6. Geometria dello spazio ambiente

Geometria analitica degli spazi a più di 2 dimensioni

Livello 1

1. Determinare una formula che calcoli la distanza di un punto $P \equiv (x_P; y_P; z_P)$ dall'origine degli assi.

Basta applicare la formula per la distanza fra due punti con le coordinate del secondo punto nulle, si ottiene: $\sqrt{x_P^2 + y_P^2 + z_P^2}$.

2. Individuare la caratteristica di tutti i punti appartenenti agli assi coordinati.

I punti sull'asse x hanno nulle le altre de coordinate, lo stesso per gli altri assi, quindi: asse x: (x; 0; 0); asse y: (0; y; 0); asse z: (0; 0; z).

3. Individuare la caratteristica di tutti i punti appartenenti ai piani formati dalle rette x e y ; x e z; y e z.

I punti sul piano $z = 0$ hanno proprio questa caratteristica: (x; y; 0); sul piano $y = 0$: (x; 0; z); sul piano $x = 0$: (0; y; z).

4. Determinare una formula che calcoli la distanza di due punti entrambi appartenenti al piano xy; xz; yz.

Tenuto conto del punto 3: $\sqrt{(x_p - x_Q)^2 + (y_p - y_Q)^2}; \sqrt{(x_p - x_Q)^2 + (z_p - z_Q)^2}; \sqrt{(y_p - y_Q)^2 + (z_p - z_Q)^2}$.

5. Calcolare la misura dei seguenti segmenti, di cui forniamo le coordinate degli estremi.
a) (1; 2; –4), (3; –1; 0); b) (3; 1; 0), (–1; –2; –3); c) (1/2; 2; –1/3), (–1/2; 0; –1/3); d) (–3/2; 1/4; –2/3), (1/4; 3/2; –2/3); e) $\left(\sqrt{2}; -1; \sqrt{3}\right), \left(-2 \cdot \sqrt{2}; \sqrt{3}; 1\right)$

a) $\sqrt{(1-3)^2 + (2+1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{29}$; b) $\sqrt{(3+1)^2 + (1+2)^2 + 3^2} = \sqrt{34}$; c) $\sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5}$;

d) $\sqrt{\left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\right)^2 + 0^2} = \frac{\sqrt{74}}{4}$; e) $\sqrt{\left(\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\right)^2 + \left(-1 - \sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3} - 1\right)^2} = \sqrt{26}$

6. Determinare le coordinate dei punti medi dei segmenti i cui estremi sono dati nell'esercizio precedente.

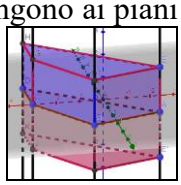
a) $\left(\frac{1+3}{2}; \frac{2-1}{2}; \frac{-4+0}{2}\right) \equiv \left(2; -\frac{1}{2}; -2\right)$; b) $\left(\frac{3-1}{2}; \frac{1-2}{2}; \frac{0-3}{2}\right) \equiv \left(1; -\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$;

c) $\left(\frac{1/2 - 1/2}{2}; \frac{2+0}{2}; \frac{-1/3 - 1/3}{2}\right) \equiv \left(0; 1; -\frac{1}{3}\right)$; d) $\left(\frac{-3/2 + 1/4}{2}; \frac{1/4 + 3/2}{2}; \frac{-2/3 - 2/3}{2}\right) \equiv \left(-\frac{5}{8}; \frac{7}{8}; -\frac{2}{3}\right)$;

e) $\left(\frac{\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3} + 1}{2}\right) \equiv \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3} + 1}{2}\right)$

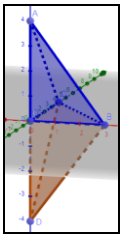
7. Determinare le coordinate dei rimanenti vertici di un prisma retto di altezza 2 e una base di vertici i punti (–2; 2; 0), (1; 3; 0) (3; 0; 0) e (3; –2; 0).

Il prisma è retto, pertanto le altezze sono perpendicolari al piano di base, $z = 0$. Quindi vi sono 2 prismi, uno "sopra" e uno "sotto" il piano. I vertici rimanenti appartengono ai piani $z = 2$ e $z = -2$. Quindi



i vertici cercati sono (–2; 2; ±2), (1; 3; ±2), (3; 0; ±2) e (3; –2; ±2).

8. Determinare le coordinate del quarto vertice dei tetraedri trirettangoli di volume 8 unità cubiche e di vertici i punti (0; 0; 0), (3; 0; 0) e (0; 4; 0).



Anche in questo caso i tetraedri sono 2. Il quarto vertice appartiene all'asse z perché il suo piede è l'origine, vertice retto della base triangolare. Dato che questa base ha area 6, l'altezza relativa deve misurare 4 (così il volume è $1/3 \cdot 6 \cdot 4 = 8$), quindi i due possibili vertici sono: $(0; 0; \pm 4)$.

9. Determinare le coordinate del baricentro del tetraedro di vertici i punti $A \equiv (3; 2; 0)$, $B \equiv (-1; 2; 2)$, $C \equiv (2; -1; 1)$, $D \equiv (0; 2; -1)$.

Applicando la formula: $G \equiv \left(\frac{3-1+2+0}{4}; \frac{2+2-1+2}{4}; \frac{0+2+1-1}{4}\right) \equiv \left(1; \frac{5}{4}; \frac{1}{2}\right)$.

10. Determinare l'altro estremo del segmento in cui un estremo è (2; –1; 4) e il punto medio è (0; 1; 3).

Deve essere $(2 + x; -1 + y; 4 + z) \equiv (0; 2; 6) \Rightarrow (-2; 3; 2)$

11. Determinare per quali valori del parametro reale m il punto medio del segmento di estremi (1; –2; 3) e $(m^2; 1 - m; 2 + m)$ appartiene di volta in volta ai piani: a) xy; b) xz; c) yz

Il punto ha coordinate: $M \equiv \left(\frac{1+m^2}{2}; \frac{-1-m}{2}; \frac{5+m}{2}\right)$. a) deve essere $5 + m = 0 \Rightarrow m = -5$; b) $-m - 1 = 0 \Rightarrow m = -1$; c) $1 + m^2 = 0$, che è impossibile.

12. Determinare le coordinate dei baricentri delle facce del tetraedro dell'esercizio precedente e verificare che il baricentro del tetraedro divide ciascuna mediana nel rapporto 3: 1.

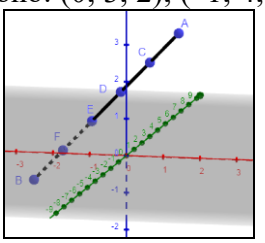
$$G_1 \equiv \left(\frac{3-1+2}{3}; \frac{2+2-1}{3}; \frac{0+2+1}{3}\right) \equiv \left(\frac{4}{3}; 1; 1\right); G_2 \equiv \left(\frac{3-1+0}{3}; \frac{2+2+2}{3}; \frac{0+2-1}{3}\right) \equiv \left(\frac{2}{3}; 2; \frac{1}{3}\right);$$

$$G_3 \equiv \left(\frac{3+2+0}{3}; \frac{2-1+2}{3}; \frac{0+1-1}{3}\right) \equiv \left(\frac{5}{3}; 1; 0\right); G_4 \equiv \left(\frac{-1+2+0}{3}; \frac{2-1+2}{3}; \frac{2+1-1}{3}\right) \equiv \left(\frac{1}{3}; 1; \frac{2}{3}\right)$$

SI ha: $\frac{\overline{GG_1}}{\overline{GD}} = \frac{\sqrt{61}/12}{\sqrt{61/4}} = \frac{1}{3}; \frac{\overline{GG_2}}{\overline{GC}} = \frac{\sqrt{101}/12}{\sqrt{101/4}} = \frac{1}{3}; \frac{\overline{GG_3}}{\overline{GB}} = \frac{\sqrt{109}/12}{\sqrt{109/4}} = \frac{1}{3}; \frac{\overline{GG_4}}{\overline{GA}} = \frac{\sqrt{77}/12}{\sqrt{77/4}} = \frac{1}{3}$

13. Determinare le coordinate dei punti che dividono il segmento di estremi (1; 2; 3) e (–4; 7; –2) in cinque parti uguali.

Basta considerare le proiezioni dei punti sugli assi coordinati e dividere queste per 5, così le ascisse vengono divise in 5 pezzi lunghi $(1 + 4)/5 = 1$; le ordinate in 5 pezzi lunghi $(7 - 2)/5 = 1$ e le z in pezzi da $(3 + 2)/5 = 1$. Ciò significa che partendo da A, arriviamo a B diminuendo di 1 unità alla volta le x e le z e aumentando di 1 le y. Così i punti sono: (0; 3; 2); (–1; 4; 1); (–2; 5; 0); (–3; 6; –1).



14. Determinare le coordinate dei punti che dividono il segmento di estremi (0; 1; –2) e (–1; 3; 4) in sei parti uguali.

Come prima, avremo: $(0 - 1/6; 1 + 1/3; -2 + 1) \equiv (-1/6; 4/3; -1)$, $(0 - 2/6; 1 + 2/3; -2 + 2) \equiv (-1/3; 5/3; 0)$, $(0 - 3/6; 1 + 1; -2 + 3) \equiv (-½; 2; 1)$, $(0 - 4/6; 1 + 4/3; -2 + 4) \equiv (-2/3; 7/3; 2)$, $(0 - 5/6; 1 + 5/3; -2 + 5) \equiv (-5/6; 8/3; 3)$.

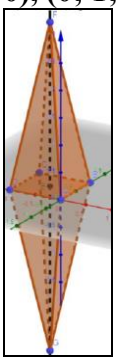
15. Il punto (0; 0; 3) divide il segmento di estremi (3; –6; 3) (–1; 2; 3) nel rapporto $1/n$. a) Quanto vale n? b) Qual è l'altro punto del segmento che fa lo stesso?

a) Ragionando come in precedenza abbiamo: $(3 - 4/n; -6 + 8/n; 3) \equiv (0; 0; 3)$ oppure $(-1 + 4/n; 2 -$

$8/n;\ 3) \equiv (0;\ 0;\ 3)$. Nel primo caso $\begin{cases} 3-\dfrac{4}{n}=0 \\ -6+\dfrac{8}{n}=0 \end{cases} \Rightarrow n=\dfrac{4}{3}$, non accettabile perché non intero. Nel secondo caso: $\begin{cases} -1+\dfrac{4}{n}=0 \\ 2-\dfrac{8}{n}=0 \end{cases} \Rightarrow n=4$, che invece è accettabile.

b) Essendo il rapporto ¼, l'altra possibilità è $(3-1;\ -6+2;\ 3) \equiv (2;\ -4;\ 3)$

16. Determinare le coordinate del vertice della piramide regolare di base il quadrato di vertici (0; 0; 0), (0; 1; 0), (–1; 1, 0), (–1; 0; 0) e di altezza lunga 3 unità.



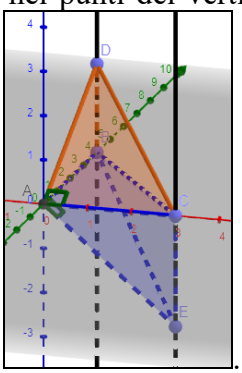
Il vertice ha per piede il centro del quadrato, ossia (–½; ½; 0), quindi vi sono due possibilità: (–½; ½; ±3)

17. Determinare superficie laterale e volume della piramide precedente.

Il volume facilmente misura: 1/3 · 3 · 1 = 1. Per la superficie calcoliamo l'area delle facce; ci serve l'altezza relativa allo spigolo di base: $\sqrt{9+\dfrac{1}{4}}=\dfrac{\sqrt{37}}{2}$, quindi la superficie laterale: $4\cdot\dfrac{\sqrt{37}}{4}=\sqrt{37}$.

18. Determinare le coordinate del quarto vertice dei tetraedri quadrirettangoli i cui rimanenti vertici sono i punti (0; 0; 0), (3; 0; 0) e (0; 4; 0).

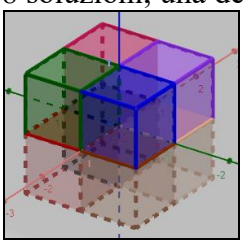
Per essere certi che anche la quarta faccia sia un triangolo rettangolo dobbiamo considerare il vertice sulle perpendicolari al piano cui appartiene la faccia di partenza nei punti dei vertici non rettangoli.



Quindi abbiamo le infinite soluzioni: $(3;\ 0;\ z)$ o $(0;\ 4;\ z)$, con $z \neq 0$.

19. Determinare le coordinate dei vertici di un cubo di lato 1; che ha un vertice nell'origine e tre spigoli appartenenti agli assi coordinati.

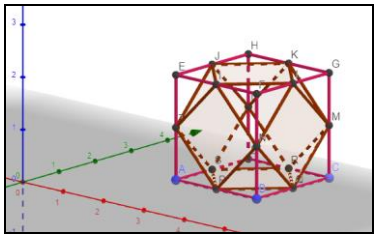
Vi sono 8 soluzioni, una delle quali è (0; 0; 0), (1; 0; 0), (1; 1; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1), (1; 0; 1), (1; 1; 1), (0; 1; 1)



Le altre si ottengono per simmetria, come mostrato in figura.

20. Determinare le coordinate dei vertici del cubottaedro ottenuto a partire dal cubo in cui una faccia ha per vertici i punti (2; 2; 0), (4; 2; 0), (2; 4; 0) e (4; 4; 0).

Basta considerare i punti medi degli spigoli: (4; 3; ,2), (3; 2; 2), (2; 3; 2), (3; 4;2), (4; 4; 1), (2; 4; 1),



(2; 2; 1), (4; 2; 1), (3; 4; 0), (4; 3; 0), (2; 3; 0), (3; 2; 0).

21. Si dimostra che l'area del triangolo di vertici i punti (x_A; y_A; z_A), (x_B; y_B; z_B), (x_C; y_C; z_C) si calcola con la formula $\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_A & z_A & 1 \\ y_B & z_B & 1 \\ y_C & z_C & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_A & z_A & 1 \\ x_B & z_B & 1 \\ x_C & z_C & 1 \end{vmatrix}^2}$. Verificare che se i punti appartengono tutti al piano *xy*, la detta formula coincide con quella già nota.

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_A & 0 & 1 \\ y_B & 0 & 1 \\ y_C & 0 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_A & 0 & 1 \\ x_B & 0 & 1 \\ x_C & 0 & 1 \end{vmatrix}^2} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}^2} = \frac{1}{2}\cdot abs\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

22. Si dimostra che il volume del tetraedro di vertici (x_A; y_A; z_A), (x_B; y_B; z_B), (x_C; y_C; z_C), (x_D; y_D; z_D) si calcola con la formula $\frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \\ x_C & y_C & z_C & 1 \\ x_D & y_D & z_D & 1 \end{vmatrix}$ (il determinante in valore assoluto). Calcolare il volume del tetraedro i cui vertici sono l'origine e i punti (1; 0; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1).

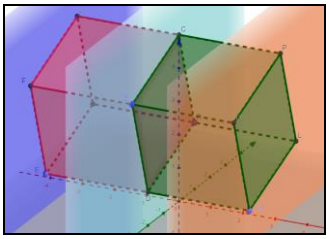
$$\frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}$$

23. Determinare le coordinate dei vertici del cubo che ha una faccia appartenente al piano *x* = 0, in cui due vertici opposti sono i punti (0; 1; 2) e (0; –3; 4).

La diagonale della faccia misura: $\sqrt{(1+3)^2+(2-4)^2} = 2\sqrt{5}$, quindi il lato misura: $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \sqrt{10}$. Gli altri vertici sul piano *x* = 0, si trovano quindi come intersezioni delle circonferenze di centri di due punti e raggio $\sqrt{10}$:

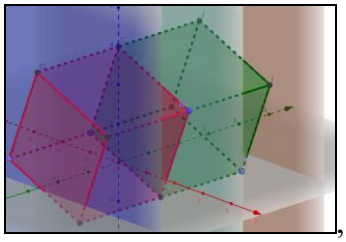
$$\begin{cases} (y-1)^2+(z-2)^2 = 10 \\ (y+3)^2+(z-4)^2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2-2y+1+z^2-4z+4 = 10 \\ y^2+6y+9+z^2-8z+16 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2-2y+z^2-4z-5 = 0 \\ y^2+6y+z^2-8z+15 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y^2-2y+z^2-4z-5 = 0 \\ 8y-4z+20 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2-2y+(2y+5)^2-4(2y+5)-5 = 0 \\ z = 2y+5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2 \\ z = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \\ z = 5 \end{cases}$$



Quindi: (0; 0; 5) e (0; –2; 1). A questo punto gli altri 4 vertici stanno sui piani $x = \pm\sqrt{10}$ e hanno le altre coordinate uguali ai vertici corrispondenti su *x* = 0 e quindi sono: $(\pm\sqrt{10};-2;1)(\pm\sqrt{10};1;2),(\pm\sqrt{10};0;5),(\pm\sqrt{10};-3;4)$.

24. Determinare le coordinate dei vertici del cubo che ha una faccia appartenente al piano *y* = 0, in cui due vertici opposti sono i punti (–2; 0; 1) e (5; 0; 4).

Come nel precedente quesito:  , stavolta i punti sono: (3; 0; –1) e (0; 0; 6) sul piano y = 0, mentre gli altri piani hanno equazioni: $y=\pm\sqrt{29}$, quindi i rimanenti vertici sono: $\left(-2;\pm\sqrt{29};1\right)\left(3;\pm\sqrt{29};-1\right),\left(5;\pm\sqrt{29};4\right),\left(0;\pm\sqrt{29};6\right)$.

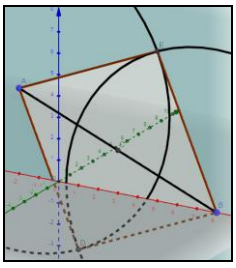
25. Dopo aver verificato che il triangolo di vertici (0; 0; 0), (0; 1; 0) $\left(-\sqrt{3}/2;1/2;0\right)$ è equilatero, determinare le coordinate dei quarti vertici dei tetraedri regolari che hanno tale triangolo come una delle loro facce.

Per la verifica basta mostrare che i lati hanno la stessa misura, uno si vede subito che è lungo 1, gli altri: $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=1$. A questo punto il quarto vertice ha per piede il baricentro del dato triangolo, ossia: $\left(-\frac{\sqrt{3}}{6};\frac{1}{2};0\right)$, l'altezza sappiamo che misura $\sqrt{\frac{2}{3}}$ volte il lato, ossia $\sqrt{\frac{2}{3}}$, quindi abbiamo 2 possibili quarti vertici: $\left(-\frac{\sqrt{3}}{6};\frac{1}{2};\pm\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

26. Determinare le coordinate degli altri due vertici di un ottaedro regolare i cui vertici che determinano un quadrato hanno coordinate (0; 0; 0), (1; 0; 0), (1; 1; 0), (0; 1; 0).

I rimanenti vertici hanno per piede sul piano del quadrato, il centro dello stesso, cioè (½ ; ½; 0). Per determinare la loro coordinata z, teniamo conto che la loro distanza dal piano del quadrato misura $\frac{\sqrt{2}}{2}$ volte lo spigolo, che in questo caso misura 1. Pertanto i vertici cercati sono: $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

27. **Determinare le coordinate degli altri vertici di un ottaedro regolare in cui i vertici che determinano un quadrato appartengono al piano y = 0, e due di questi, fra loro opposti, hanno coordinate (–2; 0; 4) e** (8; 0; 0).

Come nel quesito precedente, determiniamo il centro del quadrato: (3; 0; 2), il lato misura $\frac{\sqrt{10^2+4^2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{58}$. Quindi i vertici appartenenti al piano y = 0 sono le intersezioni delle circonferenze di centri i due punti e raggio quanto il lato del quadrato.  Ossia le soluzioni del sistema: $\begin{cases}(x+2)^2+(z-4)^2=58\\(x-8)^2+z^2=58\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\z=-3\end{cases}\vee\begin{cases}x=5\\z=7\end{cases}$, quindi: (1; 0; –3) e (5; 0; 7). I rimanenti vertici si ottengono a partire da (3; 0; 2), in cui la coordinata y è $\frac{\sqrt{58}}{\sqrt{2}}=\sqrt{29}$, perciò: $\left(3;\pm\sqrt{29};2\right)$.

28. Dimostrare il Corollario 1.

Per determinare le coordinate del punto medio basta considerare i punti medi delle diverse coordinate omonime, come fatto negli esercizi 13 e 14.

29. Dimostrare il Corollario 2.

Analogo discorso per il baricentro, sapendo che divide ogni mediana nel rapporto ¼.

30. Determinare una formula per calcolare la distanza di due punti in uno spazio a *n* dimensioni.

Basta generalizzare il teorema di Pitagora a un numero arbitrario di coordinate, ottenendo così: $\sqrt{\left(x_1^{'}-x_1^{''}\right)^2+\left(x_2^{'}-x_2^{''}\right)^2+...+\left(x_n^{'}-x_n^{''}\right)^2}$

Piani e rette nello spazio cartesiano

Scrivere l'equazione del piano passante per i punti indicati

1. a) (1; 0; 1), (1; 2; 3), (1; 3; 2); b) (1; 1; 1), (2; 2; 2), (3; 3; 3); c) (1; 1; 0), (0; 1; 1), (1; 0; 1)

a) $\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-1 \\ 1-1 & 2-0 & 3-1 \\ 1-1 & 3-0 & 2-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x-2-(6x-6)=0 \Rightarrow -4x+4=0 \Rightarrow x=1.$

b) $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 0=0$, i punti sono allineati, come facilmente si vedeva considerando le ordinate che differiscono di una unità e quindi rappresentano lo stesso vettore. Punti allineati

c) $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x+y+z-2=0 2x-2-(6x-6)=0 \Rightarrow -4x+4=0 \Rightarrow x=1.$

2. a) (0; 0; 0), (2; 1; 1), (–1; 2; 3) ; b) (1; 0; 0), (2; 0; 3), (0; 1; 2); c) (3; –1; 1), (–1; 2; –1), (1; –2; 1)

a) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x-7y+5z=0$; b) $\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x+5y-z=3$;

c) $\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-1 \\ 4 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x-2y-5z=0.$

3. (1; –1; 1), (–1; 1; 1), (–1; 1; –1) ; b) (1; 2; 3), (2; 3; 1), (3; 2; 1);

a) $\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x+y=0$; b) $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x+y+z=6$

4. a) (2; 1; 0), (0; 2; –1), (–1; –2; 1); b) (–1; 0; –1), (–2; 0; 0), (0; –3; 1)

a) $\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4x-y-9z=7$; b) $\begin{vmatrix} x+1 & y & z+1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x+y+z+2=0$

Determinare le reciproche posizioni dei piani di seguito indicati

5. α: $2x-3y-z+1=0$ e β: $4x+6y-2z=0$

$2/4 \neq -3/6$, quindi sono incidenti, non è necessario considerare tutti e tre i rapporti, bastano che almeno due siano diversi.

6. α: $x-y-z+1=0$ e β: $x+y-z-1=0$

$1/1 \neq -1/1$, quindi sono incidenti

7. α: $2x-z+1=0$ e β: $4x+y-2z-1=0$

$2/4 \neq 0/1$, quindi sono incidenti

8. α: $x-y+1=0$ e β: $2x-2y-4=0$

½ = ½, entrambi non hanno *z* e il rapporto dei termini noti è diverso da ½, quindi sono paralleli

9. **α: $x - 2y + 1 = 0$ e β: $2x - 4z - 3 = 0$**
Sono incidenti perché nella prima equazione manca z e nella seconda no.

10. **α: $2x - 3y - z = 0$ e β: $6x - 9y - 3z = 0$**
$1/3 = -3/(-9) = -1/(-3)$ ed entrambi sono privi del termine noto, quindi sono coincidenti

Scrivere l'equazione del piano passante per il punto P e parallelo al piano α indicato

11. **a) $P \equiv (1; 3; -1)$, $\alpha : x - y + z = 0$; b) $P \equiv (1; 1; -1)$, $\alpha : x + z = 0$; c) $P \equiv (0; 2; 3)$, $\alpha : x - y - 2 = 0$**
a) Il piano cercato ha equazione $(x - 1) - (y - 3) + (z + 1) = 0 \Rightarrow x - y + z + 3 = 0$.
b) $(x - 1) + (z + 1) = 0 \Rightarrow x + z = 0$; c) $x - (y - 2) = 0 \Rightarrow x - y + 2 = 0$

12. **a) $P \equiv (-1; 0; 2)$, $\alpha : 2y - 3z = 0$; b) $P \equiv (-2; 4; -1)$, $\alpha : 3x - y - 4z = 0$**
a) $2y - 3(z - 2) = 0 \Rightarrow 2y - 3z + 6 = 0$;
b) $3(x + 2) - (y - 4) - 4(z + 1) = 0 \Rightarrow 3x - y - 4z + 6 = 0$

13. **Scrivere l'equazione del piano che biseca l'angolo formato dai piani $x = 0$ e $y = 0$.**
LA condizione è che i punti del piano abbiano la stessa distanza dai due piani, in questo caso significa che abbiano le stesse coordinate in valore assoluto, ossia: $x = y$ o $x = -y$.

14. **Scrivere l'equazione del piano che biseca l'angolo formato dai piani $x = 0$ e $z = 0$.**
Ragionando come prima: $x = z$ o $x = -z$.

15. **Scrivere l'equazione del piano che biseca l'angolo formato dai piani $y = 0$ e $z = 0$.**
Analogamente ai precedenti: $y = z$ o $y = -z$

Determinare per quali valori del parametro reale m le seguenti coppie di piani sono perpendicolari

16. **$x - y + z = 0$ e $(2 - m) \cdot x + (3m - 1) \cdot y - 2 = 0$**
La condizione di perpendicolarità è che la somma dei prodotti dei coefficienti omonimi sia nulla:
$1 \cdot (2 - m) + (-1) \cdot (3m - 1) + 1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow 2 - m - 3m + 1 = 0 \Rightarrow 4m = 3 \Rightarrow m = ¾$.

17. **$2x - 3y + 1 = 0$ e $(1 + m) \cdot x + (2m + 3) \cdot y - z = 0$**
$2 \cdot (1 + m) - 3 \cdot (2m + 3) + 0 \cdot (-1) = 0 \Rightarrow 2 + 2m - 6m - 9 = 0 \Rightarrow 4m = -7 \Rightarrow m = -7/4$

18. **$x + 3y + 4z = 0$ e $(3 - m) \cdot x + (2 - m) \cdot y + (4m - 1) \cdot z = 0$**
$1 \cdot (3 - m) + 3 \cdot (2 - m) + 4 \cdot (4m - 1) = 0 \Rightarrow 3 - m + 6 - 3m + 16m - 4 = 0 \Rightarrow 12m = -5 \Rightarrow m = -5/12$

19. **$x - z + 3 = 0$ e $(2 - m) \cdot x + (3m - 1) \cdot z = 0$**
$1 \cdot (2 - m) + 0 \cdot 0 - 1 \cdot (3m - 1) = 0 \Rightarrow 2 - m - 3m + 1 = 0 \Rightarrow 4m = 3 \Rightarrow m = ¾$.

20. **$mx - 2y + z = 0$ e $(3 - m) \cdot x + (2 - m) \cdot y + (4m - 1) \cdot z = 0$**
$m \cdot (3 - m) + (-2) \cdot (2 - m) + 1 \cdot (4m - 1) = 0 \Rightarrow 3m - m^2 - 4 + 2m + 4m - 1 = 0 \Rightarrow m^2 - 9m + 5 = 0 \Rightarrow$
$m = \dfrac{9 \pm \sqrt{81 - 20}}{2} = \dfrac{9 \pm \sqrt{61}}{2}$

21. **$(1 - 2m) \cdot x + (3 - 2m) \cdot y + (m - 1) \cdot z = 0$ e $(1 - m) \cdot x + (3 + m) \cdot y + (4 - 3m) \cdot z = 0$**
$(1 - 2m) \cdot (1 - m) + (3 - 2m) \cdot (3 + m) + (m - 1) \cdot (4 - 3m) = 0 \Rightarrow 3m^2 - m - 6 = 0 \Rightarrow m = \dfrac{1 \pm \sqrt{73}}{6}$.

22. **$(3 - m) \cdot x + (5 - 2m) \cdot y + 1 = 0$ e $(4 + 5m) \cdot y + (2m + 7) \cdot z - 2m + 5 = 0$**
$(3 - m) \cdot 0 + (5 - 2m) \cdot (4 + 5m) + 0 \cdot (2m + 7) = 0 \Rightarrow (5 - 2m) \cdot (4 + 5m) = 0 \Rightarrow m = -4/5 \vee m = 5/2$

23. **Scrivere un'equazione che rappresenti l'asse delle y.**
Basta determinare le equazioni di due piani che si incontrano nella retta, possiamo quindi prendere due piani coordinati $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

24. **Scrivere un'equazione che rappresenti la retta parallela all'asse delle z, che passa per (1; 2; 0).**
L'asse z ha come una delle sue equazioni $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, consideriamo quindi la retta parallela che passa per il punto dato, ottenendo: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$.

25. **Fra tutti i piani contenenti la retta di equazione $\begin{cases} 2x - 3y + z - 1 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$, determinare quello passante per** a) (–1; 2; 3); b) (0; –½; –½); c) (1; 2; 3)

Un generico piano del fascio è: $(2x - 3y + z - 1) + h(x + y - z) = 0 \Leftrightarrow (2 + h)x - (3 - h)y + (1 - h)z - 1 = 0$. Imponiamo il passaggio per i punti dati: a) $(2 + h) \cdot (-1) - (3 - h) \cdot 2 + (1 - h) \cdot 3 - 1 = 0 \Rightarrow 2h = -6 \Rightarrow h = -3 \Rightarrow (2 - 3)x - (3 + 3)y + (1 + 3)z - 1 = 0 \Rightarrow x - 4z + 1 = 0$; b) $(2 + h) \cdot 0 - (3 - h) \cdot (-½) + (1 - h) \cdot (-½) - 1 = 0 \Rightarrow 0 = 0$, quindi il punto appartiene alla retta e perciò a tutti i piani del fascio; c) $(2 + h) \cdot 1 - (3 - h) \cdot 2 + (1 - h) \cdot 3 - 1 = 0 \Rightarrow 0 = -2$, dato che non abbiamo ottenuto alcun valore di h, non significa che non vi siano piani che contengono il punto, che non è possibile, ma che è l'unico piano che non può ottenersi per alcun valore di h, ossia $x + y - z = 0$.

26. Stabilire quali fra le seguenti rette sono sghembe con la retta $\begin{cases} x = -t + 2 \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$.

a) $\begin{cases} x = -2t \\ y = -4t + 1 \\ z = t \end{cases}$**; b)** $\begin{cases} x = -t + 2 \\ y = 0 \\ z = -2t \end{cases}$**; c** $\begin{cases} x = -\sqrt{2}t + 2 \\ y = \sqrt{2}t - 1 \\ z = -4 \end{cases}$

Per il teorema 13 dobbiamo calcolare

a) $\begin{vmatrix} 2-0 & 0-1 & 0-0 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & -4 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right. = 2 + 4 + 0 - (0 - 16 + 1) \neq 0$, le rette non sono complanari, quindi sono sghembe.

b) $\begin{vmatrix} 2-2 & 0-0 & 0-0 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0-0 & 0-0 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$, le rette sono complanari

c) $\begin{vmatrix} 2-2 & 0+1 & 0+4 \\ -1 & 1 & 2 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{array}\right. = 0 - 2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} - \left(-4\sqrt{2} + 0 + 0\right) = -2\sqrt{2} \neq 0$, le rette non sono complanari

Determinare le equazioni delle rette passanti per i punti accanto indicati (le risposte non sono assolute, possono anche esprimersi in forme diverse ma equivalenti)

27. a) (1; 2; 3), (2; 3; 4); b) (1; 2; 3), (1; 3; 2); c) (1; 2; 3) (0; 2; 4); d) (1; 2; 3), (–1; –2; –3)

a) Piuttosto che applicare le formule osserviamo che si ha: $\begin{cases} y - x = 1 \\ z - y = 1 \end{cases}$, potevamo scrivere anche:

$\begin{cases} y - x = 1 \\ z - x = 2 \end{cases}$ e infinite altre. Usando la formula stabilita dal Teorema 11: $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2-1} = \dfrac{y-2}{3-2} \\ \dfrac{x-1}{2-1} = \dfrac{z-2}{4-3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases}$.

Usando quella stabilita dal Teorema 12: $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = t + 3 \\ z = t + 4 \end{cases} \vee \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t + 2 \\ z = t + 3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x = 1 \\ \dfrac{y-2}{3-2} = \dfrac{z-3}{2-3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y + z - 5 = 0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} y = 2 \\ \dfrac{x-1}{0-1} = \dfrac{z-3}{4-3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - 2 = 0 \\ x + z - 4 = 0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{1+1} = \dfrac{y+2}{2+2} \\ \dfrac{x+1}{1+1} = \dfrac{z+3}{3+3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases}$, poteva osservarsi subito considerando le relazioni fra le coordinate.

28. a) (1; 2; 3), (0; 0; 0); b) (0; 0; 1) (0; 1; 0); c) (1; 0; 2) (2; 0; 1); d) (1; 2; 3), (2; 4; 6)

a) $\begin{cases} \frac{x}{1}=\frac{y}{2} \\ \frac{x}{1}=\frac{z}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-y=0 \\ 3x-z=0 \end{cases}$; b) osservando le coordinate: $\begin{cases} x=0 \\ y+z=1 \end{cases}$; c) anche in questo caso, le coordinate suggeriscono: $\begin{cases} y=0 \\ x+z=3 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 2x-y=0 \\ 3x-z=0 \end{cases}$, osserviamo che è la stessa retta a).

29. a) (–1; 0; 1), (1; 0; –1); b) (1; 0; 0), (0; 1; 1); c) (1; 0; 1), (0; 1; 1); d) (1; 1; 1), (2; 2; 2)

a) $\begin{cases} y=0 \\ x+z=0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+y=1 \\ x+z=1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} z=1 \\ x+y=1 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x-y=0 \\ x-z=0 \end{cases}$.

30. a) (2; 1; –1) (–1; 2; –2); b) (–2; 1; –2), (1; –2; 2)

a) $\begin{cases} \frac{x+1}{2+1}=\frac{y-2}{1-2} \\ \frac{x+1}{2+1}=\frac{z+2}{-1+2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3y-5=0 \\ x-3z-5=0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \frac{x+2}{1+2}=\frac{y-1}{-2-1} \\ \frac{x+2}{1+2}=\frac{z+2}{2+2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+1=0 \\ 4x-3z+2=0 \end{cases}$

Scrivere le equazioni delle rette seguenti in forma parametrica

31. a) $\begin{cases} y=x \\ y+z=0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} y-1=0 \\ z-1=0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x-2y-z+1=0 \\ 3x-y-z-2=0 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=-t \end{cases}$; b) Sottraiamo termine a termine: $\begin{cases} y=0 \\ x-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$; c) $\begin{cases} x=t \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x-2y-z+1=0 \\ 3x-y-z-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y-3=0 \\ 3x-y-z-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-2x+3 \\ 3x+2x+3-z-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-2x+3 \\ z=5x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=-2t+3 \\ z=5t+1 \end{cases}$

Scrivere le equazioni seguenti in forma non parametrica

32. a) $\begin{cases} x=2t+1 \\ y=t-2 \\ z=-t+3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x=3t \\ y=1 \\ z=2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=2t-2 \\ z=t \end{cases}$; d) $\begin{cases} x=2t/3 \\ y=-2t/3-2 \\ z=t-2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x=2t+1 \\ y=t-2 \\ z=-t+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2t+1 \\ t=y+2 \\ z=-t+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2y+5 \\ y+z=1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x=3t \\ y=1 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ z=2 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=2t-2 \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=1 \\ x=2z-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2z-1 \\ y=2z-2 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x=2t/3 \\ y=-2t/3-2 \\ t=z+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=-2 \\ 3x-2z-4=0 \end{cases}$

Scrivere l'equazione della retta passante per il punto P indicato e perpendicolare al piano indicato.

33. a) (1; 2; 0), 2*x* – *y* = 0 ; b) (0; 2; 1), *x* – *z* = 0 ; c) (–1; 1; 1), *x* – *y* + *z* = 0

a) In forma parametrica, usando il Teorema 14: $\begin{cases} x=2t+1 \\ y=-t+2 \\ z=0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x=t \\ y=2 \\ z=-t+1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x=t-1 \\ y=-t+1 \\ z=t+1 \end{cases}$

34. a) (–1; 2; –2), *x* – 2*y* + *z* = 0; b) (–2; –1; 1), –2*x* + 3*z* = 0; c) (0; 0; 3), *x* + 2*y* – *z* = 0

a) $\begin{cases} x=t-1 \\ y=-2t+2 \\ z=t-2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x=-2t-2 \\ y=-1 \\ z=3t+1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=-t+3 \end{cases}$

35. a) (–2; –2; 1), 4*x* – 2*y* + *z* = 0; b) (3; –1; 4), 3*x* – 2*y* + 2*z* = 0; c) (1; 1; 1), *x* + *y* – *z* = 0

a) $\begin{cases} x = 4t - 2 \\ y = -2t - 2 \\ z = t + 1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x = 3t + 3 \\ y = -2t - 1 \\ z = 2t + 4 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t + 1 \\ z = -t + 1 \end{cases}$

Scrivere l'equazione del piano passante per il punto P indicato e perpendicolare alla retta indicata

36. **a) (1; 2; 3),** $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ **; b) (3; 2; 1),** $\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 1 \end{cases}$ **; c) (1; –1; –1),** $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3 \\ z = -3t - 1 \end{cases}$

a) Per la seconda parte del Teorema 14: $1 \cdot (x - 1) + 1 \cdot (y - 2) + 1 \cdot (z - 3) = 0 \Rightarrow x + y + z - 6 = 0$;
b) $1 \cdot (x - 3) - 1 \cdot (y - 2) + 0 \cdot (z - 1) = 0 \Rightarrow x - y - 1 = 0$;
c) $2 \cdot (x - 1) + 0 \cdot (y + 1) - 3 \cdot (z + 1) = 0 \Rightarrow 2x - 3z - 5 = 0$.

37. **a) (0; 3; 0),** $\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = -t + 2 \end{cases}$ **; b) (1; 0; 0),** $\begin{cases} x = -2t + 1 \\ y = 3t + 3 \\ z = t \end{cases}$ **; c) (0; 0; –2),** $\begin{cases} x = t - 2 \\ y = -t + 2 \\ z = 0 \end{cases}$

a) $0 \cdot (x - 0) + 1 \cdot (y - 3) - 1 \cdot (z - 0) = 0 \Rightarrow y - z - 3 = 0$; b) $-2 \cdot (x - 1) + 3 \cdot (y - 0) + 1 \cdot (z - 0) = 0 \Rightarrow 2x - 3y - z - 2 = 0$; c) $1 \cdot (x - 0) - 1 \cdot (y - 0) + 0 \cdot (z + 2) = 0 \Rightarrow x - y = 0$.

38. **a) (1; –1; 1),** $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -3t \\ z = t - 2 \end{cases}$ **; b) (1; 3; –2),** $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = t + 2 \end{cases}$ **; c) (4; –3; –2),** $\begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = 3t + 2 \\ z = -t + 4 \end{cases}$

a) $2 \cdot (x - 1) - 3 \cdot (y + 1) + 1 \cdot (z - 1) = 0 \Rightarrow 2x - 3y + z - 6 = 0$; b) $0 \cdot (x - 1) + 0 \cdot (y - 3) + 1 \cdot (z + 2) = 0 \Rightarrow z = -2$; c) $2 \cdot (x - 4) + 3 \cdot (y + 3) - 1 \cdot (z + 2) = 0 \Rightarrow 2x + 3y - z - 1 = 0$.

Determinare le distanze dei punti indicati dai piani accanto segnati

39. **a) $P \equiv (2; 3; -1)$, α: $x - 2y + z - 3 = 0$; b) $P \equiv (-2; 1; 0)$, α: $3x - y - 4 = 0$; c) $P \equiv (1; 1; -1)$, α: $x + z = 0$**

a) Usando la formula stabilita dal Teorema 15: $\dfrac{|1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 1 \cdot -1 - 3|}{\sqrt{1^2 + -2^2 + 1^2}} = \dfrac{8}{\sqrt{6}} = \dfrac{4\sqrt{6}}{3}$;

b) $\dfrac{|3 \cdot -2 - 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 - 4|}{\sqrt{3^2 + -1^2 + 0^2}} = \dfrac{11}{\sqrt{10}}$; c) Il punto appartiene al piano.

40. **a) $P \equiv (0; 2; 1)$, α: $x - y + z - 2 = 0$; b) $P \equiv (-1; 0; 2)$, α : $2y - 3 = 0$**

a) $\dfrac{|1 \cdot 0 - 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 - 2|}{\sqrt{1^2 + -1^2 + 1^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$; b) $\dfrac{|0 \cdot -1 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 - 3|}{\sqrt{2^2}} = \dfrac{3}{2}$

Determinare per quali valori del parametro reale k, le distanze dei punti indicati dai piani accanto segnati hanno il valore d riportato

41. **a) $P \equiv (k, 0; 1)$, α: $x - 2y + z - 3 = 0$, $d = 2$; b) $P \equiv (-1; 2; 0)$, α : $x - ky + z = 0$, $d = 1$**

a) $\dfrac{|1 \cdot k - 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 - 3|}{\sqrt{1^2 + -2^2 + 1^2}} = 2 \Rightarrow |k - 2| = 2\sqrt{6} \Rightarrow k = 2 \pm 2\sqrt{6}$;

b) $\dfrac{|1 \cdot -1 - k \cdot 2 + 1 \cdot 0|}{\sqrt{1^2 + -k^2 + 1^2}} = 1 \Rightarrow |-1 - 2k| = \sqrt{k^2 + 2} \Rightarrow 1 + 4k + 4k^2 = k^2 + 2 \Rightarrow 3k^2 + 4k - 1 = 0 \Rightarrow$

$k = \dfrac{-2 \pm \sqrt{7}}{3}$

42. **a) $P \equiv (k + 1; 3; -2)$, α: $2x - y + z = 0$, $d = 3$; b) $P \equiv (k - 1; k + 1; 1)$, α: $x - y + z = 0$, $d = 1$**

a) $\dfrac{|2 \cdot k + 1 - 1 \cdot 3 + 1 \cdot -2|}{\sqrt{2^2 + -1^2 + 1^2}} = 3 \Rightarrow |2k - 3| = 3\sqrt{6} \Rightarrow k = \dfrac{3 \pm 3\sqrt{6}}{2}$;

b) $\dfrac{|1\cdot\ k-1\ -1\cdot\ k+1\ +1\cdot\ -1|}{\sqrt{1^2+\ -1\ ^2+1^2}}=1\Rightarrow|-3|=\sqrt{3}\Rightarrow\varnothing$

43. a) $P\equiv(2-k,-2;1-k)$, α: $x-z+3=0$, $d=2\sqrt{2}$; b) $P\equiv(k-1;k+2;2)$, α: $x-ky+kz=0$, $d=1$

a) $\dfrac{|1\cdot\ 2-k\ +0\cdot\ -2\ -1\cdot\ 1-k\ +3|}{\sqrt{1^2+\ -1\ ^2}}=2\sqrt{2}\Rightarrow\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}\Rightarrow\forall x\in\mathbb{R}$

b) $\dfrac{|1\cdot\ k-1\ -k\cdot\ k+2\ +k\cdot 2|}{\sqrt{1^2+\ -k\ ^2+k^2}}=1\Rightarrow|-k^2+k-1|=\sqrt{2k^2+1}\Rightarrow k^4+k^2+1-2k^3+2k^2-2k=2k^2+1$

$\Rightarrow k^4-2k^3+k^2-2k=0\Rightarrow k(k^3-2k^2+k-2)=0\Rightarrow k=0\vee(k-2)(k^2+1)=0\Rightarrow k=0\vee k=2.$

Determinare le reciproche posizioni del piano e della retta di seguito indicati

44. a) $r:\begin{cases}x-y-z+1=0\\x+y-z=0\end{cases},\alpha:2x+y-z-1=0$ **; b)** $r:\begin{cases}x-2y-z=0\\2x+y+z=0\end{cases},\alpha:3x-y-1=0$

a) $\begin{cases}x-y-z+1=0\\x+y-z=0\\2x+y-z-1=0\end{cases}\Rightarrow\ II-I;III-II\ \begin{cases}2y-1=0\\z=x+y\\x-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=1/2\\z=3/2\end{cases}$; sono incidenti in (1; ½; 3/2);

b) $\begin{cases}x-2y-z=0\\2x+y+z=0\\3x-y-1=0\end{cases}\Rightarrow\ III-II-I\ \begin{cases}x-2y-z=0\\2x+y+z=0\\-1=0\end{cases}\Rightarrow\varnothing$. Sono paralleli

45. a) $r:\begin{cases}x-2y-3z=0\\3x-y+z-1=0\end{cases},\alpha:4x-3y-2z-1=0$ **; b)** $r:\begin{cases}y-z+1=0\\x+z=0\end{cases},\alpha:x+3y-2=0$

a) $\begin{cases}x-2y-3z=0\\3x-y+z-1=0\\4x-3y-2z-1=0\end{cases}\Rightarrow\ I+II-III\ \begin{cases}0=0\\3x-y+z-1=0\\4x-3y-2z-1=0\end{cases}$, quindi r giace su α;

b) $\begin{cases}y-z+1=0\\x+z=0\\x+3y-2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=z-1\\x=-z\\-z+3z-3-2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-5/2\\y=3/2\\z=5/2\end{cases}$. Incidenti in $P\equiv(-5/2;3/2;5/2)$.

46. Determinare le equazioni delle sfere di cui sono dati centro e raggio
a) (1; 2; 3), $R=3$; b) (–1; 0; –3), $R=\sqrt{2}$; c) (0; 0; 4), $R=\sqrt{3}$

a) $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=3^2\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+5=0$;
a) $(x+1)^2+y^2+(z+3)^2=2\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2x+6z+8=0$;
a) $x^2+y^2+(z-4)^2=3\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-16z+7=0$.

47. Determinare le equazioni delle circonferenze di cui sono dati centro, raggio e piano di appartenenza: a) (1; 1; 0), $R=2$; $x=y$; b) (1; 2; –3), $R=1$, $x+y+z=0$; c) (1; 0; 1), $R=3$, $x=2z$.

a) $\begin{cases}x-1\ ^2+\ y-1\ ^2+z^2=4\\x=y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2+z^2-2x-2y-12=0\\x=y\end{cases}$. La circonferenza è reale, poiché il centro della sfera appartiene al piano e quindi la sezione esiste.

b) $\begin{cases}x+1\ ^2+\ y-2\ ^2+\ z+3\ ^2=1\\x+y+z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2+z^2+2x+4y+6z+13=0\\x+y+z=0\end{cases}$. La circonferenza è reale, poiché il centro della sfera appartiene al piano e quindi la sezione esiste.

c) $\begin{cases} x-1\ ^2+y^2+\ z-1\ ^2=9 \\ x=2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x-2z-7=0 \\ x=2z \end{cases}$. La circonferenza è reale, anche se il centro della sfera non appartiene al piano, poiché la sua distanza dal piano è $\frac{|1-2|}{\sqrt{1^2+\ -2\ ^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}<3$.

48. Provare che l'equazione: $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$, rappresenta una sfera.
La caratteristica dell'equazione di una sfera è, come per le circonferenze, che i coefficienti di secondo grado siano fra loro uguali e non vi siano termini di grado superiore al secondo, né più di tre incognite.

49. Determinare una formula per trovare le coordinate del centro e la misura del raggio della sfera di equazione: $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$.
Come nel caso della circonferenza possiamo scrivere: $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 + (z - z_C)^2 - R^2 \Rightarrow ax + by + cz + d = -2x_Cx - 2y_Cy - 2z_Cz + x_C^2 + y_C^2 + z_C^2 - R^2$: quindi uguagliando i coefficienti relativi alle incognite omonime otteniamo le coordinate del centro: $C \equiv \left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2};-\frac{c}{2}\right)$, facendo lo stesso con il raggio:

$$R=\sqrt{x_C^2+y_C^2+z_C^2-d}=\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2-d}=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2-4d}}{2}$$

Determinare le coordinate del centro e la misura del raggio delle sfera seguenti

50. a) $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 4z = 0$; b) $x^2 + z^2 + y - z + 1 = 0$.
Usando le formule stabilite dal quesito precedente:
a) $C \equiv (-1; -1; -2)$, $R=\frac{\sqrt{2^2+2^2+4^2-4\cdot 0}}{2}=\sqrt{6}$; b) $C \equiv (0; -½; ½)$, $R=\frac{\sqrt{0^2+1^2+1^2-4}}{2}$, sfera non reale.

51. a) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 2z = 0$; b) $x^2 + y^2 + z^2 + 3z - 2 = 0$.
a) $C \equiv (-1; -1; 1)$, $R=\frac{\sqrt{2^2+2^2+2^2}}{2}=\sqrt{3}$; b) $C \equiv (0; 0; -3/2)$, $R=\frac{\sqrt{3^2+8}}{2}=\frac{\sqrt{17}}{2}$.

52. a) $x^2 + y^2 + z^2 - x + y - 2z + 3 = 0$; b) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + x + 3y - 1 = 0$.
a) $C \equiv (½; -½; 1)$, $R=\frac{\sqrt{1^2+1^2+4-12}}{2}$, sfera non reale; b) Dobbiamo dividere per 2: $x^2 + y^2 + z^2 + ½x + 3/2y - ½ = 0 \Rightarrow C \equiv (-¼; -3/4; 0)$, $R=\frac{\sqrt{1/4+9/4+2}}{2}=\frac{3}{2}$,.

53. Sotto quali condizioni una sfera di equazione: $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$, è reale?
Ovviamente il radicando nell'espressione del raggio deve essere positivo, ossia: $a^2 + b^2 + c^2 > 4d$.

54. Sotto quali condizioni una circonferenza di equazione: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0 \\ mx+ny+pz+q=0 \end{cases}$, è reale?
Ovviamente la sfera deve essere reale e inoltre il piano non deve essere esterno alla sfera, ossia la deve sezionare in una circonferenza. Per fare ciò basta che la distanza dal centro della sfera al piano sia minore del raggio della sfera.

55. Studiare, al variare del parametro reale *k*, le reciproche posizioni della retta $r:\begin{cases} x-y-z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ e del fascio di piani $kx - y + (k + 1) \cdot z - 1 = 0$.

$\begin{cases} x-y-z=0 \\ x+y-z=0 \\ kx-y+\ k+1\ z-1=0 \end{cases} \Rightarrow II-I \begin{cases} 2y=0 \\ x=z-y \\ k\ z-y\ -y+\ k+1\ z-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=z \\ y=0 \\ 2k+1\ z-1=0 \end{cases}$. Pertanto se

Se $k = -½$, l'ultima equazione è una contraddizione perciò retta e piano sono paralleli, diversamente sono incidenti in $(1/(2k+ 1); 0; 1/(2k +1))$.

56. Enunciare una condizione necessaria per il parallelismo di due piani, che riguardi il segno dei coefficienti delle incognite.

I segni dei coefficienti omonimi devono essere tutti uguali o tutti opposti, diversamente i tre rapporti non potranno mia essere uguali.

57. Determinare gli altri due vertici del quadrato appartenente al piano $x = y$ che ha come vertici opposti i punti (1; 1; 1) e $\left(1+\sqrt{2};1+\sqrt{2};3\right)$.

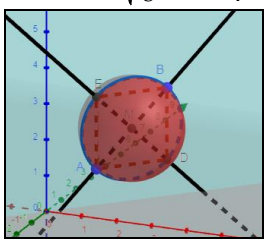
Consideriamo il punto medio fra i due vertici: $M \equiv \left(1+\sqrt{2}/2;1+\sqrt{2}/2;2\right)$; scriviamo l'equazione della retta passante per i due punti: $r:\begin{cases} x=\sqrt{2}t+1 \\ y=\sqrt{2}t+1 \\ z=2t+1 \end{cases}$ e l'equazione della perpendicolare a esso passante per M: $s:\begin{cases} x=2t+1+\sqrt{2}/2 \\ y=2t+1+\sqrt{2}/2 \\ z=-2\sqrt{2}t+2 \end{cases}$; consideriamo la circonferenza di centro M passante per i due vertici, ottenuta come sezione fra la sfera di centro M e uguale raggio e il piano $x = y$:

$$\begin{cases} \left(x-1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(y-1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+(z-2)^2=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2+2^2}{2} \\ x=y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2-\left(2+\sqrt{2}\right)x-\left(2+\sqrt{2}\right)y-4z+2\sqrt{2}+5=0 \\ x=y \end{cases}$$

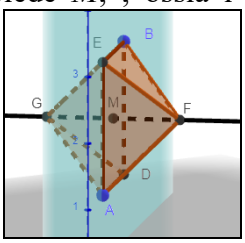
Intersechiamo la circonferenza con la retta s e otteniamo i vertici cercati: $2x^2+z^2-2\left(2+\sqrt{2}\right)x-4z+2\sqrt{2}+5=0 \Rightarrow 2\left(2t+1+\sqrt{2}/2\right)^2+\left(-2\sqrt{2}t+2\right)^2-2\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2t+1+\sqrt{2}/2\right)$

$$-4\left(-2\sqrt{2}t+2\right)+2\sqrt{2}+5=0 \Rightarrow 16t^2-2=0 \Rightarrow t=\pm\sqrt{\frac{1}{8}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \left(1+\sqrt{2};1+\sqrt{2};1\right)\vee(1;1;3)$$



58. Determinare i vertici delle piramidi regolari che hanno il precedente quadrato come base e volume 4/3 unità cubiche.

Il quadrato ha lato lungo 2, quindi area 4, perciò l'altezza della piramide è lunga 1. Quindi vi sono due possibilità, avendo come piede M, , ossia i punti sulla perpendicolare al piano $x - y = 0$ in M,



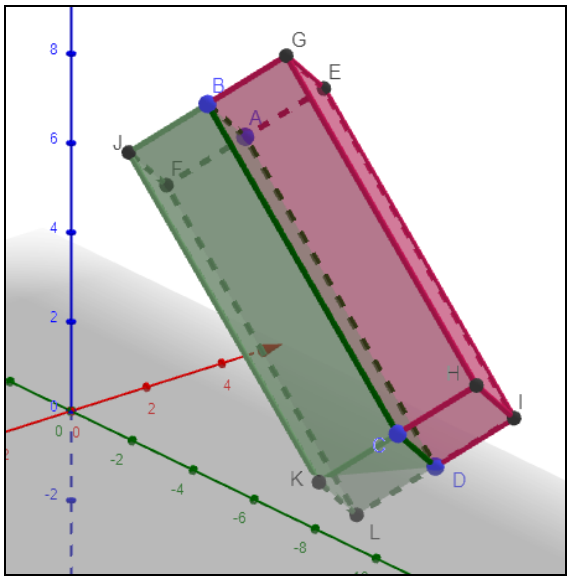
$\begin{cases} x=t+1+\sqrt{2}/2 \\ y=-t+1+\sqrt{2}/2, \\ z=2 \end{cases}$ che distano 1 dal piano:

$$\frac{\left|t+\cancel{1+\sqrt{2}/2}+t\cancel{-1-\sqrt{2}/2}\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=1 \Rightarrow 2|t|=\sqrt{2} \Rightarrow t=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$, quindi i vertici sono:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1+\frac{\sqrt{2}}{2};\cancel{-\frac{\sqrt{2}}{2}}+1+\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}};2\right)\vee\left(\cancel{-\frac{\sqrt{2}}{2}}+1+\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}};\frac{\sqrt{2}}{2}+1+\frac{\sqrt{2}}{2};2\right)\Leftrightarrow\left(1+\sqrt{2};1;2\right)\vee\left(1;1+\sqrt{2};2\right)$$

59. Determinare le coordinate dei vertici dei prismi retti in cui una base ha per vertici, nell'ordine, i punti (3; –2; 6), (2; –2; 7); (3; –7; 1), (4; –7; 0) e altezza lunga 2 unità.

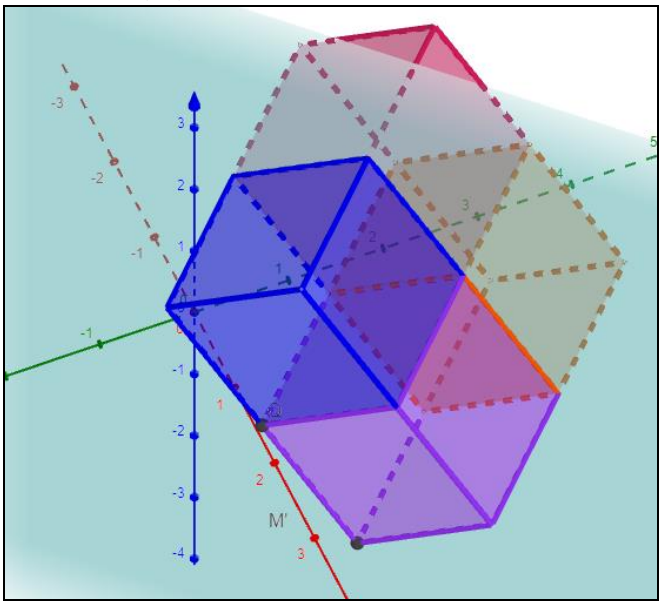
Il poligono di base è un rettangolo di lati lunghi $\sqrt{1+0+1}=\sqrt{2};\sqrt{1+25+36}=\sqrt{62}$. Appartengono al piano di equazione: $\alpha:\begin{vmatrix} x-3 & y+2 & z-6 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix}=0\Leftrightarrow x-y+z-11=0$. Gli altri vertici si ottengono considerando sulle perpendicolari ad α nei vertici dati i punti che da α distano 2. Effettuiamo solo il calcolo dei vertici corrispondenti a (3; –2; 6), gli altri si ottengono in modo analogo. L'equazione della perpendicolare è $\begin{cases} x=t+3 \\ y=-t-2 \\ z=t+6 \end{cases}$, deve essere: $\frac{|t+3+t+2+t+6-11|}{\sqrt{3}}=2\Rightarrow 3|t|=2\sqrt{3}\Rightarrow t=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$, quindi il punto corrispondente è: $3\pm2\sqrt{3}/3;-2\mp2\sqrt{3}/3;6\pm2\sqrt{3}/3$, in modo analogo si determinano gli altri: $2\pm2\sqrt{3}/3;-2\mp2\sqrt{3}/3;7\pm2\sqrt{3}/3$, $3\pm2\sqrt{3}/3;-7\mp2\sqrt{3}/3;1\pm2\sqrt{3}/3$ e $4\pm2\sqrt{3}/3;-7\mp2\sqrt{3}/3;\pm2\sqrt{3}/3$



60. Determinare le coordinate dei vertici del cubo che ha una faccia appartenente al piano *x* = *y* in cui due vertici adiacenti sono i punti (1; 1; 1) e (2; 2; 2).

Determiniamo gli altri due vertici appartenenti al piano *x* = *y*, come intersezioni fra le sfere di centro i due punti e raggio $\sqrt{3}$, $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=3$ e $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=3$, e le perpendicolari, $\begin{cases} x=t+1 \\ y=t+1 \\ z=-2t+1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=t+2 \\ y=t+2 \\ z=-2t+2 \end{cases}$, alla retta per i due punti, $\begin{cases} x=t+1 \\ y=t+1 \\ z=t+1 \end{cases}$: ottenendo: $(1+t-1)^2+(1+t-1)^2+(1-2t-1)^2=3\Rightarrow 6t^2=3\Rightarrow t=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $(2+t-2)^2+(2+t-2)^2+(2-2t-2)^2=3\Rightarrow 6t^2=3\Rightarrow t=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Così i punti sono: $\left(1\pm\sqrt{2}/2;1\pm\sqrt{2}/2;1\mp\sqrt{2}\right),\left(2\pm\sqrt{2}/2;2\pm\sqrt{2}/2;2\mp\sqrt{2}\right)$. Ovviamente i cubi richiesti sono quattro, le cui facce opposte a quella data sono sui piani paralleli a *x* = *y* a distanza $\sqrt{3}$ da esso e i due di questi simmetrici rispetto al piano perpendicolare a *x* = *y* contenente i due punti dati. Troviamo questi altri vertici sempre nello stesso modo precedente, consideriamo le rette perpendicolari al piano *x* = *y* nei vertici già trovati,

$\begin{cases} x=t+1 \\ y=-t+1; \\ z=1 \end{cases} \begin{cases} x=t+2 \\ y=-t+2; \\ z=2 \end{cases} \begin{cases} x=t+1\pm\sqrt{2} \\ y=-t+1\pm\sqrt{2}; \\ z=1\mp\sqrt{2} \end{cases} \begin{cases} x=t+2\pm\sqrt{2}/2 \\ y=-t+2\pm\sqrt{2}/2, \\ z=2\mp\sqrt{2} \end{cases}$ su tali rette consideriamo i punti che distano $\sqrt{3}$ da $x = y$, ottenendo: $\frac{|2t|}{\sqrt{1^2+\ -1\ ^2}}=\sqrt{3}\Rightarrow 2|t|=\sqrt{6}\Rightarrow t=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$, ripetendo il procedimento per le altre rette troviamo ovviamente sempre lo stesso valore di t, quindi abbiamo questi altri 8 punti: $\begin{matrix}(1\pm\sqrt{6}/2;1\mp\sqrt{6}/2;1),(2\pm\sqrt{6}/2;2\mp\sqrt{6}/2;2), \\ (1+(\sqrt{6}\pm\sqrt{2})/2;1-(\sqrt{6}\pm\sqrt{2})/2;1\mp\sqrt{2}),(2+(\sqrt{6}\pm\sqrt{2})/2;2-(\sqrt{6}\pm\sqrt{2})/2;2\mp\sqrt{2})\end{matrix}$. Gli altri 8 vertici si trovano in modo analogo.



L'angolo della MateFisica

1. **Dati i vettori:** $\vec{v_1}\equiv(x-2;3+y;z-3),\vec{v_2}\equiv(1;2-y;2z-1),\vec{v_3}\equiv(2x+1;y-1;2)$**, determinare, se esistono, i valori assegnati a *x*, *y* e *z*, in modo che** $\vec{v_1}+\vec{v_2}+\vec{v_3}\equiv(1;2;3)$**.**

   $(x - 2 + 1 + 2x + 1;\ 3 + y + 2 - y + y - 1;\ z - 3 + 2z - 1 + 2) \equiv (1\ ;\ 2\ ;\ 3) \Rightarrow (3x;\ y + 4;\ 3z - 2) \equiv (1;\ 2;\ 3) \Rightarrow x = 1/3;\ y = -2;\ z = 5/3.$

2. **Dati i vettori:** $\vec{v_1}\equiv(1;0;2),\vec{v_2}\equiv(-3;2;-1),\vec{v_3}\equiv(0;2;1)$**, calcolare** $|\vec{v_1}+2\vec{v_2}-3\vec{v_3}|$**.**

   $|\vec{v_1}+2\vec{v_2}-3\vec{v_3}|=\sqrt{(1-6)^2+(4-6)^2+(2-2-3)^2}=\sqrt{25+4+9}=\sqrt{38}$.

3. **Dati i vettori:** $\vec{v_1}\equiv(x-1;1;0),\vec{v_2}\equiv(0;x+2;1),\vec{v_3}\equiv(1;-1;x)$**, determinare, se esiste, il valore reale di *x*, per il quale si ha:** $|\vec{v_1}+\vec{v_2}-\vec{v_3}|=1$**.**

   $|\vec{v_1}+\vec{v_2}-\vec{v_3}|=1\Leftrightarrow\sqrt{(x-1+0-1)^2+(1+x+2+1)^2+(0+1-x)^2}=1\Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow\sqrt{(x-2)^2+(x+4)^2+(1-x)^2}=1\Leftrightarrow 3x^2+2x+21=1$, l'ultima equazione ha discriminante negativo, quindi non vi sono soluzioni reali.

4. **In relazione al precedente quesito, determinare per quali valori reali di *a*, l'equazione** $|\vec{v_1}+\vec{v_2}-\vec{v_3}|=a$**, ha soluzioni reali.**

   Essa diventa: $3x^2 + 2x + (21 - a^2) = 0$, il cui discriminante vale $1 - 3(21 - a^2) \geq 0 \Rightarrow a^2 \geq 62/3 \Rightarrow a\geq\sqrt{62/3}$, dato che ovviamente a deve essere positivo.

5. **Quali sono le coordinate del punto (1; 2; 3) in un sistema di riferimento che si muove con velocità (2; 0; 0), dopo 3 secondi?**

$(1; 2; 3) + 3 \cdot (2; 0; 0) \equiv (7; 2; 3)$.

Temi assegnati agli esami di stato

1. **(Liceo scientifico 2014/2015) Determinare un'espressione analitica della retta perpendicolare nell'origine al piano di equazioni $x + y - z = 0$.**

   Per quanto visto nei precedenti esercizi: $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$, o espresso in forma non parametrica: $\begin{cases} x = y \\ x = -z \end{cases}$

2. **(Liceo scientifico 2015/2016) Una sfera, il cui centro è il punto $K \equiv (-2; -1; 2)$, è tangente al piano Π avente equazione $2x - 2y + z - 9 = 0$. Qual è il punto di tangenza? Qual è il raggio della sfera?**

   Il punto di tangenza è l'intersezione della perpendicolare al piano per K, con il piano.
   $\begin{cases} x = 2t - 2 \\ y = -2t - 1 \\ z = t + 2 \\ 2x - 2y + z - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow 4t - 4 + 4t + 2 + t + 2 - 9 = 0 \Rightarrow t = 1$, quindi il punto di tangenza è $T \equiv (0; -3; 3)$.

   Il raggio misura quanto la distanza KT: $\sqrt{4+4+1} = 3$.

3. **(Liceo scientifico 2016/2017) Dati i punti $A \equiv (-2; 3; 1)$, $B \equiv (3; 0; -1)$, $C \equiv (2; 2; -3)$, determinare l'equazione della retta r passante per A e per B e l'equazione del piano π perpendicolare ad r e passante per C.**

   In forma parametrica: $\begin{cases} x = (3+2)t - 2 \\ y = (0-3)t - 3 \\ z = (-1-1)t + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5t - 2 \\ y = -3t - 3 \\ z = -2t + 1 \end{cases}$, il piano perpendicolare ha gli stessi numeri direttori della retta e passa per C: $5(x - 2) - 3(y - 2) - 2(z + 3) = 0 \Rightarrow 5x - 3y - 2z - 10 = 0$.

4. **(Liceo scientifico 2016/2017) Determinare le coordinate dei centri delle sfere di raggio $\sqrt{6}$ tangenti al piano π di equazione: $x + 2y - z + 1 = 0$ nel suo punto P di coordinate $(1; 0; 2)$.**

   I centri stanno sulla perpendicolare al piano in P: $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t \\ z = -t + 2 \end{cases}$, determiniamo per quali t la distanza dal piano è $\sqrt{6}$: $\dfrac{|t + 1 + 4t + t - 2 + 1|}{\sqrt{1+4+1}} = \sqrt{6} \Rightarrow |6t| = 6 \Rightarrow t = \pm 1$, quindi i punti sono: $(2; 2; 1)$ e $(0; -2; 3)$.

5. **(Liceo scientifico 2017/2018) Determinare l'equazione della superficie sferica S, con centro sulla retta r: $\begin{cases} x = t \\ y = t, t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$ tangente al piano π: $3x - y - 2z + 14 = 0$, nel punto $T \equiv (-4; 0; 1)$.**

   I centro ha coordinate: $(t; t; t)$ e la sua distanza dal piano deve essere uguale a quella da T:
   $\dfrac{|3t - t - 2t + 14|}{\sqrt{9+1+4}} = \sqrt{(t+4)^2 + t^2 + (t-1)^2} \Rightarrow \dfrac{14^2}{14} = 3t^2 + 6t + 17 \Rightarrow \cancel{3}t^2 + \cancel{6}^{2}t + \cancel{3} = 0 \Rightarrow t = -1$, quindi il centro è $(-1; -1; -1)$ e il raggio $\sqrt{14}$, quindi l'equazione: $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 2z - 11 = 0$.

6. **(Liceo scientifico 2017/2018) Sono dati, nello spazio tridimensionale, i punti $A \equiv (3; 1; 0)$, $B \equiv (3; -1; 2)$, $C \equiv (1; 1; 2)$. Dopo aver verificato che ABC è un triangolo equilatero e che è contenuto nel piano α di equazione $x + y + z - 4 = 0$, stabilire quali sono i punti P tali che $ABCP$ sia un tetraedro regolare.**

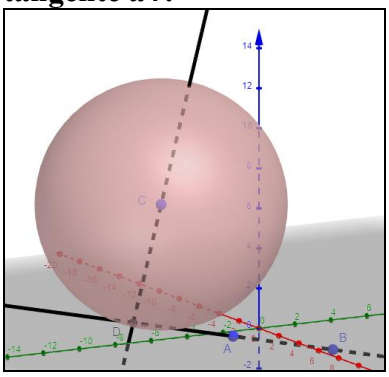
   I lati misurano tutti: $2\sqrt{2}$, facilmente si verifica che tutti i punti verificano l'equazione del piano. Per costruire un tetraedro regolare con una faccia ABC, il quarto vertice appartiene alla perpendicolare al piano per il baricentro di ABC: $(7/3; 1/3; 4/3)$ e dista $2\sqrt{2}$ da uno qualsiasi dei vertici di ABC. La retta

ha equazione: $\begin{cases} x = t + 7/3 \\ y = t + 1/3 \\ z = t + 4/3 \end{cases}$, quindi $P \equiv (t + 7/3;\ t + 1/3;\ t + 4/3)$. Deve essere: $(t + 7/3 - 3)^2 + (t + 1/3 - 1)^2 + (t + 4/3)^2 = 8 \Rightarrow 9t^2 = 16 \Rightarrow t = \pm 4/3$. Infine i punti cercati sono: $P_1 \equiv \left(\frac{11}{3};\frac{5}{3};\frac{8}{3}\right) \vee P_2 \equiv (1;-1;0)$.

7. (Liceo scientifico 2018/2019) Dati i punti $A \equiv (2;\ 0;\ -1)$ e $B \equiv (-2;\ 2;\ 1)$, provare che il luogo geometrico dei punti P dello spazio, tali che $\overline{PA} = \sqrt{2}\,\overline{PB}$, è costituito da una superficie sferica S e scrivere la sua equazione cartesiana. Verificare che il punto $T \equiv (-10;\ 8;\ 7)$ appartiene a S e determinare l'equazione del piano tangente in T a S.

Sia $P \equiv (x;\ y;\ z) \Rightarrow \overline{PA} = \sqrt{2}\,\overline{PB} \Leftrightarrow \overline{PA}^2 = 2\overline{PB}^2 \Rightarrow (x - 2)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 2 \cdot [(x + 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2] \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 8y - 6z + 13 = 0$, che è una sfera. Facilmente si vede che T verifica l'equazione della sfera. Il piano tangente è perpendicolare alla retta diametrale per il punto di tangenza. Il centro è $C \equiv (-6;\ 4;\ 3)$. La retta per C e T è: $\begin{cases} x = 4t - 6 \\ y = -4t + 4 \\ z = -4t + 3 \end{cases}$, i suoi numeri direttori sono $(1;\ -1;\ -1)$, quindi il piano ha equazione: $(x + 10) - (y - 8) - (z - 7) = 0 \Rightarrow x - y - z + 25 = 0$.

8. (Liceo scientifico 2022/2023) Considerata la retta r passante per i due punti $A \equiv (1;\ -2;\ 0)$ e $B \equiv (2;\ 3;\ -1)$, determinare l'equazione cartesiana della superficie sferica di centro $C \equiv (1;\ -6;\ 7)$ e tangente a r.



La sfera cercata ha per raggio la distanza di C dalla retta. Dobbiamo quindi determinare l'intersezione D della retta AB e della perpendicolare a essa condotta da C. La retta per AB ha numeri direttori: $(2 - 1;\ 3 + 2;\ 0 - 1) \equiv (1;\ 5;\ -1)$, quindi ha equazione: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 5t \\ z = -t \end{cases}$. Il piano per C perpendicolare ad AB ha equazione $(x - 1) + 5(y + 6) - (z + 7) = 0$, perciò il punto D di ottiene imponendo: $(1 + t - 1) + 5(5t - 2 + 6) - (-t + 7) = 0 \Rightarrow 27t + 27 = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow D \equiv (0;\ -7;\ 1)$ perciò l'equazione cercata è: $(x - 1)^2 + (y + 6)^2 + (z - 7)^2 = (0 - 1)^2 + (-7 + 6)^2 + (1 - 7)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 12y - 14z + 48 = 0$.

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali.

1. (AHSME 1995) Un cubo è formato da 27 cubetti più piccoli e uguali fra loro. Un piano è condotto perpendicolarmente a una delle diagonali interne del cubo bisecandola. Quanti sono i cubetti incontrati dal piano?

Supponiamo che le coordinate dei vertici del cubo siano $(i;\ j;\ k)$ con $0 \le i, j, k \le 3$, numeri interi. L'equazione del piano che biseca la diagonale del cubo da $(0;\ 0;\ 0)$ a $(3;\ 3;\ 3)$ è $x + y + z = 9/2$. Questo piano incontra il cubo se e solo se gli estremi della diagonale condotta da $(i;\ j;\ k)$ a $(i + 1;\ j + 1;\ k + 1)$ stanno sui lati opposti del piano. Perciò il problema equivale a contare quante delle 27 terne $(i;\ j;\ k)$ con $0 \le i, j, k \le 2$ per cui si ha: $i + j + k < 4{,}5 < i + j + k + 3$. Solo 8 di queste 27 terne non soddisfano le disuguaglianze: $(0;\ 0;\ 0)$, $(1;\ 0;\ 0)$, $(0;\ 1;\ 0)$, $(0;\ 0;\ 1)$, $(1;\ 2;\ 2)$, $(2;\ 1;\ 2)$, $(2;\ 2;\ 1)$, $(2;\ 2;\ 2)$. Quindi $27 - 8 = 19$ dei cubetti sono intersecati dal piano. [19]

2. **(AMC2000) Il punto $P \equiv (1; 2; 3)$ è riflesso rispetto al piano xy, quindi il simmetrico Q è ruotato di 180° attorno all'asse x, ottenendo R, e infine R è traslato di 5 unità nella direzione e verso del semiasse positivo delle y per produrre S. Quali sono le coordinate di S?**
Con la riflessione, il punto diventa $Q \equiv (1; 2; -3)$; con la rotazione: $R \equiv (1; -2; 3)$; infine con la traslazione: $T \equiv (1; 3; 3)$.

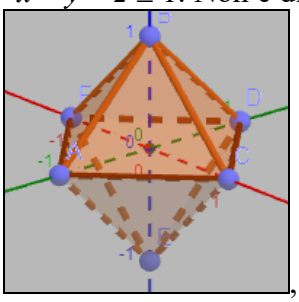
3. **(K2012) Nello spazio dotato di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$, tre vertici di un cubo sono i punti P ≡ (3; 4; 1), Q ≡ (5; 2; 9) e R ≡ (1; 6; 5). Qual è il centro del cubo?**
Non sappiamo se i tre vertici appartengono a facce opposte. Calcoliamo le distanze dei punti a 2 a 2: $\overline{PQ} = \sqrt{4+4+64} = 6\sqrt{2}; \overline{PR} = \sqrt{4+4+16} = 2\sqrt{6}; \overline{QR} = \sqrt{16+16+16} = 4\sqrt{3}$, essendo tutte misure diverse, vuol dire che i tre vertici sono 2 su una stessa faccia e il terzo su una faccia opposta, quindi le misure sono quelle dello spigolo, della diagonale di una faccia e della diagonale del cubo. La maggiore di esse è la prima, quindi la diagonale del cubo è PQ e il centro è il suo punto medio: (4; 3; 5).

Questions in English

4. **(AHSME1996) Consider two solid spherical balls, one centered at (0; 0; 21/2) with radius 6, and the other centered at (0; 0; 1) with radius 9/2. How many points (x; y; z) with only integer coordinates (lattice points) are there in the intersection of the balls? A) 7 B) 9 C) 11 D) 13 E) 15**
***Considera due palle sferiche, una centrata in* (0; 0; 21/2) *di raggio* 6, *e l'altra centrata in* (0; 0; 1) *di raggio* 9/2. *Quanti punti* (x; y; z) *con solo coordinate intere* (*punti reticolo*) *vi sono nell'intersezione delle palle*?** Dalla descrizione della prima palla si ha: $z \geq 9/2$, e da quella della seconda: $z \leq 11/2$. Dato che z deve essere intero, gli unici punti reticolo possibili nell'intersezione sono della forma (x; y; 5). Sostituiamo $z = 5$ nelle disuguaglianze che definiscono le palle: $x^2 + y^2 + (z - 21/2)^2 \leq 6^2$ e $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq (9/2)^2$. Da cui: $x^2 + y^2 + (-11/2)^2 \leq 6^2$ e $x^2 + y^2 + 4^2 \leq (9/2)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 23/4$ e $x^2 + y^2 \leq 17/4$. Se (x; y; 5) soddisfa la seconda disuguaglianza alla deve soddisfare la prima. Non ci rimane che contare I punti reticolo che soddisfano la seconda disuguaglianza. Sono i seguenti 13: (−2; 0; 5), (2; 0; 5), (0;−2; 5), (0; 2; 5), (−1;−1; 5), (1;−1; 5), (−1; 1; 5), (1; 1; 5), (−1; 0; 5), (1; 0; 5), (0;−1; 5), (0; 1, 5); e (0; 0; 5). Quindi la risposta corretta è la D.

5. **(MT1996) The planes defined by the equations $6x + y + 2z + 1 = 0$ and $x + 2y = 0$ intersect at the point (k; k^2; $k^3 + 1$). Find k.**
I piani definiti dalle equazioni $6x + y + 2z + 1 = 0$ *e* $x + 2y = 0$ si *incontrano nel punto* (k; k^2; $k^3 + 1$). *Trova k.*

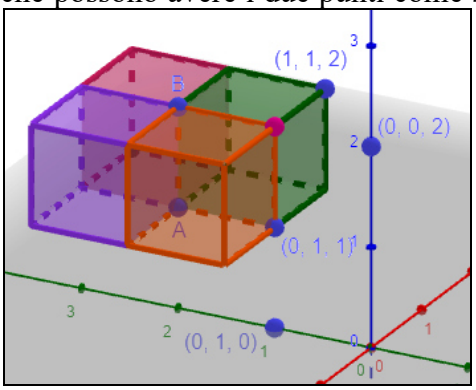
$$\begin{cases} 6x+y+2z+1=0 \\ x+2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-11/4x-1/2 \\ y=-x/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=k \\ k^2=-k/2 \\ k^3+1=-11/4k-1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=0 \\ 1=-1/2 \end{cases} \vee \begin{cases} k=-1/2 \\ 7/8=7/8 \end{cases},$$ quindi vi è l'unica soluzione accettabile: $k = -½$.

6. **(NC2002) In a three-dimensional rectangular coordinate system, find the total surface area of the solid defined by $|x| + |y| + |z| \leq 1$. Hint: the solid is a particular polyhedron.**
In un sistema tridimensionale di coordinate rettangolari, determinare la superficie totale del solido definito da $|x| + |y| + |z| \leq 1$. *Suggerimento: il solido è un particolare poliedro.*
Dobbiamo considerare i diversi casi per I valori assoluti, ciascuno di essi può avere un argomento positive o negative, quindi abbiamo: $x + y + z \leq 1$, $-x + y + z \leq 1$, $x - y + z \leq 1$, $x + y - z \leq 1$, $-x - y + z \leq 1$, $-x + y - z \leq 1$, $x - y - z \leq 1$, $-x - y - z \leq 1$. Non è difficile capire che otteniamo due piramidi rette con la base quadrata in comune,  , quindi le facce sono tutti triangoli isosceli di base lunga $\sqrt{2}$ e di spigoli laterali lunghi $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, perciò sono triangoli equilateri, abbiamo un

ottaedro regolare. Infine la superficie misura: $8 \cdot \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{4}\sqrt{3} = 4 \cdot \sqrt{3}$.

Test di Verifica

1. **I punti (0; 2; 1) e (0; 2; 2) sono due vertici consecutivi di un cubo, quali fra i seguenti sono vertici dello stesso cubo?**
A (0; 0; 2) B (0; 1; 1) C (1; 1; 2) D (0; 1; 0) E (0; 1; 2)
Lo spigolo del cubo misura $\sqrt{0^2+0^2+1^2}=1$, quindi la diagonale di una faccia misura $\sqrt{2}$ e la diagonale del cubo $\sqrt{3}$. Ora le distanze dei 5 vertici proposti dal primo punto sono: $\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}; 1; \sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}; \sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}; \sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$. Quindi in teoria i punti sono 4, ma D non va bene perché la sua distanza dal secondo punto è $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$, quindi le risposte corrette sono B – C – E. In figura mostriamo i 4 cubi che possono avere i due punti come spigolo perpendicolare al piano $z = 0$ e la posizione di tutti i punti.



2. **Quali fra i seguenti punti sono simmetrici di (*x*; *y*; *z*) rispetto a uno dei piani coordinati?**
A (–*x*; *y*; *z*) B (*x*; –*y*; –*z*) C (–*x*; *y*; –*z*) D (–*x*; –*y*; –*z*) E (*x*; –*y*; *z*)
La simmetria rispetto a uno dei piani coordinati equivale a cambiare il segno di una sola coordinata, quindi risposte corrette: A – E

3. **Seleziona le affermazioni corrette**
A Il piano $x = 0$ è perpendicolare al vettore (1; 0; 0) B I piani $x + y = 0$ e $x + z = 0$, sono paralleli C I piani $ax + by = 0$ e $ax - by = 0$ sono perpendicolari D Il piano $x - y = 0$, divide a metà l'angolo diedro formato dai piani $x = 0$ e $y = 0$ E I piani $x = 3$ e $x = 5$ sono simmetrici rispetto al piano $x = 4$
Risposte corrette: A – D – E. B è falsa perché i piai hanno diversi numeri direttori: (1; 1; 0) e (1; 0; 1); C è falsa perché i numeri direttori dei due piani (a; b; 0) e (a; –b; 0) non verificano la condizione di perpendicolarità: $a^2 - b^2$ non è sempre nullo.

4. **Seleziona le affermazioni NON corrette**
A Nello spazio una retta è rappresentata da almeno due equazioni lineari in 3 incognite
B L'equazione $\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}=\frac{z-z_A}{z_B-z_A}$, rappresenta una retta passante per due punti qualsiasi C Due rette scritte in forma parametrica sono parallele solo se hanno gli stessi numeri direttori D L'asse x ha equazioni $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$ E La retta $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ è perpendicolare al piano $z = 0$
Risposte da segnare: B – C. Le altre affermazioni sono vere.

5. **Quali fra le seguenti equazioni rappresentano rette perpendicolari al piano $2x - y + z = 0$?**
A $\begin{cases} x+2y-2=0 \\ y+z+2=0 \end{cases}$ **B** $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=-t+3 \\ z=t-4 \end{cases}$ **C** $\begin{cases} 2x-y=0 \\ z=0 \end{cases}$ **D** $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$ **E** $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=-t \end{cases}$

Per essere perpendicolari devono avere gli stessi numeri direttori, scriviamo A, C e D in forma parametrica: $\begin{cases} x=-2t+2 \\ y=t \\ z=-t-2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=t \end{cases}$, quindi risposte corrette: A – B.

6. Il baricentro del triangolo di vertici (1; 0; 1), (2; –1; 0), (*x*; *y*; *z*) è l'origine, quali sono le coordinate incognite? A (–3; 1; –1) B (–1; 1/3; –1/3) C (–3; –1; 1) D (3; –1; –1) E Nessuno dei precedenti

$$\begin{cases} \dfrac{1+2+x}{3}=0 \\ \dfrac{0-1+y}{3}=0 \\ \dfrac{1+0+z}{3}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=1 \\ z=-1 \end{cases}$$; risposta corretta:A

7. Quale fra i seguenti è il punto simmetrico di (–2; 1; 3) rispetto al piano *x* = *y*?
A (–2; 1; 3) B (1; –2; 3) C (–1; 2; 3) D (2; –1; 3) E Nessuno dei precedenti
Dobbiamo scambiare di posto le coordinate *x* e *y*, quindi risposta corretta: B

8. Per quale fra i seguenti valori del parametro reale *m* i piani *mx* – *y* + 2*z* = 0 e (1 – *m*)*x* + *y* = 0 sono perpendicolari? A 1 B 0 C –1 D Non sono mai perpendicolari E Nessuno dei precedenti
Deve essere: $m(1-m)-1=0 \Rightarrow m^2-m+1=0$, che non ha solluzioni reali. Risposta corretta: D

9. Per quale fra i seguenti valori del parametro reale *k*, (1 + *k*; 0; 1) dista 1 dal piano *x* – *y* + 2 = 0?
A $\sqrt{2}-1$ B $\sqrt{2}-2$ C $\sqrt{2}-3$ D Nessun valore reale di *k* E Nessuno dei precedenti
$\dfrac{|1+k+2|}{\sqrt{1+1}}=1 \Rightarrow |k+3|=\sqrt{2} \Rightarrow k=-3\pm\sqrt{2}$, fra le risposte proposte l'unica corretta è la C.

10. Per quale fra i seguenti valori del parametro reale *n*, le rette $\begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=nt \end{cases}$ e $\begin{cases} x-y=0 \\ x+z=0 \end{cases}$ sono parallele?

A 0 B 1 C –1 D Non sono mai parallele E Nessuno dei precedenti

Si ha: $\begin{cases} x-y=0 \\ x+z=0 \end{cases} \equiv \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=-t \end{cases}$, quindi non sono mai parallele, perché quale che sia il valore di *n*, i primi due numeri direttori non saranno mai tutti e due proporzionali. Quindi risposta corretta: D.

11. Determinare il volume della piramide di vertici i punti (½; 3/2; 4); (0; 1; 2); (0; 2; 2); (1; 2; 2); (1; 1; 2)
Gli ultimi 4 punti giacciono sul piano *z* = 2, quindi rappresentano la base, che è un quadrato di lato 1, il vertice ha per piede il centro del quadrato e l'altezza misura 2, qindi la piramide è retta e il suo volume misura 1/3 · 1 · 2 = 2/3.

12. Determinare il simmetrico del punto (1; –2; 3) rispetto al punto (–1; 2; –3)
Imponiamo che (–1; 2; –3) sia punto medio di (1; –2; 3) e (*x*; *y*; *z*); otteniamo: (–3; 6; –9).

13. Scrivi in forma parametrica le equazioni della retta $\begin{cases} x-y+2z=0 \\ y-2x-z=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x-y+2z=0 \\ y-2x-z=0 \end{cases} \Rightarrow I+II \begin{cases} -x+z=0 \\ y-2x-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=x \\ y=3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=3t \\ z=t \end{cases}.$$

14. **Il punto medio del segmento di estremi *A* ≡ (x_A; y_A; z_A) e *B* ≡ (x_B; y_B; z_B) è:** $M \equiv \left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}; \frac{z_A+z_B}{2}\right)$. **Il punto** $G \equiv \left(\frac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4}; \frac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4}; \frac{z_A+z_B+z_C+z_D}{4}\right)$ **rappresenta il** baricentro di un **tetraedro**

15. **L'equazione** $\begin{cases} x = a \cdot t + h \\ y = b \cdot t + k \\ z = c \cdot t + p \end{cases}$ **, con *t* numero reale, si chiama equazione della retta** in forma parametrica **I coefficienti *a*, *b* e *c* si chiamano** numeri direttori **……. della retta, perché rappresentano un** vettore **…….. che ha la stessa direzione della retta**