# 6. Geometria dello spazio ambiente

## 6.4 Il volume

## Concetto di volume e volume dei poliedri

1. **Con riferimento all'esercizio svolto, calcolare quanti panetti possiamo mettere nella scatola se poggiamo i panetti sulla loro faccia minore e ogni strato lo poggiamo sempre sulla base maggiore della scatola. Quanto spazio vuoto rimane?**
   0, perché l'altezza del panetto è maggiore di quella della scatola.
2. **Con riferimento all'esercizio svolto, calcolare a) quanti panetti al massimo possiamo mettere nella scatola se li poggiamo sulla loro faccia minore e ogni strato lo poggiamo sulla base minore della scatola; b) quanto spazio vuoto rimane?**
   a) Il massimo si ottiene poggiando il lato da 34 su quello da 250, mettendo quindi 250/34 = 7 (prendiamo solo la parte intera della divisione) panetti il lato da 65 su quello da 75, quindi una sola fila e infine un altro strato perché 330/120 = 2, quindi in totale 14.
   b) $(250 \cdot 75 \cdot 330 - 14 \cdot 120 \cdot 65 \cdot 34)\ mm^3 = 2474700\ mm^3$.
3. **Qual è il massimo numero di scatole di dimensioni 2 × 2 × 3 che possono essere messe dentro una scatola di dimensioni 3 × 4 × 5?**
   Il numero massimo si ottiene mettendo le facce 2 × 2 su quelle 4 × 5 , ottenendone così 4
4. **In un ambiente di lavoro le normative vigenti dispongono che ogni lavoratore debba avere un minimo di 12 $m^3$ di aria a disposizione, elevabili a 15 $m^3$ se le condizioni di ventilazione non sono ottimali. Quanti studenti possono essere messi, unitamente all'insegnante, in un'aula di dimensioni 6,50 × 7,20 × 3,10 $m^3$, nelle due configurazioni predette?**
   $6{,}50 \times 7{,}20 \times 3{,}10\ m^3/12\ m^3 \approx 12$; $6{,}50 \times 7{,}20 \times 3{,}10\ m^3/15\ m^3 \approx 9$, quindi escludendo l'insegnante abbiamo da 8 a 11 studenti.
5. **Il problema precedente, a parità di volume disponibile, ha sempre la stessa soluzione? Giustificare la risposta.**
   No, dipende anche dalla superficie a disposizione, nonché dalla forma della stanza.
6. **Tenuto conto di quanto stabilito nell'esercizio 3, quanto deve essere larga al minimo un'aula magna alta 8,45 *m* e larga 23,40 *m*, per potere contenere 250 persone, nell'ipotesi normativa minima?**
   $8{,}45 \cdot 23{,}40 \cdot x/12 \geq 250 \Rightarrow x \approx 15{,}18\ m$
7. **Numericamente il volume di un cubo uguaglia la superficie esterna. Determinare la misura dello spigolo.**
   $\ell^3 = 6\ell^2 \Rightarrow \ell = 6$
8. **Per effettuare un calco di statuine alte 6 *cm* sono necessari 0,81 *dl* di gesso. Quanti litri di gesso sono necessari per creare 750 statuine simili alla precedente ma alte 2 *cm*?**
   Se il rapporto delle altezze è 2/6 = 1/3, quello dei volumi è 1/27, quindi con 0,81 *dl* costruiamo 27 statuine da 2 *cm*, per farne 750 servono 750/27 · 0,81 *dl* = 22,5 *dl* = 2,25 *l*.
9. **Sezioniamo una piramide con un piano parallelo alla base in modo da ottenere un tronco di piramide di altezza metà di quella della piramide. Se il volume della piramide è 1 $m^3$, quanto misura quello del tronco?**
   Il rapporto fra i volumi della piramide di partenza e di quella eliminata è $(½)^3 = 1/8$, quindi il volume del tronco è 7/8 $m^3$.
10. **La piramide di Cheope ha una base quadrata di lato circa 230,34 *m* e un'altezza di circa 138 *m*. Nell'antichità la sua altezza era invece di circa 146,6 *m*. Di quanto è diminuito in percentuale il volume racchiuso dall'attuale piramide rispetto all'antichità? Per semplicità consideriamo trascurabile lo spessore esterno.**
    Visto che la base non è cambiata la percentuale richiesta equivale a quella del cambiamento dell'altezza, ossia: $\frac{138-146{,}6}{146{,}6} \approx -5{,}9\%$
11. **La Camera del Re, all'interno della piramide di Cheope, ha dimensioni di 10,47 *m* × 5,234 *m* e un soffitto piatto alto 5,974 *m*. Determinare la percentuale del suo volume rispetto alla piramide.**

$\frac{10,47 \cdot 5,234 \cdot 5,974}{230,34^2 \cdot 138} \approx 0,0045\%$.

**12. Un parallelepipedo rettangolo ha dimensioni 5 × 5 × 8. Quadruplichiamo il suo volume raddoppiando lo spigolo della base quadrata. Di quanto aumenta in percentuale la sua superficie?**

$\frac{2 \cdot \left(10^2 + 2 \cdot 80\right) - 2 \cdot \left(5^2 + 2 \cdot 40\right)}{2 \cdot \left(5^2 + 2 \cdot 40\right)} \approx 1,48$, quindi vi è stato un aumento di circa il 148%.

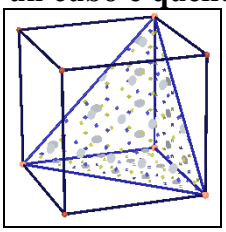
**13. Con riferimento al precedente quesito, se invece ci limitiamo a quadruplicare lo spigolo più lungo, di quanto aumenta in percentuale la superficie?**

$\frac{2 \cdot \left(5^2 + 2 \cdot 160\right) - 2 \cdot \left(5^2 + 2 \cdot 40\right)}{2 \cdot \left(5^2 + 2 \cdot 40\right)} \approx 2,29$ quindi circa il 229%.

**14. Determinare il volume di un tetraedro trirettangolo i cui spigoli che concorrono nel vertice trirettangolo misurano *a*, *b* e *c*.**

Ovviamente il tetraedro è una piramide retta, se consideriamo come base uno dei triangoli rettangoli, l'altezza relativa è il terzo spigolo noto, quindi il suo volume vale $\frac{abc}{6}$.

**15. Quanto misura il rapporto fra il volume di un cubo e quello del tetraedro trirettangolo ottenuto a partire da esso, come mostrato in figura?**

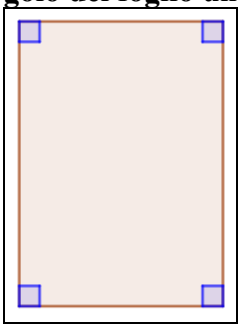


Dal precedente, il volume del tetraedro è $\frac{\ell^3}{6}$, quindi il rapporto richiesto è: $\frac{\ell^3}{\ell^3/6} = 6$.

**16. Se due solidi sono tali che, posti su uno stesso piano, le sezioni ottenute con piani paralleli al piano hanno aree diverse, possiamo dire che i solidi hanno diverso volume? Giustificare la risposta.**

Ovviamente no, la condizione stabilita dal principio di Cavalieri è sufficiente, non necessaria.

**17. A partire da un foglio rettangolare 10 × 14 costruiamo una scatola aperta, tagliando da ogni angolo del foglio un quadrato di lato 1. Determinare il volume della scatola.**



otterremo un parallelepipedo di dimensioni (10 – 1) × (14 – 1) × 1 = 96.

**18. Con riferimento al precedente quesito, se avessimo fatto lo stesso con un parallelepipedo rettangolo non cubo, il risultato sarebbe cambiato? Giustificare la risposta.**

No, basti pensare a un parallelepipedo di dimensioni 4, 6, 8 e a uno di dimensioni 2, 3, 72, che hanno lo stesso volume ma quali che siano le sezioni parallele a una qualsiasi delle facce del primo non saranno uguali alle corrispondenti del secondo.

**19. Dimostrare la formula stabilita dal Corollario 2.**

Un tetraedro regolare è una piramide di base un triangolo equilatero di area $\frac{\ell^2}{4}\sqrt{3}$ e di altezza relativa $\sqrt{\frac{2}{3}}\ell$, quindi ha volume: $\frac{1}{3}\frac{\ell^2}{4}\cancel{\sqrt{3}} \cdot \ell\sqrt{\frac{2}{\cancel{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{12}\ell^3$

**20. Dimostrare la formula stabilita dal Corollario 3.**

Un ottaedro regolare è formato da due piramidi regolari di base un quadrato di area $\ell^2$ e di altezza relativa $\frac{\ell}{\sqrt{2}}$, quindi ha volume: $\frac{\cancel{2}}{3}\ell^2 \cdot \frac{\ell\sqrt{2}}{\cancel{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}\ell^3$

**21. Calcolare il volume di un parallelepipedo rettangolo le cui facce hanno aree che misurano rispettivamente 12, 8 e 6.**

Abbiamo: $\begin{cases} ab = 12 \\ ac = 8 \\ bc = 6 \end{cases} \Rightarrow a^2b^2c^2 = 2^6 \cdot 3^2 \Rightarrow abc = 24$.

**22. Un parallelepipedo rettangolo a base quadrata ha il terzo spigolo metà degli altri due. Se la superficie totale è 1296 *m*², calcolare il volume.**

$2 \cdot (a^2 + a^2) = 1296\ m^2 \Rightarrow a^2 = 324\ m^2 \Rightarrow a = 18\ m \Rightarrow a^3/2 = 2916\ m^3$.

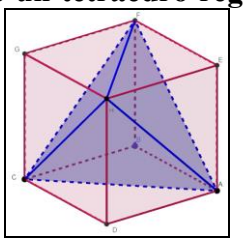
**23. Sezioniamo una piramide retta con un piano parallelo alla base in modo da ottenere un tronco di piramide di volume metà di quello della piramide. Se l'altezza della piramide è 1 *m*, quanto misura quella del tronco? *Suggerimento* Se l'altezza della piramide eliminata è *x* volte quella della piramide iniziale la sua area rispetto a quella della piramide è *x*² volte.**

Il rapporto fra le aree delle basi dei tronchi è $\sqrt[3]{2}$, quindi fra i volumi della piramide di partenza e di quella eliminata si ha: $V = 2V' \Rightarrow \frac{A \cdot h}{3} = 2 \cdot \frac{A' \cdot h'}{3} \Rightarrow \cancel{A} \cdot h = \frac{2\cancel{A} \cdot h'}{\sqrt[3]{4}} \Rightarrow h' = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}h = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}m$, perciò l'altezza del tronco misura $\left(1 - \frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)m$

**24. Aumentiamo ciascuno spigolo di un cubo del 50%, qual è l'aumento percentuale del volume del cubo?**

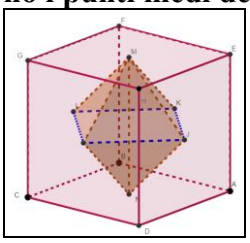
$\frac{(1,5\ell)^3 - \ell^3}{\ell^3} = 2,375 = 237,5\%$.

**25. Congiungendo quattro degli otto vertici di un cubo si ottiene un tetraedro regolare, quanto misura il volume del cubo se il lato del tetraedro misura $2 \cdot \sqrt{2}$ ?**



$\ell_T = \ell_C\sqrt{2} \Rightarrow \ell_C = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2 \Rightarrow \ell_C^3 = 8$.

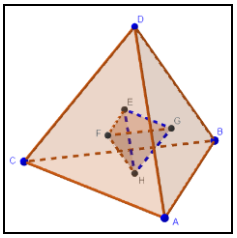
**26. Determinare il rapporto fra i volumi del cubo e dell'ottaedro regolare suo duale, i cui vertici sono i punti medi delle facce del cubo.**



L'ottaedro ha lato, che rispetto a quello del cubo vale $\sqrt{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2} = \frac{\ell}{\sqrt{2}}$, quindi:

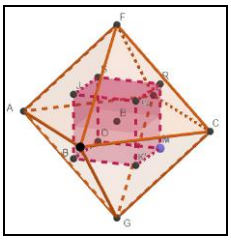
$$\frac{V_C}{V_O} = \frac{\ell^3}{\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{\ell}{\sqrt{2}}\right)^3} = 6$$

**27. Determinare il rapporto fra i volumi di un tetraedro regolare e del tetraedro in esso inscritto i cui vertici sono i centri delle facce.**




Il piano passante per i baricentri di tre facce divide l'altezza nello stesso rapporto in cui il baricentro divide la mediana di ogni faccia, quindi l'altezza del tetraedro piccolo è 1/3 di quella di quello grande, perciò il suo volume è 1/27.

**28. Determinare il rapporto fra i volumi di un ottaedro regolare e del cubo suo duale.**

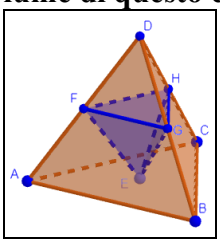



Il lato del cubo è 1/3 della distanza fra i vertici opposti dell'ottaedro, quindi, in funzione del lato dell'ottaedro, vale: $\frac{2\ell}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{3}\ell$, da cui: $\frac{V_O}{V_C}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{3}\ell^3}{\left(\frac{\sqrt{2}\ell}{3}\right)^3}=\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{3}\cdot\frac{27}{2\cancel{\sqrt{2}}}=\frac{9}{2}$.

**29. Un parallelepipedo rettangolo ha facce di aree *x*, *y* e *z* unità quadrate. Calcolare la misura del volume.**

$$\begin{cases} ab=x \\ ac=y \Rightarrow (abc)^2=xyz \Rightarrow V=abc=\sqrt{xyz} \\ bc=z \end{cases}$$

**30. Uniamo i punti medi di 3 spigoli di un tetraedro regolare con il baricentro della faccia che non contiene alcuno degli altri tre vertici fissati, ottenendo un altro tetraedro. In che rapporto è il volume di questo con quello iniziale? Giustificare la risposta.**




Il tetraedro è ovviamente regolare e i suoi spigoli misurano metà di quelli del tetraedro di partenza, pertanto il volume diventa $1/2^3 = 1/8$.

**31. Con un blocco di argilla di 1 $m^3$ costruiamo prima un cubo e poi 100 cubi tutti uguali. Possiamo dire che la superficie del cubo grande è uguale alla somma di quelle dei cubi piccoli? Giustificare la risposta.**

I cubetti hanno lato $\sqrt[3]{\frac{1}{100}}$, quindi hanno superficie totale $100\cdot 6\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{1}{100}\right)^2}=\frac{600}{10\sqrt[3]{10}}=\frac{60}{\sqrt[3]{10}}\neq 6$.

**32. Con riferimento al quesito 25 con dati generici, quanto vale il rapporto fra il volume del cubo e quello del tetraedro?**

In generale se $\ell_T=\ell\sqrt{2}$, la base ha area $A_T=\frac{\left(\ell\sqrt{2}\right)^2}{4}\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ell^2$, l'altezza misura: $h_T=\sqrt{\left(\ell\sqrt{2}\right)^2-\left(\frac{\cancel{2}}{3}\frac{\ell\sqrt{2}}{\cancel{2}}\sqrt{3}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\ell$. Quindi: $\frac{V_C}{V_T}=\frac{\ell^3}{\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{2}}\ell^2\cdot\frac{\cancel{2}\ell}{\cancel{\sqrt{3}}}\cdot\frac{1}{3}}=3$

**33. Il volume di un parallelepipedo rettangolo è 8 *cm*³, la superficie è 32 *cm*². Se le tre dimensioni sono in progressione geometrica (il rapporto fra la seconda e la prima è uguale a quello fra la terza e la seconda), quanto misura la loro somma?**

Le dimensioni hanno misure $a$, $aq$ e $aq^2$, quindi dobbiamo trovare $a(1 + q + q^2)$. Si ha: $\begin{cases} a^3q^3 = 8 \\ 2\left(a^2q + a^2q^2 + a^2q^3\right) = 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} aq = 2 \\ a^2q\left(1+q+q^2\right) = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} aq = 2 \\ 2a\left(1+q+q^2\right) = 16 \end{cases}$, quindi la somma cercata vale 8.

**34. Determinare il volume di un tetraedro trirettangolo che ha tre facce che sono triangoli rettangoli isosceli di lato uguale lungo $\ell$.**

Un tetraedro è una piramide, quindi il suo volume è: $\frac{1}{3} \cdot \frac{\ell^2}{2} \cdot \ell = \frac{\ell^3}{6}$.

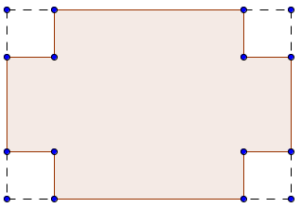
**35. Determinare il volume di un tronco di piramide di altezza *h* ottenuto sezionando una piramide di altezza *k* > *h*, in funzione del volume *V* della piramide.**

Il rapporto fra le altezze delle piramidi è $k/(k - h)$, quindi il rapporto delle loro aree di base è $\left(\frac{k}{k-h}\right)^2$, e fra i loro volumi: $\left(\frac{k}{k-h}\right)^3$. Perciò il volume del tronco è: $\left[\left(\frac{k}{k-h}\right)^3 - 1\right]V$.

**36. La piramide di Micerino attualmente ha una base quadrata di lato 103,4 *m* e un'altezza di 62 *m*. Se pensiamo di sezionare la piramide di Cheope (es. 10 per i dati) con un piano parallelo alla base in modo che togliendo tutta la parte al di sopra, quella rimanente abbia lo stesso volume racchiuso dalla piramide di Micerino, a che altezza dal suolo dovremmo porre il piano sezione?**

Tenuto conto del precedente esercizio abbiamo:

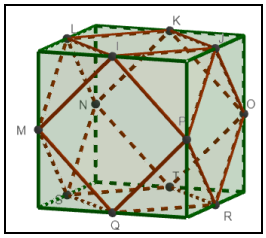
$$\left[\left(\frac{138}{138-h}\right)^3 - 1\right] \cdot \cancel{\frac{1}{3}} \cdot 230{,}34^2 \cdot 138 = \cancel{\frac{1}{3}} \cdot 103{,}4^2 \cdot 62 \Rightarrow \left(\frac{138}{138-h}\right)^3 - 1 \approx 0{,}13 \Rightarrow h \approx 5{,}5 .$$

**37. Per costruire una scatola senza coperchio, da un rettangolo ritagliamo 4 quadratini come mostrato in figura, quindi pieghiamo il rimanente.**  **Se così facendo otteniamo una scatola di 12*cm*³, di superficie 64 *cm*² e i pezzi eliminati hanno area totale di 36 *cm*², determinare le dimensioni del rettangolo di partenza.**

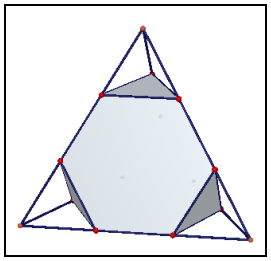
Indichiamo le dimensioni con $a$, $b$ e $c$. Se $c$ è lo spessore, si ha evidentemente $c^2 = 9 \Rightarrow c = 3$, poi si ha: $\begin{cases} 3ab = 12 \\ 2(3a+3b) + ab = 64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab = 4 \\ 6(a+b) + 4 = 64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab = 4 \\ a+b = 10 \end{cases} \Rightarrow z^2 - 10z + 4 = 0 \Rightarrow z = 5 \pm \sqrt{21}$. Queste sono le misure delle altre due dimensioni.

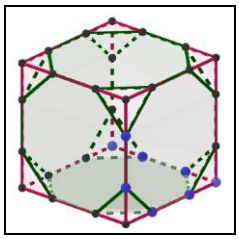
***Determinare una formula per il calcolo del volume dei seguenti poliedri in funzione del loro spigolo $\ell$***

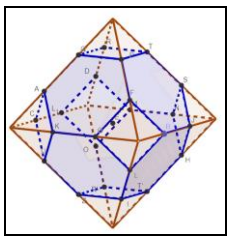
**38. a) Cubottaedro; b) Tetraedro troncato; c) Cubo troncato; d) Ottaedro troncato**

a) 

Dobbiamo eliminare dal cubo di lato $L$, 8 tetraedri trirettangoli di spigoli concorrenti nel vertice trirettangolo, pari a $L/2$: $V = L^3 - \cancel{8} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{L}{\cancel{2}}\right)^3 = \frac{5}{6} L^3$. Esprimendo in termini dello spigolo del cubottaedro: $V = \frac{5}{6}\left(\sqrt{2}\ell\right)^3 = \frac{5\sqrt{2}}{3}\ell^3$.

b) 
Dal volume del tetraedro di spigolo $L$, eliminiamo 4 tetraedri regolari di spigolo $L/3$, quindi: $V = \frac{\sqrt{2}}{12} L^3 - \cancel{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cancel{12}^3}\left(\frac{L}{3}\right)^3 = \frac{23\sqrt{2}}{324} L^3 = \frac{23\sqrt{2}}{324}(3\ell)^3 = \frac{23\sqrt{2}}{12}\ell^3$

c) 
Dal volume del cubo di spigolo $L$, eliminiamo 8 tetraedri trirettangoli che hanno i lati con il vertice dell'angolo retto in comune lunghi $\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)L$, quindi hanno volumi: $\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)^3}{48} L^3 = \frac{10 - 7\sqrt{2}}{24} L^3$. Pertanto il volume cercato misura: $L^3 - \cancel{8} \cdot \frac{10 - 7\sqrt{2}}{\cancel{24}^3} L^3 = \frac{7\sqrt{2} - 7}{3} L^3$, dato che $\ell = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)L \Rightarrow L = \left(\sqrt{2} + 2\right)\ell$, alla fine avremo: $V = \frac{7\sqrt{2} - 7}{3}\left(\sqrt{2} + 2\right)^3 \ell^3 = \frac{42\sqrt{2} + 56}{3}\ell^3$

d) 
Dal volume dell'ottaedro di spigolo $L$, eliminiamo 4 tetraedri regolari di spigoli $L/3$ e 2 piramidi regolari a base quadrata di spigolo $L/3$ e altezza ndi hanno volumi: $\frac{\sqrt{2}}{6} L$. Pertanto il volume cercato misura:

$$\frac{\sqrt{2}}{3} L^3 - \cancel{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cancel{12}^3}\left(\frac{L}{3}\right)^3 - \frac{\cancel{2}}{3} \cdot \left(\frac{L}{3}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cancel{6}^3} L = \frac{25\sqrt{2}}{81} L^3 = \frac{25\sqrt{2}}{81}(3\ell)^3 = \frac{25\sqrt{2}}{3}\ell^3$$

**39. Una piramide retta ha per base un triangolo equilatero di lato che misura $\ell$, se gli altri spigoli della piramide hanno misura *s*, determinarne il volume.**

L'altezza cade nel baricentro della base, quindi misura: $\sqrt{s^2-\left(\frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{\ell}{\cancel{2}}\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{s^2-\frac{\ell^2}{3}}$, perciò il volume misura: $\frac{1}{3}\cdot\frac{\ell^2}{4}\cancel{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3s^2-\ell^2}}{\cancel{\sqrt{3}}}=\frac{\ell^2\sqrt{3s^2-\ell^2}}{12}$.

**40. Tenuto conto del problema precedente stabilire la condizione che devono verificare le misure degli spigoli *s* se $\ell$ = 1.**

Il radicando deve essere positivo: $3s^2-1>0\Rightarrow s>\frac{\sqrt{3}}{3}$, ovviamente deve essere $s > 0$, quindi non si accetta l'altra soluzione algebrica della disequazione.

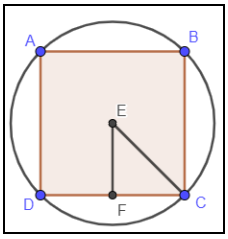
## Volume dei corpi rotondi

**1. Determinare il volume di un cilindro equilatero in funzione del suo raggio *r*.**
Dato che $h = 2r$, si ha: $V = 2\pi r^3$.

**2. Determinare il volume di un cono equilatero in funzione del suo raggio *r*.**

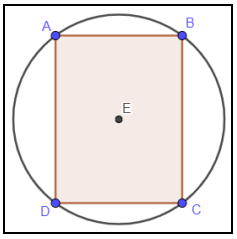
Dato che $a = 2r$ e quindi $h=\sqrt{3}r$, si ha: $V=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi r^3$

**3. Determinare il rapporto fra il volume di una sfera e del cilindro equilatero in essa inscritto.**




Il raggio $r$ e l'altezza $h = 2r$ del cilindro sono legati al raggio $R$ della sfera dalla relazione $R^2 = 2r^2$. Quindi: $\frac{\cancel{4}^{2}/3\cancel{\pi}R^3}{\cancel{2}\cancel{\pi}r^3}=\frac{2\cdot 2\sqrt{2}\cancel{r^3}}{3\cancel{r^3}}=\frac{4}{3}\sqrt{2}$

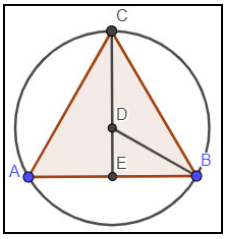
4. **Con riferimento al problema precedente, se il cilindro non è equilatero, il rapporto cambia? Giustificare la risposta.**




Il raggio $r$ e l'altezza $h$ del cilindro sono legati al raggio $R$ della sfera dalla relazione $R^2 = r^2 + h^2/4$, quindi il rapporto non è costante, ma dipende dalle dimensioni del cilindro.

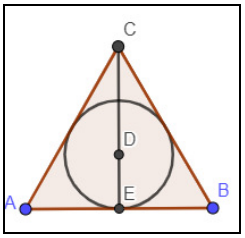
**5. Determinare il rapporto fra il volume di una sfera e del cono in essa inscritto.**
Non si può determinare, perché in una sfera si possono inscrivere infiniti coni

**6. Determinare il rapporto fra il volume di una sfera e del cono equilatero in essa inscritto.**




$R=\sqrt{r^2+\left(\frac{1}{3}h\right)^2}=\sqrt{r^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}r\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}r$, pertanto: $\frac{4/\cancel{3\pi}R^3}{\sqrt{3}/\cancel{3\pi}r^3}=\frac{4\left(2/\sqrt{3}\right)^3\cancel{r^3}}{\sqrt{3}\cancel{r^3}}=\frac{32}{9}$

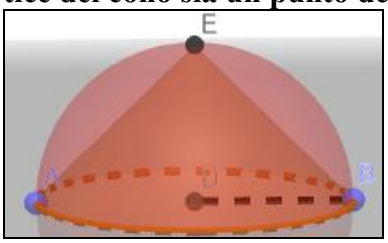
**7. Determinare il rapporto fra il volume di un cono equilatero e della sfera in esso inscritta.**




Stavolta $r_s = \frac{1}{3}h_c = \frac{\sqrt{3}}{3}r_c$, quindi: $\frac{\cancel{1/3\cdot\pi}\sqrt{3}\cancel{r^3}}{4/\cancel{3\pi}\left(\sqrt{3}/3\cancel{r}\right)^3} = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}/9} = \frac{9}{4}$.

**8. Un contenitore cilindrico contenente olio combustibile è pieno per 2/5, sapendo che aggiungendo 6 litri sarà pieno per 5/8, determinare la capacità del contenitore in litri.**
$6 = (5/8 - 2/5)V \Rightarrow 6 = 9V/40 \Rightarrow V = 80/3$.

**9. Un cono è inscritto in una semisfera, in modo che i due solidi abbiamo la base in comune e il vertice del cono sia un punto della semisfera, qual è il rapporto dei due volumi?**



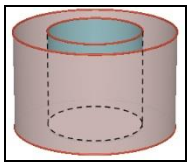

chiaramente l'altezza del cilindro misura quanto il suo raggio, quindi: $\frac{\cancel{2/3\cdot\pi}\cancel{r^3}}{1/\cancel{3\pi}r^3} = 2$.

**10. Un cilindro ha altezza 3 e raggio di base 8. A partire da esso costruiamo altri due cilindri, uno di altezza (3 + *x*) e raggio 8, l'altro di altezza 3 e raggio (8 + *x*). Se i due cilindri hanno lo stesso volume, quanto vale *x*?**
$8^2 \cdot (3 + x)\,\pi = (8 + x)^2 \cdot 3\,\pi \Rightarrow 192 + 64x = 192 + 48x + 3x^2 \Rightarrow 3x^2 = 16x \Rightarrow x = 16/3$.

**11. Un cono ha altezza 2 e raggio di base *r*. A partire da esso costruiamo altri due coni, uno di altezza 8 e raggio *r*, l'altro di altezza 2 e raggio (6 + *r*). I due coni hanno lo stesso volume, quant'è *r*?**
$r^2 \cdot 8\pi/3 = (6 + r)^2 \cdot 2\pi/3 \Rightarrow 4r^2 = 36 + 12r + r^2 \Rightarrow r^2 - 4r - 12 = 0 \Rightarrow r = 2 + 4 = 6$.

**12. Un cono circolare retto ha la base che ha il raggio uguale a quello di una data sfera, il cui volume è doppio di quello del cono. Determinare il rapporto fra l'altezza e il raggio di base del cono.**
$4/3\pi r^3 = 2/3\pi r^2 h \Rightarrow 2r = h \Rightarrow h/r = 2$.

**13. Facciamo ruotare un triangolo rettangolo di cateti lunghi 3 e 4, di un giro completo rispetto a ciascuno dei cateti, quanto misura il rapporto dei volumi dei due coni così determinati?**
$\frac{\cancel{1/3\cdot\pi}\cdot 3^2\cdot 4}{\cancel{1/3\cdot\pi}\cdot 4^2\cdot 3} = \frac{3}{4}$.

14. **Un pozzo ha la forma di cilindro di diametro 2 *m*.**  **Per evitare infiltrazioni si costruisce tutto attorno al pozzo un rivestimento di muratura per un certo spessore. Se sappiamo che il volume della parte in muratura è uguale al volume del pozzo, quanto misura lo spessore?**
$V_M = V_P \Rightarrow V_{M+P} - V_P = V_P \Rightarrow V_{M+P} = 2V_P \Rightarrow \pi(r + 1)^2 \cdot h = 2\pi \cdot h \Rightarrow (r + 1)^2 = 2 \Rightarrow r + 1 = \sqrt{2} \Rightarrow r = \left(\sqrt{2} - 1\right)m$.

**15. Una lattina standard è un cilindro di diametro 5,24 *cm*. Se può contenere 250 *ml*, quanto è alta, in centimetri?**
$1cm^3 = 1ml$, quindi: $2{,}62^2\,\pi \cdot h = 250 \Rightarrow h = 250/(2{,}62^2\,\pi)\ cm \approx 11{,}6\ cm$.

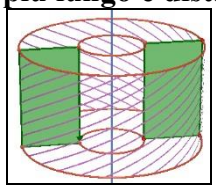
**16. Con riferimento al precedente esercizio, senza mutare il diametro di base, quanto sarà alta la lattina se conterrà 330 *ml*?**
$h = 330/(2{,}62^2\,\pi)\ cm \approx 15{,}3\ cm$

**17. Una lattina *slim* invece ha un diametro di 5 *cm*, se ha la stessa altezza del precedente esercizio, quanto liquido potrà contenere?**
$2{,}5^2\,\pi \cdot 15{,}3\ cm^3 \approx 300\ ml$

**18. In una scatola di scarpe di 140 *mm* × 280 *mm* × 93 *mm*, inseriamo sfere di polistirolo di diametro 3 *cm*. Quante sfere mettiamo al massimo e quanta aria rimane nella scatola?**

In teoria dovremmo avere: $\frac{14 \cdot 28 \cdot 9{,}3}{4/3\pi \cdot 1{,}5^3} \approx 257$, ma dobbiamo tenere conto anche del rapporto fra i diametri delle sfere e le dimensioni della scatola. Consideriamo la faccia maggiore della scatola, possiamo inserire 14/3 ≈ 4 sfere per riga e 28/3 ≈ 9 per colonna, quindi 36 per strato. In altezza possiamo inserire 9,3/3 ≈ 3 strati, quindi abbiamo un totale di 108 sfere. Rimane pertanto uno spazio vuoto di circa $(14 \cdot 28 \cdot 9{,}3 - 108 \cdot 4/3\pi \cdot 1{,}5^3)\ cm^3 \approx 2119\ cm^3$.

**19. Facciamo ruotare un rettangolo di lati lunghi 3 e 4, di un giro completo attorno a una retta appartenente allo stesso piano del rettangolo, parallela al lato più lungo e distante da esso 2. Quanto misura il volume della regione anulare così determinata?**

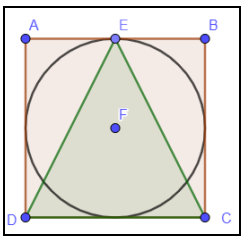


$(3 + 2)^2 \cdot 4\,\pi - 2^2 \cdot 4\,\pi = 84\pi$

**20. Con riferimento al precedente esercizio, cambia qualcosa se la rotazione avviene attorno a una retta parallela al lato più corto, sempre distante 2 da esso?**

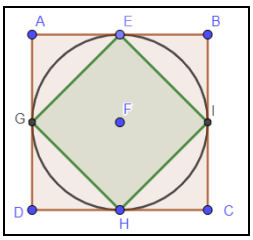
$(4 + 2)^2 \cdot 3\,\pi - 2^2 \cdot 3\,\pi = 96\pi$.

**21. Dimostrare che se in un cilindro equilatero inscriviamo un cono e una sfera, il volume della sfera è dato dalla differenza fra il volume del cilindro e quello del cono.**



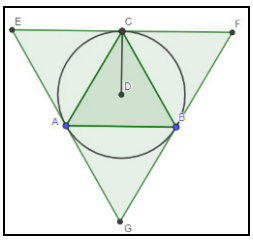

Il cono ha lo stesso raggio e altezza del cilindro; la sfera ha raggio quanto quello del cilindro. Perciò $2\pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot (2r) = \frac{4}{3}\pi r^3$.

**22. In una stessa sfera inscriviamo e circoscriviamo un cilindro equilatero, quanto misura il rapporto dei loro volumi?**




Il raggio del cilindro circoscritto è uguale a quello della sfera, quello inscritto ha raggio pari a $\frac{\sqrt{2}}{2}r$. Quindi $\frac{\cancel{2\pi r^3}}{\cancel{2\pi}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cancel{r}\right)^3} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

**23. In una stessa sfera inscriviamo e circoscriviamo un cono equilatero, quanto misura il rapporto dei loro volumi?**




Il raggio del cono circoscritto è il doppio di quello sfera; quello del cono inscritto è la metà di quello circoscritto, quindi il rapporto dei volumi è 8.

**24. Un cilindro è inscritto in una sfera. Il rapporto fra il raggio della sfera e l'altezza del cilindro è 3/2, determinare il rapporto fra i loro volumi.**

Nell'esercizio 2 abbiamo visto che si ha: $R^2 = r^2 + h^2/4$, se inoltre $R/h = 3/2$ si ha: $h = 2/3R$, quindi: $R^2 = r^2 + R^2/9 \Rightarrow r^2 = 8/9\ R^2$. Infine il rapporto cercato è: $\dfrac{\cancel{4}/\cancel{3}\cancel{\pi}\cancel{R^3}}{\cancel{\pi}\dfrac{\cancel{8}^{2}}{9}\cancel{R^2}\cdot\dfrac{2}{\cancel{3}}\cancel{R}} = \dfrac{9}{4}$.

**25. Una bolla di sapone si posa su un tavolo senza spezzarsi, ma formando una semisfera di uguale volume della bolla. Determinare il rapporto fra i raggi dei due solidi.**

La bolla ha raggio $R$, la semisfera raggio $r$. Si ha: $\dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{2}{3}\pi r^3 \Rightarrow \dfrac{R}{r} = \sqrt[3]{2}$

**26. Per raddoppiare il volume di una lattina di aranciata aumentiamo il diametro del 20%, di quanto dobbiamo aumentarne l'altezza, in percentuale?**

Deve essere $\pi(r + 0{,}2r)^2 \cdot (h + xh) = 2\pi r^2 h \Rightarrow 1{,}44x = 2 - 1{,}44 \Rightarrow x = 7/18 \approx 39\%$.

**27. In una lattina di forma cilindrica vi sono 2 palle da tennis che hanno lo stesso diametro della lattina e, insieme, la stessa altezza della lattina. Quanta percentuale di spazio all'interno resta libera?**

La parte non occupata dalle palline è, in funzione del raggio $r$ delle palline e della base del cilindro, $\pi r^2 \cdot 4r - 2\cdot\dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{4}{3}\pi r^3$, che rispetto al volume della lattina è 1/3.

**28. Un tetraedro regolare ha lo stesso volume di una sfera, quanto vale il rapporto fra la superficie della sfera e quella del tetraedro?**

Si ha: $\dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{\sqrt{2}}{12}\ell^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{2}}{16\pi}}\ell$. Il rapporto è: $\dfrac{4\pi r^2}{\sqrt{3}\ell^2} = \dfrac{4\pi\left(\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{2}}{16\pi}}\ell\right)^2}{\sqrt{3}\ell^2} = \dfrac{4\pi\sqrt[3]{\dfrac{2}{4^4\pi^2}}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{\cancel{2}\pi}{\cancel{4}^{2}}}}{\sqrt{3}} = \sqrt[6]{\dfrac{\pi^2}{108}}$.

**29. Un ottaedro regolare ha lo stesso volume di una sfera, quanto vale il rapporto fra la superficie della sfera e quella dell'ottaedro?**

Si ha: $\dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{\sqrt{2}}{3}\ell^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{2}}{4\pi}}\ell$. Il rapporto è: $\dfrac{4\pi r^2}{2\sqrt{3}\ell^2} = \dfrac{\cancel{4}^{2}\pi\left(\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{2}}{4\pi}}\ell\right)^2}{\cancel{2}\sqrt{3}\ell^2} = \dfrac{2\pi\sqrt[3]{\dfrac{2}{16\pi^2}}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}}}}{\sqrt{3}} = \sqrt[6]{\dfrac{\pi^2}{27}}$.

**30. Un icosaedro regolare ha la stessa superficie di una sfera, quanto vale il rapporto fra il volume della sfera e quello di un cubo che ha lo spigolo il doppio di quello dell'icosaedro?**

Si ha: $4\pi r^2 = 5\sqrt{3}\ell^2 \Rightarrow r = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{5\sqrt{3}}{\pi}}\ell$. Il rapporto è:

$$\frac{4/3\pi r^3}{8\ell^3} = \frac{\dfrac{\cancel{4}}{3}\pi\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{5\sqrt{3}}{\pi}}\ell\right)^3}{\cancel{8}^{2}\ell^3} = \frac{\cancel{\pi}}{6}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{5\sqrt{3}}{\cancel{\pi}}\cdot\sqrt{\frac{5\sqrt{3}}{\pi}} = \frac{5\sqrt{3}}{48}\cdot\sqrt{\frac{5\sqrt{3}}{\pi}}.$$

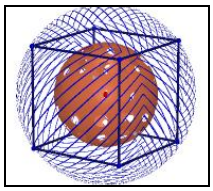
**31. Un cubo ha lo stesso volume di un cono equilatero, quanto vale il rapporto fra la superficie del cono e quella del cubo?**

Si ha: $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi r^3 = \ell^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{3}}{\pi}}\ell$. Il rapporto è: $\dfrac{\pi r\cdot 2r}{6\ell^2} = \dfrac{\cancel{2}\pi\left(\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{3}}{\pi}}\ell\right)^2}{\cancel{6}^{3}\ell^3} = \dfrac{\pi}{3}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{3}{\pi^2}} = \sqrt[3]{\dfrac{\pi}{9}}$.

**32. L'apotema di un tetraedro regolare è lungo quanto lo spigolo di un ottaedro regolare, determinare il rapporto fra i volumi dei due solidi.**

Si ha: $a = \ell_8, a = \dfrac{\ell_4}{2}\sqrt{3} \Rightarrow \ell_8 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\ell_4$, da cui: $\dfrac{\cancel{\sqrt{2}}/\cancel{12}^{4}\ell_4^3}{\cancel{\sqrt{2}}/3\ell_8^3} = \dfrac{\cancel{\ell_4^3}}{4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cancel{\ell_4}\right)^3} = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$

**33. Determinare il rapporto fra i volumi delle sfere inscritte e circoscritte allo stesso cubo**



Il rapporto fra i raggi è quello fra il lato del cubo e la sua diagonale, quindi è $\frac{1}{\sqrt{3}}$, perciò il rapporto fra i volumi è $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$

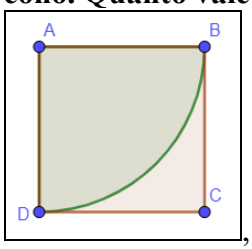
**34. Con riferimento al problema 27, cosa accade se le palline sono *n*?**

Sia *n* il numero delle palline. Stavolta avremo, che la parte non occupata dalle palline è, in funzione del raggio *r* delle palline e della base del cilindro, $\pi r^2 \cdot 2nr - n \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3} n\pi r^3$, che rispetto al volume della lattina è sempre 1/3.

**35. Una lattina cilindrica è formata usando un pezzo di metallo quadrato e due dischi circolari di diametro 5,24 *cm*. Quanto liquido può contenere, in *ml*?**

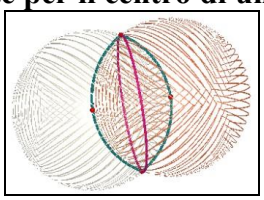
Il lato del quadrato deve valere quanto la circonferenza dei dischi, cioè 5,24π *cm* ≈ 16,46 *cm*, quindi anche l'altezza della lattina ha questa misura, perciò il suo volume è circa $2{,}62^2\pi \cdot 16{,}46\ cm^3 \approx 355\ ml$.

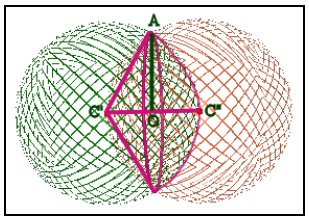
**36. In un quadrato di lato 1 tracciamo un arco di centro uno dei vertici *A* e passante per altri due vertici consecutivi ad *A*. Tagliamo il settore circolare così determinato e con esso costruiamo un cono. Quanto vale il volume di tale solido?**




, i lati del quadrato costituiscono l'apotema del cono, mentre l'arco rappresenta la circonferenza di base ed essa misura ovviamente π/2 (è ¼ della circonferenza di raggio 1), quindi per il raggio di base del cono si ha: $2\pi r = \pi/2 \Rightarrow r = ¼$. L'altezza del cono misura $\sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Infine il volume: $\pi \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{32}\pi$

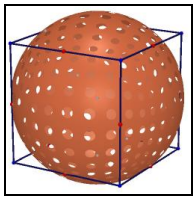
**37. Consideriamo la sfera passante per il centro di un'altra sfera uguale. Quanto misura in funzione del raggio, il volume comune?**






Calcoliamo metà del volume cercato, che è un segmento sferico di altezza *r*/2 e altezza $\sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}r$, quindi ha volume $\frac{\pi}{3} \cdot \left(3\frac{r}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}r\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^2 = \frac{3-\sqrt{3}}{\cancel{6}^{2}} \cdot \frac{\cancel{3}}{4}\pi r^3 = \frac{3-\sqrt{3}}{8}\pi r^3$.

Infine il volume cercato è il doppio: $\frac{3-\sqrt{3}}{4}\pi r^3$.

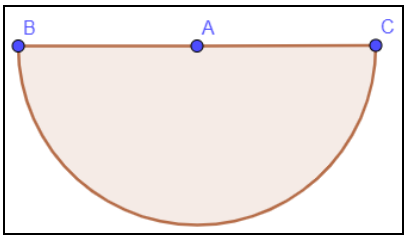
**38. Il centro delle sfere inscritta e circoscritta a un cubo è anche centro dell'intersfera che tocca tutti gli spigoli del cubo.**  **Determinare il rapporto dei volumi delle due sfere inscritta e circoscritta con questa terza sfera.**

Il raggio della sfera circoscritta è metà della diagonale del cubo: $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$; di quella inscritta è metà dello spigolo: $\frac{\ell}{2}$, quello dell'intersfera è la distanza dal centro del cubo al punto medio di uno spigolo, quindi: $\frac{\ell\sqrt{2}}{2}$. Perciò i rapporti cercati sono i cubi dei rapporti dei raggi: $\left(\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\sqrt{2}}\right)^3=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$ e $\left(\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\sqrt{2}}\right)^3=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{3\sqrt{6}}{4}$.

**39. In due cubi cavi uguali immettiamo delle sfere tutte uguali fra loro in modo che le sfere tocchino tutte le facce del cubo e l'eventuale coperchio. Nel primo ne immettiamo 27, nel secondo 64 più piccole delle precedenti. Se le sfere sono costituite dello stesso materiale, quale dei due cubi così riempiti ha al suo interno maggiore spazio vuoto?**

Se tocchiamo tutte le facce vuol dire che abbiamo 3 file da 3 palle nel primo caso, ciascuna di raggio : $\ell/3$ e 4 file da 4 palle di raggio $\ell/4$ nel secondo. Quindi gli spazi vuoti sono: $\ell^3-\cancel{27}\cdot\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\ell}{\cancel{3}}\right)^3=\frac{3-4\pi}{3}\ell^3$ e $\ell^3-\cancel{64}\cdot\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\ell}{\cancel{4}}\right)^3=\frac{3-4\pi}{3}\ell^3$, Quindi i due cubi hanno uguali spazi vuoti.

**40. Una semicirconferenza di diametro 12 *cm* è piegata in modo da formare un cono, il cui vertice è il centro della semicirconferenza e gli estremi del diametro coincidano. Quanto misura il volume?**




Il cono ha apotema uguale al raggio della semicirconferenza, quindi 6 *cm*, circonferenza di base uguale alla semicirconferenza, quindi raggio di base 3*cm* ($2\pi r = 6\pi$) Quindi l'altezza del cono misura: $\sqrt{6^2-3^2}\,cm=3\sqrt{3}cm$. Infine il volume: $\frac{1}{\cancel{3}}\pi 3^2\cdot\cancel{3}\sqrt{3}cm^3=9\sqrt{3}\pi\,cm^3$

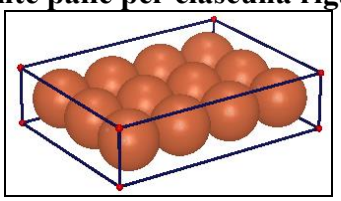
**41. All'interno di un tetraedro regolare di spigolo 10 *cm* pieno d'acqua, inseriamo un cilindro equilatero. Se in questo modo dal tetraedro fuoriescono i 3/8 dell'acqua, quanto misura la superficie laterale del cilindro?**

L'acqua fuoriuscita rappresenta il volume del cilindro inserito, quindi abbiamo: $2\pi r^3=\frac{\cancel{3}}{8}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cancel{12}^{\,4}}\cdot 10^3cm^3\Rightarrow r=\frac{\cancel{10}^{\,5}}{\cancel{4}^{\,2}}\cdot\sqrt[6]{\frac{2}{\pi^2}}\,cm=\frac{5}{2}\cdot\sqrt[6]{\frac{2}{\pi^2}}\,cm$. Infine la superficie è $\cancel{4}\pi\left(\frac{5}{\cancel{2}}\cdot\sqrt[6]{\frac{2}{\pi^2}}\right)^2cm^2=25\sqrt[3]{2\pi}\,cm^2$.

**42. Usando una lastra di alluminio da 6,32 $m^2$ riusciamo a costruire 220 lattine di diametro di base di 65,0 *mm*, tenendo conto che per ottenere base e coperchio ritagliamo un quadrato invece che un cerchio, eliminando poi quello che non ci serve vogliamo sapere il volume della lattina e quanta parte di alluminio non viene usata.**

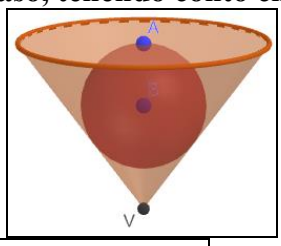
Ogni lattina si ottiene tagliando un rettangolo di area $65{,}0\pi \times h\ mm^2$ e due quadrati di area $65{,}0^2\ mm^2$. Ciò significa che $6320000 = 220 \cdot (65{,}0\pi h + 2 \cdot 65{,}0^2) \Rightarrow h \approx 99{,}2\ mm$. Quindi la lattina ha un volume di circa $\pi \cdot 3{,}25^2 \cdot 9{,}92\ cm^3 = 329\ ml$. Non usiamo $220 \cdot (65{,}0^2 - 32{,}5^2\pi) \approx 0{,}20\ m^2$.

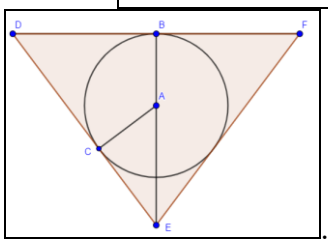
**43. In una scatola sono disposte alcune palle uguali di raggio 5 *cm*, in modo da riempire completamente la scatola, nelle tre dimensioni. Se il volume della scatola è 60 *dm*³ e la sua superficie totale 154 *dm*², quante righe di palle e quante palle per ciascuna riga contiene la scatola?**



Abbiamo $n$ palle per riga e $m$ per colonna, quindi la scatola ha dimensioni: $n \times m \times 1\ dm^3$. Quindi possiamo scrivere: $\begin{cases} mn = 60 \\ 2\cdot(mn+m+n) = 154 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mn = 60 \\ m+n = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 10 \\ n = 6 \end{cases}$, ovviamente i valori sono simmetrici e interscambiabili.

**44. Un vaso ha l'interno a forma di cono circolare retto. Nel vaso è adagiata una sfera di raggio 6 *cm* che tocca le pareti del cono ad una distanza di 8 *cm* dal vertice, si calcoli l'altezza del cono e quanta acqua può essere versata nel vaso, tenendo conto che la sfera non assorbe acqua.**



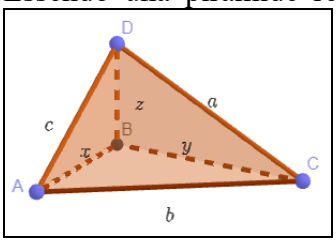




Consideriamo la sezione piana . I triangoli $DBE$ e $CAE$ sono fra loro simili, inoltre $DB$ e $DC$ sono uguali perché segmenti di tangenza condotti dallo stesso punto. Abbiamo perciò: $\overline{AE} = \sqrt{6^2+8^2}\ cm = 10\,cm \Rightarrow \overline{AB} = 16\,cm$ e $\frac{\overline{DB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AE}} \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{8+x}{10} \Rightarrow 10x = 48+6x \Rightarrow x = 12$. Quindi l'acqua ha volume $\frac{1}{3}\pi \cdot 144 \cdot 16\,cm^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot 216\,cm^3 = 480\pi\,cm^3 = 0{,}48\pi\,\ell$

## La sfida

**1. Dimostrare che in un tetraedro trirettangolo (che ha tre facce che sono triangoli rettangoli), i cui spigoli della faccia che non è un triangolo rettangolo, misurano *a*, *b* e *c*, il volume è $\sqrt{(S^2-a^2)\cdot(S^2-b^2)\cdot(S^2-c^2)}/6$, in cui $S^2$ è la somma dei quadrati degli altri tre spigoli.**

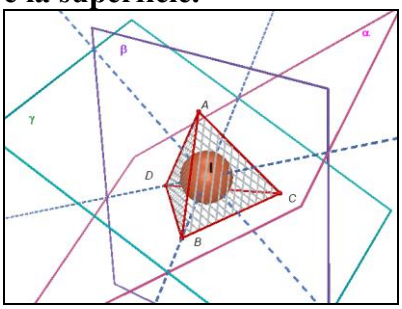
Essendo una piramide retta il suo volume si trova con la consueta formula per le piramidi rette.

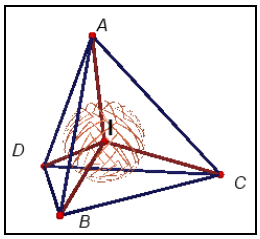



Se scegliamo come base una di quelle a forma di triangolo rettangolo il vo-

lume sarà *xyz*/6. Verifichiamo che questo valore coincide con quello stabilito dalla formula da dimostrare: $\frac{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2-z^2-y^2\right)\cdot\left(x^2+y^2+z^2-x^2-y^2\right)\cdot\left(x^2+y^2+z^2-x^2-z^2\right)}}{6}=\frac{\sqrt{x^2\cdot z^2\cdot y^2}}{6}=\frac{xyz}{6}$.

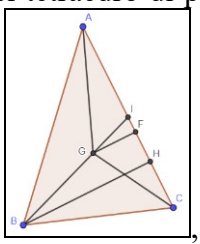
2. **Dimostrare che il raggio della sfera inscritta in un tetraedro è il rapporto fra il triplo del volume e la superficie.**




Consideriamo i piani che bisecano tre dei 6 angoli diedri che determinano il tetraedro. Il loro punto comune è centro della sfera inscritta nel tetraedro. Se adesso uniamo il centro della sfera con i vertici del tetraedro, 

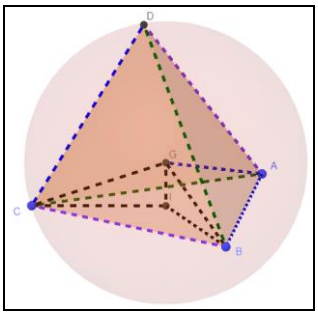
dividiamo il tetraedro in 4 tetraedri il cui volume si ottiene moltiplicando l'area di una faccia per il raggio della sfera e dividendo per 3. Quindi effettivamente si ha: $V=V_1+V_2+V_3+V_4=\frac{r\cdot\left(S_1+S_2+S_3+S_4\right)}{3}\Rightarrow r=\frac{3V}{S}$.

3. **Dimostrare che unendo il baricentro di un tetraedro ai vertici dello stesso si ottengono 4 tetraedri di uguale volume.**

Il volume di un tetraedro è dato dal prodotto della superficie di una faccia per l'altezza a essa relativa. Sappiamo che il baricentro divide ciascuna mediana nel rapporto ¼. Quindi ognuno dei 4 vertici ha anche un'altezza che rispetto a quella del tetraedro di partenza è ¼. Per provare questo fatto consideriamo l'analoga questione sul triangolo, 

, *DF* è l'altezza nel triangolo *ACG*, mentre *BH* è quella in *ABC*. I triangoli *BIC* e *GIF* sono ovviamente simili e il rapporto fra *BI* e *GI* è lo stesso che fra *BH* e *GF*. Tornando al discorso iniziale, il volume di ognuno dei 4 tetraedri piccoli è perciò ¼ di quello iniziale.

4. **Dimostrare che il raggio *R* della sfera circoscritta a un tetraedro equifacciale di spigoli $\ell_i$, *i* = 1, …, 3 e la cui faccia generica ha area *S* misura $\frac{\sqrt{9V^2+\ell_1^2\ell_2^2\ell_3^2}}{4S}$.**




Per per quanto provato nell'unità sui tetraedri, in un tetraedro equifacciale il circocentro è anche baricentro. Quindi per quanto detto nel quesito precedente il tetraedro che ha faccia *ABC* ha volume ¼ di quello del tetraedro *ABCD*. Quindi $\frac{V}{4}=\frac{S\cdot h}{3}\Rightarrow V=\frac{4Sh}{3}$, dobbiamo cal-

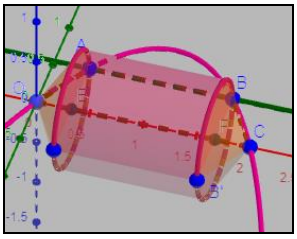
colare l'altezza: $h=\overline{GI}=\sqrt{R^2-\overline{IC}^2}$. Sappiamo però che $G$ è anche incentro e quindi $GI$ è il raggio della sfera inscritta, e sappiamo pure che $I$ è circocentro della faccia $ABC$, quindi $IC$ è raggio della circonferenza circoscritta ad $ABC$, perciò $\overline{IC}=\frac{\ell_1\ell_2\ell_3}{4S}$ e $\overline{GI}=\sqrt{R^2-\frac{\ell_1^2\ell_2^2\ell_3^2}{16S^2}}=\frac{\sqrt{16R^2S-\ell_1^2\ell_2^2\ell_3^2}}{4S}$, perciò:

$$V=\frac{\cancel{4S}}{3}\cdot\frac{\sqrt{16R^2S-\ell_1^2\ell_2^2\ell_3^2}}{\cancel{4S^2}}\Rightarrow 9V^2+\ell_1^2\ell_2^2\ell_3^2=16R^2S^2\Rightarrow R=\frac{\sqrt{9V^2+\ell_1^2\ell_2^2\ell_3^2}}{4S}.$$

5. **Dimostrare che il raggio della sfera inscritta in un tetraedro è uguale al rapporto fra il triplo del volume e la superficie del tetraedro.**
Unendo l'incentro con i vertici del tetraedro lo dividiamo in 4 tetraedri più piccoli, il cui volume è area di una faccia per l'altezza relativa che ovviamente è il raggio della sfera. Quindi possiamo dire che si ha: $V=V_1+V_2+V_3+V_4=\frac{r\left(S_1+S_2+S_3+S_4\right)}{3}\Rightarrow r=\frac{3V}{S_1+S_2+S_3+S_4}=\frac{3V}{S_T}$.

## Temi assegnati agli esami di stato

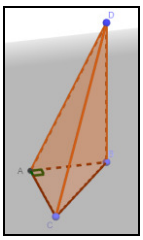
1. **(Liceo scientifico suppletiva 1977/78) In un sistema di assi coordinati si considerino: la parabola di equazione $y=2x-x^2$ che incontra l'asse delle ascisse nei punti *O* e *C*; la retta di equazione *y* = *k* (con 0 < *k* < 1) che incontra la parabola nei punti *A* e *B*. Si esprima, mediante il parametro *k*, il volume del solido generato dal trapezio *OABC* in una rotazione completa attorno all'asse delle ascisse.**




Come si vede abbiamo un cilindro sormontato da due coni. I raggi comuni ai solidi misurano *k*, le altezze dei coni misurano $1-\sqrt{1-k}$, infatti si ha: $k=2x-x^2\Rightarrow x=1\pm\sqrt{1-k}$. L'altezza del cilindro $2-2\left(1-\sqrt{1-k}\right)=\sqrt{1-k}$. Infine il volume cercato misura:

$$V(k)=2\cdot\frac{\pi\cdot k^2\cdot\left(1-\sqrt{1-k}\right)}{3}+\pi\cdot k^2\cdot\sqrt{1-k}=\frac{2\pi k^2}{3}\cdot\left(1+2\sqrt{1-k}\right).$$

2. **(Istituto magistrale 1983/84) Dato il triangolo rettangolo *ABC* di cateti $\overline{AB}=3m,\overline{AC}=4m$, sulla perpendicolare al piano del triangolo, per il vertice *B* si prenda un punto *D* e si dimostri che *AD* è perpendicolare ad *AC*. Supposto che sia $\overline{AD}=2\overline{AB}$, si calcolino l'area della superficie ed il volume della piramide *ABCD*.**



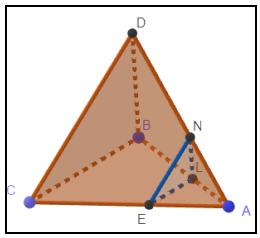
Si ha: $\overline{AC}^2+\overline{AD}^2=\overline{AC}^2+\overline{AB}^2+\overline{BD}^2=\overline{BC}^2+\overline{BD}^2=\overline{CD}^2$. Quindi: $\overline{BD}=3\sqrt{3}\,m$ e la superficie totale della piramide misura: $\frac{3\cdot4+4\cdot6+3\sqrt{3}\cdot5+3\cdot3\sqrt{3}}{2}m^2=\left(18+12\sqrt{3}\right)m^2$. Il volume:

$$\frac{1}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}\cdot\cancel{4}^2}{\cancel{2}}\cdot3\sqrt{3}m^3=6\sqrt{3}\,m^3.$$

3. **(Istituto magistrale 1996/97) È assegnato il tetraedro regolare di vertici *A*, *B*, *C*, *D* e di spigolo lungo *s*. a) Calcolare il suo volume. b) Indicato con *E* il punto dello spigolo *AC* che a partire da *A* lo divide internamente in parti direttamente proporzionali ai numeri 2 e 3, condurre per *E* il**

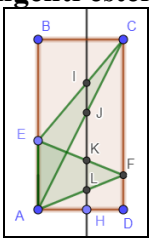
**piano β parallelo alla faccia *BCD* e, indicata con *S*" la sezione di β con il tetraedro, calcolare il volume della piramide avente come vertice *A* e come base *S*".**

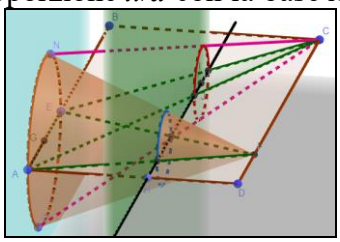
a) Sappiamo già che il volume di un tetraedro regolare misura $\frac{\sqrt{2}}{12}s^3$.

b) 

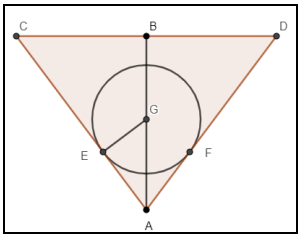
A questo punto anche il tetraedro *AENL* è regolare e il suo spigolo misura 2/5*s*, quindi il suo volume è $\frac{\sqrt{2}}{12}\left(\frac{2s}{5}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{\cancel{12}^{\,3}}\cdot\frac{\cancel{8}^{\,2}}{125}s^3 = \frac{2\sqrt{2}}{375}s^3$.

**4. (Liceo scientifico PNI 1996/97) Si consideri in un piano α un rettangolo *ABCD* i cui lati *BC* e *AB* misurano rispettivamente *a* e 2*a*. Sia *AEF* con *E* ∈ *AB* e *F* ∈ *CD*, un triangolo isoscele la cui base *AE* ha misura 2*r*. Il candidato: a) dimostri che una retta *s* parallela ad *AB*, a distanza *x* da essa, interseca i triangoli *AEF* ed *AEC* secondo segmenti uguali; b) detta $C_1$ la circonferenza di diametro *AE* e appartenente al piano γ passante per *AB* e perpendicolare ad α, e detti $T_1$ e $T_2$ i coni di base $C_1$ e vertici rispettivamente nei punti *F* e *C*, dimostri che le sezioni $C'_1$ e $C'_2$ di detti coni con il piano γ′, passante per la retta *s* e parallelo al piano γ, sono circonferenze; c) determini i volumi dei coni $T_1$ e $T_2$; d) determini, per via sintetica o analitica, il valore di *x* per il quale $C'_1$ e $C'_2$ sono tangenti esternamente.**

a) 

Dobbiamo provare che i segmenti *IJ* e *KL* sono isometrici. Si ha: $\overline{AH} = x$, dato che *s* è parallela ad *AB*, i segmenti *KL* e *IJ* sono nella proporzione *x*/*a* con la base *AE* comune ai triangoli cui appartengono, quindi hanno la stessa misura. b) 
Essendo i piani paralleli, anche le loro sezioni con i coni avranno la stessa forma, ossia come le basi. c) I coni hanno basi uguali e altezze pure, dato che i piani hanno le stesse distanza dal segmento *CD* dove stanno i vertici. Quindi i volumi uguali valgono: $\pi r^2 a/3$. d) Le circonferenze hanno come diametri i segmenti *IJ* e *KL*, quindi saranno tangenti esternamente quando *J* e *K* coincideranno, ossia quando *s* passerà per l'intersezione di *EF* con *AC*. Per determinarlo stabiliamo un sistema di riferimento cartesiano con origine in *A* ed assi passanti per *AD* e *AB*. Avremo $E \equiv (0; 2r)$, $F \equiv (a; r)$, $C \equiv (a; 2a)$. La retta per *EF* ha equazione: $\frac{y-r}{2r-r} = \frac{x-a}{0-a} \Rightarrow r(x-a) + a(y-r) = 0 \Rightarrow rx + ay - 2ar = 0$; quella per *AC*: $y = 2x$. Quindi la loro intersezione: $rx + 2ax - 2ar = 0 \Rightarrow x = \frac{2ar}{r+2a}$.

**5. (Istituto magistrale 1998) In una sala ben arredata fa bella mostra di sé un vaso il cui interno ha la forma di un cono circolare retto di apotema 30 *cm* e altezza 24 *cm*. Nel vaso è adagiata una sfera che tocca le pareti del cono ad una distanza di 10 *cm* dal vertice. a) Si calcoli il raggio della sfera; b) si dica, data anche l'impenetrabilità della sfera, se nel vaso possono essere versati sei litri di acqua; c) nel caso affermativo, si calcoli l'altezza, approssimata ai decimi di millimetro, da questa raggiunta.**

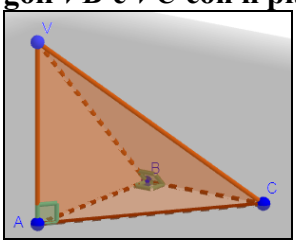



a) Si ha: $\overline{BC}=\sqrt{30^2-24^2}\,cm=18\,cm$, i triangoli $ABC$ e $AGE$ sono simili. $\frac{\overline{BC}}{\overline{EG}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}}\Rightarrow\frac{\cancel{18}^{\,3}}{r}=\frac{\cancel{24}^{\,\cancel{4}\,2}}{\cancel{10}^{\,5}}\Rightarrow r=\frac{15}{2}cm=7{,}5\,cm$. b) Il volume disponibile per l'acqua è: $\frac{1}{3}\pi\cdot324\cdot24\,cm^3-\frac{\cancel{4}}{3}\pi\cdot\frac{225}{\cancel{4}}cm^3=2517\pi\,cm^3\approx,7{,}9\,\ell$, quindi la risposta è affermativa. c) Supponiamo che l'acqua nel vaso superi la sfera, dobbiamo quindi calcolare l'altezza di un tronco di cono di volume 1900 $cm^3$. Troviamo questo volume come differenza fra il volume del vaso e il volume di un cono di altezza $h$, da trovare, il cui raggio misura 18 · $h$/24 $cm$. Quindi $\frac{1}{3}\pi\cdot324\cdot24-\frac{1}{3}\pi\cdot\left(\frac{\cancel{18}^{\,3}\cdot h}{\cancel{24}^{\,4}}\right)^2\cdot h\approx1900\,cm^3\Rightarrow h\approx\sqrt[3]{\frac{16}{9}\cdot\left(7776-\frac{5700}{\pi}\right)}cm\approx21{,}9\,cm$.

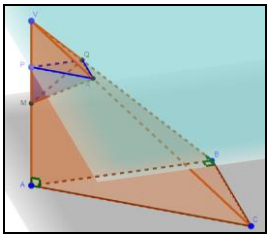
**6. (Istituto magistrale PNI 1998/99) Un gioiello è stato realizzato prevalentemente in oro (peso specifico = 19,32 *kg/dm*³) e la sua forma geometrica è un tetraedro regolare di altezza $\sqrt{3}\,cm$. L'oro impiegato nella realizzazione del gioiello occupa il 75% del volume del tetraedro. Quale è stato il costo dell'oro se la sua quotazione al momento della realizzazione era di 8,35 euro per grammo?**

Il volume del tetraedro è $\frac{\sqrt{2}}{12}\ell^3$ e si ha: $h=\sqrt{\frac{2}{3}}\ell\Rightarrow\ell=\sqrt{\frac{3}{2}}h$, quindi l'oro ha un volume di: $\frac{3}{4}\cdot\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{12}^{\,4}}\frac{\cancel{3}}{2}\sqrt{\frac{3}{\cancel{2}}}h^3=\frac{3\sqrt{3}}{32}cm^3$. Si ha: 19,32 $kg/dm^3$ = 19,32 $g/cm^3$, quindi l'oro ha un peso di $19{,}32\frac{g}{cm^3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{32}cm^3\approx3{,}14g$ e quindi un costo di 3,14$g$ · 8,35€/$g$ = € 26,21.

**7. (Liceo scientifico PNI 1998/99) In un piano α è assegnato il triangolo *ABC*, retto in *B*, i cui cateti *AB* e *BC* misurano rispettivamente 4 e 3. Si conduca per il punto *A* la perpendicolare al piano α e sia *V* un punto di questa per cui $\overline{VA}=\overline{AB}$. Il candidato a) dimostri, geometricamente o algebricamente, che, come tutte le altre facce del tetraedro *VABC*, anche la faccia *VBC* è un triangolo rettangolo, il cui angolo retto è $V\hat{B}C$; b) calcoli il volume e la superficie totale del tetraedro; c) detto *M* il punto medio di *VA* e *P* un punto dello stesso segmento a distanza *x* da *V*, esprima in funzione di *x* il volume *V* del tetraedro *MPQR*, essendo *Q* ed *R* le rispettive intersezioni degli spigoli *VB* e *VC* con il piano β parallelo ad α e passante per *P*.**

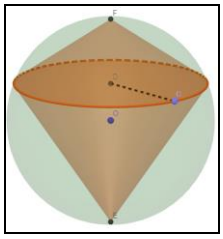



a) Lo abbiamo provato più volte, non è altro che il teorema delle 3 perpendicolari, abbiamo a che fare con un tetraedro quadrirettangolo. b) Quindi il volume misura: $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{2}\cdot\overline{VA}=\frac{3\cdot4\cdot4}{6}=8$; la superficie totale: $\frac{3\cdot4+4\cdot4+4\cdot5+3\cdot4\sqrt{2}}{2}=6\cdot\left(4+\sqrt{2}\right)$. c)



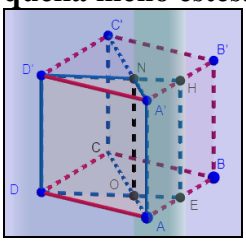
Sia $VP = x$, $0 \le x \le 4$. I triangoli $VPQ$ e $VAB$ sono simili, così come $ABC$ e $PQR$, quindi $\overline{VP} = \overline{PQ} = x, \frac{\overline{QR}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{QR} = \frac{3}{4}x$. Inoltre $\overline{MP} = |2 - x|$, quindi il volume del tetraedro $MPQR$ è $V(x) = \frac{x^2 \cdot |x-2|}{8}, 0 < x < 4$.

**8. (Istituto magistrale 2000/2001) La misura, in *decimetri*, del raggio di una sfera è data dalla soluzione dell'equazione: $(x - 1)^3 + x^2 = x \cdot (x - 1)^2 + 4$. Nella sfera sono inscritti due coni *circolari retti* aventi la base comune e le superfici laterali nel rapporto 3/4 Il candidato calcoli: a) il rapporto tra i volumi dei due coni; b) la misura del raggio della base comune dei coni; c) il peso, approssimato ai *grammi*, del solido costituito dai due coni, supposto che sia realizzato con legno di noce di peso specifico 0,82.**

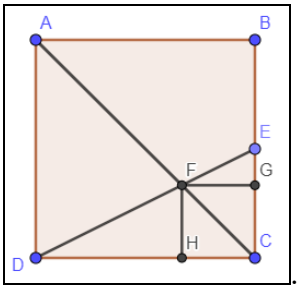


a) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + x^2 - x^3 + 2x^2 - x - 4 = 0 \Rightarrow 2x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5/2$. Indichiamo con $h$ e $5 - h$ le altezze dei due coni, i quali hanno lo stesso raggio di base, per gli apotemi consideriamo il rapporto delle superfici laterali: $\frac{\cancel{\pi r} \cdot a'}{\cancel{\pi r} \cdot a} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{a'}{a} = \frac{3}{4} \Rightarrow a' = \frac{3}{4}a$. Mentre il rapporto fra i volumi: $\frac{V'}{V} = \frac{\cancel{3\pi r^2} \cdot h'}{\cancel{3\pi r^2} \cdot h} = \frac{h'}{h}$. $FEC$ è un triangolo rettangolo perché inscritto in una semicirconferenza, pertanto per il I teorema di Euclide: $a'^2 = h' \cdot 5$ e $a^2 = h \cdot 5 \Rightarrow h'/h = (a'/a)^2 = 9/16$, che è il rapporto cercato. b) Il raggio delle base comuni ai coni è l'altezza relativa all'ipotenusa, quindi: $r = \sqrt{h \cdot (5-h)}$, d'altro canto $h' = \frac{9}{16}h = 5 - h \Rightarrow \frac{\cancel{25}^{5}}{16}h = \cancel{5}^{1} \Rightarrow h = \frac{16}{5}dm = 3,2\,dm$. Infine: $r = \sqrt{3,2 \cdot 1,8}\,dm = 2,4\,dm$. c) $V_{Tot} = \pi \cdot 2,4^2 \cdot 5/3\ dm^3 \approx 30,16\ dm^3$. Quindi pesa $0,82 \cdot 30,16\ kg \approx 24,731\ kg$.

**9. (Liceo scientifico 2000/2001) Si consideri il cubo di spigoli *AA'*, *BB'*, *CC'*, *DD'*, in cui due facce opposte sono i quadrati *ABCD* e *A'B'C'D'*. Sia E il punto medio dello spigolo *AB*. I piani *ACC'A'* e *D'DE* dividono il cubo in quattro parti. Dimostrare che la parte più estesa è il quintuplo di quella meno estesa.**




Il cubo è diviso in 4 prismi retti di uguale altezza, pertanto il rapporto dei volumi equivale al rapporto delle aree. Consideriamo quindi la suddivisione del quadrato.



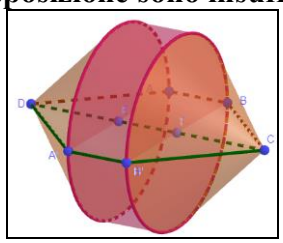
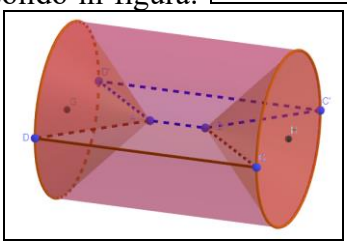

. Facilmente si vede che la parte più estesa è *ABEF* e quella meno estesa è *CEF*. D'altro canto *FGHC*, in cui *FG* e *FH* sono altezze dei relativi triangoli, è un quadrato. I triangoli *DCE* e *DHF* sono simili e si ha: $DH/FH = DC/CF = 2$. Pertanto $(2 - HC) = 2HF$ da cui $HC = HF = 2/3$. Infine l'area di *EFC* misura 1/3. Mentre l'area del quadrilatero misura $2 - 1/3 = 5/3$.

**10. (Liceo scientifico 2001/2002) Due tetraedri regolari hanno rispettivamente aree totali *A'* e *A"* e volumi *V'* e *V"*. Si sa che *A'/A"* = 2. Calcolare il valore del rapporto *V'/V"*.**

Facilmente possiamo dire che il rapporto delle aree è uguali al rapporto dei quadrati degli spigoli, mentre il rapporto dei volume è uguale al rapporto dei cubi degli spigoli, quindi:

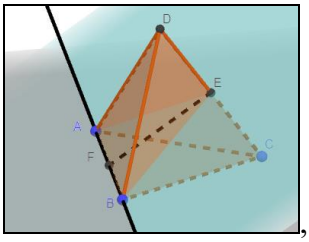
$$\left(\frac{\ell}{\ell'}\right)^2 = 2 \Rightarrow \left(\frac{\ell}{\ell'}\right)^3 = \left[\left(\frac{\ell}{\ell'}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}\,.$$

**11. (Liceo scientifico 2001/2002) Il rapporto fra la base maggiore e la base minore di un trapezio isoscele è 4. Stabilire, fornendone ampia spiegazione, se si può determinare il valore del rapporto tra i volumi dei solidi ottenuti facendo ruotare il trapezio di un giro completo dapprima intorno alla base maggiore e poi intorno alla base minore o se i dati a disposizione sono insufficienti.**

Ruotando attorno alla base maggiore otteniamo il solido in figura:  ruotando attorno alla base minore otteniamo una figura simile,  solo che i coni stavolta devono essere sottratti al volume del cilindro. In ogni caso tutti i solidi hanno come raggio di base l'altezza del trapezio. Pertanto il rapporto dei volumi dei due solidi è:

$$\frac{V_{BM}}{V_{Bm}} = \frac{\cancel{\pi \cdot r^2} \cdot \left[b_m + 1/3 \cdot \left(B_M - b_m\right)\right]}{\cancel{\pi \cdot r^2} \cdot \left[B_M - 1/3 \cdot \left(B_M - b_m\right)\right]} = \frac{3b_m + 4b_M - b_m}{12b_M - 4b_m + b_m} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}\,.$$

**12. (Liceo scientifico 2002/2003) Si consideri un tetraedro regolare *T* di vertici *A*, *B*, *C*, *D*. a) Indicati rispettivamente con *V* ed *S* il volume e l'area totale di *T* e con *r* il raggio della sfera inscritta in *T*, trovare una relazione che leghi *V*, *S* ed *r*. b) Considerato il tetraedro regolare *T '* avente per vertici i centri delle facce di *T*, calcolare il rapporto fra le lunghezze degli spigoli di *T* e *T '* e il rapporto fra i volumi di *T* e *T '*. c) Condotto il piano α, contenente la retta *AB* e perpendicolare alla retta *CD* nel punto *E*, e posto che uno spigolo di *T* sia lungo *s*, calcolare la distanza di *E* dalla retta *AB*.**

a) Abbiamo già visto (La sfida quesito 2) che $r = \frac{3V}{S}$; b) I centri sono baricentri delle facce, quindi il rapporto fra gli spigoli è 3 e quello dei volumi $3^3 = 27$; c) 

, data la simmetria del poliedro, $E$ ed $F$ sono punti medi dei rispettivi spigoli, quindi $BE$ è mediana, perciò misura $\frac{\sqrt{3}}{2}s$, perciò $FE$ misura $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}\, s = \sqrt{\frac{1}{2}}s = \frac{\sqrt{2}}{2}s$

**13. (Liceo scientifico 2004/2005) I centri delle facce di un cubo sono i vertici di un ottaedro. a) È un ottaedro regolare? b) Quale è il rapporto tra i volumi dei due solidi?**
Vedere l'esercizio 26 del primo paragrafo.

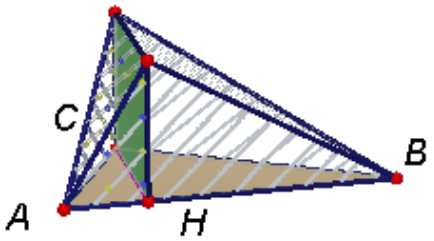
**14. (Liceo scientifico 2005/2006) La capacità di un serbatoio è pari a quella del cubo inscritto in una sfera di un metro di diametro. Quanti sono, approssimativamente, i litri di liquido che può contenere il serbatoio?**

Il cubo ha diagonale lunga quanto il diametro della sfera: $d = d_m \Rightarrow \ell\sqrt{3} = d_m \Rightarrow \ell = \frac{\sqrt{3}}{3}d_m = \frac{\sqrt{3}}{3}m$.

Perciò il volume del cubo è circa $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 m^3 \approx 0{,}192\, m^3 = 192\, litri$.

**15. (Liceo scientifico 2007/2008) Si consideri la seguente proposizione: "*Se due solidi hanno uguale volume, allora, tagliati da un fascio di piani paralleli, intercettano su di essi sezioni di uguale area*". Si dica se essa è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.**
La proprietà è certamente falsa, basta pensare a due solidi di altezza diversa posti sullo stesso piano. Ci saranno sezioni che incontrano uno dei due solidi e non l'altro. Ma continua a non valere anche se avessero la stessa altezza, basti pensare a un cubo di lato 1 e a una piramide di base quadrata di area 3.

**16. (Liceo scientifico 2007/2008) Il triangolo rettangolo *ABC* ha l'ipotenusa *AB* = *a* e l'angolo $C\widehat{A}B = \pi/3$ ed è la base di un solido *W*. Si calcoli il volume di *W* sapendo che le sue sezioni, ottenute tagliandolo con piani perpendicolari ad *AB*, sono tutti quadrati.**
Il solido è praticamente formato da due piramidi aventi la base quadrata in comune, $CH^2$.



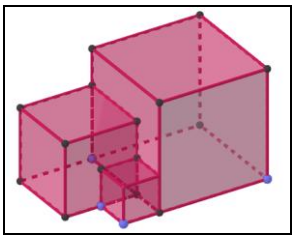
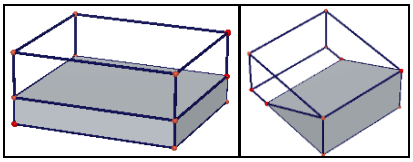

Quindi il volume è: $\frac{1}{3}\cdot\overline{CH}^2\cdot\overline{AB} = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a\right)^2\cdot a = \frac{a^3}{16}$.

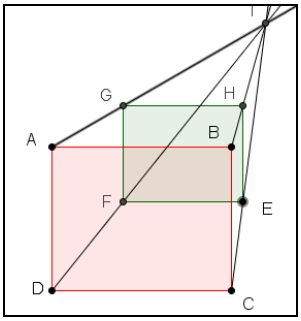
**17. (Liceo scientifico 2012/2013) Di un tronco di piramide retta a base quadrata si conoscono l'altezza *h* e i lati *a* e *b* delle due basi. Si esprima il volume V del tronco in funzione di *a, b* e *h*, illustrando il ragionamento seguito.**
Il volume si ottiene come la differenza fra il volume della piramide che abbiamo troncato e il volume della parte troncata. Cioè è $1/3 \cdot (a^2 \cdot h_1 - b^2 \cdot h_2)$. Dobbiamo sostituire le altezze delle due piramidi con l'altezza del tronco. Sappiamo che: $\begin{cases} h = h_1 - h_2 \\ \frac{a^2}{b^2} = \frac{h_1^2}{h_2^2} \end{cases}$. Risolvendo il sistema con un metodo a piacere,

troviamo due soluzioni, una sola delle quali accettabile: $\begin{cases} h_1 = \dfrac{a}{a-b} \cdot h \\ h_2 = \dfrac{b}{a-b} \cdot h \end{cases}$. Adesso sostituiamo:

$$\frac{1}{3} \cdot \left( a^2 \cdot \frac{a}{a-b} - b^2 \cdot \frac{b}{a-b} \right) \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^3 - b^3}{a-b} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \left( a^2 + ab + b^2 \right) \cdot h .$$

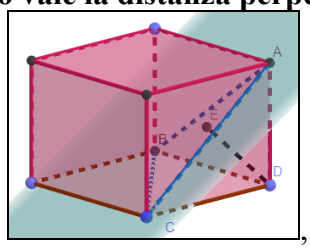
## Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

1. **(AHSME 1951) Il raggio di una scatola cilindrica è 8 pollici e la sua altezza 3 pollici. Aumentiamo il raggio o l'altezza di una stessa quantità *x*, quanto vale *x* se i due volumi sono uguali?**
   Deve essere $8^2(3 + x) = 3(8 + x)^2 \Rightarrow 3x^2 - 16x = 0 \Rightarrow x = 16/3$.
2. **(AHSME 1985) Il volume di un certo solido rettangolare è 8 *cm*$^3$, la sua superficie totale è 32 *cm*$^2$, e le tre dimensioni sono in progressione geometrica (cioè sono del tipo *a*, *ab*, *ab*$^2$, con *b* > 0 e diverso da 1). Quanto misura la somma delle lunghezze di tutti gli spigoli in *cm*?**
   Il volume è $a^3b^3 = 8 \Rightarrow ab = 2$. La superficie: $2(a^2b + a^2b^2 + a^2b^3) = 32 \Rightarrow ab(a + ab + ab^2) = 16 \Rightarrow 2(a + 2 + 2b) = 16 \Rightarrow a + 2 + 2b = 8 \Rightarrow a + 2b = 6$. La somma degli spigoli: $4a(1 + b + b^2)$. Si ha:
   $\begin{cases} ab = 2 \\ a = 6 - 2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6b - 2b^2 = 2 \\ a = 6 - 2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 - 3b + 1 = 0 \\ a = 6 - 2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \\ a = 3 \mp \sqrt{5} \end{cases}$. La somma cercata quindi misura:
   $$4\left(3 \mp \sqrt{5}\right)\left[1 + \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} + \left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^2\right] = 4\left(3 \mp \sqrt{5} + \frac{9-5}{2} + \frac{9-5}{2} \cdot \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right) = 4\left(3 \cancel{\mp \sqrt{5}} + 2 + 3 \cancel{\pm \sqrt{5}}\right) = 32$$
3. **(AHSME 1994) Incolliamo fra loro tre cubi di volumi 1, 8 e 27. In tal modo possono ottenersi diversi solidi. Quanto vale la minima superficie ottenibile?**
   Gli spigoli dei cubi misurano 1, 2 e 3. La minima superficie si ha quando facciamo in modo da incollare un'intera faccia in modo che questa venga sottratta alla superficie del nuovo solido. Quindi avremo
   
   $6 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2) - 2 \cdot (1^2 + 2^2) - 2 \cdot 1^2 = 84 - 10 - 2 = 72$.
4. **(MT1995) Tutto il ghiaccio in un contenitore si è sciolto. Il contenitore ha facce rettangolari alte 16 pollici. Se ruotiamo il contenitore (vedi le figure) l'acqua copre esattamente una faccia ma solo 3/4 del fondo. Se rimettiamo il contenitore in orizzontale a che livello si troverà l'acqua?**
   
   Il volume dei due solidi deve essere uguale, quindi: $abc = 16 \cdot \frac{3}{4}\, ab/2 \Rightarrow c = 6$ pollici.
5. **(MT1995) In figura vi è la vista prospettica di un solido rettangolare. *AB* = 15 e *AD* = 10. Trovare *AE* in modo che i numeri che misurano la superficie e il volume siano uguali.**

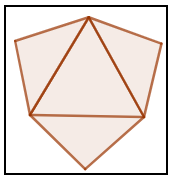



*AE* è la diagonale del parallelepipedo, detta $x$ la misura incognita del terzo spigolo deve essere: $150x = 2 \cdot (150 + 10x + 15x) \Rightarrow 100x = 300 \Rightarrow x = 3$.

**6. (AHSME 1996) Dato un parallelepipedo rettangolo di lati lunghi 4, 4 e 3. *A*, *B*, e *C* sono adiacenti al vertice *D*. Quanto vale la distanza perpendicolare di *D* dal piano determinato da *A*, *B*, e *C*?**

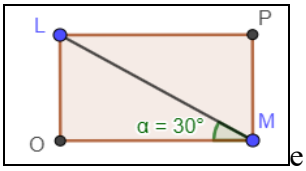
Sia $h$ la distanza *DE* 

, che altri non è che quella della piramide *ABCD*, il cui volume è $1/3 \cdot 4^2/2 \cdot 3 = 8$. Ciò significa che si ha: $8 = S_{ABC} \cdot h/3$, *ABC* è isoscele di lati obliqui lunghi 5 e base lunga $4\sqrt{2}$, perciò ha area $\frac{4\sqrt{2}\cdot\sqrt{5^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2}}{2} = 2\sqrt{34}$. Così $h = \frac{24}{2\sqrt{34}} = \frac{12}{\sqrt{34}}$.

**7. (O 1996) La figura a fianco**  **è lo sviluppo piano di una piramide retta avente come base un triangolo equilatero di lato 1 e come facce laterali tre triangoli rettangoli isosceli uguali. Il volume della piramide è A) 1/24 B) $\sqrt{2}/24$ C) $\sqrt{3}/24$ D) 1/12 E) $\sqrt{5}/24$**

I triangoli isosceli hanno lato obliquo lungo $\sqrt{2}/2$ dato che è diagonale di un quadrato di lato ½. Quindi l'altezza della piramide misura $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{\cancel{2}}{3}\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$, perciò il volume moisura: $\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{24}$, che è la risposta B.

**8. (O 1996) Se si sviluppa la superficie laterale di un cilindro retto si ottiene un rettangolo le cui diagonali sono lunghe $\ell$ e formano un angolo di 30° con la base del rettangolo. Il volume del cilindro è A) $\frac{\ell^3}{16\pi}$ B) $\frac{3\ell^3}{8}$ C) $\frac{3\ell^3}{4}$ D) $\frac{3\ell^3}{32\pi}$ E) Le risposte precedenti sono tutte sbagliate**

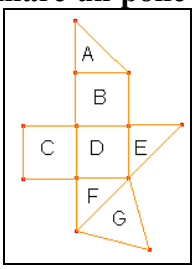
Le dimensioni del rettangolo sono circonferenza di base e altezza del cilindro, 

e si ha: $h = \frac{\ell}{2}, 2\pi r = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{4\pi}\ell$. Pertanto il volume del cilindro misura: $\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi}\ell\right)^2\cdot\frac{\ell}{2} = \frac{3}{32\pi}\ell^3$, che è la risposta D.

**9. (O 1997) Le superfici totali di due cubi sono l'una doppia dell'altra. Qual è il rapporto fra i loro volumi? A) 2 B) $\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{2}$ D) $\sqrt[3]{2}$ E) 4**

Si ha: $\cancel{6}L^2 = 2\cdot\cancel{6}\ell^2 \Rightarrow L = \sqrt{2}\ell \Rightarrow \frac{L^3}{\ell^3} = \frac{2\sqrt{2}\ell^3}{\ell^3} = 2\sqrt{2}$, che è la risposta C.

**10. (AHSME 1997) In figura, i poligoni *A*, *E*, ed *F* sono triangoli rettangoli isosceli; *B*, *C*, e *D* sono quadrati di lato 1; *G* è un triangolo equilatero. La figura può essere usata per formare un poliedro le cui facce sono i poligoni. Determinare la misura del volume di tale poliedro.**

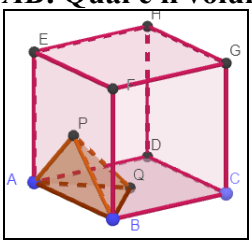



Il poliedro è un cubo unitario, con un angolo tagliato, il quale non è altri che una piramide di altezza 1 E di base un triangolo rettangolo isoscele, di area ½. Quindi il volume della piramide è: $1/3 \cdot ½ \cdot 1 = 1/6$. Infine quello del poliedro è $1 – 1/6 = 5/6$.

**11. (AHSME 1998) Un cono retto di volume V, un cilindro retto di volume M, e una sfera di volume K hanno tutti lo stesso raggio, inoltre le altezze del cono e del cilindro sono uguali fra loro e al diametro della sfera. Quale delle seguenti scritte è vera? A) V − M + K = 0 B) V + M = K C) 2V = M + K D) $V^2 – M^2 + K^2 = 0$ E) 2V + 2M = 3K**

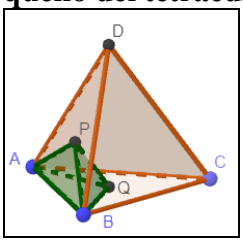
Supponiamo che la sfera abbia raggio *r*. I volume dei tre solidi, in funzione di *r* valgono: Volume del cono = $V = 1/3\pi r^2 \cdot 2r = 2/3\pi r^3$; Volume del cilindro = $M = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3$, e Volume della sfera = $K = 4/3\pi r^3$. Così: V − M + K = 0, che è la risposta A.

**12. (O 2000) In un cubo di lato 12, *P* e *Q* sono i centri di due facce che hanno in comune lo spigolo *AB*. Qual è il volume del tetraedro che ha per vertici i punti *A*, *B*, *P*, *Q*?**




*ABQ* è un triangolo rettangolo isoscele di area $\frac{\left(6\sqrt{2}\right)^2}{2} = 36$ e l'altezza del tetraedro relativa ad *ABQ* misura 6, quindi il volume misura: $1/3 \cdot 36 \cdot 6 = 72$.

**13. (O 2001) In un tetraedro regolare di vertici *A, B, C, D*, indichiamo con *P* e *Q* i centri delle due facce che hanno in comune lo spigolo *AB*. Qual è il rapporto tra il volume del tetraedro iniziale e quello del tetraedro che ha per vertici i punti *A, B, P, Q*?**

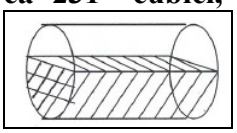


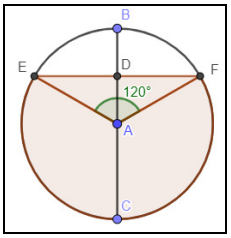

Il tetraedro piccolo ha area di base che è 1/3 di *ABC*, perché ha la stessa base, ma altezza che è 1/3 di quella di *ABC*, dato che *Q* è baricentro di quest'ultima faccia. Con lo stesso ragionamento anche l'altezza condotta da *P* è 1/3 di quella condotta da *D*, pertanto il volume di *ABCD*è 9 volte quello di *ABQP*.

**14. (NC 2004) Una conduttura lunga 20 metri e di diametro 1 cm, serve a portare l'acqua calda, con un flusso di 2,8 litri al minuto. In quanto tempo, all'incirca l'acqua calda prodotta dalla caldaia riempie tutta la conduttura?**

Il volume della conduttura è $\pi \cdot 20 \cdot 0{,}25 \cdot 10^{-4}\ m^3 = 0{,}0005\pi\ m^3 \approx 1{,}57\ dm^3$ che equivale a circa 1570 litri, quindi servono circa 1570/2,8 minuti, ossia circa 0,56 minuti cioè circa 33,7 secondi.

**15. (NC 2005) Una tanica cilindrica di altezza 22″ e diametro 18″ è posta sul terreno appoggiata sulla sua altezza ed è riempita d'acqua fino a una profondità di 13,5″. Sapendo che un gallone è circa 231″ cubici, trovare approssimativamente quanti galloni d'acqua vi sono nella tanica.**






L'area di base da considerare è data dall'area del settore di 240°, cioè 2/3 · 81 π = 54π e l'area del triangolo isoscele *FAE*, cioè $\overline{DF}\cdot\overline{DA}=\frac{9}{2}\sqrt{3}\cdot\frac{9}{2}=\frac{81}{4}\sqrt{3}$, quindi $\frac{81}{4}\sqrt{3}+54\pi\approx 204,7$ pollici quadrati. Quindi il volume dell'acqua è circa 204,7 · 22 ≈ 4503 pollici cubici, che equivalgono a circa 4503/231 ≈ 19,5 galloni.

**16. (ARLM 2008) Un cubo ha area laterale A e volume 8A, determinare la lunghezza del suo spigolo.**

$6\ell^2 = A, \ell^3 = 8A \Rightarrow 8 = \frac{\ell}{6} \Rightarrow \ell = 48$.

**17. (HSMC 2006) Un'industria vende burro d'arachidi in contenitori cilindrici. Studi di mercato suggeriscono di usare contenitori più larghi per aumentare le vendite. Se il diametro dei contenitori è aumentato del 25% senza alterare il volume, di quale percentuale dobbiamo diminuire l'altezza?**

Deve essere: $\pi(1,25r)^2h' = \pi rh \Rightarrow h' = 1/1,25^2h = 0,64h$, quindi deve diminuire del 36%.

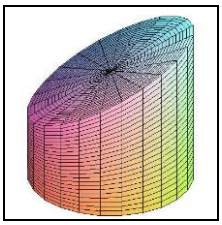
**18. (K2007) Un cono e un cilindro circolari, entrambi di altezza *h* e con le basi di raggio *r*, sono posti in modo che il volume della parte del cono contenuta nel cilindro è metà del volume del cono. Che frazione del volume del cilindro fornisce il volume della parte del cilindro contenuta nel cono?**

In pratica il volume del cilindro è 3 volte il volume del cono, quindi la parte comune, che corrisponde a ½ del volume del cono, equivale a 1/6 del volume del cilindro.

**19. (NC2007) Un parallelepipedo rettangolo è costruito incollando dei cubetti di spigolo 1, ottenendo una superficie di 52 unità quadrate e uno spigolo di 2 unità. Quale fra i seguenti valori può misurare il volume del parallelepipedo? A) 18 B) 22 C) 24 D) 26 E) 32**

Indichiamo con *a* e *b* le misure degli spigoli incogniti, che rappresentano numeri interi. Si ha: $2 \cdot (2a + 2b + ab) = 52 \Rightarrow 4a + 4b + 2ab = 52$, dobbiamo calcolare $V = 2ab = 52 - 4a - 4b = 4 \cdot (13 - a - b)$. Fra le soluzioni proposte le uniche multiple di 4 sono 24 e 32. Nel primo caso deve essere $a + b = 7$, nel secondo $a + b = 5$. Solo che se $a + b = 7$ la soluzione $a = 3$, $b = 4$ fornisce il volume 24, mentre se $a + b = 5$ in nessun modo $ab = 16$. Quindi unica soluzione accettabile è la C.

**20. (SC 2008) Un cilindro è sezionato da un piano formando il solido mostrato in figura. La base inferiore del solido è un cerchio di raggio 3. Quella superiore è un'ellisse. Il punto più in alto dell'ellisse è 6 unità più in alto della base. Il punto più basso dell'ellisse è 2 unità sopra la base.**

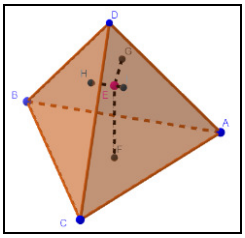


**Quanto misura il volume del solido, in unità cubiche?**

Se "completiamo" il solido in modo da trasformarlo in un cilindro di altezza 6 unità il suo volume sarà 54π. Il cilindro formato invece dalla parte inferiore fino al punto più basso dell'ellisse ha volume 18π, quindi il volume che abbiamo "aggiunto" (che naturalmente è metà di quello che c'era fino alla sezione ellittica) vale 36π. Infine il volume richiesto misura 18π + 18π = 36π.

**21. (S 1949) Prove that the sum of the distance from an inner point to the faces of a regular tetrahedron is equal to the altitude of the solid.**

*Provare che la somma delle distanze da un punto interno alle facce di un tetraedro regolare è uguale all'altezza del solido.*




Unendo il punto $E$ anche con i vertici del tetraedro, divbidiamo quest'ultimo in 4 tetraedri più piccoli, la somma dei cui volumi equivale al volume di $ABCD$. Indichiamo con $S$ l'area di una qualsiasi faccia del tetraedro. Si ha $Sh/3 = S \cdot (EF + EG + EH + EI)/3 \Rightarrow h = EF + EG + EH + EI$, che rappresenta quanto voleva provarsi.

**22. (AHSME 1950) The number of circular pipes with an inside diameter of 1 inch which will carry the same amount of water as a pipe with an inside diameter of 6 inches is?**

*Quanti tubi circolari di diametro interno* 1 *pollice portano la stessa quantità di acqua di una conduttura di diametro interno* 6 *pollici*?

Consideriamo le tubazioni di uguale altezza $h$. La conduttura più grande ha volume $9\pi h$, le piccole $n0{,}25\pi h \Rightarrow n = 9/0{,}25 = 36$.

**23. (S 1960) Of twelve congruent equilateral triangles eight are the faces of a regular octahedron and four the faces of a regular tetrahedron. Find the ratio of the volume of the octahedron to the volume of the tetrahedron.**

*Usando* 12 *triangoli equilateri isometrici, con* 8 *formiamo un ottaedro regolare e con i rimanenti* 4 *un tetraedro regolare. Determinare il rapporto fra il volume dell'ottaedro e quello del tetraedro.*

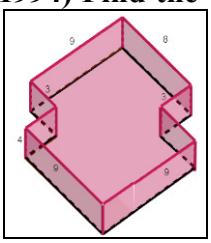
Abbiamo visto che si ha $\dfrac{\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{12}^{\,4}}\cancel{\ell^3}}{\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{3}}\cancel{\ell^3}} = 4$.

**24. (MT1993) A regular drinking cup has a circular lower base 8 *cm* in diameter, a lip 12 *cm* in diameter, and a height of 10 *cm*. What is its volume?**

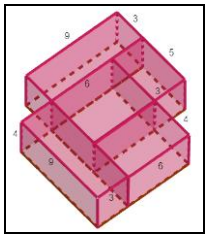
*Una tazza regolare ha base inferiore di* 8 *cm di diametro, superiore* 12 *cm di diametro e altezza* 10 *cm. Quanto vale il suo volume?*

Abbiamo un tronco di cono, il cui volume vale perciò: $1/3\pi \cdot (6^2 + 4^2 + 4 \cdot 6) \cdot 10\ cm^3 = 760\pi/3\ cm^3$

**25. (MT1994) Find the volume of this figure. All angles that appear to be right angles are right angles.**



*Calcolare il volume del solido in figura. Tutti gli angoli che sembrano retti lo sono.*

Possiamo dividere il solido in alcuni parallelepipedi:  $V = 3 \cdot 4 \cdot 9 + 6 \cdot 4 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + 3 \cdot 4 \cdot 9 + 5 \cdot 4 \cdot 6 = 492$.

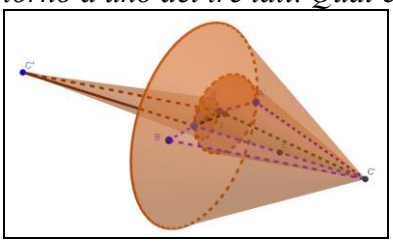
**26. (MT1995) A baseless cylinder may be formed from an 8,5" × 11" sheet in two ways. They have the same lateral surface area. Are their volumes also equal?**

*Un cilindro privo di basi, può costruirsi da un foglio* 8,5"× 11" *in due modi. Essi hanno la stessa superficie laterale. Hanno gli stessi volumi?*

Se l'altezza è 11" allora la circonferenza di base misura 8,5" e il raggio $\left(\frac{17}{4\pi}\right)$", quindi il volume, in $in^3$: $\pi\left(\frac{17}{\pi}\right)^2 \cdot 11 = \frac{3179}{16\pi}$. Se invece scegliamo per altezza 8,5", il raggio misura $\left(\frac{11}{2\pi}\right)$" e il volume $\pi\left(\frac{11}{\pi}\right)^2 \cdot 8,5 = \frac{2057}{8\pi}$

**27. (MT1997) Right triangle *ABC* has legs with lengths 19 and 95 units. The triangle is to be rotated in space about one of its three sides. What is the maximum possible volume of the resulting solid?**

*Il triangolo rettangolo ABC ha cateti lunghi* 19 *e* 95 *unità. Il triangolo viene ruotato nello spazio attorno a uno dei tre lati. Qual è il massimo volume possibile che possiamo ottenere*?



Se ruotiamo attorno a uno dei cateti otteniamo coni di volume: $19^2 \cdot 95/3\pi = 5/3 \cdot 19^3\pi$ e $95^2 \cdot 19/3\pi = 25/3 \cdot 19^3\pi$, il secondo caso fornisce un valore maggiore. Ruotando attorno all'ipotenusa, lunga $\sqrt{19^2 + 5^2 \cdot 19^2} = 19\sqrt{26}$, otteniamo due coni di raggio comune pari a metà dell'altezza relativa all'ipotenusa, $\frac{\cancel{19} \cdot 95}{2 \cdot \cancel{19}\sqrt{26}} = \frac{95\sqrt{26}}{52}$, e altezze la cui somma è pari all'ipotenusa, quindi di volume $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{95\sqrt{26}}{52}\right)^2 \cdot 19\sqrt{26}\pi = \frac{171475\sqrt{26}}{312}\pi$. Il maggiore dei tre è $25/3 \cdot 19^3\pi$ = valori.

**28. (HSMC 1999) An open rectangular box is to be constructed with single ply cardboard on the sides and double ply on the bottom. Single ply cardboard costs 10 cents per square foot and double ply runs 15 cents per square foot. What is the cost of a box with square base and height twice its length if the volume is to be 54 *ft*$^3$?**

*Una scatola rettangolare aperta viene costruita con uno strato di cartone sui lati e doppio strato sul fondo. Il cartone singolo costa* 10 *cents al piede quadro e quello doppio* 15 *cents al piede quadro. Quanto costa un cartone di base quadrata e altezza doppia del lato di base se il volume deve essere* 54 *ft*$^3$?

Le dimensioni sono $x$, $x$ e $2x$, quindi il volume è $2x^3 = 54 \Rightarrow x = 3ft$. Perciò la superficie laterale misura $4 \cdot 18\, ft^2 = 72\, ft^2$ mentre il fondo misura $9\, ft^2$. Pertanto il costo totale è \$(72 · 0,10 + 9 · 0,15) = \$8,55.

**29. (HSMC 1999) A cube of volume 216 cubic inches is inscribed in a sphere. What is the surface area of the sphere?**

*Un cubo di volume* 216 *pollici cubi è inscritto in una sfera. Quanto vale la superficie della sfera?*

La diagonale del cubo è diametro della sfera, quindi $2r = \sqrt[3]{216} \cdot \sqrt{3}\, in^3 \Rightarrow r = 3\sqrt{3}$", la superficie della sfera è perciò $4 \cdot \left(3\sqrt{3}\right)^2 \pi\, in^2 = 108\pi\, in^2$.

**30. (NC 2001) If the volume of a tetrahedron is doubled without changing its shape, by what factor is the surface area increased?**

*Se il volume di un tetraedro è raddoppiato senza cambiarne la forma di quale fattore aumenta la sua area?*

Se il volume raddoppia il lato passa da $\ell$ a $\sqrt[3]{2}\ell$, quindi la superficie viene moltiplicata per $\sqrt[3]{4}$.

**31. (HSMC 2001) A box with an open top is to be constructed from a rectangular piece of cardboard with dimensions 12 by 20 by cutting out equal squares of side *x* at each corner and then folding up the sides. Express the volume as a function of *x*.**

*Una scatola senza coperchio è costruita da un pezzo rettangolare di cartone di dimensioni* 12 *per* 20 *tagliando quadrati uguali di lato x ad ogni angolo e poi piegando verso l'alto i lati. Esprimi il volume in funzione di x.*

Le tre dimensioni misurano $x$, $12 - x$ e $20 - x$, quindi il volume è: $4x \cdot (6 - x) \cdot (10 - x)$.

**32. (NC 2002) If the height of a cylindrical can is increased by 28%, by approximately what percentage should the diameter be increased in order to double the volume of the can?**

*Se l'altezza di una lattina cilindrica è aumentata del 28%, approssimativamente di quale percentuale dobbiamo aumentare il diametro per raddoppiarne il volume?*

Si ha: $\pi r^2(1{,}28h) = 2\pi R^2 h \Rightarrow \frac{R}{r} = \sqrt{\frac{2}{1{,}28}} = \sqrt{2 \cdot 2^{-7} \cdot 10^2} = 10 \cdot 2^{-3} = 1{,}25 \Rightarrow R = 1{,}25r$, quindi aumenta del 25%.

**33. (HSMC 2003) Two cylindrical cans have the same volume. The height of one can is triple the height of the other. If the radius of the narrower can is 12 units, how many units are in the length of the radius of the wider can? Express your answer in simplest radical form.**

*Due lattine cilindriche hanno lo stesso volume. L'altezza di una è tripla di quella dell'altra. Se il raggio di quella più stretta è 12 unità, quante unità è lungo il raggio di quella più larga? Esprimi la risposta nella forma radicale più semplice.*

Si ha: $\pi 12^2(3h) = \pi r^2 h \Rightarrow r = 12\sqrt{3}$.

**34. (NC 2004) A conical paper cup with height 16 *cm* and a 12 *cm* diameter for its top is filled to the top with water. If a fifth of the liquid is drunk by what percentage did the water level drop? (Round off[1] error to the nearest 0.1%.)**

*Una tazza di carta ha forma conica di altezza 16 cm e diametro 12 cm, essa è riempita d'acqua fino all'orlo. Se un quinto del liquido viene bevuto, di quale percentuale cala il livello dell'acqua? (Arrotonda al più vicino 0.1%.)*

Il volume iniziale è $6^2 \cdot 16/3\pi\ cm^3 = 192\pi cm^3$, quindi rimangono $4/5 \cdot 192\pi cm^3 = 153{,}6\pi cm^3$. Il cono di acqua rimasto ha rapporto fra raggio e altezza che è $6/16 = 3/8$. Quindi si ha: $(3/8)^2 \cdot h^3\pi\ cm^3 = 153{,}6\pi cm^3 \Rightarrow h \approx 14{,}853$. Quindi la diminuzione percentuale è circa $(16 - 14{,}853)/16 \approx 7.2\%$.

**35. (HSMC 2008) A cylindrical tank with radius 4 feet and length 9 feet is lying on its side. The tank is filled with water to a depth of 2 feet. What is the volume of the water in cubic feet?**

*Una tanica cilindrica di raggio 4 piedi e lunghezza 9 piedi giace orizzontalmente. Viene riempita d'acqua fino alla profondità di 2 piedi. Quanto vale il volume dell'acqua in piedi cubici?*

La porzione di ogni estremità della tanica sotto l'acqua è un settore circolare privo di due triangoli rettangoli. L'ipotenusa di ogni triangolo è 4, e il cateto verticale è 2, così il triangolo è del tipo 30° − 60° − 90°. Quindi il settore ha angolo al centro di 120°, e la sua area è $16/3\pi$. L'area di ogni triangolo è $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$, quindi la porzione sotto l'acqua ha area $9 \cdot \left(\frac{16}{3}\pi - 4\sqrt{3}\right) = 48\pi - 36\sqrt{3}$.

**36. (Rice 2010) A sphere of radius 1 is internally tangent to all four faces of a regular tetrahedron. Find the tetrahedron's volume.**

*Una sfera di raggio 1 è internamente tangente a tutte le 4 facce di un tetraedro regolare. Trova il volume del tetraedro.*

Il centro della sfera è il baricentro del tetraedro, che si trova a ¼ della mediana, quindi tale mediana, che è anche altezza, misura 4. Sappiamo che in termini dello spigolo tale altezza è $\sqrt{\frac{2}{3}}\ell$, quindi: $\ell = 4\sqrt{\frac{3}{2}}$. Infine il volume misura $\frac{\sqrt{2}}{12} \cdot \left(4\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3 = \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{12}} \cdot \frac{\cancel{64}^{8} \cdot \cancel{3}\sqrt{3}}{\cancel{2}\cancel{\sqrt{2}}} = 8\sqrt{3}$.

# Test di Verifica

**1. Seleziona le affermazioni corrette**

**A Ogni prisma si può dividere in tre piramidi uguali fra loro B Il volume di un tronco di piramide è la differenza fra i volumi delle due piramidi da cui esso è stato ottenuto C Un prisma retto di base di area *A* e altezza *h* unità ha lo stesso volume di una piramide retta di base A e altezza**

[1] Arrotonda

**3*h*** **D Se i solidi A e B hanno lo stesso volume e i solidi C e D hanno lo stesso volume, anche i solidi A e C hanno lo stesso volume E Comunque uniamo due solidi, il solido ottenuto ha per volume la somma dei volumi dei solidi componenti**

Risposte corrette: B – C. L'affermazione A vale solo per prismi a basi triangolari. La D non è una proprietà transitiva e quindi in generale è falsa. La E è falsa perché se l'unione dei solidi avviene con parti di volume in comune la proprietà non è vera.

**2. Seleziona le affermazioni corrette**

**A Il volume di un cilindro inscritto in un parallelepipedo rettangolo è 4/π volte quello del parallelepipedo B Il volume di un cono inscritto in un cilindro è 1/3 di quello del cilindro C Un cono ha lo stesso volume di una sfera il cui raggio è 4 volte quello del cono D Un cilindro equilatero ha il volume triplo di quello di una sfera di uguale raggio E Raddoppiando il raggio di una sfera il volume aumenta di 8 volte**

Risposte corrette: A – B – E. La C è falsa perché nella formula del volume del cono vi è anche la sua altezza. La D perché il volume del cilindro è $2\pi r^3$, mentre quello della sfera è $4/3\pi r^3$.

**3. Seleziona le affermazioni non corrette**

**A Il rapporto fra il volume di una sfera e quello di un cubo è sempre un numero irrazionale**

**B Sezionando una sfera con due piani paralleli che dividono a metà il raggio, si ottiene un segmento sferico di volume ¼ di quello della sfera C Il volume di una sfera si ottiene moltiplicando la sua superficie per un terzo del raggio D Facendo ruotare un semicerchio di raggio *R* si ottiene una sfera di raggio $2/3\pi R^3$ E Sezionando la sfera con piani si ottengono ellissi**

Risposte corrette: A – D. Le altre affermazioni sono vere.

**4. Riempiamo una bottiglia da un litro con il 25% di vino e il resto di acqua. Aggiungiamo *x cl* di vino alla mistura, in modo che il vino sia il *p*% del totale. Quanto vale *x* se *p* è un numero intero?**

**A 0,1 B 0,2 C 0,3 D 0,4 E 0,5**

Abbiamo 0,25 litri di vino e 0,75 litri di acqua. Se aggiungiamo *x cl* di vino, esso adesso sarà $\frac{0,25+x}{1+x}$ del totale. Verifichiamo quali dei valori proposti fa sì che questa risulti una frazione aperiodica.

$$\frac{0,25+0,1}{1+0,1}=\frac{77}{200};\frac{0,25+0,2}{1+0,2}=\frac{27}{50};\frac{0,25+0,3}{1+0,3}=\frac{143}{200};\frac{0,25+0,4}{1+0,4}=\frac{91}{100};\frac{0,25+0,5}{1+0,5}=\frac{9}{8}$$

Risposte esatte: B – D – E.

**5. Una sfera di raggio lungo *x* e un cilindro circolare retto di raggio di base lungo *y* hanno lo stesso volume. Per quali valori di *x* e *y* l'altezza del cilindro è un numero intero?**

**A $x = 1, y = 2$ B $x = 3, y = 2$ C $x = 3, y = 1$ D $x = 3y$ E $x = y$**

Si ha: $4/3\pi x^3 = \pi y^2 h \Rightarrow h = \frac{4x^3}{3y^2}$. Verificando le risposte si trova che le corrette sono: B – C – D. Per A si ottiene 4/27, per E: $4/3x$.

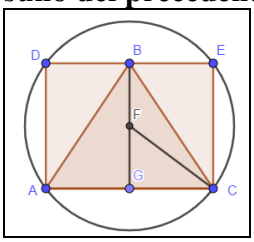
**6. Con il marmo usato per costruire una piramide retta di base $10m^2$ e altezza 3 *m*, vogliamo costruire dei cubetti di lato 20 *cm*. Per fare questo lavoro si effettua uno spreco di 1,2 $m^3$, quanti cubetti al massimo riusciamo ad ottenere? A Meno di 1000 B Fra 1000 e 2000 C Fra 2000 e 3000 D Fra 3000 e 4000 E Nessuno dei precedenti**

Il volume della piramide misura $1/3 \cdot 10\ m^2 \cdot 3m = 10m^3$; eliminando lo spreco il volume diventa 8,8 $m^3$. Il volume di ogni cubetto è di $(0,2m)^3 = 0,008m^3$. Quindi possiamo costruire 8,8/0,008 = 1100 cubetti. Risposta corretta: B.

**7. Una sfera è inscritta in un cilindro di raggio 1, quanto misura il volume della parte di cilindro esterna alla sfera? A π B π/3 C 2π/3 D 4π/3 E Nessuno dei precedenti**

Il raggio della sfera misura quanto quello del cilindro, che è ovviamente equilatero e quindi ha altezza lunga 2. Quindi: $2\pi - 4/3\pi = 2/3\pi$. Risposta corretta: C

**8. Un cono è inscritto in un cilindro che a sua volta è inscritto in una sfera. Se il volume del cono è V, quanto vale quello della sfera? A 2V B 4V C 2/3V D Non si può determinare dai dati E Nessuno dei precedenti**




Il cono e il cilindro hanno lo stesso raggio e la stessa altezza, la sfera ha raggio che misura quanto mezza diagonale della sezione piana del cilindro, cioè $\frac{\sqrt{4r^2+h^2}}{2}$. Per cui si ha: V = $\pi/3r^2h$. Il volume del cilindro è $\pi r^2h$ = 3V; quello della sfera $4\pi/3(4r^2 + h^2)/4 = \pi/3(4r^2 + h^2)$. Risposta corretta: D

**9. Un'anguria perfettamente sferica viene tagliata in *n* fette uguali, ciascuna di volume *V*. Quanto misura il raggio dell'anguria? A $\sqrt[3]{\frac{3nV}{4\pi}}$ B $\sqrt[3]{\frac{nV}{4\pi}}$ C $\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$ D $\sqrt[3]{\frac{3nV}{4}}$ E Nessuno dei precedenti**

Il volume dell'anguria misura $nV$, si ha: $nV = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3nV}{4\pi}}$. Risposta corretta: A

**10. Consideriamo tre tipi di solidi, indicati con X, Y e Z. Se il volume di 105 X equivale a quello di 12 Y unito a quello di 9 Z e il volume di 7Y equivale a quello di 21 X più 12Z, il volume di quanti X è uguale a quello di un Y? A 4 B 5 C 6 D 7 E Nessuno dei precedenti**

$$\begin{cases} 105X = 12Y + 9Z \\ 7Y = 21X + 12Z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5(7Y - 12Z) = 12Y + 9Z \\ 21X = 7Y - 12Z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 69Z = 23Y \\ 21X = 12Z - 7Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y = 3Z \\ X = 3/7Z \end{cases} \Rightarrow Y = 7X.$$

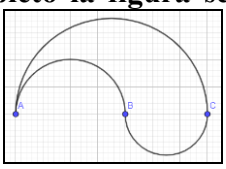
Risposta corretta: D

**11. Date due sfere concentriche di raggi uno doppio dell'altro, R e 2R. Calcolare il volume della sfera maggiore non appartenente a quella minore.**

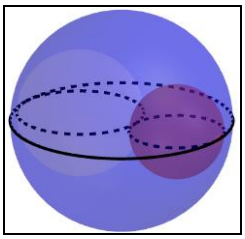
$$\frac{4}{3}\pi\left(8R^3 - R^3\right) = \frac{28}{3}\pi R^3.$$

**12. Un parallelepipedo rettangolo a base quadrata ha il terzo spigolo doppio degli altri due. Se il volume è 432 *cm*³, determinare la misura della superficie totale.**

Si ha: $2a^3 = 432\ cm^3 \Rightarrow a = 6\ cm$. Perciò la superficie totale misura: $2 \cdot (a^2 + 4a^2) = 10a^2 = 360\ cm^2$

**13. Facciamo ruotare di un giro completo la figura seguente, formata da semicerchi, attorno alla retta passante per i punti indicati.** 

**Se un quadrato misura 1, quanto vale il volume del solido così ottenuto?**

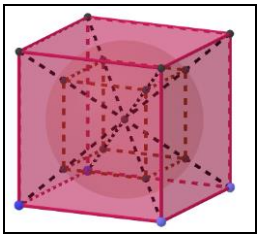


Il solido sarà formato dalla differenza fra una sfera di raggio 3,5 e una sfera di raggio 2. La sfera di raggio 1,5 genera un volume già compreso in quella grande. Quindi si ha $4/3\pi \cdot (3{,}5^3 - 2^3) = 46{,}5\pi$

**14. Una scodella di Galileo è la parte di spazio delimitata da un cilindro ed esterna alla semisfera *inscritta* nello stesso cilindro; il suo volume è uguale a quello di un *cono* che ha la base equivalente a quella del cilindro e l'altezza uguale** *al raggio della semisfera*

15. **Due solidi hanno lo stesso volume se li poniamo sullo stesso piano α, e qualsiasi** *sezione* **consideriamo mediante un piano** *parallelo ad* α **su entrambi i solidi otteniamo due figure di uguale area o** *il vuoto*

## Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. **(Accademia militare) Un prisma retto regolare a base esagonale è equivalente a un prisma retto regolare a base pentagonale avente la stessa altezza. Si può concludere che lo spigolo di base del primo prisma, rispetto a quello del secondo: A) non si può stabilire, perché i dati sono insufficienti B) è maggiore C) è uguale D) è minore**
   Dato che l'area dell'esagono deve essere uguale a quella del pentagono, ed essendo essi regolari, vuol dire che lo spigolo del primo è minore di quello del secondo. Risposta D
2. **(Accademia militare) Un recipiente ha la forma di un parallelepipedo rettangolo e le sue misure interne sono rispettivamente di metri 0,3; 0,4; 1,2. Quanti litri d'acqua può contenere il recipiente? A) 144 B) 1,44 C) 14,4 D) 0,144**
   Il volume è 0,3 × 0,4 × 1,2 $m^3$ = 144 $dm^3$ = 144 litri. Risposta A
3. **(Accademia Navale) Calcolare il rapporto tra i volumi di un cubo inscritto e di uno circoscritto a una stessa sfera.**
   
   Il lato del cubo circoscritto misura quanto il diametro della sfera; mentre il cubo inscritto ha la diagonale lunga quanto il diametro della sfera. Quindi:
   $$\ell\sqrt{3} = L \Rightarrow \frac{\ell}{L} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\ell^3}{L^3} = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}.$$
4. **(Scuola Superiore di Catania 2003) Un contenitore a forma cilindrica ha una base circolare di raggio 2. All'interno vi è acqua fino a un'altezza *h*. All'interno del contenitore viene poggiato un cono d'acciaio con base circolare di raggio 1 e altezza *L*. Calcolare sotto quali condizioni su *L* e *h* il cono risulta completamente immerso dal liquido.**
   Il volume dell'acqua è $4\pi h$, il cono occupa un volume di $1/3\pi L$. quindi ponendo il cono all'interno del cilindro, il cono e l'acqua occupano un volume di $(4h + 1/3L)\pi$, e questo è il volume di un cilindro di altezza $h'$. Pertanto si ha $(4h + 1/3L)\pi = 4h'\pi$, da cui $h' = \frac{12h+L}{12}$. Deve essere: $\frac{12h+L}{12} \geq L \Rightarrow 11L \leq 12h \Rightarrow L \leq \frac{12}{11}h$. Risposta $L \leq 12/11h$
5. **(Scuola Superiore di Catania) Calcolare il volume della porzione di sfera di raggio *r* delimitata da due piani paralleli, uno dei quali passante per il centro e distanti *r*/2 tra loro.**
   Abbiamo da calcolare il volume di un segmento circolare a due basi. Dobbiamo calcolare il raggio della base minore: $r_2 = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}r$ Usando il teorema 11, avremo:
   $$\frac{1}{6}\pi \cdot \left[3r^2 + 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2\right] \cdot \frac{r}{2} = \frac{11}{24}\pi r^3$$
6. **(Medicina 1997) Un cono e un cilindro circolari retti hanno uguale altezza e il raggio di base del cono è uguale al diametro del cilindro. Detto V il volume del cono e W il volume del cilindro, V/W è: A) 4/3 B) 1 C) 3/4 D) 2 E) dipendente dal raggio**
   $$\frac{V}{W} = \frac{\cancel{\pi}/3 \cdot \left(2\cancel{r}\right)^2 \cancel{h}}{\cancel{\pi}\cancel{r^2}\cancel{h}} = \frac{4}{3}.$$ Risposta A

**7. (Odontoiatria 1997) Dato un cilindro retto a base circolare di raggio *R* e altezza *h* = 2*R*, qual è il rapporto fra il suo volume e quello della sfera massima contenibile?**
**A) 3/2 B) 4/3 C) 6/π D) π/2 E) 3π**

La massima sfera è quella inscritta, che perciò ha raggio pari a quello del cilindro. Si ha: $\frac{\cancel{2}\cancel{\pi}\cancel{R^3}}{\cancel{4}^2/3\cancel{\pi}\cancel{R^3}}=\frac{3}{2}$. Risposta A

**8. (Odontoiatria 1997) Dato un cubo di volume *Vc* ed una sfera di volume *Vs* (diametro sfera = lato del cubo), calcolare il rapporto $\frac{V_C-V_S}{V_C}$ A) 1 – π/6 B) 1 – π/2 C) π/6 D) π/3 E) π/2**

$\frac{\ell^3-\cancel{4}/3\pi\left(\ell^3/\cancel{8}^2\right)}{\ell^3}=1-\frac{\pi}{6}$. Risposta A

**9. (Odontoiatria 1998) Un cono circolare retto ha una base di raggio *R* e un'altezza di uguale valore *R*. Una sfera ha come raggio ancora il valore *R*. Quale è il rapporto tra il volume del cono e quello della sfera? A) 100 B) 1/250 C) 20 D) 0,25 E) 0,0005**

$\frac{\cancel{1/3}\cancel{\pi}\cancel{R^3}}{4/\cancel{3}\cancel{\pi}\cancel{R^3}}=\frac{1}{4}$. Risposta D

**10. (Odontoiatria 1998) Se il volume di un cubo è pari a $10^{-9}$ $m^3$quanto vale in metri il lato del cubo? A) $10^{-27}$ *m* B) $10^{-18}$ *m* C) $10^{-9}$ *m* D) $10^{-6}$ *m* E) $10^{-3}$ *m***

$\sqrt[3]{10^{-9}}=10^{-3}$. Risposta E

**11. (Veterinaria 1998) Se una sfera e un cubo hanno uguale volume, la superficie della sfera è:**
**A) minore di quella del cubo B) maggiore di quella del cubo C) uguale a quella del cubo**
**D) doppia di quella del cubo E) i dati forniti non sono sufficienti per rispondere**

$\frac{4}{3}\pi r^3=\ell^3\Rightarrow\ell=\sqrt[3]{\frac{4}{3}\pi}r$, quindi: $\frac{\cancel{4}^2\pi\cancel{r^2}}{\cancel{6}^3\sqrt[3]{\frac{16}{9}\pi^2}\cancel{r^2}}=\frac{2\pi}{\sqrt[3]{48\pi^2}}=\sqrt[3]{\frac{\cancel{8}\cancel{\pi^3}}{\cancel{48}^6\cancel{\pi^2}}}=\sqrt[3]{\frac{\pi}{6}}<1$, quindi risposta A.

**12. (Veterinaria 1999) Due coni *C*1 e *C*2 circolari retti hanno uguale base di raggio *R*. L'altezza *H*1 del cono C1 è uguale alla metà dell'altezza *H*2 del cono *C*2. In che rapporto stanno i volumi *V*1 e *V*2 dei due coni? A) 1/2 B) 1/3 C) 1/4 D) 1/9 E) 1/π**

$\frac{\cancel{1/3\pi R^2}H1/2}{\cancel{1/3\pi R^2}H1}=\frac{1}{2}$. Risposta A

**13. (Ingegneria 1999) Un cono circolare retto ha raggio di base *r* e altezza *h*. Se si raddoppia il raggio di base e si dimezza l'altezza, il volume del cono A) aumenta di $\pi r^2$ B) diviene il doppio C) diviene la metà D) non cambia E) diviene il quadruplo**

$V=\pi r^2h/3$; $V'=\pi(2r)^2(h/2)/3=2\pi r^2h/3=2V$. Risposta B

**14. (Ingegneria 2000) Una sfera di raggio 2 *cm* e un cilindro circolare retto di raggio di base 2 *cm* hanno lo stesso volume. Allora l'altezza del cilindro, in *cm,* è A) 4/3 B) 8/3 C) 2/3 D) 4 E) 6**

$32/3\pi=4\pi h\Rightarrow h=8/3$. Risposta B

**15. (Ingegneria 2000) Un triangolo rettangolo, avente cateti lunghi 1 *cm* e 2 *cm*, viene fatto ruotare di un giro completo una volta intorno al cateto minore, generando un cono $C_1$, e una volta intorno al cateto maggiore, generando un altro cono $C_2$. Quale delle seguenti affermazioni è esatta?**
**A) il volume di $C_1$ è il quadruplo del volume di $C_2$ B) il volume di $C_1$ è il doppio del volume di $C_2$**
**C) il volume di $C_1$ è uguale al volume di $C_2$ D) il volume di $C_1$ è la metà del volume di $C_2$**
**E) il volume di $C_1$ è un quarto del volume di $C_2$**

$V_1=4/3\pi$; $V_2=2\pi^2\Rightarrow V_1=2V_2$. Risposta D

**16. (Veterinaria 2000) Un cilindro retto ha base di raggio *r* e altezza lunga 2*r*. una sfera ha raggio *r*, possiamo affermare che: A) il volume della sfera è maggiore del volume del cilindro B) il volume della sfera è minore del volume del cilindro C) il rapporto tra il volume della sfera è quello del cilindro è 4π/3 D) il volume della sfera è metà del volume del cilindro E) il prodotto tra i due volumi è 4π/3**

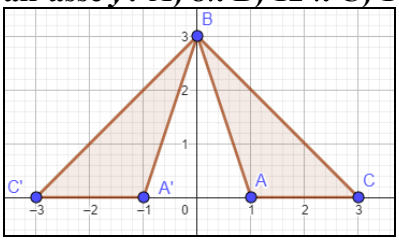
$V_C = 2\pi r^3$; $V_S = 4/3\pi r^3 \Rightarrow V_C > V_S$. Risposta B

**17. (Ingegneria 2002) Un cocomero di forma sferica viene tagliato in 16 fette tutte uguali tra loro. Se il diametro del cocomero è di 40 *cm*, il volume di ciascuna fetta, in *cm*$^3$, è**
**A) 40π/16 B) 40$^3$π/16 C) π$^3$/16 D) 2000π/3 E) π/16**
$4/3 \cdot 8000/16\pi\ cm^3 = 2000/3\pi\ cm^3$. Risposta D

**18. (Facoltà scientifiche, Roma La Sapienza 2009) Sia dato un cubo avente volume uguale a 8. Allora la diagonale di una faccia del cubo ha lunghezza uguale a A) $\sqrt{2}$ B) $2\cdot\sqrt{2}$ C) $4\cdot\sqrt{2}$ D) $8\cdot\sqrt{2}$**
Il lato misura 2, quindi la diagonale $2\cdot\sqrt{2}$. Risposta B

**19. (Facoltà scientifiche, Roma La Sapienza 2008) Si vuole riempire completamente un parallelepipedo a base quadrata di lato 30 *cm* ed altezza 50 *cm* con dei cubi indeformabili uguali. Qual è il minimo numero di tali cubetti? A) 15 B) 45 C) 75 D) 150**
Il volume del parallelepipedo è $30^2 \cdot 50\ cm^3 = 45000 cm^3$. Per riempirlo completamente dobbiamo avere un numero intero di cubetti, quindi il loro spigolo deve essere un numero divisibile sia per 30 che per 50, e il minimo è il loro massimo comune divisore, ossia 10. In questo modo il volume di un cubetto sarà 1000 $cm^3$ e perciò possiamo metterne 45. Risposta B

**20. (Facoltà scientifiche, Roma La Sapienza) Nel piano cartesiano è dato un triangolo di vertici (1; 0), (0; 3), (3; 0). Qual è il volume del solido che si ottiene facendo ruotare il triangolo intorno all'asse *y*? A) 8π B) 12 π C) 16 π D) 24 π**




La rotazione crea un solido che è differenza fra un cono di raggio 3 e uno di raggio 1, entrambi di altezza 3; quindi il suo volume vale $1/3\pi(9 - 1)\cdot 3 = 8\pi$. Risposta A

**21. (Ingegneria 2009) Date due sfere concentriche di raggio 1 e *r* < 1, che valore deve assumere *r* affinché il volume della parte esterna alla sfera minore sia la metà del volume della sfera maggiore? A) 1/3 B) $1/\sqrt[3]{3}$ C) $1/\sqrt[3]{2}$ D) 1/2 E) $1/\sqrt{2}$**
Deve essere $4/3\pi(1 - r^3) = 2/3\pi \Rightarrow r^3 = ½ \Rightarrow r = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Risposta C

**22. (Facoltà scientifiche CISIA 2010) Dato un cono di altezza *h*, volume *V* e vertice *P*, si consideri un secondo cono con vertice *P*, che si ottiene sezionando il primo cono con un piano parallelo alla base a distanza *h*/3 dal punto *P*. Il secondo cono ha volume**
**A) *V*/9 B) *V*/12 C) *V*/24 D) *V*/27 E) *V*/18**
$V = 1/3\pi r^2 h$. Il secondo cono, per similitudine, ha anche il raggio 1/3 di quello del primo, quindi: il suo volume è $V' = 1/3\pi(r/3)^2 h/3 = V/27$. Risposta D