'area laterale di un cono equilatero sapendo che la sua altezza misura 3*m*.

$h^2 = a^2 - r^2 = 4r^2 - r^2 \Rightarrow 3r^2 = 9m^2 \Rightarrow r^2 = 3m^2 \Rightarrow S_L = 2\pi r^2 = 6\pi\, m^2$.

39. È possibile che la superficie totale di un cono retto sia il doppio della superficie di base? Giustificare la risposta.

No, perché da $\pi ra + \pi r^2 = 2\pi ra \Rightarrow a = r$, mentre è sempre $a > r$.

40. Un cono retto ha il raggio di base di 5 *cm*. Trovare la misura dell'altezza sapendo che la superficie laterale misura 65π *cm*².

$5\pi a = 65\pi\, cm^2 \Rightarrow a = 13\, cm \Rightarrow h = \sqrt{13^2 - 5^2}\, cm = 12\, cm$.

41. La superficie totale di un cono retto misura 12π *cm*². Trovare la misura dell'altezza sapendo che il raggio misura 2 *cm*.

$\pi ra + \pi r^2 = 12\pi\, cm^2 \Rightarrow 2a + 4 = 12\, cm \Rightarrow a = 4\, cm \Rightarrow h = \sqrt{16 - 4}\, cm = 2\sqrt{3}\, cm$.

42. Con riferimento al precedente quesito, cosa accade se la superficie è 5π *cm*².

$2a + 4 = 5\, cm \Rightarrow a = 0{,}5\, cm < 2\, cm$, che è impossibile.

43. Trovare la misura dell'area totale di un cono retto sapendo che la somma delle misure del raggio di base e dell'apotema è 5 *cm* e che la superficie laterale misura 6π *cm*².

$$\begin{cases}\pi ra = 6\pi \\ a + r = 5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}5r - r^2 - 6 = 0 \\ a = 5 - r\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \dfrac{5+\sqrt{25-24}}{2} = 2 \\ a = 3\end{cases}$$, quindi $S_T = (6 + 4)\pi\ cm^2 = 10\pi\ cm^2$.

44. a) Trovare la misura dell'altezza di un cono retto che ha il raggio di base che misura 4 *cm* e l'area totale i 3/2 di quella di base. b) Se invece l'area totale è il triplo di quella di base?

a) $\pi ra + \pi r^2 = 1{,}5\pi r^2 \Rightarrow a = 0{,}5r < r \Rightarrow$ Impossibile. b) $\pi ra + \pi r^2 = 3\pi r^2 \Rightarrow a = 2r \Rightarrow$ $h = \sqrt{4r^2 - r^2} = r\sqrt{3} = 4\sqrt{3}cm$

45. Sezioniamo un cono retto di apotema lungo 9 *cm* e raggio di base 6 *cm*, con un piano in modo da ottenere un tronco di base minore di area 16π *cm*^{2}. Trovare l'area laterale del tronco di cono.

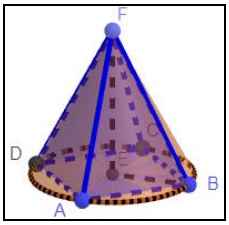
Il rapporto dei raggi delle basi del tronco è 6/4 = 3/2, quindi anche il rapporto fra gli apotemi della piramide da cui è ottenuto il tronco e la piramide piccola eliminata è 3/2, quindi l'apotema del cono del tronco di cono è (3/2 – 1) = ½ dell'apotema del cono eliminato, percò è 1/3 dell'apotema diel tyronco grande, ossia misura 3 *cm*, Infine l'area laterale del tronco è $\pi(6 + 4) \cdot 3\ cm^2 = 30\pi\ cm^2$.

46. Calcolare la misura del raggio di un cono retto di superficie laterale 609π *cm*^{2} e altezza 20 *cm*.

$$\begin{cases}\pi ra = 609\pi \\ 20^2 = a^2 - r^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 609/r \\ 609^2/r^2 - r^2 - 400 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 609/r \\ r^4 + 400r^2 - 370881 = 0\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{200 + \sqrt{400000 + 370881}} = \sqrt{200 + 641} = 29$$

47. Una piramide retta a base quadrata è inscritta in un cono retto, cioè la base della piramide è inscritta nel cerchio di base del cono e i vertici coincidono. Determina il rapporto della superficie laterale del cono con quella della piramide.



Dobbiamo determinare $\dfrac{\pi ra}{2\ell a} = \dfrac{\pi r}{2\ell}$, dato che ovviamente gli apotemi delle due figure coincidono. Il raggio della base del cono è metà diagonale del quadrato: $\dfrac{\pi\sqrt{2}\ell/2}{2\ell} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi$.

48. L'apotema di un tronco di cono retto misura 25 *cm* e la sua altezza 24 *cm*. Determinare i raggi delle due basi sapendo che l'area laterale è uguale alla somma delle aree delle due basi.

$$\begin{cases}25^2 = 24^2 + (R-r)^2 \\ 25\pi(R+r) = \pi(R^2 + r^2)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(R-r)^2 = 7^2 \\ 25(R+r) = R^2 + r^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}R = r + 7 \\ 25(2r+7) = 2r^2 + 14r + 49\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}R = r + 7 \\ 2r^2 - 36r - 126 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}R = 28 \\ r = 21\end{cases}$$

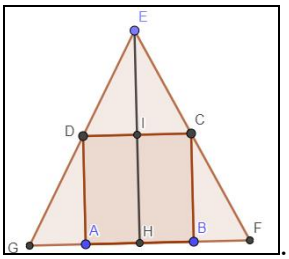
49. Un tronco di piramide regolare a base quadrata è inscritto in un tronco di cono retto, cioè le basi del tronco di piramide sono inscritte nei cerchi di base del tronco di cono. Determina il rapporto della superficie laterale del tronco di cono con quella del tronco di piramide.

IL procedimento e il risultato sono gli stessi dell'esercizio 47.

50. Un tronco di cono retto di altezza 4 *cm* è ottenuto sezionando un cono di altezza 12 *cm*. Quanto vale il rapporto fra le aree delle basi del tronco?

Il rapporto di similitudine fra il cono di partenza e quello che viene eliminato per ottenere il tronco è 12/8 = 4/3, quindi il rapporto fra le aree è $(4/3)^2 = 16/9$.

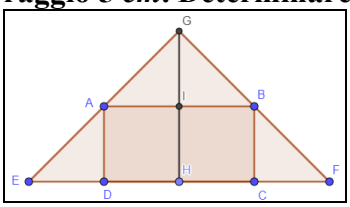
51. Un cilindro equilatero è inscritto in un cono retto di altezza 4 *cm* e raggio 3 *cm*. Determinare le misure del raggio e dell'altezza del cilindro.

Lavoriamo sulle sezioni piane dei due solidi: 

. I triangoli rettangoli *EFH* e *EIC*

sono ovviamente simili, il raggio del cono è *HF*, l'altezza *EH*, quelli del cilindro sono rispettivamente *IC* e *IH*. Abbiamo: $\frac{\overline{EH}}{\overline{HF}} = \frac{\overline{EI}}{\overline{IC}} \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{4-2r}{r} \Rightarrow 4r = 12 - 6r \Rightarrow r = 1,2; h = 2,4$.

52. Un cilindro retto la cui altezza è uguale al raggio è inscritto in un cono retto di altezza 12 *cm* e raggio 5 *cm*. Determinare la misura della superficie laterale del cilindro.



Si ha: $\frac{\overline{GH}}{\overline{HF}} = \frac{\overline{GI}}{\overline{IB}} \Rightarrow \frac{12}{5} = \frac{12-r}{r} \Rightarrow 12r = 60 - 5r \Rightarrow r = h = \frac{60}{17}$. Pertanto la superficie richiesta misura: $2\pi \cdot \left(\frac{60}{17}\right)^2 = \frac{7200\pi}{289} cm^2$

53. Alle basi di un cilindro retto incolliamo due coni retti di altezza uguale a quella del cilindro. Determinare la superficie del solido in funzione dell'altezza e del raggio di base.

La superficie è ovviamente data dalla somma fra le superfici laterali delle 3 figure, ossia da: $2\pi rh + 2\,2\pi r\sqrt{h^2+r^2} = 2\pi r \cdot \left(h + \sqrt{r^2+h^2}\right)$.

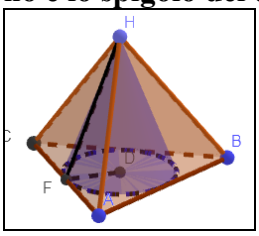
54. Un tetraedro regolare è inscritto in un cono retto in modo che una sua faccia sia inscritta nella circonferenza base del cono e il quarto vertice coincida con il vertice del cono. Quanto vale il rapporto fra lo spigolo del tetraedro e l'apotema del cono?

L'altezza del cono è uguale alla distanza fra il vertice del cono e il baricentro della faccia triangolare a esso opposta. Pertanto l'apotema coincide con lo spigolo del tetraedro, perciò il rapporto vale 1.

55. In relazione al precedente esercizio, possiamo inscrivere un tetraedro regolare in un qualsiasi cono?

Dato che in un tetraedro regolare il rapporto fra lo spigolo e il raggio della circonferenza circoscritta ad una base misura $\frac{\ell}{\frac{\cancel{2}}{3}\frac{\ell}{\cancel{2}}\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, ciò deve valere anche nel cono.

56. Un tetraedro regolare e un cono retto hanno il vertice in comune e la faccia opposta al detto vertice è circoscritta alla circonferenza base del cono. Quanto vale il rapporto fra l'apotema del cono e lo spigolo del tetraedro?

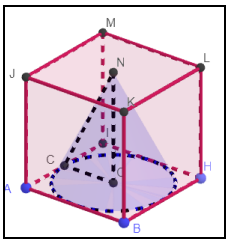


In questo caso l'apotema coincide con l'altezza della faccia del tetraedro regolare, pertanto il rapporto è: $\frac{\ell\sqrt{3}/2}{\ell} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

57. In relazione al precedente esercizio, in che relazione sono l'apotema del cono e il suo raggio?

Il raggio è 1/3 dell'altezza della faccia, quindi $a = 3r$.

58. Un cubo è circoscritto a un cono retto in modo che in una sua faccia è inscritta la circonferenza base del cono e il vertice del cono è il centro della faccia opposta. Quanto vale il rapporto fra l'apotema del cono e lo spigolo del cubo?



$$a=\sqrt{\ell^2+\left(\frac{\ell}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\ell$$

59. In relazione al precedente esercizio, possiamo circoscrivere un cubo a un qualsiasi cono retto?

Dato che il raggio è metà del lato, solo a quelli in cui l'apotema è $\sqrt{5}$ volte il raggio.

60. Un cono retto ha la superficie totale che è *k* volte la sua superficie laterale, per quali valori reali di *k* ciò è possibile?

$\pi ra+\pi r^2=k\pi r^2 \Rightarrow a=(k-1)r>r \Rightarrow k-1>1 \Rightarrow k>2$.

61. Dimostrare che se un tronco di cono retto di altezza *h cm* è ottenuto sezionando un cono di altezza *k cm*, il rapporto fra le aree delle basi del tronco è k^2/h^2.

Il rapporto delle altezze del cono di partenza e di quello eliminato è k/h, tale rapporto è uguale al rapporto dei raggi delle loro basi, quindi anche a quello fra i raggi delle basi del tronco. Infine il rapporto delle aree è k^2/h^2.

62. Studiare la risolubilità del problema di determinare la misura dell'altezza di un cono retto, nota la misura della superficie totale *S* e del raggio *r*.

$$\begin{cases} S=\pi r(a+r) \\ h=\sqrt{a^2-r^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{S}{\pi r}-r \\ h=\sqrt{\left(\dfrac{S-\pi r^2}{\pi r}\right)^2-r^2} \end{cases} \Rightarrow h=\frac{\sqrt{S^2-2\pi Sr^2+\cancel{\pi^2r^4}-\cancel{\pi^2r^4}}}{\pi r}=\frac{\sqrt{S^2-2\pi Sr^2}}{\pi r}$$

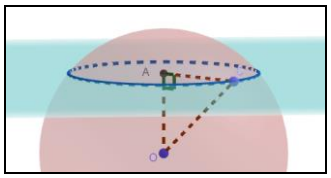
, quindi il problema ha soluzione se il radicando è positivo, ossia se $S>2\pi r^2$.

63. Un triangolo rettangolo di cateti lunghi *a* e *b* ruota di un giro completo attorno a ciascuno dei tre lati, generando tre solidi, determinare le loro superfici laterali.

L'ipotenusa misura $\sqrt{a^2+b^2}$. Se giriamo attorno a uno dei cateti il cono avrà il cateto attorno a cui giriamo come altezza, l'altro come raggio e l'ipotenusa come apotema. Perciò: $\pi\cdot a\cdot\sqrt{a^2+b^2} \vee \pi\cdot b\cdot\sqrt{a^2+b^2}$. Se giriamo attorno all'ipotenusa otteniamo due coni con la base coincidente, il cui raggio è l'altezza relativa all'ipotenusa e gli apotemi sono i due cateti, quindi: $\dfrac{\pi ab\cdot(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

La sfera e le sue parti

1. Un piano taglia una sfera di raggio *R* secondo una circonferenza di raggio *r* = 6 *cm* che dista 7 *cm* dal centro della sfera. Determinare *R*.

Consideriamo la figura: 

$R=\sqrt{6^2+7^2}\,cm=\sqrt{85}\,cm$

2. Un piano taglia una sfera di raggio *R* = 17 *cm*, secondo una circonferenza di raggio *r* = 8 *cm* che dista *h cm* dal centro della sfera. Determinare *h*.

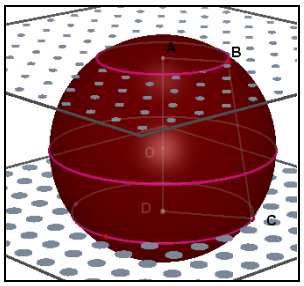
Ci riferiamo alla figura dell'esercizio precedente: $h=\sqrt{17^2-8^2}\,cm=15\,cm$.

3. Un piano taglia una sfera di raggio *R* = 12 *cm*, secondo un cerchio di area 25π cm^2 che dista *h cm* dal centro della sfera. Determinare *h*.

Come prima, dove il raggio della circonferenza sezione misura 5 *cm*: $h=\sqrt{12^2-5^2}\,cm=\sqrt{119}\,cm$.

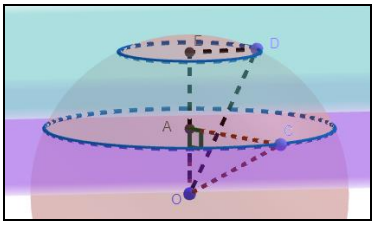
4. Data una sfera di raggio *R*, consideriamo due piani paralleli a essa secanti, come in figura. Se i

raggi delle due circonferenze sezione misurano 1 *cm* e 2 *cm*, determinare la misura di *R*, sapendo che la distanza *AD* fra i piani misura 4 *cm*. Determinare altresì la distanza *BC*.



Determiniamo *R* dai due triangoli rettangoli *OAB* e *ODC* indichiamo *x* la distanza *OA*: $x^2 + 1 = (4 - x)^2 + 4 \Rightarrow 8x = 19 \Rightarrow x = 19/8$ *cm*, quindi: $R = \sqrt{\frac{361}{64} + 1}\, cm = \frac{5 \cdot \sqrt{17}}{8} cm$. Per la seconda richiesta: $\overline{BC} = \sqrt{4^2 + (2-1)^2}\, cm = \sqrt{17}\, cm$.

5. **Data una sfera di raggio lungo 5 *cm*, consideriamo due piani paralleli a essa secanti, le cui circonferenze sezione hanno raggi rispettivamente lunghi 2 *cm* e 3 *cm*. Determinare la distanza fra i piani.**
Ragionando sulla figura dell'esercizio precedente, indicando con *x* e *y* le due distanze volute: $x^2 + 4 = 25$ e $y^2 + 9 = 25 \Rightarrow x = \sqrt{21}$ *cm* e $y = 4$ *cm*. Poiché non sappiamo se i piani stanno dalla stessa parte rispetto al centro della sfera oppure no, abbiamo due possibili risposte: $\left(\sqrt{21} \pm 4\right) cm$.



6. **Data una sfera di raggio lungo 25 *cm*, consideriamo due piani paralleli a essa secanti, le cui circonferenze sezione hanno raggi rispettivamente lunghi *r cm* e 24 *cm*. Determinare *r* sapendo che la distanza fra i piani è di 16 *cm*.**
Indichiamo con *x* la distanza dal centro della sfera a uno dei due piani: $x^2 + 24^2 = 25^2 \Rightarrow x = 7$ *cm*, da cui, se i piani sono da parti opposte rispetto al centro: $r = \sqrt{25^2 - 9^2}\, cm = 4\sqrt{34}\, cm$, mentre se sono dalla stessa parte: $r = \sqrt{25^2 - (16+7)^2} = 4\sqrt{6}\, cm$.

7. **Prendiamo 40 sferette uguali di raggio 1 *cm* e le mettiamo in linea retta in modo tale che ciascuna, a parte la prima e l'ultima, ne tocchi altre due. Che distanza vi è fra i centri della prima e dell'ultima sferetta?**
Dobbiamo considerare un totale di 39 diametri, quindi $39 \cdot 2$ *cm* = 78 *cm*.

8. **Con riferimento al quesito precedente, se la distanza fra i centri è di 50 *cm*, quante sferette abbiamo utilizzato?**
Dato che deve essere $50 = 2 \cdot (n - 1)$, con *n* numero delle sferette, si ha $n = 26$.

9. **Una palla di raggio 10 *cm* rotola su un marciapiede, quando si incastra in un buco a sezione circolare di raggio 8 *cm*. A che distanza dalla superficie è il punto più alto della palla?**
In pratica abbiamo una sezione piana di raggio 8 *cm* di cui vogliamo sapere la somma fra il raggio e la distanza dal centro: $\left(10 + \sqrt{10^2 - 8^2}\right) cm = 16\, cm$.

10. **Con riferimento al quesito precedente, è un caso che la distanza è il doppio del raggio del buco?**
Sì, in generale se il raggio della sfera è *R* e quello del buco è *r* avremo: $R + \sqrt{R^2 - r^2}$, che in generale è diverso da 2*r*.

11. **Con riferimento al quesito precedente, in che relazione sono il raggio *R* della sfera e quello *r* del buco affinché la distanza dal marciapiede sia 2*r*?**

Deve essere $R+\sqrt{R^2-r^2}=2r \Rightarrow \cancel{R^2}-4rR+4r^2=\cancel{R^2}-r^2 \Rightarrow R=\frac{5}{4}r$. Per l'esercizio 9 in effetti si ha: 10 = 5/4 · 8.

12. Data una sfera di raggio *R*, consideriamo un piano a essa secante, la cui circonferenza sezione abbia raggio *r*, è possibile che la distanza *h* fra il piano e il centro della sfera sia uguale a *R*?

No perché in ogni caso la distanza è cateto di un triangolo rettangolo di cui *R* è ipotenusa.

13. Con riferimento al problema precedente, è possibile che sia *h* = *r*?

Sì deve essere $\sqrt{R^2-r^2}=r \Rightarrow R=\sqrt{2}r$.

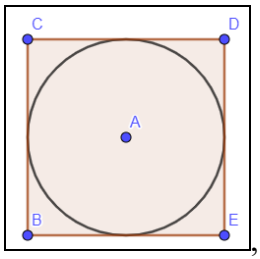
14. Data una sfera di raggio *R*, consideriamo due piani paralleli a essa secanti distanti *D* e posti su parti opposte rispetto al centro. Dette r_1 e r_2 le misure dei raggi delle due circonferenze sezione, determinare il rapporto in cui il centro della sfera divide il segmento che unisce i centri delle circonferenze.

Abbiamo, indicando con d_1 e d_2 le distanze del centro dai due piani:

$$\begin{cases} d_1^2+r_1^2=d_2^2+r_2^2 \\ d_1+d_2=D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (D-d_2)^2+r_1^2=d_2^2+r_2^2 \\ d_1=D-d_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D^2-2Dd_2+r_1^2-r_2^2=0 \\ d_1=D-d_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1=\dfrac{D^2-r_1^2+r_2^2}{2D} \\ d_2=\dfrac{D^2+r_1^2-r_2^2}{2D} \end{cases}$$

Quindi il rapporto vale: $\dfrac{D^2-r_1^2+r_2^2}{D^2+r_1^2-r_2^2} \vee \dfrac{D^2+r_1^2-r_2^2}{D^2-r_1^2+r_2^2}$.

15. Calcolare il rapporto fra le superfici di una sfera e del suo cilindro retto circoscritto.

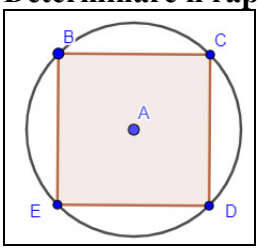
Consideriamo una sezione piana 

, il cilindro deve essere ovviamente equilatero, altezza e raggio misurano quanto il diametro della sfera, quindi: $\dfrac{\cancel{4\pi r^2}}{\cancel{16}\,{}^{4}\cancel{\pi r^2}}=\dfrac{1}{4}$.

16. Un cilindro retto qualsiasi è inscrivibile in una sfera?

Sì, dal punto di vista delle sezioni piane equivale ad inscrivere un rettangolo in una circonferenza.

17. Determinare il rapporto fra le superfici di una sfera e del cilindro equilatero in essa inscritto.



L'altezza e il raggio del cilindro sono il lato del quadrato di diagonale il diametro della sfera, quindi misurano $\sqrt{2}r$, da cui: $\dfrac{\cancel{4\pi r^2}}{\cancel{8}\,{}^{2}\cancel{\pi r^2}}=\dfrac{1}{2}$

18. Un cono retto qualsiasi è inscrivibile in una sfera?

Sì, equivale ad inscrivere un triangolo in una circonferenza.

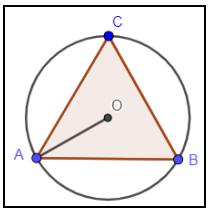
19. In una sfera possiamo inscrivere un solo cono retto?

No, dato che si possono inscrivere infiniti triangoli in una stessa circonferenza.

20. Un cono retto qualsiasi è circoscrivibile a una sfera?

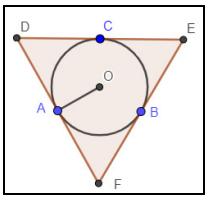
Sì equivale a circoscrivere un triangolo a una circonferenza

21. Determinare il rapporto fra le superfici di una sfera e del cono equilatero in essa inscritto.



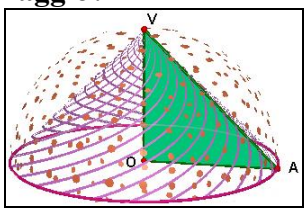
Il raggio e l'apotema del cono, che sono uguali, sono lati di un triangolo equilatero in cui 2/3 dell'altezza misura quanto il raggio della sfera, cioè $\frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\ell = r \Rightarrow \ell = \sqrt{3}r$, perciò il rapporto cercato è: $\frac{\cancel{4}^{2}\cancel{\pi r^2}}{\cancel{2\pi}\cdot 3\cancel{r^2}} = \frac{2}{3}$.

22. Determinare il rapporto fra le superfici di una sfera e del cono equilatero a essa circoscritto.



Il raggio e l'apotema del cono sono lati di un triangolo equilatero in cui 1/3 dell'altezza misura quanto il raggio della sfera, cioè $\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\ell = r \Rightarrow \ell = 2\sqrt{3}r$, perciò il rapporto cercato è: $\frac{\cancel{4}\cancel{\pi r^2}}{2\cancel{\pi}\cdot\cancel{12}^{3}\cancel{r^2}} = \frac{1}{6}$.

23. Un cono circolare retto è inscritto in una semisfera, quanto vale il rapporto fra l'apotema e il raggio?



Dalla figura *OVA* è un triangolo rettangolo isoscele, quindi $a = \sqrt{2}r$.

24. Un cono circolare retto è inscritto in una semisfera di superficie laterale 72π *cm*². Determinare la misura dell'apotema del cono e della superficie laterale del tronco ottenuto sezionando il cono in modo da dividere la sua altezza in due segmenti uguali.

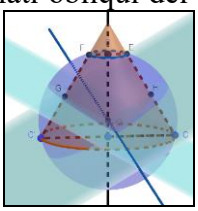
Il raggio della semisfera misura 6 *cm* ($2\pi r^2 = 72\pi\ cm^2$), per quanto detto nel precedente: $a = 6\sqrt{2}\,cm$. Tagliando l'altezza in due parti uguali il raggio della base minore del tronco sarà metà del raggio della sfera, 3 *cm*, e l'apotema sarà anch'esso metà di quello del cono, quindi la superficie laterale è: $\pi\cdot(6+3)\cdot 3\sqrt{2}\,cm^2 = 27\sqrt{2}\,\pi\,cm^2$

25. Un tronco di cono retto qualsiasi, può inscriversi in una sfera?

Sì, perché equivale a inscrivere un trapezio isoscele in una circonferenza.

26. Qual è il centro della sfera circoscritta a un tronco di cono retto?

L'intersezione fra i piani assiali dei lati obliqui del trapezio isoscele sezione del tronco e l'altezza del tronco condotta dal vertice del cono.

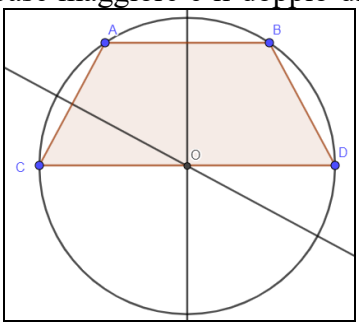


27. Un tronco di cono retto inscritto in una sfera può avere il raggio della base maggiore più lungo del raggio della sfera?

No perché la sezione di un piano con una sfera è al più uguale al cerchio massimo.

28. Un tronco di cono retto di basi i cui raggi sono lunghi 2 *cm* e 5 *cm* è inscritto in una sfera di raggio 7 *cm*. Determinare la misura del suo apotema.

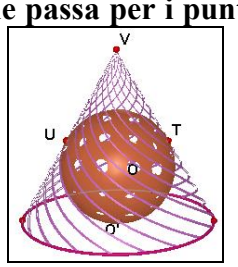
Ci riferiamo alla figura dell'esercizio 26. $\overline{AD}=\left(\sqrt{7^2-2^2}+\sqrt{7^2-5^2}\right)cm=\left(\sqrt{45}+\sqrt{24}\right)cm$, quindi: $a=\sqrt{\left(\sqrt{45}+\sqrt{24}\right)^2+(5-2)^2}\,cm=\sqrt{78+12\cdot\sqrt{30}}\,cm$. Non vi è la possibilità che il tronco sia inscritto in una semisfera, come vedremo nel successivo esercizio. Mentre le basi possono stare dalla stessa parte rispetto al centro: $\overline{AD}=\left(\sqrt{45}-\sqrt{24}\right)cm; a=\sqrt{78-12\cdot\sqrt{30}}\,cm$.

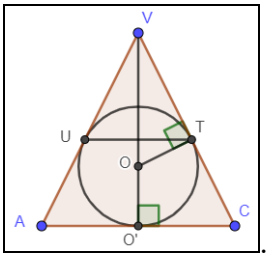
29. Un tronco di cono retto qualsiasi, può inscriversi in una semisfera?
No perché un generico trapezio isoscele non è inscrivibile in una semicirconferenza. Ciò accade se i triangoli *OAC*, *OAB* e *OBD* sono isosceli, ma ciò equivale a dire che sono anche equilateri, dato che i tre angoli di vertice *O* devono essere uguali e dato che insieme fanno l'angolo piatto sono di 60°. Quindi ciò accade solo se la base maggiore è il doppio di ciascuno degli altri lati. In pratica basta dimezzare un esagono regolare. 

Quindi il tronco deve essere equilatero.

30. Un tronco di cono retto di basi i cui raggi sono lunghi 4 *cm* e 8 *cm* è inscritto in una semisfera. Determinare la misura del suo apotema.
Per quanto viso effettivamente il tronco può essere inscritto in una semisfera, ma solo se l'apotema misura quanto il raggio, ossia 4 *cm*.

31. Tenuto conto dell'esercizio precedente, possiamo dire che se un tronco di cono retto ha basi una doppia dell'altra allora è inscrivibile in una semisfera?
No, perché l'apotema potrebbe avere una misura diversa da quella del raggio minore.

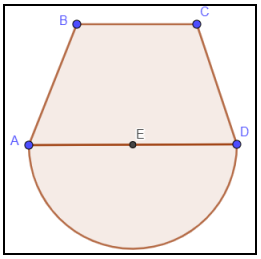
32. Una sfera è inscritta in un cono retto il cui raggio di base misura 5 *cm* e l'altezza 12 *cm*. Determinare il raggio della sfera e la superficie laterale del tronco che si ottiene sezionando il cono con un piano parallelo alla base che passa per i punti di tangenza della sfera con le facce laterali del cono (i punti T ed U in figura). 



Consideriamo la sezione piana: . I triangoli *VTO* e *VCO'* sono simili, quindi: $\frac{\overline{VC}}{\overline{O'C}}=\frac{\overline{VO}}{\overline{OT}}\Rightarrow\frac{\sqrt{5^2+12^2}}{5}=\frac{12-r}{r}\Rightarrow 13r=60-5r\Rightarrow r=\frac{\cancel{60}^{10}}{\cancel{18}_{3}}cm$. Per quanto riguarda il tronco di cono, possiamo dire che il suo apotema misura $\overline{TC}=\overline{VC}-\overline{VT}=13cm-\sqrt{\left(12-\frac{10}{3}\right)^2-\left(\frac{10}{3}\right)^2}\,cm=5cm$, quindi il rapporto di similitudine fra *VTU* e *VAC* è 8/13, perciò il raggio della base minore misura 8/13 · 5 *cm* = 40/13 *cm*. Infine la superficie laterale: π · (5 + 40/13) · 5 cm^2 = 525π/13 cm^2.

33. Calcolare la superficie del solido formato da un tronco di cono retto sovrapposto ad una semisfera di raggio 17 *cm*. Il tronco è generato da un trapezio rettangolo di area 150 cm^2 e altezza 15

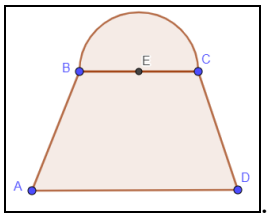
***cm*.**

Consideriamo la sezione piana in figura, 

si ha: $\frac{17+r}{2}\cdot\cancel{15}=\cancel{150}^{10}\Rightarrow r=3\,cm$.

Quindi l'apotema misura $\sqrt{15^2+(17-3)^2}\,cm=\sqrt{421}\,cm$. Infine la superficie richiesta misura: $\pi\cdot\left(2\cdot 17^2+20\cdot\sqrt{421}+3^2\right)=\left(587+20\cdot\sqrt{421}\right)\pi\,cm^2$

34. Determinare la misura della superficie di un solido formato da una semisfera sovrapposta ad un tronco di cono retto il cui apotema misura 10 *cm* e l'altezza 8 *cm*, sapendo che la superficie laterale del tronco è 4/3 della somma delle aree delle sue basi.

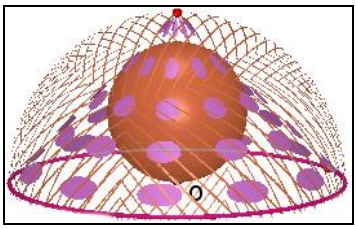
Stavolta la figura di riferimento è la seguente: 

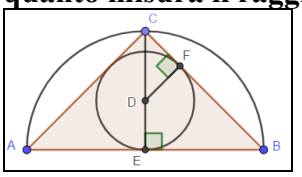
. Abbiamo:

$$\begin{cases} R-r=\sqrt{10^2-8^2} \\ \cancel{10}^{5}\pi\cdot(r+R)=\frac{\cancel{4}^{2}}{3}\pi\left(R^2+r^2\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}R-r=6\\15\cdot(r+R)=2\left(R^2+r^2\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}R=6+r\\15\cdot\left(\cancel{6}^{3}+\cancel{2}r\right)=\cancel{2}\left[(6+r)^2+r^2\right]\end{cases}\Rightarrow$$

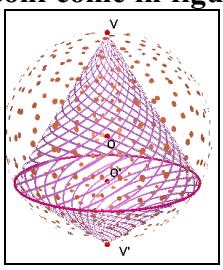
$$\Rightarrow\begin{cases}R=6+r\\45+15r-36-12r-2r^2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}R=6+r\\2r^2-3r-9=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}R=9\\r=\frac{3+9}{4}=3\end{cases}$$

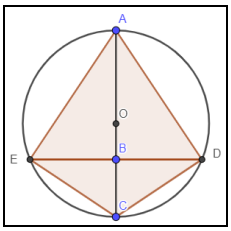
Quindi la superficie richiesta misura: $\pi\cdot(2\cdot 3^2+12\cdot 10+9^2)\,cm^2=219\pi\,cm^2$

35. In figura un cono retto è inscritto in una semisfera ed è circoscritto a una sfera di raggio 1, quanto misura il raggio della semisfera? 



I triangoli rettangoli segnati sono simili, quindi *CFD* è isoscele di base *CD*, la quale misura $\sqrt{2}$, pertanto il raggio della semisfera misura: $1+\sqrt{2}$.

36. Sezioniamo una sfera di raggio 3 *cm*, con un piano che divide il diametro in parti proporzionali a 4/9, quindi costruiamo due coni come in figura. Determinare la misura del raggio di base dei coni e le misure degli apotemi. 



Abbiamo: $\overline{AB}=\frac{9}{13}\cdot 6\,cm=\frac{54}{13}cm;\overline{BC}=\frac{4}{13}\cdot 6\,cm=\frac{24}{13}cm;\overline{OB}=\left(3-\frac{24}{13}\right)cm=\frac{15}{13}cm$.

Lavorando sul triangolo rettangolo *OBD*: $\overline{BD}=\sqrt{3^2-\left(\frac{15}{13}\right)^2}\,cm=\frac{36}{13}cm$. Inoltre: $\overline{AD}=\sqrt{\left(\frac{54}{13}\right)^2+\left(\frac{18}{13}\right)^2}\,cm=\frac{18\cdot\sqrt{10}}{13}cm;\overline{DC}=\sqrt{\left(\frac{24}{13}\right)^2+\left(\frac{18}{13}\right)^2}\,cm=\frac{30}{13}cm$.

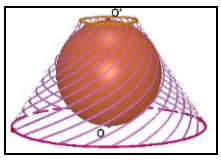
37. Con riferimento al precedente esercizio, esprimere il raggio delle basi dei coni mediante il raggio della sfera e il rapporto *n/m* (*n* > *m*) in cui è diviso il diametro.

Abbiamo: $\overline{BC}=\frac{m}{n+m};\overline{OB}=r_s-\frac{m}{n+m}\Rightarrow r_c=\sqrt{r_s^2-\left(r_s-\frac{m}{n+m}\right)^2}=\frac{\sqrt{m(2mr+2nr-m)}}{m+n}$.

38. Un tronco di cono retto qualsiasi, può circoscriversi a una sfera?

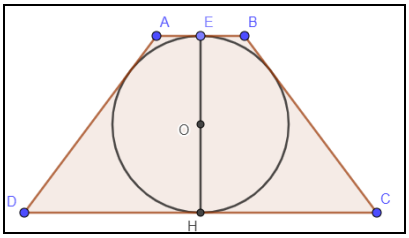
La richiesta equivale a circoscrivere un trapezio ad una circonferenza e ciò può farsi solo se la somma dei lati opposti è costante.

39. Se un tronco di cono retto è circoscritto ad una sfera, il che relazione è l'apotema *a* con i raggi *r* e *R* delle basi del tronco?

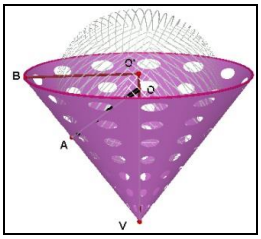


Per quanto detto nel quesito precedente, dato che la sezione del tronco retto è un trapezio isoscele, deve aversi $2a = 2(r + R)$ ossia $a = r + R$.

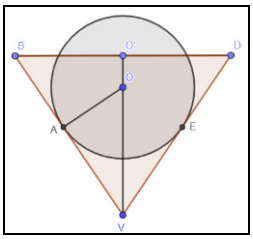
40. Un tronco di cono retto è circoscritto ad una sfera; sapendo che le misure dei raggi delle basi hanno per somma 25 *cm* e per differenza 7 *cm*, determinare la misura della superficie della sfera.



$\begin{cases}R-r=7\\R+r=25\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}R=16\\r=9\end{cases}$, l'altezza del tronco misura quanto il diametro della sfera, mentre l'apotema, come visto nel quesito precedente, vale 25 *cm*. Quindi: $R_s=\frac{h}{2}=\frac{\sqrt{25^2-7^2}}{2}cm=12\,cm$ e la superficie della sfera: $4\pi\cdot 144\ cm^2 = 576\ \pi\ cm^2$.

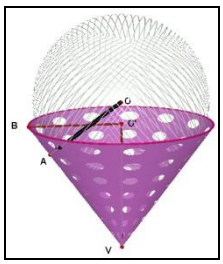


41. Una sfera tocca un cono retto come mostrato in figura determinare la misura del suo raggio sapendo che il cono ha raggio di 4,5 *cm*, altezza di 6 *cm* e $\overline{VA}=4\,cm$. Determinare poi la relazione fra il raggio *R* della sfera, il raggio del cono *r*, la sua altezza *h* e la distanza $\overline{VA}=d$.

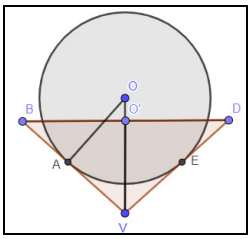


Con riferimento alla figura possiamo dire che i trtiangoli rettangoli $BO'V$ e VAO sono fra loro simili e si ha: $\frac{\overline{VO'}}{\overline{BO'}} = \frac{\overline{VA}}{\overline{AO}} \Rightarrow \overline{AO} = \frac{4 \cdot 4,5}{6} cm = 3 cm$. In generale: $R = \frac{d \cdot r}{h}$.

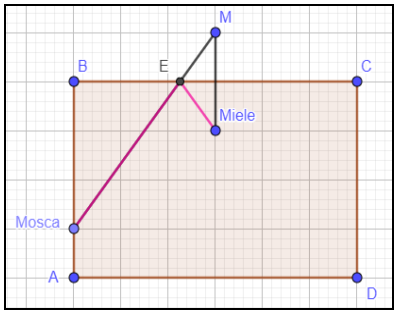
42. La relazione precedente continua a valere anche se il centro della sfera è al disopra di quello della base del cono?



I triangoli sono sempre simili e vale la stessa proporzione.

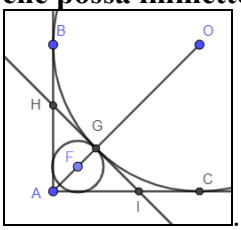


43. Un problema di Dudeney. Una mosca è all'esterno di un bicchiere cilindrico alto 4 pollici e la cui circonferenza di base è 6 pollici. La mosca è a un pollice dal fondo poggiata sulla superficie del bicchiere. Una goccia di miele si trova all'interno del bicchiere a un pollice dalla sommità del bicchiere e sulla faccia opposta a quella su cui è poggiata la mosca. Quanto vale il minimo cammino necessario alla mosca per raggiungere il miele?



"Aprendo" la superficie otteniamo il rettangolo in figura. La mosca deve arrivare sul bordo superiore e poi scendere, quindi deve fare un percorso come quello rosso in figura. Dobbiamo stabilire per quale E si ha il più corto. Riflettiamo la posizione del miele rispetto al bordo del bicchiere, ottenendo il punto M, il percorso $MoscaM$ è uguale a quello voluto ed essendo in linea retta è il più corto possibile. Quindi misura 5 pollici (ipotenusa di un triangolo di cateti 3 e 4).

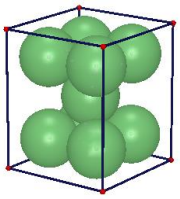
44. Una palla sferica di raggio 1 è appoggiata a due pareti adiacenti di una stessa stanza. Quanto vale il massimo raggio di un'altra palla sferica che possa immettersi fra la palla e il muro?

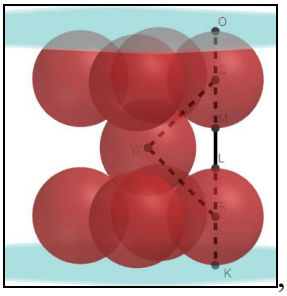


Consideriamo sempre la situazione sul piano: . G è il punto medio dell'arco BC in cui B e C sono i punti di contatto con le pareti, la sfera deve essere all'interno del triangolo rettangolo isoscele HAI ed è massima se è quella inscritta, quindi il suo raggio è uguale al rapporto fra l'area di AHI e il suo semiperimetro. Si ha: $\overline{GH} = \overline{GI} = \overline{HB} = x \Rightarrow \overline{HI} = 2x; \overline{AH} = \overline{AI} = 1 - x$. I triangoli HAI e

BAC sono simili: $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{HI}}{\overline{AH}}\Rightarrow\dfrac{\sqrt{2}}{1}=\dfrac{2x}{1-x}\Rightarrow 2x=\sqrt{2}-\sqrt{2}x\Rightarrow x=\dfrac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}\left(2-\sqrt{2}\right)}{4-2}=\sqrt{2}-1$.

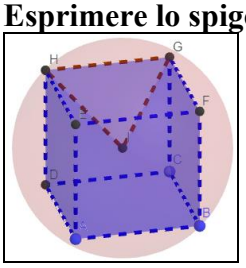
Infine: $r=\dfrac{\left(1-\sqrt{2}+1\right)^2}{2\left[\cancel{\sqrt{2}-1+1}-\left(\cancel{\sqrt{2}}-1\right)\right]}=\dfrac{4-4\sqrt{2}+2}{2}=3-2\sqrt{2}$.

45. In una scatola inseriamo 9 sfere uguali come in figura,  **8 di esse sono a due a due tangenti fra loro e con 3 facce della scatola, la nona è tangente alle altre 8. La scatola ha dimensioni (4*r*, 4*r*, ℓ), con *r* raggio delle sfere. Determinare *r* in funzione di ℓ.**

In figura consideriamo due facce parallele della scatola, ℓ è la distanza OK: 

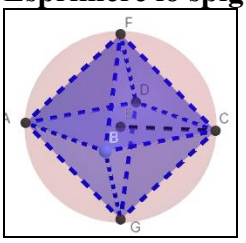
, che è somma di due raggi e della base di un triangolo rettangolo isoscele di lati obliqui lunghi 2 raggi. Quindi $\overline{QR}=2\sqrt{2}r$. Infine: $\ell=2r+2\sqrt{2}r\Rightarrow r=\dfrac{\ell}{2\left(1+\sqrt{2}\right)}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\ell$.

46. Esprimere lo spigolo di un cubo mediante il raggio *r* della sua sfera circoscritta.



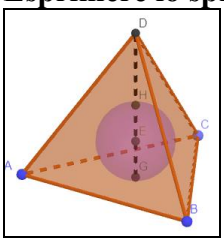
Col riferimento alla figura, il raggio è metà della diagonale del cubo, quindi $r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ell\Rightarrow\ell=\dfrac{2r}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}r$

47. Esprimere lo spigolo di un ottaedro regolare mediante il raggio *r* della sua sfera circoscritta.



Il raggio è la semidiagonale della base quadrata comune alle due piramidi, quindi: $r=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ell\Rightarrow\ell=\sqrt{2}r$

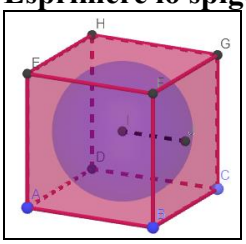
48. Esprimere lo spigolo di un tetraedro regolare mediante il raggio *r* della sua sfera inscritta.



Il centro della sfera è il baricentro del tetraedro, quindi il raggio è ¼ della mediana,

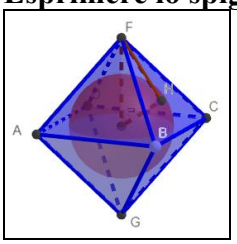
che è anche altezza; abbiamo già visto che tale altezza misura $\sqrt{\frac{2}{3}}\ell$, quindi: $r=\frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\ell \Rightarrow \ell=\frac{4r\sqrt{3}}{\sqrt{2}}r=2\sqrt{6}r$.

49. Esprimere lo spigolo di un cubo mediante il raggio *r* della sua sfera inscritta.



Il raggio misura quanto metà del lato, quindi $\ell = 2r$.

50. Esprimere lo spigolo di un ottaedro regolare mediante il raggio *r* della sua sfera inscritta.



Il raggio è cateto di un triangolo rettangolo di ipotenusa l'altezza della piramide e altro cateto i 2/3 della mediana di una faccia. Abbiamo già visto che l'altezza misura $\frac{\sqrt{2}}{2}\ell$, quindi:

$$r=\sqrt{\frac{1}{2}-\left(\frac{\cancel{2}}{3}\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right)^2}\ell=\frac{\sqrt{6}}{6}\ell \Rightarrow \ell=\sqrt{6}r.$$

51. Calcolare il rapporto fra il raggio della sfera circoscritta e quello della sfera inscritta in uno stesso tetraedro regolare.

Usando risultati già ottenuti: $\frac{R}{r}=\frac{\sqrt{3/8}\ell}{\sqrt{2/3}/4\ell}=\cancel{4}\cdot\sqrt{\frac{3}{\cancel{8}}\cdot\frac{3}{\cancel{2}}}=3$.

52. Calcolare il rapporto fra il raggio della sfera circoscritta e quello della sfera inscritta a uno stesso cubo.

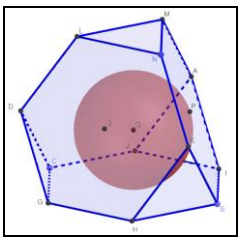
$\frac{R}{r}=\frac{\sqrt{3}/2\ell}{1/2\ell}=\sqrt{3}$.

53. Calcolare il rapporto fra il raggio della sfera circoscritta e quello della sfera inscritta a uno stesso ottaedro regolare.

$\frac{R}{r}=\frac{\sqrt{2}/2\ell}{\sqrt{6}/6\ell}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$.

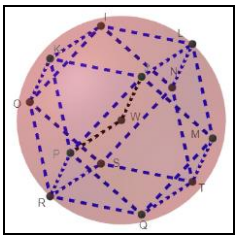
54. Dimostrare che un tetraedro troncato non è circoscrivibile a una sfera.

La sfera dovrebbe avere centro nel centro di simmetria, cioè nell'incontro degli assi degli spigoli e toccare i baricentri delle facce triangolari e il centro delle facce esagonali, ma queste distanze sono diverse.



55. Dopo avere dimostrato che un cubottaedro è inscrivibile in una sfera, determinare il rapporto spigolo/raggio.

Dobbiamo provare che la distanza del centro del cubo dai vertici del cubo è uguale alla distanza dai

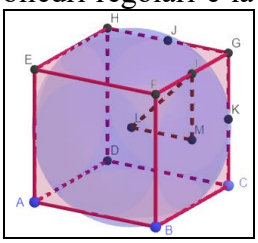
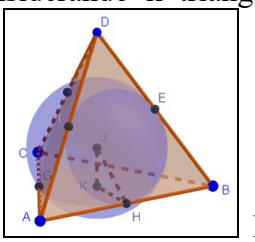
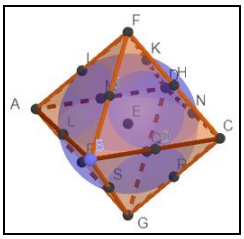
punti medi degli spigoli.  Ciò è evidente, quindi il rapporto richiesto misura 1, dato che il raggio misura quanto metà diagonale di un triangolo isoscele di lato il lato del cubo, cioè $\frac{\sqrt{2}}{2}\ell$ e il lato del cubottaedro è ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele di cateti lunghi quanto metà del lato del cubo, quindi misura anch'esso $\frac{\sqrt{2}}{2}\ell$.

56. Un cubottaedro è circoscrivibile a una sfera? Giustificare la risposta.

No perché stavolta la distanza del centro dalle facce quadrate è diversa da quella delle facce triangolari.

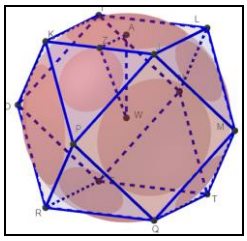
Negli esercizi seguenti dimostrare che esiste una sfera, detta intersfera, che è tangente a tutti gli spigoli dei poliedri indicati, quindi calcolare il rapporto spigolo/raggio.

57. a) Cubo; b) Tetraedro regolare; c) Ottaedro regolare

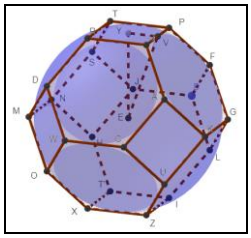
Per tutti i poliedri regolari è la sfera che ha centro nel centro del cubo e passa per i punti medi degli spigoli. a)  ha raggio che, in funzione dello spigolo considerando il triangolo rettangolo isoscele *IML*, vale $\sqrt{2}\ell$ e quindi il rapporto richiesto è $\sqrt{2}$; b)  Per determinare il raggio *JK*, lavoriamo sul triangolo rettangolo *JKH*, in cui *J* è il baricentro del tetraedro, quindi *JK* è ¼ della mediana/altezza, quindi misura $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}\ell$, mentre *KH* è 1/3 della mediana della faccia, cioè $\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\ell = \frac{\sqrt{3}}{6}\ell$. Infine $r = \sqrt{\frac{\cancel{2}}{\cancel{48}\,24} + \frac{3}{36}}\ell = \frac{\sqrt{2}}{4}\ell \Rightarrow \frac{\ell}{r} = 2\sqrt{2}$. c) 

Facilmente si vede che il raggio misura quanto metà spigolo, quindi il rapporto vale 2.

58. a) Cubottaedro; b) Ottaedro troncato

a)  Il centro è quello del cubottaedro e la tangenza si ha nei punti medi degli

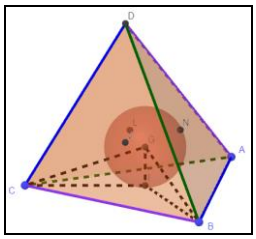
spigoli, quindi, riferendoci al lato del cubo di partenza, $r=\sqrt{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\ell\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{4}\ell$. Il rapporto richiesto è: $\frac{\sqrt{2}/2\ell}{\sqrt{6}/4\ell}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.



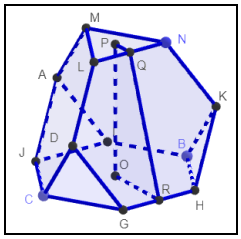
b) Riferendoci al lato dell'ottaedro di partenza, il lato del cubottaedro misura 1/3 di esso, quindi *YV* è 1/6, mentre *EY* è 2/3 dell'altezza di una delle piramidi che formano l'ottaedro, che sappiamo misurare $\sqrt{\ell^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ell\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ell$. Perciò il raggio dell'intersfera, in termini del lato dell'ottaedro: $\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\right)^2}\ell=\frac{1}{2}\ell$. Infine il rapporto richiesto è: $\frac{1/3\ell}{1/2\ell}=\frac{2}{3}$.

La sfida

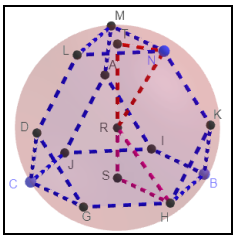
1. **Dimostrare che in un tetraedro equifacciale, cioè con tutte le facce triangoli uguali**
   - **baricentro, circocentro e incentro coincidono;**
   - **la sfera inscritta tocca le facce nei loro circoncentri.**
   - Avendo le facce uguali tutte le mediane sono uguali, come è stato mostrato nella sfida dell'unità 6.2, quindi il baricentro del tetraedro dista ugualmente dai baricentri delle facce, perciò è l'incentro. D'altro canto dista ugualmente anche dai vertici, quindi è anche il circocentro.
   - Consideriamo i triangoli rettangolo *GIC* e *GIB*, sono uguali perché hanno il cateto *GI* in comune e le ipotenuse uguali perché ciascuna di esse è i 3/4 della mediana cui appartiene, che sono uguali fra loro. Quindi sono uguali gli altri cateti, ripetendo il ragionamento si prova che anche *AI* ha la stesa misura e quindi *I* è circocentro di *ABC*. Stesso discorso per le altre facce.



2. **Dopo avere dimostrato che un tetraedro troncato è inscrivibile in una sfera, determinare il rapporto raggio/spigolo.**
   Consideriamo gli assi degli spigoli, che si incontrano in un punto che è il centro della sfera circoscritta. Ci serve determinare la misura della distanza fra le facce opposte del poliedro, usando la seguente figura:



Abbiamo: $\overline{PQ}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\ell=\frac{\sqrt{3}}{6}\ell;\overline{OR}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ell;\overline{QR}=\sqrt{3}\ell$. I risultati precedenti sono giustificati dai fatti: il triangolo *OHG* è equilatero e *OB* è una sua altezza; *QR* è il doppio di un cateto di un triangolo 30°-60°90°. Infine: $\overline{PO}=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2}\ell=\sqrt{3-\frac{1}{3}}\ell=\sqrt{\frac{8}{3}}\ell$. Adesso la-

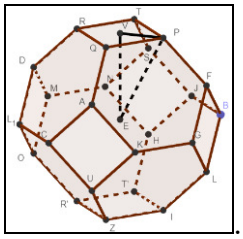


voriamo sul raggio della sfera circoscritta, con quest'altra figura:

$$\begin{cases} \overline{IR}+\overline{RS}=\overline{IS} \\ \overline{IR}^2+\overline{IN}^2=\overline{SH}^2+\overline{RS}^2 \end{cases} \Rightarrow \left(\overline{IR}=x;\overline{RS}=y\right)\begin{cases} x+y=\sqrt{8/3}\ell \\ x^2+\left(\sqrt{3}/3\ell\right)^2=\ell^2+y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=\sqrt{8/3}\ell \\ x^2-y^2=2/3\ell^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=\sqrt{8/3}\ell \\ x-y=\dfrac{2/3\ell^2}{\sqrt{8/3}\ell} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=\sqrt{8/3}\ell \\ x-y=\sqrt{1/6}\ell \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5\sqrt{6}/12\ell \\ y=\sqrt{6}/4\ell \end{cases} \Rightarrow r=\sqrt{1+6/16}\ell=\sqrt{\frac{11}{8}}\ell$$

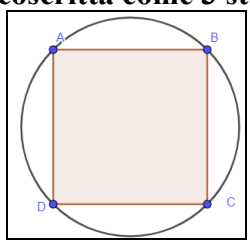
3. **Dopo avere dimostrato che un ottaedro troncato è inscrivibile in una sfera, determinare il rapporto raggio/spigolo.**



Ci serve determinare la misura del segmento VE in figura, . Esso è ottenuto dall'altezza dell'ottaedro, che abbiamo già calcolato come $\sqrt{2}L$ in funzione del lato L dell'ottaedro. Per ottenere la distanza dalle facce opposte dell'ottaedro troncato abbiamo eliminato 1/3 dell'altezza, ma il lato dell'ottaedro troncato è 1/3 di quello dell'ottaedro, quindi $\overline{VE}=\sqrt{2}\ell$. Torniamo al problema di partenza: $\overline{EP}=\sqrt{\left(\sqrt{2}\ell\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ell\right)^2}=\sqrt{\frac{5}{2}}\ell$.

Temi assegnati agli esami di stato

1. **(Liceo scientifico 2003/2004) Provate che la superficie totale di un cilindro equilatero sta alla superficie della sfera ad esso circoscritta come 3 sta a 4.**



Considerando la sezione piana vediamo che il diametro di base, e quindi l'altezza, del cilindro misurano $\frac{r_s}{\sqrt{2}}$, quindi il rapporto richiesto è: $\frac{\cancel{2\pi}\left(2r_c^2+r_c^2\right)}{{}^{2}\cancel{4\pi}r_s^2}=\frac{3\cancel{r_s^2}}{2}\cdot\frac{1}{2\cancel{r_s^2}}=\frac{3}{4}$.

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

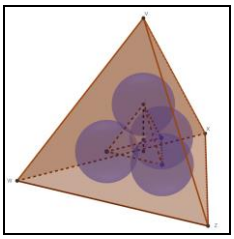
1. **(S 1948) Ad una sfera di raggio r_1 circoscriviamo un tetraedro, al quale circoscriviamo una sfera di raggio r_2, a cui circoscriviamo un cubo ed infine a quest'ultimo una sfera di raggio r_3. Determinare i rapporti $r_1 : r_2 : r_3$.**

Nell'esercizio 46 abbiamo visto che $\ell_4=2\sqrt{6}r_1$, nel box lavoriamo insieme invece abbiamo stabilito

che $\ell_4 = \sqrt{\frac{8}{3}}r_2$, da cui $2\sqrt{6}r_1 = \sqrt{\frac{8}{3}}r_2 \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \sqrt{\frac{\cancel{8}^{4}}{3}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\cancel{6}^{3}}} = \frac{1}{3}$. Inoltre sappiamo che $\ell_6 = 2r_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}r_3$, da cui: $\frac{r_2}{r_3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, quindi: $1:3:3\sqrt{3}$.

2. **(AHSME 1980) Quattro sfere di raggio 1 sono poggiate sul pavimento in modo che tre di esse stiano sul pavimento reciprocamente tangenti e la quarta sia poggiata sulle altre. Circoscriviamo un tetraedro alle sfere, quanto misura il suo spigolo?**

Consideriamo il tetraedro che ha per vertici i centri delle 4 sfere, il cui spigolo misura 2 unità. Il tetraedro che cerchiamo è simile a questo. I due tetraedri hanno lo stesso centro, inoltre il rapporto di similitudine è uguale a quello fra le distanze dal centro alle facce, se per quello più piccolo esso è x per l'altro è $x + 1$. In un tetraedro regolare la mediana è anche altezza, quindi questa distanza vale ¼ della mediana, che sappiamo misura $\frac{\sqrt{6}}{3}$ volte il lato, cioè $\frac{2\sqrt{6}}{3}$. Perciò il rapporto di similitudine è

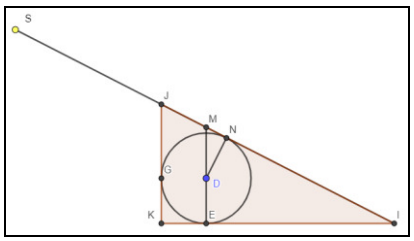


$$\frac{\frac{1}{2}\frac{\sqrt{6}}{3}+1}{\frac{1}{2}\frac{\sqrt{6}}{3}} = \frac{\sqrt{6}+6}{\sqrt{6}} = \frac{\cancel{6}+\cancel{6}\sqrt{6}}{\cancel{6}} = 1+\sqrt{6}. \text{ Perciò } \frac{S}{2} = 1+\sqrt{6} \Rightarrow S = 2\cdot\left(1+\sqrt{6}\right)$$

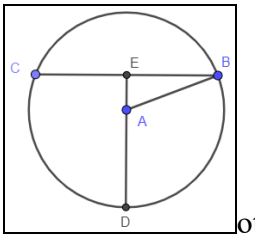
3. **(AHSME 1983) Una grande sfera è adagiata su un terreno soleggiato, e la sua ombra raggiunge la massima distanza dal punto di contatto con il suolo pari a 10*m*. Nello stesso momento un'asta da 1 *m* posta verticalmente al terreno proietta un'ombra lunga 2 *m*. determinare la misura del raggio della sfera. Si supponga che i raggi del sole siano segmenti fra loro paralleli e l'asta sia assimilabile ad un segmento.**

Il rapporto fra *EI* ed *EM* è 2, quindi $\overline{EM} = 5$, da cui $\overline{MI} = \sqrt{10^2+5^2} = 5\sqrt{5}$. *MND* e *MIE* sono simili:

$$\frac{\overline{DN}}{\overline{DM}} = \frac{\overline{EI}}{\overline{MI}} \Rightarrow \frac{r}{5-r} = \frac{\cancel{10}^{2}}{\cancel{5}\sqrt{5}} \Rightarrow \sqrt{5}r = 10-2r \Rightarrow r = \frac{10}{2+\sqrt{5}} = 10\cdot\left(\sqrt{5}-2\right)m$$



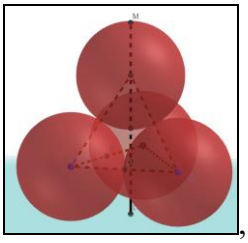
4. **(AHSME 1987) Un pallone galleggiava su un lago quando questo ghiacciò. Senza rompere il ghiaccio il pallone fu tolto dalla superficie ghiacciata sulla quale in tal modo rimase una buca larga 24 *cm* e profonda 8 *cm*. Determinare la misura del raggio del pallone, che si suppone esattamente sferico.**

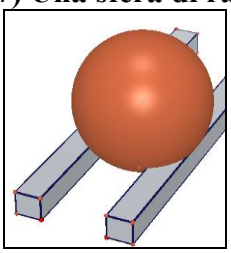
Dalla sezione piana, 

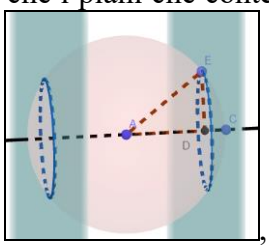
otteniamo: $r^2 = 12^2 + (8-r)^2 \Rightarrow 144+64-16r = 0 \Rightarrow r = 13\,cm$.

5. **(O 1995) Su un piano sono appoggiate tre sfere di raggio 1, a due a due tangenti fra loro. Una quarta sfera, sempre di raggio 1, è appoggiata sopra di esse, nel mezzo. Quanto è alta la costruzione?**

A) $2+2\sqrt{\frac{2}{3}}$ **B)** $1+\frac{2}{3}\sqrt{5}$ **C)** $2+\frac{\sqrt{3}}{3}$ **D)** $2+\sqrt{2}$ **E)** $2\sqrt{3}$

Considerando la figura  , la distanza *ML* è somma di due raggi con l'altezza del tetraedro regolare di spigolo lungo 2, che sappiamo vale $\frac{2\sqrt{6}}{3}$, quindi è: $\frac{2\sqrt{6}}{3}+2$, che è la risposta A, anche se scritta in modo diverso.

6. (O 1997) Una sfera di raggio *r* = 15 *cm* è appoggiata su due binari distanti fra loro 24 *cm* come in figura.  **Se la sfera effettua una rotazione completa di quanto avanza sui binari?**
A) 24 *cm* B) 30 *cm* C) 15π *cm* D) 18π *cm* E) 30π *cm*

Dobbiamo considerare che i piani che contengono i binari sezionano la sfera in due circonferenze, come mostrato in figura,  , quindi il cammino della sfera è la lunghezza di una di tali circonferenze. Calcoliamone il raggio: $\sqrt{15^2-12^2}\,cm=9\,cm$, quindi il cammino è 18π *cm*, ossia la risposta D.

7. (TAMU 1999) La cima di un cono il cui raggio base è 10 pollici e l'altezza 8 pollici è rimosso con un taglio orizzontale a 3 pollici dal vertice. Determinare il raggio del cerchio che così si forma.

Il rapporto di similitudine fra il triangolo sezione iniziale e quello asportato è 3/8, quindi il raggio ottenuto è 3/8 · 10" = 3,75″.

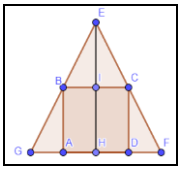
8. (HSMC 1999) Un cubo di volume 216 è inscritto in una sfera. Determinare la superficie della sfera.

Il cubo ha spigolo lungo 6, inoltre un diametro della sfera è diagonale del cubo, quindi vale $6\sqrt{3}$. Perciò la superficie della sfera è $4\pi\cdot\left(3\sqrt{3}\right)^2=108\pi$.

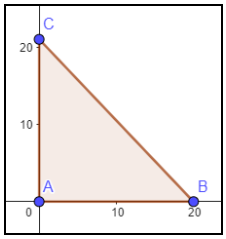
9. (AMC 2001) Dato un settore circolare di 252° e di raggio 10, quale dei seguenti coni possiamo costruire unendo i suoi estremi? Indichiamo con *h* l'altezza *h*, con *r* il raggio *r* e con *a* l'apotema.
A) *r* = 6, *a* = 10 B) *r* = 6, *h* = 10 C) *r* = 7, *a* = 10 D) *r* = 7, *h* = 10 E) *r* = 8, *a* = 1

Il settore sottende un arco lungo $\cancel{2}\pi\cdot\cancel{10}\cdot\frac{252}{\cancel{360}^{18}}=14\pi$, quindi il cono avrà apotema 10 e raggio 7, cioè la risposta C.

10. (AMC 2001) Un cilindro equilatero è inscritto in un cono retto. Il cono ha diametro 10 e altezza 12, e gli assi dei due solidi coincidono. Determinare la misura del raggio del cilindro.

Dalla figura,  i triangoli *ECI* e *EFH* sono simili: $\frac{12}{5}=\frac{12-2r}{r}\Rightarrow 12r=60-10r\Rightarrow r=\frac{30}{11}$

11. (RICE 2006) Sia il triangolo *ABC*, con *A* ≡ (0; 0), *B* ≡ (20; 0) e *C* sul semiasse positivo *y*. Il cono *M* si forma ruotando *ABC* attorno all'asse *x*, e il cono *N* ruotando *ABC* attorno all'asse *y*. Se il volume del cono *M* meno il volume del cono *N* fa 140π, determinare la misura di *BC*.

[29] 

Il cono *M* ha raggio *AC* e altezza *AB*, quindi volume $\frac{\pi y^2 \cdot 20}{3}$; il cono N ha raggio *AB* e altezza *AC*, quindi volume $\frac{\pi 20^2 \cdot y}{3}$. Deve essere $\frac{\cancel{\pi} y^2 \cdot \cancel{20}}{3} - \frac{\cancel{\pi} 20^{\cancel{2}} \cdot y}{3} = \cancel{140}^{7} \cancel{\pi} \Rightarrow y^2 - 20y - 21 = 0 \Rightarrow y = 21$. Non accettiamo la soluzione negativa $y = -1$. Perciò $\overline{BC} = \sqrt{20^2 + 21^2} = 29$.

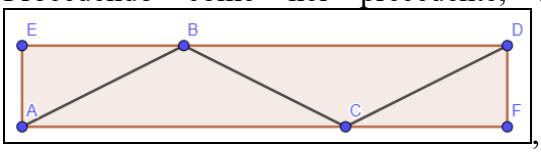
12. (HSMC 1999) A can is in the shape of a right circular cylinder. The circumference of the base of the can is 12 inches, and the height of the can is 5 inches. A spiral stripe is painted on the can in such a way that it winds around the can exactly once as it reaches from the bottom of the can to the top. It reaches the top of the can directly above the spot where it left the bottom. What is the length, in inches, of the stripe?

Una lattina ha la forma di un cilindro circolare retto. La circonferenza della base della lattina è 12 *pollici, e l'altezza è* 5 *pollici. Una striscia a forma di spirale è dipinta sulla lattina in modo che si avvolga esattamente una volta raggiungendo il coperchio dal fondo. Il punto di arrivo della spirale è direttamente sopra quello di partenza, quanto misura, in pollice, la striscia?*

Tagliando la lattina e svolgendola troviamo un rettangolo, la cui diagonale misura quanto la spirale, quindi $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$.

13. (NC 2002) A string is wrapped around a cylinder in such a way that it starts at the bottom wraps around the cylinder three times and ends up on top. If the cylinder has a diameter 10 *cm* and a height of 30 *cm* what is the shortest possible length of the piece of string?

Una corda è avvolta attorno a un cilindro in modo che inizia dal fondo si avvolga tre volte attorno al cilindro e finisca sulla cima. Se il cilindro ha diametro 10 *cm e altezza* 30 *cm, qual è la minima lunghezza possibile del pezzo di corda?*

Procedendo come nel precedente, stavolta dobbiamo calcolare il cammino in figura: 

, quindi, dato che *AE* è lungo quanto la circonferenza di base, cioè 10π, e i punti *B* e *C* si trovano a 10 *cm* dai vertici più vicini, avremo: $3 \cdot \sqrt{(10\pi)^2 + 10^2}\, cm = 30 \cdot \sqrt{\pi^2 + 1}\, cm$.

14. (HSMC 2008) Two points *A* and *B* lie on a sphere of radius 12. The length of the line segment from *A* to *B* is $12 \cdot \sqrt{3}$. What is the length of the shortest path from *A* to *B* if every point of the path is on the sphere?

Due punti A e B giacciono su una sfera di raggio 12. *La lunghezza del segmento che va da A a B è* $12 \cdot \sqrt{3}$. *Qual è la lunghezza del cammino più breve sulla superficie sferica che va da A a B*?

Sia *C* il centro della sfera. Il piano passante per *A*, *B* e *C* taglia la sfera in una circonferenza che contien un arco che è il minimo cammino da *A* a *B*. Il triangolo *ABC* è isoscele, con *AC* = *BC* = 12 e *AB* = $12 \cdot \sqrt{3}$. È facile vedere che $A\hat{B}C = 120°$, quindi il cammino più breve è la lunghezza di questo arco, cioè is the length
of the arc, which 12 · 2π · 120/360 = 8π.

15. (MT 1995) What is the relation between the length of a tennis ball can and the circumference of the top of the can, if it can holds three balls snugly[1]?

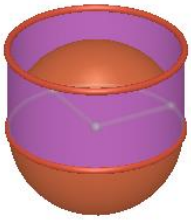
[1] perfettamente

Qual è la relazione fra l'altezza di una lattina che contiene esattamente 3 *palle da tennis e la circonferenza del coperchio*?
La circonferenza è $2\pi r$, con r raggio della lattina ma anche della palla, mentre l'altezza della lattina è $6r$, quindi si ha $\frac{2\pi r}{6r} = \frac{\pi}{3}$

Test di Verifica

1. **Seleziona le affermazioni corrette**
A Le sezioni di un cilindro con un piano non parallelo al suo asse sono ellissi B Un cilindro si chiama retto se è generato dalla rotazione di un quadrato attorno a un suo lato C La superficie laterale di un cilindro retto si ottiene moltiplicando la misura della sua altezza per la lunghezza della sua circonferenza di base. D Tutti i cilindri finiti hanno l'altezza E Facendo ruotare un parallelogramma attorno a una retta qualsiasi si ottiene sempre un cilindro
Risposte corrette: A – C
2. **Seleziona le affermazioni NON corrette**
A La superficie laterale di un cono si ottiene dal prodotto delle misure del suo apotema per la semicirconferenza di base. B Il lato obliquo del trapezio che genera un tronco di cono si chiama apotema C Un tronco di cono è retto se generato da un trapezio rettangolo che ruota attorno a una sua altezza D Solo per i coni retti si definisce il concetto di altezza E In un cono equilatero l'apotema è uguale al raggio della base
Risposte corrette: A – C – E
3. **Seleziona le affermazioni corrette**
A Per quattro punti passa una e una sola sfera. B Tutti i tetraedri sono inscrivibili in una sfera C Un piano Π e una sfera Σ fra loro secanti hanno in comune un'ellisse D Un piano Π e una sfera Σ sono fra loro tangenti se la distanza fra il centro di Σ e un qualsiasi punto di Π è uguale al raggio E Due sfere sono secanti se hanno in comune infiniti punti
Risposte corrette: B – C – E
4. **Seleziona le affermazioni NON corrette**
A La parte di superficie sferica facente parte di un segmento sferico si chiama calotta sferica B La parte di superficie sferica appartenente a uno spicchio sferico si dice fuso sferico
C Una zona sferica di altezza *h* relativa a una sfera di raggio *r* ha la stessa superficie di un cilindro di pari altezza e raggio D Una sfera ha la stessa superficie di un cerchio di raggio quadruplo E Solo i poliedri regolari e semiregolari sono inscrivibili e circoscrivibili a una sfera.
Risposte non corrette: D (il cerchio di raggio $4r$ ha superficie $16\pi r^2$) E (un qualsiasi tetraedro è inscrivibile e circoscrivibile).
5. **Quale dei seguenti poliedri può essere inscritto in una sfera?**
A Piramide retta B Poliedro archimedeo C Parallelepipedo rettangolo
D Icosaedro regolare E Tetraedro non ortocentrico
Risposte corrette: B – D – E
6. **Quanto misura la superficie totale di un cilindro equilatero di raggio che misura 1?**
A π B 2π C 6π D Non si può determinare conoscendo il solo raggio E Nessuno dei precedenti
L'altezza misura 2, quindi: $S = 2\pi \cdot 1 \cdot 2 = 4\pi$. Risposta corretta: E
7. **La superficie totale di un cono retto misura 90π *cm*², l'altezza 12 *cm*, quali fra le seguenti misure, in *cm*, è quella del raggio? A 5 B 12 C 13 D Non si può determinare dai dati E Nessuno dei precedenti**
$\pi r\sqrt{144+r^2} + \pi r^2 = 90\pi \Rightarrow r\sqrt{144+r^2} = 90 - r^2 \Rightarrow r^4 + 144r^2 = 8100 - 180r^2 + r^4 \Rightarrow r = 5$. Risposta A

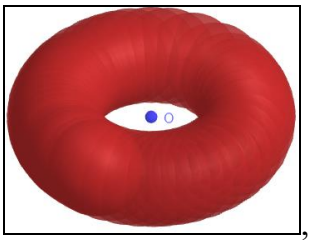
8. **Prendiamo *n* sferette uguali di raggio 1 e le mettiamo in linea retta in modo tale che ciascuna, a parte la prima e l'ultima, ne tocchi altre due. Che distanza vi è fra i centri della prima e dell'ultima sferetta?**
A n **B** $n - 2$ **C** $2n$ **D** $2n - 2$ **E Nessuna delle precedenti**
Dalla somma dei diametri, $2n$, dobbiamo eliminare 2 raggi, quindi risposta D
9. **Un cono retto ha per base un cerchio che ha lo stesso raggio di una sfera. La superficie del cono è metà di quella della sfera. Quanto vale il rapporto fra l'altezza del cono e il suo raggio di base?**
A 4 **B Un cono del genere non esiste** **C** $\sqrt{5}$ **D** $\sqrt{15}$ **E Non si può determinare dai dati**
$\pi r(a + r) = 2\pi r^2 \Rightarrow a + r = 2r \Rightarrow a = r$, che è impossibile. Risposta B
10. **Una sfera di raggio 1 è inscritta in un cilindro retto che a sua volta è inscritto in una sfera. Quanto misura la superficie della sfera maggiore?**
A 8π **B** 4π **C** 6π **D** π **E Nessuno dei precedenti**
Il cilindro ha raggio 1 e altezza 2, quindi la sfera maggiore ha raggio metà della diagonale della sezione rettangolare del cilindro, cioè $\sqrt{2}$ e superficie 8π. Risposta corretta: A
11. **Dato un rettangolo di dimensioni una doppia dell'altra, facciamo ruotare il rettangolo prima attorno al lato più corto, poi a quello più lungo. Quanto vale il rapporto fra le superfici laterali dei cilindri così ottenuti?**
Vale 1 perché una volta $r = 1$, $h = 2$ e un'altra volta $r = 2$, $h = 1$, in ogni caso la superficie laterale, $2\pi r$, non cambia.
12. **Alle basi di un cilindro retto di raggio 1 *cm*, incolliamo un cono retto di altezza doppia del raggio ed uguale a quella del cilindro. Determinare la superficie del solido.**
La superficie è somma delle superfici laterali dei tre solidi: $\left(4\pi + 2\pi\sqrt{1+4}\right)cm^2 = 2\left(2+\sqrt{5}\right)\pi cm^2$

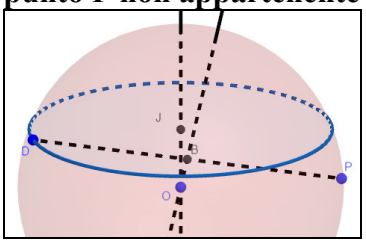


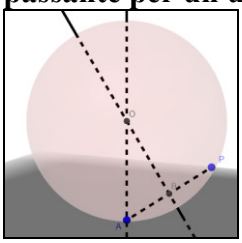
13. **In figura** **abbiamo una sfera ed un cilindro equilatero, se la superficie laterale del cilindro è *S*, quanto vale quella della sfera?**
La sfera ha raggio uguale all'altezza del cilindro, ma anche al raggio di base dello stesso, quindi si ha: $S = 2\pi r^2$ e $S_s = 4\pi r^2 = 2S$.
14. **Un cilindro si chiama equilatero se è** retto **e la sua altezza è uguale** al diametro della base. **La retta rispetto cui avviene la rotazione che genera un cilindro indefinito si chiama** asse del cilindro
15. **Date due sfere di raggi $r \le R$ e la cui distanza fra i centri è *D*, esse sono secanti se e solo se** $R - r < D < R + r$. **Se si ha $D = R + r$ sono** tangenti esternamente **Mentre se sono tangenti internamente allora** $D = R - r$.

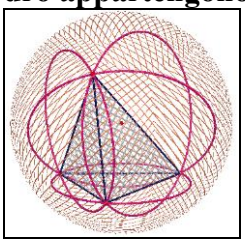
Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

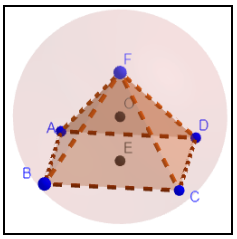
1. **(Accademia Navale) Descrivere la sfera come luogo di punti, il cono e il cilindro come luogo di rette.**
La sfera è il luogo dei punti dello spazio equidistanti da un punto fisso. Il cilindro è il luogo delle rette tangenti a una data circonferenza e parallele a una retta passante per il centro della circonferenza. Il cono è il luogo dei punti dello spazio tangenti a una circonferenza e incidenti in un punto non complanare alla circonferenza.
2. **(Accademia Navale) Descrivere il luogo dei punti dello spazio equidistanti da due punti assegnati.**
Il piano perpendicolare al segmento che ha per estremi i punti e passante per il punto medio di tale segmento.

3. **(Accademia Navale) Descrivere il luogo dei punti dello spazio equidistanti da due piani assegnati.**
   I piani bisettori degli angoli determinati dai piani.
4. **(Accademia Navale) Descrivere il luogo dei punti dello spazio equidistanti dai punti di una circonferenza assegnata.**
   È una ciambella (in termini geometrici un toro), 

   , con centro nella circonferenza e raggio pari alla distanza fissata.
5. **(Accademia Navale) Individuare il centro della sfera passante per una circonferenza γ e per un punto P non appartenente al piano di γ.**
   

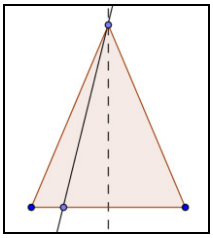
   Consideriamo la retta passante per il centro della circonferenza e perpendicolare al piano che la contiene, quindi l'asse di un segmento che ha per estremi *P* e un punto sulla circonferenza, l'intersezione delle due rette è il centro della sfera.
6. **(Accademia Navale) Individuare il centro della sfera tangente a un piano α in un suo punto A e passante per un ulteriore punto B non appartenente ad α.**
   

   L'intersezione della perpendicolare ad α in A e l'asse del segmento *AP*.
7. **(Accademia Navale) Descrivere il luogo dei centri delle sfere di raggio assegnato e tangenti a due piani non paralleli.**
   Le 4 rette parallele all'intersezione dei piani appartenenti ai piani bisettori e posti alla distanza dall'asse pari al raggio.
8. **(Accademia Navale) Dimostrare che le circonferenze circoscritte alle quattro facce di un tetraedro appartengono alla superficie di una stessa sfera.**
   
   Appartengono alla sfera circoscritta al tetraedro, infatti i piani assiali degl spigoli si incontrano nel centro della sfera, quindi anche le circonferenze hanno centri su questi piani.
9. **(Scuola superiore di Catania) Una piramide a base quadrata ha per facce laterali quattro triangoli equilateri. Se ogni spigolo della piramide ha lunghezza unitaria, qual è la lunghezza del raggio della sfera circoscritta alla piramide?**



L'altezza della piramide misura $\frac{\sqrt{2}}{2}$, come abbiamo provato più volte, questa è diametro della sfera, quindi il raggio misura $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

10. **(Medicina 1997) Sono date due sfere di raggi rispettivamente *R*1, *R*2 e superfici *S*1, *S*2. Se *R*1/*R*2 = 4 allora S1/S2: A) 2 B) 4 C) 8 D) 16 E) 64**
Il rapporto delle superfici equivale al quadrato del rapporto dei raggi, quindi 16, risposta D
11. **(Odontoiatria 2005) Se si raddoppia il raggio di una sfera, la sua superficie si moltiplica per:**
A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 2π
Dato che nella formula il raggio è al quadrato moltiplichiamo per 4, risposta C
12. **(Scienze della formazione primaria, Università di Cagliari 2008-09) Se due coni hanno area di base differente, allora di sicuro hanno:**
A) superficie differente B) volume differente C) altezza differente
D) apotema differente E) nessuna delle precedenti
Può accadere qualsiasi cosa, risposta E
13. **(Architettura 2009) Nei riguardi della rotazione nello spazio di un segmento *AB*, tenuto fisso il suo punto medio *M* ed escludendo le rotazioni con asse diretto come *AB* o ortogonale ad esso, quale delle seguenti figure si ottengono?**
A) cilindro B) ellissoide C) paraboloide D) cono a una falda E) cono a due falde
Risposta E
14. **(Architettura 2009) Consideriamo l'intersezione di un cilindro circolare con un piano secante. Allora l'intersezione: A) è un punto B) sono due rette incidenti C) è sempre una circonferenza D) può essere un'ellisse E) può essere una parabola**
Risposta D, in questo caso il piano incontra l'asse del cilindro non ortogonalmente.
15. **(Ingegneria 2009) A parità di tutte le altre condizioni (materiale, rugosità, stato di pulizia, etc.) serve meno quantità di pittura per tinteggiare: A) un cono circolare retto di altezza 1 *m* e raggio 1 *m* B) una sfera di raggio 1 *m* C) un cubo di lato 1 *m* D) un tetraedro regolare di spigolo 1 *m* E) un cilindro circolare retto di altezza 1 *m* e raggio 1 *m***
Consideriamo le superfici: A) $\pi\sqrt{2}m^2 \approx 4,4\,m^2$; B) $\frac{4}{3}\pi\, m^2 \approx 4,2\,m^2$; C) $6\pi\ m^2$; D) $\sqrt{3}\,m^2 \approx 1,7\,m^2$; E) $2\pi\ m^2 \approx 6,3\ m^2$. Risposta D.
16. **(Architettura 2010) Quale affermazione riguardante la sfera non è vera?**
A) Sezionando la sfera con piani si ottengono cerchi ed ellissi B) La sfera è una figura simmetrica C) Sulla superficie della sfera sono identificabili meridiani e paralleli D) La superficie sferica non è sviluppabile sul piano E) La superficie sferica è una superficie di rotazione
Risposta A
17. **(Architettura 2010) Dato un cono circolare retto sezionato con un piano "α" inclinato come in figura, quale sezione piana si ottiene?**



A) Circonferenza B) Ellisse C) Iperbole D) Triangolo E) Parabola
Risposta D