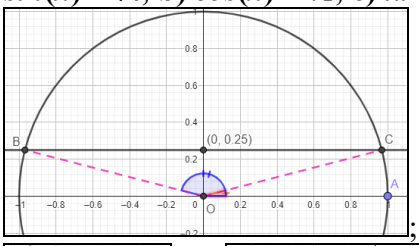
# 7. La misurazione degli angoli

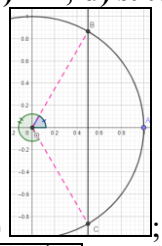
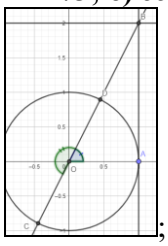
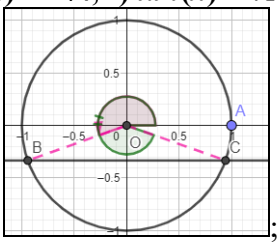
## 7.2 Goniometria

## Definizione delle funzioni trigonometriche elementari per angoli qualsiasi

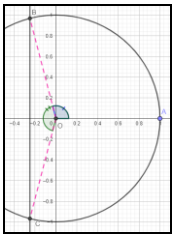
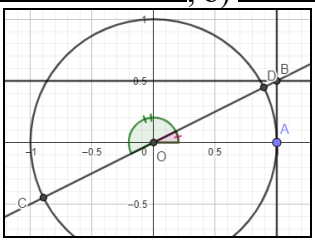
***Tracciare gli angoli compresi tra 0° e 360°, che verifichino quanto richiesto***

**1.** **a) $sin(x) = ¼$; b) $cos(x) = ½$; c) $tan(x) = 2$; d) $sin(x) = –1/3$; e) $cos(x) = –¼$; f) $tan(x) = ½$**

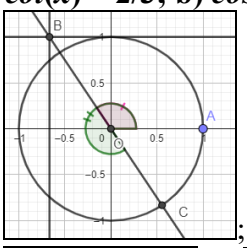
a) 

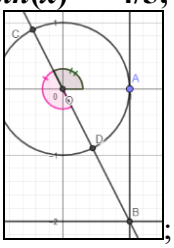
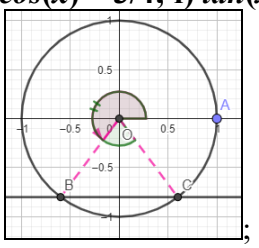
; b) 
; c) 
; d) 

;

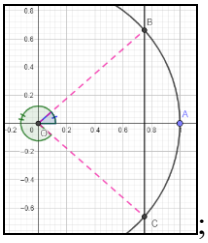
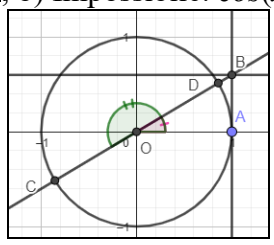
e) 
; f) 


**2.** **a) $cot(x) = 2/3$; b) $cos(x) = –3/2$; c) $tan(x) = –2$; d) $sin(x) = –4/5$; e) $cos(x) = 3/4$; f) $tan(x) = 3/5$**

a) 

; b) Impossibile: $cos(x) > –1$; c) 
; d) 

;

e) 
; f) 


***Calcolare il valore numerico delle seguenti espressioni***

**3.** **a) $sin(30°) – cos(45°) + sin(60°) – cot(30°)$; b)** $\dfrac{csc(30°)-cos(60°)}{sec(60°)+sin(30°)}$

a) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}=\frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$; b) $\frac{2-1/2}{2+1/2}=\frac{3}{5}$.

**4.** **a) $sin(12°) – cos(78°) + sin(45°) – tan(30°) \cdot cot(60°)$t; b)** $\dfrac{csc(28°)-sec(62°)}{tan(64°)+sin(55°)}$

a) $sin(12°)-sin(12°)+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3\sqrt{2}-2}{6}$; b) Dato che $csc(28°) = sec(62°)$ e che $tan(64°) + sin(55°) \neq 0$, la frazione è nulla.

**5.** **$sin(45°) – cos(45°) – tan(45°) + cot(45°) – csc(45°) + sec(45°)$**
Gli addendi sono a due a due opposti, quindi 0.

**6.** **a) $[sin(30°) – cos(30°)] \cdot [sin(30°) + cos(30°)]$; b) $[tan(30°) + cot(30°)]^2$**
a) $sin^2(30°) – cos^2(30°) = ¼ – ¾ = – ½$; b) $1/3 + 3 + 2 = 16/3$.

**7.** **$[tan(30°) + cos(60°)] \cdot [sin(30°) – cot(60°)] + sec(45°)$**

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+\sqrt{2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{12}+\sqrt{2}$$

**8.** ***cot*(90°) · [*sin*(17°) + *cos*(31°)] – *tan*(180°) · [*cot*(31°) + *sec*(79°)]**
I due primi fattori della somma sono nulli, quindi 0.

**9.** **[*sin*(0°) – *tan*(45°) + *cot*(30°)] · [*cos*(90°) + *csc*(60°) – *sec*(30°)]**
Il secondo fattore è nullo, quindi 0.

**10.** **a)** $\dfrac{\left(sin(270°)-tan(45°)\right)^3}{\left(cot(30°)+sec(60°)\right)^2}$ **; b)** $\dfrac{sin(45°)-cos(30°)}{cos(0°)-tan(180°)}+\dfrac{cos(90°)+sin(270°)}{sec(60°)}$

a) $\dfrac{(-1-1)^3}{\left(\sqrt{3}+2\right)^2}=\dfrac{-8}{3+4\sqrt{3}+4}=\dfrac{-8}{7+4\sqrt{3}}=8\cdot\left(4\sqrt{3}-7\right)$; b) $\dfrac{\sqrt{2}/2-\sqrt{3}/2}{1-0}+\dfrac{0-1}{2}=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}{2}$

***Calcolare il valore numerico delle seguenti espressioni***

**11.** **a) *sin*(225°) – *cos*(210°) + *tan*(330°); b)** $tan\left(60^\circ\right)\cdot\dfrac{sin(315°)+sec(300°)}{cos(-60°)}$

a) $-sin(45°) + cos(30°) - tan(30°) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{6}$;

b) $\sqrt{3}\cdot\dfrac{-sin(45°)+sec(60°)}{1/2}=\sqrt{3}\cdot\dfrac{-\sqrt{2}/2+2}{1/2}=4\sqrt{3}-\sqrt{6}$

**12.** **a) *cos*(210°) – *sin*(210°) + *tan*(225°) · *cot*(315°); b)** $\dfrac{sin(315°)-cos(225°)}{csc(210°)+sec(240°)}$

a) $-cos(30°) + sin(30°) + tan(45°) \cdot [-cot(45°)] = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$;

b) $\dfrac{-sin(45°)+cos(45°)}{-csc(30°)-sec(60°)}=\dfrac{-\sqrt{2}/2+\sqrt{2}/2}{-2-2}=0$

**13.** **a) [*csc*(210°) – *sec*(–45°)] · [*csc*(–30°) – *sec*(225°)]; b) [*sin*(210°) + *cos*(150°) – *tan*(–30°)]$^2$**
a) $[-csc(30°) - sec(45°)] \cdot [-csc(30°) + sec(45°)] = csc^2(30°) - sec^2(45°) = 4 - 2 = 2$;

b) $[-sin(30°) - cos(30°) + tan(30°)]^2 = \left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\left(\dfrac{-3-\sqrt{3}}{6}\right)^2=\dfrac{9+3+6\sqrt{3}}{36}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{6}$

**14.** **a) [*cos*(–45°) + *tan*(–225°)]·[*cos*$^2$(315°) – *cos*(45°)·*tan*(135°) + *tan*$^2$(–45°)];**
**b)** $\dfrac{sin^2(-60°)-cos^2(-45°)}{tan(210°)+cot(240°)}$

a) $[cos(45°) - tan(45°)]\cdot\{cos^2(45°) - cos(45°)\cdot[-tan(45°)] + tan^2(45°)\} =$

$=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-1\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1\right)=\dfrac{\sqrt{2}-2}{2}\cdot\dfrac{3+\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}-4}{4}$

b) $\dfrac{sin^2(60°)-cos^2(45°)}{-tan(30°)-cot(60°)}=\dfrac{3/4-1/2}{-\sqrt{3}/3-\sqrt{3}/3}=\dfrac{3}{-8\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{8}$

**15.** **a)** $\dfrac{csc(-30°)+sec(-60°)}{tan(225°)}\cdot\dfrac{csc(-60°)+sec(-30°)}{tan(-45°)}$ **; b)** $\dfrac{tan(-225°)+cot(-210°)}{cos(-150°)+sin(-330°)}$

a) 0 perché $csc(-30°) + sec(-60°) = 0$;

b) $\dfrac{-tan(45°)-cot(30°)}{-cos(30°)+sin(30°)}=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{-\sqrt{3}/2+1/2}=\dfrac{2\left(1+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{2\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{3-1}=2\left(2+\sqrt{3}\right)$

**16.** **a)** $\frac{csc(-44°)+sec(46°)}{tan(217°)}\cdot\frac{csc(-67°)+sec(-89°)}{tan(-5°)}$ **; b)** $\frac{tan(-415°)+cot(-103°)}{cos(40°)-sin(-310°)}$

a) 0 perché $csc(-44°) + sec(46°) = 0$; b) Non ha significato perché $cos(40°) - sin(-310°) = 0$

***Semplificare le seguenti espressioni***

**17.** **a)** $\boldsymbol{sin(180° + \alpha) + cos(180° - \alpha) + sin(-\alpha) + cos(360° - \alpha)}$**; b)** $\frac{sin^2(\alpha+\beta)+cos^2(\alpha+\beta)}{tan(\alpha-\beta)\cdot cot(\alpha-\beta)}$

a) $-sin(\alpha) - cos(\alpha) - sin(\alpha) + cos(\alpha) = -2\,sin(\alpha)$; b) $\frac{sin^2(\alpha+\beta)+1-sin^2(\alpha+\beta)}{1}=1$

**18.** $\boldsymbol{cos(270° + \alpha) - sin(180° + \alpha) + sec(-\alpha) - csc(270° - \alpha)}$

$sin(\alpha) + sin(\alpha) + sec(\alpha) + sec(\alpha) = 2\,sin(\alpha) + 2\,sec(\alpha)]$

**19.** **a)** $\frac{sin(-\beta)+cos(90°+\beta)}{csc(90°+\beta)+sec(-\beta)}$ **; b)** $\frac{sin^2(\delta)-cos^2(\delta)}{sin(90°+\delta)+cos(90°-\delta)}$ **; c)** $\frac{sin(\gamma)\cdot csc(180°+\gamma)}{cos(180°-\gamma)\cdot csc(90°-\gamma)}$

a) $\frac{-sin(\beta)-sin(\beta)}{sec(\beta)+sec(\beta)}=-sin(\beta)cos(\beta)$; b) $\frac{sin^2(\delta)-cos^2(\delta)}{cos(\delta)+sin(\delta)}=sin(\delta)-cos(\delta)$;

c) $\frac{sin(\gamma)\cdot[-csc(\gamma)]}{-cos(\gamma)\cdot sec(\gamma)}=1$

**20.** **a)** $\boldsymbol{[tan(\alpha) - tan(90° + \alpha)] \cdot [cot(90° - \alpha) + cot(270° + \alpha)]}$**; b)** $\boldsymbol{[sin(180° + \alpha) + cos(270° + \alpha)]^2}$

a) $[tan(\alpha) + cot(\alpha)] \cdot [tan(\alpha) - tan(\alpha)] = 0$; b) $[-sin(\alpha) + sin(\alpha)]^2 = 0$.

**21.** $\boldsymbol{[cos(-\beta) - sin(360° - \beta)] \cdot [cos^2(\beta) + cos(\beta) \cdot sin(180° + \beta) + cos^2(270° - \beta)]}$

$[cos(\beta) + sin(\beta)] \cdot \{cos^2(\beta) + cos(\beta) \cdot [-sin(\beta)] + sin^2(\beta)\} = [sin(\beta) + cos(\beta)] \cdot [1 - sin(\beta)cos(\beta)]$

**22.** **a)** $\frac{sin(x+y)}{cos(x-90°+y)}\cdot\frac{cos(x+90°-y)}{sin(x-y)}$ **; b)** $\frac{sin(x+y)}{cos(x-90°+y)}\cdot\frac{sin(x-y)}{cos(x+90°-y)}$

a) $\frac{sin(x+y)}{cos(90°-x-y)}\cdot\frac{-sin(x-y)}{sin(x-y)}=-\frac{sin(x+y)}{sin(x+y)}=-1$;

b) $\frac{sin(x+y)}{sin(x+y)}\cdot\frac{sin(x-y)}{-sin(x-y)}=-1$

**23.** **a)** $\boldsymbol{sin(x - y) + cos(x + 90° - y)}$**; b)** $\boldsymbol{sin(x + y) - cos(x + y - 90°)}$**; c)** $\boldsymbol{tan(x + y) \cdot tan(x + y - 90°)}$

a) $sin(x - y) - sin(x - y) = 0$;

b) $sin(x + y) - sin(x + y) = 0$;

c) $tan(x + y) \cdot -cot(x + y) = -1$

24. **a)** $\frac{tan(x+30°)}{tan(x-30°)}\cdot\frac{tan(x-60°)}{tan(x+60°)}$ **; b)** $\frac{sin(x+60°)}{cos(x-30°)}\cdot\frac{sin(x-60°)}{cos(x+30°)}$

a) $\frac{cot(90°-x-30°)}{tan(x-30°)}\cdot\frac{tan(x-60°)}{cot(90°-x-60°)}=\frac{cot(60°-x)}{tan(x-30°)}\cdot\frac{tan(x-60°)}{cot(30°-x)}=\frac{-cot(x-60°)}{tan(x-30°)}\cdot\frac{tan(x-60°)}{-cot(x-30°)}=1$

Abbiamo usato l'identità $tan(x) \cdot cot(x) = 1$.

b) $\frac{sin(x+60°)}{sin(90°-x+30°)}\cdot\frac{sin(x-60°)}{sin(90°-x-30°)}=\frac{sin(x+60°)}{sin(120°-x)}\cdot\frac{\cancel{sin(x-60°)}}{\cancel{sin(60°-x)}}^{-1}=-\frac{sin(180°-x-60°)}{sin(120°-x)}=-1$

***Calcolare il valore numerico delle seguenti espressioni (nei risultati il simbolo ∅, vuol dire espressione priva di senso)***

**25.** **a)** $\boldsymbol{sin(1845°) - cos(2940°) + tan(5370°)}$**; b)** $\frac{[sin(675°)-cos(120°)]^2}{cot(150°)}$

a) $sin(45°) - cos(60°) - tan(30°) = \frac{3\sqrt{2}-3-2\sqrt{3}}{6}$;

b) $\dfrac{\left[-sin(45°)+cos(60°)\right]^2}{-cot(30°)}=\dfrac{\left(-\sqrt{2}/2+1/2\right)^2}{-\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{2}-3}{4\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{6}-3\sqrt{3}}{12}$

**26.** **a)** $tan(750°)\cdot\dfrac{cot(675°)-sec(120°)}{csc(150°)}$ **; b)** $5\cdot\dfrac{sin(1485°)-cos(2190°)}{sin^2(2580°)-cos^2(1200°)}\cdot sin(3120°)$

a) $tan(30°)\cdot\dfrac{-cot(45°)+sec(60°)}{csc(30°)}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{-1+2}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$;

b) $5\cdot\dfrac{sin(45°)-cos(30°)}{sin^2(60°)-cos^2(60°)}\cdot\left[-sin(60°)\right]=5\cdot\dfrac{\sqrt{2}/2-\sqrt{3}/2}{3/4-1/4}\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{-5\sqrt{6}+15}{2}$

**27.** **a)** $\dfrac{tan(1830°)-2sin(1560°)}{cos^2(1320°)-sec^2(2205°)}\cdot cot(1935°)$ **; b)** $sin(750°)\cdot\dfrac{cos(675°)-sin(120°)}{cot(1500°)}$

a) $\dfrac{tan(30°)-2sin(60°)}{cos^2(60°)-sec^2(45°)}\cdot cot(135°)=\dfrac{\sqrt{3}/3-\sqrt{3}}{1/4-2}\cdot(-1)=\dfrac{2\sqrt{3}}{-21/4}=-\dfrac{8\sqrt{3}}{21}$;

b) $sin(30°)\cdot\dfrac{cos(45°)-sin(60°)}{cot(60°)}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}/2-\sqrt{3}/2}{\sqrt{3}/3}=\dfrac{3\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{4\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}-3}{4}$

**28.** **a)** $\dfrac{cos(1200°)-4\cdot sec(1845°)}{tan^2(3735°)-cot^2(2130°)}\cdot sec(960°)$ **; b) [*sin*(1680°) + *cos*(1395°)]$^3$**

a) $\dfrac{-cos(60°)-4\cdot sec(45°)}{tan^2(45°)-cot^2(30°)}\cdot\left[-sec(60°)\right]=\dfrac{-1/2-4\sqrt{2}}{\cancel{1-3}}\cdot\cancel{(-2)}=-\dfrac{1+8\sqrt{2}}{2}$;

b) $[-sin(60°)+cos(45°)]^3=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^3=\dfrac{-3\sqrt{3}+2\sqrt{2}+9\sqrt{2}-6\sqrt{3}}{8}=\dfrac{-9\sqrt{3}+11\sqrt{2}}{8}$

**29.** **a)** $\dfrac{cos(1100°)-sin(700°)}{tan^2(3700°)-cot(2122°)}\cdot csc(900°)$ **; b) [*sin*(1540°) – *cos*(1090°)]$^{14}$**

a) Espressione priva di senso perché non esiste $csc(900°)$;

b) $[sin(100°)-cos(10°)]^{14}=[cos(10°)-cos(10°)]^{14}=0$

**30.** **a)** $\dfrac{sin(2370°)+4cot(1125°)}{sin^5(1170°)-5tan^8(1935°)}\cdot sec(960°)-csc(3270°)$ **; b)** $sec\left(7500°\right)\cdot\dfrac{sec(675°)-cos(120°)}{cot(150°)}$

a) $\dfrac{-sin(30°)+4cot(45°)}{sin^5(90°)-5tan^8(45°)}\cdot\left[-sec(60°)\right]-csc(30°)=\dfrac{-1/2+4}{1-5}\cdot(-2)-2=-\dfrac{1}{4}$;

b) $sec\left(60°\right)\cdot\dfrac{sec(45°)+cos\left(60°\right)}{-cot(30°)}=2\cdot\dfrac{\sqrt{2}+1/2}{-\sqrt{3}}=-\dfrac{2\sqrt{6}+\sqrt{3}}{3}$

**31.** **a)** $3sin(750°)+\dfrac{cos(675°)-tan(120°)}{4csc(150°)}$ **; b)** $\dfrac{3\cdot tan(3390°)-cot(2475°)}{sec^2(1170°)+7\cdot csc^2(600°)}\cdot cos(2310°)$

a) $3sin(30°)+\dfrac{cos(45°)+tan(60°)}{4csc(30°)}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{2}/2+\sqrt{3}}{8}=\dfrac{24+\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{16}$;

b) Non ha significato perché $sec(1170°)=sec(90°)$, che non esiste.

***Semplificare le seguenti espressioni***

**32.** **a) *sin*(900° + α) – *cos*(1800° – α); b)** $\dfrac{sin^2\left(7200°+\delta\right)-cos^2\left(2880°-\delta\right)}{sin\left(2160°+\delta\right)+cos\left(1530°-\delta\right)}$

a) $sin(180°+\alpha)-cos(-\alpha)=-sin(\alpha)-cos(\alpha)$; b) $\dfrac{sin^2\left(\delta\right)-cos^2\left(\delta\right)}{sin\left(\delta\right)+cos\left(90°-\delta\right)}=\dfrac{1-2sin^2\left(\delta\right)}{2sin\left(\delta\right)}$

**33.** **a) *cos*(720° + α) – *sin*(360° + α) + *sec*(1080° – α); b)** $\dfrac{sin\left(720°-\beta\right)}{csc\left(450°+\beta\right)+sec\left(810°-\beta\right)}$

a) $cos(\alpha)-sin(\alpha)+sec(\alpha)$;

b) $\dfrac{-sin(\beta)}{csc(90°+\beta)+sec(90°-\beta)}=\dfrac{-sin(\beta)}{sec(\beta)+csc(\beta)}=-\dfrac{sin^2(\beta)\cdot cos(\beta)}{sin(\beta)+cos(\beta)}$

**34.** **[*tan*(720° + α) – *tan*(630° + α)] · [*cot*(90° – α) + *cot*(1890° + α)]**
[*tan*(α) – *tan*(270° + α)] · [*tan*(α) + *cot*(90° + α)] = [*tan*(α) + *cot*(α)] · [*tan*(α) – *tan*(α)] = 0.

**35.** **a) [*sin*(1800° + α) + *cos*(1890° – α)]²; b)** $\dfrac{sin(360°+\gamma°)\cdot csc(1800°+\gamma)}{cos(450°-\gamma)\cdot csc(\gamma)}$

a) [*sin*(α) + *cos*(90° – α)]² = [2*sin*(α)]² = 4*sin*²(α); b) $\dfrac{sin(\gamma)\cdot csc(\gamma)}{cos(90°-\gamma)\cdot csc(\gamma)}=\dfrac{1}{sin(\gamma)\cdot csc(\gamma)}=1$

**36.** **a) *sin*(7°) – *cos*(83°) + *sin*(353°) + *sin*(173°); b) *sin*(23°) + *cos*(51°) + *sin*(203°) + *cos*(129°)**
a) *sin*(7°) – *sin*(7°) – *sin*(173°) + *sin*(173°) = 0; b) *sin*(23°) + *cos*(51°) – *sin*(23°) – *cos*(51°) = 0.

**37.** ***sin*(47°) + *cos*(19°) – *sin*(71°) + *cos*(223°)**
*sin*(47°) + *sin*(71°) – *sin*(71°) – *sin*(47°) = 0

**38.** ***cos*(1°) + *cos*(2°) + *cos*(3°) +…+ *cos*(358°) + *cos*(359°) Sugg: *cos*(*x*) = – *cos*(180° + *x*)**
*cos*(1°) + *cos*(2°) + *cos*(3°) +…+ *cos*(179°) + *cos*(180°) – *cos*(1°) – *cos*(2°) – ... – *cos*(178°) – *cos*(179°) = *cos*(180°) = –1

**39.** ***cos*(1°) + *cos*(2°) + *cos*(3°) +…+ *cos*(178°) + *cos*(179°)**
*cos*(1°) + *cos*(2°) + *cos*(3°) +…+ *cos*(89°) + *cos*(90°) – *cos*(89°) – *cos*(88°) – ... – *cos*(2°) – *cos*(1°) = *cos*(90°) = 0

**40.** ***sin*(1°) + *sin*(2°) + ... + *sin*(30°) + *sin*(331°) + *sin*(332°) + ... + *sin*(360°)**
*sin*(1°) + *sin*(2°) + ... + *sin*(29°) + *sin*(30°) – *sin*(29°) – *sin*(28°) – ... – *sin*(1°) + *sin*(0°) = *sin*(30°) + *sin*(0°) = ½.

**41.** ***tan*(1°) + *tan*(2°) + … + *tan*(60°) + *tan*(121°) +…+ *tan*(178°) + *tan*(179°)**
*tan*(1°) + *tan*(2°) + … + *tan*(59°) + *tan*(60°) – *tan*(59°) – ... – *tan*(2°) – *tan*(1°) = *tan*(60°) = $\sqrt{3}$

**42.** ***cot*(1°) + *cot*(2°) + … + *cot*(178°) + *cot*(179°)**
*cot*(1°) + *cot*(2°) + … + *cot*(89°) + *cot*(90°) – *cot*(89°) – *cot*(88°) – ... – *cot*(1°) = *cot*(90°) = 0

***A partire dal valore della data funzione goniometrica, determinare i valori delle altre cinque funzioni goniometriche elementari. Quindi verifica i risultati usando la calcolatrice scientifica***

**43.** ***sin*(α) = –3/8, 270° < α < 360°**

$$cos(\alpha)=\sqrt{1-(-3/8)^2}=\frac{\sqrt{55}}{8};sec(\alpha)=\frac{8\cdot\sqrt{55}}{55};csc(\alpha)=-\frac{8}{3},tan(\alpha)=-\frac{3\cdot\sqrt{55}}{55},cot(\alpha)=-\frac{\sqrt{55}}{3}$$

**44.** ***cos*(β) = –5/6, 90° < β < 180°**

$$sin(\beta)=\sqrt{1-\left(-\frac{5}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{11}}{6};sec(\beta)=-\frac{6}{5},csc(\beta)=\frac{6\cdot\sqrt{11}}{11},tan(\beta)=-\frac{\sqrt{11}}{5},cot(\beta)=-\frac{5\cdot\sqrt{11}}{11}$$

**45.** ***tan*(γ) = 3, 180° < γ < 270°**

$$cot(\gamma)=\frac{1}{3};cos(\gamma)=-\frac{1}{\sqrt{1+3^2}}=-\frac{\sqrt{10}}{10};sin(\gamma)=-\frac{3\cdot\sqrt{10}}{10};sec(\gamma)=-\sqrt{10};csc(\gamma)=-\frac{\sqrt{10}}{3}$$

**46.** ***cot*(δ) = –1/4, 270° < δ < 360°**

$$tan(\delta)=-4;cos(\delta)=\frac{1}{\sqrt{1+4^2}}=\frac{\sqrt{17}}{17};sin(\delta)=-\frac{4\cdot\sqrt{17}}{17};sec(\delta)=\sqrt{17};csc(\delta)=-\frac{\sqrt{17}}{4}$$

**47.** ***sec*(ε) = 2, 0° < ε < 90°**

$$cos(\varepsilon)=\frac{1}{2};sin(\varepsilon)=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2};csc(\varepsilon)=\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3};tan(\varepsilon)=\sqrt{3};cot(\varepsilon)=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

**48.** ***csc*(ϕ) = –4, 180° < ϕ < 270°**

$$sin(\phi)=-\frac{1}{4},cos(\phi)=-\sqrt{1-\frac{1}{16}}=-\frac{\sqrt{15}}{4};sec(\phi)=-\frac{4\cdot\sqrt{15}}{15};tan(\phi)=\frac{\sqrt{15}}{15};cot(\phi)=\sqrt{15}$$

**49.** ***sin*(φ) = 0,12, 90° < φ < 180°**

$cos(\phi)=-\sqrt{1-0{,}12^2}\approx-0{,}99$ ; *sec*(φ) ≈ –1,01; *csc*(φ) ≈ 8,33; *tan*(φ) ≈ –0,12; *cot*(φ) ≈ –8,25

**50.** ***cos*(η) = 0,31, 270° < η < 360°**

$sin(\eta) = -\sqrt{1-0,31^2} \approx -0,95$; *sec*(η) ≈ 3,23; *csc*(η) ≈ –1,05; *tan*(η) ≈ –3,07; *cot*(η) ≈ –0,33]

**51.** ***tan*(κ) = –4,13, 270° < κ < 360°**

*cot*(κ) ≈ –0,24; *cos*(η) ≈ 0,24; *sin*(κ) ≈ –0,97; *sec*(κ) ≈ 4,25; *csc*(κ) ≈ 1,03

**52.** ***cot*(λ) = 2,13, 180° < λ < 270°**

*tan*(λ) ≈ –0,47; *cos*(λ) ≈ –0,91; *sin*(λ) ≈ –0,43; *sec*(λ) ≈ –1,10; *csc*(λ) ≈ –2,35

**53.** ***sec*(μ) = –1,75, 90° < μ < 180°**

*cos*(μ) ≈ –0,57; *sin*(μ) ≈ –0,82; *csc*(μ) ≈ 1,22; *tan*(μ) ≈ –1,44; *cot*(μ) ≈ –0,70

**54.** ***csc*(ν) = 2,31, 90° < ν < 180°**

*sin*(ν) ≈ 0,43; *cos*(ν) ≈ –0,90; *sec*(ν) ≈ 1,11; *tan*(ν) ≈ –0,48; *cot*(ν) ≈ –2,08

**55. Dimostrare le identità del Teorema 5.**

Le prime due righe sono immediate.

Si ha:

$$cos(\alpha) = \frac{1}{sec(\alpha)}; sin(\alpha) = \pm\sqrt{1-\left(\frac{1}{sec(\alpha)}\right)^2} = \pm\frac{\sqrt{sec^2(\alpha)-1}}{sec(\alpha)}; csc(\alpha) = \pm\frac{1}{sin(\alpha)} = \pm\frac{sec(\alpha)}{\sqrt{sec^2(\alpha)-1}};$$

$$tan(\alpha) = \frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)} = \pm\sqrt{sec^2(\alpha)-1}; cot(\alpha) = \frac{1}{tan(\alpha)} = \pm\frac{1}{\sqrt{sec^2(\alpha)-1}}$$

In modo analogo si dimostrano quelle relative alla cosecante.

**56. Dimostrare le identità del Teorema 6.**

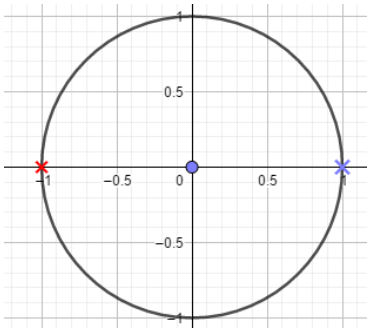
$tan^2(\alpha) = \frac{sin^2(\alpha)}{cos^2(\alpha)} = \frac{1-cos^2(\alpha)}{cos^2(\alpha)} = \frac{1}{cos^2(\alpha)} - 1 \Rightarrow \frac{1}{cos^2(\alpha)} = tan^2(\alpha)+1 \Rightarrow cos(\alpha) = \pm\frac{1}{\sqrt{1+tan^2(\alpha)}}$, a questo punto si dimostrano facilmente le rimanenti.

***Verificare l'eventuale validità delle seguenti identità, stabilendone l'insieme di esistenza***

**57. a)** $\frac{sin(\alpha)}{1+cos(\alpha)} = \frac{1-cos(\alpha)}{sin(\alpha)}$**; b)** ***cot*²(α)·*sin*²(α) = 1 – *sin*²(α)**

a) Moltiplicando in croce abbiamo facilmente $sin^2(\alpha) = 1-cos^2(\alpha)$ che è un'identità ovvia, non essendo altri che il Teorema di Pitagora in forma goniometrica.

Per l'insieme di esistenza dobbiamo imporre che i denominatori siano diversi da zero. Quindi deve essere $\begin{cases} 1+cos(\alpha) \neq 0 \\ sin(\alpha) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} cos(\alpha) \neq -1 \\ sin(\alpha) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \neq 180° + k360° \\ \alpha \neq k180° \end{cases} \Rightarrow \alpha \neq k180°$. Vediamo di capire il perché.




Il coseno vale –1 solo a 180°, mentre il seno vale 0 a 0° e a 180°. Pertanto, limitandoci agli angoli compresi in [0°; 360°] dobbiamo eliminare solo questi due valori, ma siccome c'è la periodicità dovremmo scrivere α ≠ 180° + *k*·360° per il coseno e α ≠ *k*·180° per il seno. Si capisce però che α ≠ *k*·180° contiene entrambe le scritture.

b) Abbiamo: $\frac{cos^2(\alpha)}{\cancel{sin^2(\alpha)}} \cdot \cancel{sin^2(\alpha)} = 1-sin^2(\alpha) \Rightarrow cos^2(\alpha) = 1-sin^2(\alpha)$ che è la stessa identità precedente. Per l'insieme di esistenza dobbiamo imporre solo che esiste la cotangente, ossia che sia diverso da zero il coseno e ciò accade, in [0°; 360°], solo a 90° e 270°. Usando la periodicità possiamo scrivere α ≠ 90°+ *k*·180°.

**58.** **a)** $\frac{1-cos^2(\alpha)}{cos^2(\alpha)}=2\cdot\left[csc^2(\alpha)-1\right]$**; b) [*sin*(*x*) + *cos*(*x*)]² = 1 + 2*sin*(*x*)*cos*(*x*)**

a) Deve esser $cos(\alpha) \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq k \cdot 90°$;

$\frac{sin^2(\alpha)}{cos^2(\alpha)}=\frac{2}{sin^2(\alpha)}-2\Rightarrow tan^2(\alpha)=2\cdot\frac{1-sin^2(\alpha)}{sin^2(\alpha)}\Rightarrow tan^2(\alpha)=2\cdot cot^2(\alpha)$, che in generale è falsa, per esempio per $\alpha = 45°$ avremo: 1 = 2;

b) L'espressione ha sempre significato; $sin^2(x) + cos^2(x) + 2sin(x)cos(x) = 1 + 2sin(x)cos(x)$. È un'identità

**a) $tan^2(\alpha) + cot^2(\alpha) = 1 - 2sin^2(\alpha)\cdot cos^2(\alpha)$; b) $[2 - cos^2(\beta)]\cdot[2 + tan^2(\beta)] = [1 + 2tan^2(\beta)] \cdot [2 - sin^2(\beta)]$**

a) Deve essere $\alpha \neq k \cdot 90°$, in modo che hanno significato sia la tangente che la cotangente. Adesso:

$\frac{sin^2(\alpha)}{cos^2(\alpha)}+\frac{cos^2(\alpha)}{sin^2(\alpha)}=\left[sin^2(\alpha)-cos^2(\alpha)\right]^2\Rightarrow\frac{sin^4(\alpha)+cos^4(\alpha)}{sin^2(\alpha)\cdot cos^2(\alpha)}=sin^4(\alpha)+cos^4(\alpha)-2sin^2(\alpha)\cdot cos^2(\alpha)$,

che non è un'identità, per esempio per $\alpha = 30°$: $1/3 + 3 \neq 1 - 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}$.

b) La tangente ha senso per $\beta \neq 90° + k \cdot 180°$; $4 + 2tan^2(\beta) - 2cos^2(\beta) - sin^2(\beta) = 2 - sin^2(\beta) + 4tan^2(\beta) - 2\,tan^2(\beta)sin^2(\beta) \Leftrightarrow 2 - 2tan^2(\beta) - 2cos^2(\beta) + 2tan^2(\beta)sin^2(\beta) = 0$, si ha: $2 - 2tan^2(30°) - 2cos^2(30°) + 2tan^2(30°)sin^2(30°) = 2 - 2/3 - 3/2 + 1/3 \neq 0$. Non è un'identità.

**59.** **a)** $\frac{1}{csc^2(\alpha)}+\frac{1}{sec^2(\alpha)}=1$**; b)** $\frac{csc^2(\alpha)-1}{csc^2(\alpha)}\cdot\frac{1+cot^2(\alpha)}{cot^2(\alpha)}=1$

a) L'espressione ha significato quanto lo hanno secante e cosecante (non serve porre che non siano zero, perché quando non esiste uno, l'altro è zero). Quindi: $\alpha \neq k \cdot 90°$; Si ha: $sin^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$, che è un'identità. b) Deve essere $\alpha \neq k \cdot 90°$; $[1 - sin^2(\alpha)]\,[tan^2(\alpha) + 1] = 1 \Leftrightarrow cos^2(\alpha) \cdot [tan^2(\alpha) + 1] = 1 \Leftrightarrow sin^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$ che è un'identità.

**60.** $\frac{10\cdot cos^2(x)-5}{sin(x)+cos(x)}\cdot\frac{sec(x)\cdot sin(x)}{3\cdot tan(x)}=\frac{5}{3}\cdot cos(x)-\frac{5}{3}\cdot sin(x)$

Deve essere $x \neq k \cdot 90°$ perché abbia significato la tangente e $x \neq 135°+ k \cdot 180°$ perché $sin(x)$ e $cos(x)$ non siano opposti e quindi la loro somma non sia 0.

$$\frac{\cancel{5}}{\cancel{3}}\cdot\frac{2cos^2(x)-sin^2(x)-cos^2(x)}{sin(x)+cos(x)}\cdot\frac{1/\cancel{cos(x)\cdot sin(x)}}{\cancel{sin(x)}/\cancel{cos(x)}}=\frac{\cancel{5}}{\cancel{3}}\cdot\left[cos(x)-sin(x)\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\left[cos(x)-sin(x)\right]\cdot\cancel{\left[cos(x)+sin(x)\right]}}{\cancel{sin(x)+cos(x)}}=cos(x)-sin(x)$$

Identità

**61.** $\frac{3-6\cdot cos^2(x)}{sin(x)-cos(x)}\cdot\frac{cot(x)\cdot sec(x)}{cos(x)}=3\cdot sin(x)+3\cdot cos(x)$

$$\frac{3\cdot\left[1-2\cdot cos^2(x)\right]}{sin(x)-cos(x)}\cdot\frac{\frac{\cancel{cos(x)}}{sin(x)}\cdot\frac{1}{\cancel{cos(x)}}}{cos(x)}=3\cdot sin(x)+3\cdot cos(x)\Rightarrow$$

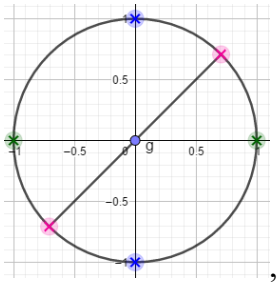
$$\frac{3\cdot\left[sin^2(x)+cos^2(x)-2\cdot cos^2(x)\right]}{sin(x)-cos(x)}\cdot\frac{1}{sin(x)\cdot cos(x)}=3\cdot\left[sin(x)+cos(x)\right]\Rightarrow$$

Si ha: $\frac{3\cdot\left[sin^2(x)-cos^2(x)\right]}{sin(x)-cos(x)}\cdot\frac{1}{sin(x)\cdot cos(x)}=3\cdot\left[sin(x)+cos(x)\right]\Rightarrow$ , che non è

$$\frac{3\cdot\cancel{\left[sin(x)-cos(x)\right]}\cdot\left[sin(x)+cos(x)\right]}{\cancel{sin(x)-cos(x)}}\cdot\frac{1}{sin(x)\cdot cos(x)}=3\cdot\left[sin(x)+cos(x)\right]\Rightarrow$$

$$\cancel{3}\cdot\frac{\cancel{sin(x)+cos(x)}}{sin(x)\cdot cos(x)}=\cancel{3\cdot\left[sin(x)+cos(x)\right]}\Rightarrow\frac{1}{sin(x)\cdot cos(x)}=1$$

un'identità. Per l'insieme di esistenza:




$$\begin{cases} sin(x)-cos(x)\neq 0 \\ cos(x)\neq 0 \\ sin(x)\neq 0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x\neq 45°+k180° \\ x\neq 90°+k180° \\ x\neq k180° \end{cases}$$

, che possiamo scrivere: $x \neq k \cdot 90°$; $x \neq 45°+ k \cdot 180°$.

**62. a) $tan^2(\gamma) + cot^2(\gamma) = csc^2(\gamma) \cdot sec^2(\gamma) - 2$; b)** $\frac{1}{1+cot^2(\alpha)}+\frac{1}{1+tan^2(\alpha)}=1$

a) Deve essere $\gamma \neq k \cdot 90°$; $sin^2(\gamma)/cos^2(\gamma) + cos^2(\gamma)/sin^2(\gamma) = 1/sin^2(\gamma) \cdot 1/cos^2(\gamma) - 2 \Rightarrow sin^4(\gamma) + cos^4(\gamma) = 1 - 2sin^2(\gamma)cos^2(\gamma) \Rightarrow sin^4(\gamma) + cos^4(\gamma) = [sin^2(\gamma) + cos^2(\gamma)]^2 - 2sin^2(\gamma)cos^2(\gamma)$. È un'identità.

b) Deve essere $\alpha \neq k \cdot 90°$. $\frac{sin^2(\alpha)}{sin^2(\alpha)+cos^2(\alpha)}+\frac{cos^2(\alpha)}{sin^2(\alpha)+cos^2(\alpha)}=1\Rightarrow sin^2(\alpha)+cos^2(\alpha)=1$. È un'identità.

**63. a)** $\frac{tan^2(\alpha)}{1+tan^2(\alpha)}=\frac{sec^2(\alpha)-1}{sec^2(\alpha)}$ **; b) $tan(\alpha) \cdot [1 + cot^2(\alpha)] \cdot [1 - sin^2(\alpha)] = 1$**

a) $\alpha \neq k \cdot 90°$; $\frac{sin^2(\alpha)}{sin^2(\alpha)+cos^2(\alpha)}=1-cos^2(\alpha)\Rightarrow sin^2(\alpha)=1-cos^2(\alpha)$. Identità.

b) $\alpha \neq k \cdot 90°$; $tan(\alpha) \cdot [1 + cot^2(\alpha) - sin^2(\alpha) - cos^2(\alpha)] = 1 \Rightarrow tan(\alpha) \cdot cot^2(\alpha) = 1$. Non è un'identità.

***Determinare per quali angoli x, 0° ≤ x ≤ 360°, si ha la validità delle seguenti uguaglianze***

**64. a) $cot(x) = 2tan(x)$; b) $sin(x) = 2cos(x)$**

a) $1/tan(x) = 2tan(x) \Rightarrow tan^2(x) = ½ \Rightarrow x \approx 35°15'52'' \vee x \approx 144°44'8'', \vee x \approx 215°15'52'', \vee x \approx 324°44'8''$; b) a) $sin^2(x) = 4cos^2(x) \Rightarrow 1 - cos^2(x) = 4cos^2(x) \Rightarrow cos^2(x) = 1/5 \Rightarrow x \approx 63°26'6'', \vee x \approx 243°26'6''$. Consideriamo solo gli angoli in cui seno e coseno hanno lo stesso segno, quindi I e IV quadrante.

**65. a) $cos(x) = 2sin(x)$; b) $tan(x) = 2cot(x)$**

a) $cos^2(x) = 4sin^2(x) \Rightarrow 1 - sin^2(x) = 4sin^2(x) \Rightarrow sin^2(x) = 1/5; \Rightarrow x \approx 26°33'54'' \vee x \approx 206°33'54''$;

b) $tan(x) = 2/tan(x) \Rightarrow tan^2(x) = 2 \Rightarrow x \approx 54°44'8'' \vee x \approx 125°15'52'' \vee x \approx 206°33'54'' \vee x \approx 305°15'52''$

***Usando le identità stabilite dai Teoremi 5 e 6, trovare i valori esatti delle seguenti espressioni***

**66. a) $tan[sin^{-1}(3/4)]$; b) $tan[cot^{-1}(-2)]$; c) $tan[csc^{-1}(4)]$**

a) Abbiamo: $tan(\alpha)=\pm\frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)}=\pm\frac{sin(\alpha)}{\sqrt{1-sin^2(\alpha)}}$, poiché $sin^{-1}(3/4)$ può stare sia nel primo che nel secondo quadrante, vi sono due soluzioni, fra loro opposte:

$$tan\left[sin^{-1}(3/4)\right]=\pm\frac{sin\left[sin^{-1}(3/4)\right]}{\sqrt{1-\left\{sin\left[sin^{-1}(3/4)\right]\right\}^2}}=\pm\frac{3/4}{\sqrt{1-(3/4)^2}}=\pm\frac{3/4}{\sqrt{1-9/16}}=\pm\frac{3/4}{\sqrt{7/16}}=\pm\frac{3}{\sqrt{7}}$$

b) Si ha: $tan(\alpha)=\frac{1}{\cot(\alpha)}$, quindi: $tan\left[\cot^{-1}(-2)\right]=\frac{1}{\cot\left[\cot^{-1}(-2)\right]}=-\frac{1}{2}$

c) $tan(\alpha)=\pm\frac{1}{\sqrt{csc^2(\alpha)-1}}\Rightarrow tan\left[csc^{-1}(4)\right]=\frac{1}{\sqrt{csc\left[csc^{-1}(4)\right]^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{4^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{15}}$

**67. a) $sin[cos^{-1}(2/5)]$; b) $sin[tan^{-1}(-3)]$; c) $sin[sec^{-1}(-7/5)]$**

a) $sin\left[cos^{-1}(2/5)\right]=\pm\sqrt{1-cos^2\left[cos^{-1}(2/5)\right]}=\pm\sqrt{1-4/25}=\pm\sqrt{21}/5$

b) $sin\left[tan^{-1}(-3)\right]=\pm\frac{tan\left[tan^{-1}(-3)\right]}{\sqrt{1+tan^2\left[tan^{-1}(-3)\right]}}=\pm\frac{-3}{\sqrt{1+9}}=\pm\frac{3}{\sqrt{10}}$

c) $sin\left[sec^{-1}(-7/5)\right]=\pm\frac{\sqrt{sec^2\left[sec^{-1}(-7/5)\right]-1}}{sec\left[sec^{-1}(-7/5)\right]}=\pm\frac{\sqrt{49/25-1}}{-7/5}=\pm\frac{\sqrt{24}}{7}$

**68. a) $cos[sin^{-1}(-3/7)]$; b) $cos[tan^{-1}(5)]$; c) $cos[cot^{-1}(-5/9)]$**

a) $cos\left[sin^{-1}(-3/7)\right]=\pm\sqrt{1-sin^2\left[sin^{-1}(-3/7)\right]}=\pm\sqrt{1-9/49}=\pm2\sqrt{10}/7$

b) $cos\left[tan^{-1}(5)\right]=\frac{1}{\sqrt{tan^2\left[tan^{-1}(5)\right]+1}}=\pm\frac{1}{\sqrt{25+1}}=\pm\frac{1}{\sqrt{26}}$

c) $cos\left[cot^{-1}(-5/9)\right]=\frac{cot\left[cot^{-1}(-5/9)\right]}{\sqrt{cot^2\left[cot^{-1}(-5/9)\right]+1}}=\pm\frac{5/9}{\sqrt{25/81+1}}=\pm\frac{5}{\sqrt{106}}$

**69. a) $cot[cos^{-1}(3/11)]$; b) $cot[sin^{-1}(4/9)]$; c) $cot[tan^{-1}(-5)]$**

a) $cot\left[cos^{-1}(3/11)\right]=\pm\frac{cos\left[cos^{-1}(3/11)\right]}{\sqrt{1-cos^2\left[cos^{-1}(3/11)\right]}}=\pm\frac{3/11}{\sqrt{1-9/121}}=\pm\frac{3}{\sqrt{112}}$

b) $cot\left[sin^{-1}(4/9)\right]=\pm\frac{\sqrt{1-sin^2\left[sin^{-1}(4/9)\right]}}{sin\left[sin^{-1}(4/9)\right]}=\pm\frac{\sqrt{1-16/81}}{4/9}=\pm\frac{\sqrt{65}}{4}$

c) $cot\left[tan^{-1}(-5)\right]=-\frac{1}{tan\left[tan^{-1}(-5)\right]}=-\frac{1}{5}$

**70. a) $sec[cos^{-1}(2/3)]$; b) $sec[csc^{-1}(7/2)]$; c) $sec[tan^{-1}(2)]$**

a) $sec\left[cos^{-1}(2/3)\right]=\frac{1}{cos\left[cos^{-1}(2/3)\right]}=\frac{3}{2}$

b) $sec\left[csc^{-1}(7/2)\right]=\pm\frac{csc\left[csc^{-1}(7/2)\right]}{\sqrt{csc^2\left[csc^{-1}(7/2)\right]-1}}=\pm\frac{7/2}{\sqrt{49/4-1}}=\pm\frac{7}{\sqrt{45}}$

c) $sec\left[tan^{-1}(2)\right] = \pm\sqrt{1+tan^2\left[tan^{-1}(2)\right]} = \pm\sqrt{1+4} = \pm\sqrt{5}$

**71. a) $csc[cos^{-1}(-5/8)]$; b) $csc[tan^{-1}(4/3)]$; c) $csc[cot^{-1}(10)]$**

a) $csc\left[cos^{-1}(-5/8)\right] = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1-cos^2\left[cos^{-1}(-5/8)\right]}} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1-25/64}} = \pm\dfrac{8}{\sqrt{39}}$

b) $csc\left[tan^{-1}(4/3)\right] = \pm\dfrac{\sqrt{1+tan^2\left[tan^{-1}(4/3)\right]}}{tan\left[tan^{-1}(4/3)\right]} = \pm\dfrac{\sqrt{1+16/9}}{4/3} = \pm\dfrac{5}{4}$

c) $csc\left[cot^{-1}(10)\right] = \pm\sqrt{1+cot^2\left[cot^{-1}(10)\right]} = \pm\sqrt{1+100} = \pm\sqrt{101}$

## Rappresentazione grafica delle funzioni goniometriche elementari

***Convertire in radianti le seguenti misure in gradi sessagesimali***

**1. a) 40°; b) 36°; c) 72°; d) 45°30′; e) 90°45′; f) 120°20′; g) 220°40′30″**

a) 40/180 · π = 2π/9; b) 36/180 · π = π/5; c) 72/180 · π = 2π/5; d) 90°45′/180° · π = 91π/360;
e) 120°20′/180° · π = 121π/240; f) 40/180° · π = 361π/540; g) 220°40′30″/180° · π = 8827π/7200

**2. a) 300°48″; b)170°25′; c) 30°25′50″; d) –18°42′30″**

a) 300°48″/180° · π = 22501π/13500; b) 170°25′/180° · π = 409π/432; c) 30°25′50″/180° · π = 2191π/12960; d) –18°42′30″/180° · π = –449π/4320

**3. a) 23°48′10″; b) 45°30′15″; c) 56°12′32″; d) –52°46′12″**

a) 23°48′10″/180° · π = 8569π/64800; b) 45°30′15″/180° · π = 10921π/43200;
c) 56°12′32″/180° · π = 12647π/40500; d) –52°46′12″/180° · π = –1759π/6000

***Convertire in gradi sessagesimali le seguenti misure in radianti***

**4. a) π/8; b) 2π/3; c) 5π/4; d) 11π/5; e) 12π/7**

a) π/8 · 180°/π = 22°30′; b) 2π/3 · 180°/π = 120°; c) 5π/4 · 180°/π = 225°; d) 11π/5· 180°/π = 396°; e) 12π/7 · 180°/π = 2160°/7 ≈ 308°34′17″

**5. a) 15π/13; b) 31π/4; c) 50π/11; d) 130π/3**

a) 15π/13 · 180°/π =2700°/13 ≈ 207°41′32″; b) 31π/4 · 180°/π = 1395°;
c) 50π/11 · 180°/π = 9000°/11 ≈ 818°10′55″; d) 130π/3 · 180°/π = 7800°

**6. a) 3,5; b) 1,82; c) 12,15; d) 31,71**

a) 3,5 · 180°/π ≈ 200°32′7″; b) 1,82 · 180°/π = 104°16′42″; c) 12,15 · 180°/π ≈ 696°8′37″=;
d) 31,71· 180°/π = 1816°50′57″

***Calcolare il valore numerico delle seguenti espressioni***

**7. a) $sin(\pi/2) - cos(\pi) + tan(0) - cot(\pi/2)$; b) $sin(\pi/3) - cos(\pi/3) + tan(\pi/3) - cot(\pi/3)$**

a) 1 – (–1) + 0 – 0 = 2; b) $\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2} + \sqrt{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{7\sqrt{3}-3}{6}$

**8. a) $[sec(\pi/4) - cos(\pi/3)] \cdot [sin(\pi/4) + csc(\pi/3)]$; b) $\dfrac{cos^2(\pi) - tan^2(\pi)}{1+sin^2(\pi/4)}$**

a) $\left(\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{2\sqrt{2}-1}{2}\cdot\dfrac{3\sqrt{2}+4\sqrt{3}}{6} = \dfrac{12+8\sqrt{6}-3\sqrt{2}-4\sqrt{3}}{12}$; b) $\dfrac{1-0}{1+1/2} = \dfrac{2}{3}$

**9. a) $\dfrac{sec^2(\pi/4)+csc^2(\pi/4)}{sec^2(\pi/6)+csc^2(\pi/3)}$; b) $[cos(\pi/6) - sin(\pi/3)] \cdot [tan(14\pi/17) + sec(31\pi/38)]$**

a) $\dfrac{2+2}{4/3+4/3} = \dfrac{3}{2}$; b) Dato che $cos(\pi/6) = sin(\pi/3)$, il risultato è 0.

**10. a) $sin^2(3\pi/7) + cos^2(3\pi/7) - 1$; b) $\dfrac{sec(\pi/3)-csc(\pi/4)}{sin(\pi/4)+cos(\pi/3)} + \dfrac{sec(\pi/3)+csc(\pi/4)}{sin(\pi/4)-cos(\pi/3)}$**

a) 1 – 1 = 0;

b) $\dfrac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}/2+1/2}+\dfrac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}/2-1/2}=\dfrac{4-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{4+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=4\sqrt{2}\cancel{-4+4}+2\sqrt{2}+4\sqrt{2}\cancel{+4+4}+2\sqrt{2}=12\sqrt{2}$

**11.** **a)** $\dfrac{\dfrac{sin(\pi/2)+tan^2(\pi/6)}{1-cot^2(\pi/3)}}{\dfrac{sec(\pi)-sin^2(\pi/4)}{1+tan^2(\pi/3)}}$ **; b)** $\dfrac{sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}\right)-cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}{tan^2\left(\dfrac{\pi}{6}\right)+cot^2\left(\dfrac{\pi}{6}\right)}$

a) $\dfrac{\dfrac{1+1/3}{1-1/3}}{\dfrac{-1-1/2}{1+3}}=\dfrac{2}{\dfrac{-3}{8}}=-\dfrac{16}{3}$; b) Dato che $cos(\pi/4) = sin(\pi/4)$, il risultato è 0.

***Semplificare le seguenti espressioni***

**12.** **a) *sin*(5π/3) – *cos*(7π/6) + *tan*(2π) – *sec*(5π/4); b)** $\dfrac{sec(5\pi/3)\cdot cos(7\pi/6)}{csc(5\pi/7)\cdot sin(12\pi/7)}$

a) $-sin(\pi/3) + cos(\pi/6) + 0 + sec(\pi/4) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{2}=\sqrt{2}$;

b) $\dfrac{sec(\pi/3)\cdot[-cos(\pi/6)]}{csc(5\pi/7)\cdot[-sin(5\pi/7)]}=\dfrac{2\cdot(-\sqrt{3}/2)}{-1}=\sqrt{3}$

**13.** **a) *tan*(5π/6) – *cot*(3π/4) + *csc*(11π/6); b)** $\dfrac{sin(3\pi/4)+cos(7\pi/4)}{sec(5\pi/4)-csc(\pi/4)}$

a) $-tan(\pi/6) + cot(\pi/4) - csc(\pi/6) = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}+1-2=-\dfrac{\sqrt{3}+3}{3}$;

b) $\dfrac{sin(\pi/4)+cos(\pi/4)}{-sec(\pi/4)-csc(\pi/4)}=\dfrac{\sqrt{2}/2+\sqrt{2}/2}{-\sqrt{2}-\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{2}$

**14.** **a)** $\left[\dfrac{sin(4\pi/3)+cos(5\pi/3)}{sin(2\pi/3)-cos(4\pi/3)}\right]^2$ **; b)** $\dfrac{\dfrac{sec(3\pi/4)+csc(2\pi/3)}{sin(5\pi/4)-cos(4\pi/3)}}{1+tan^2(11\pi/6)}$

a) $\left[\dfrac{-sin(\pi/3)+cos(\pi/3)}{sin(\pi/3)+cos(\pi/3)}\right]^2=\left(\dfrac{-\sqrt{3}/2+1/2}{\sqrt{3}/2+1/2}\right)^2=\left(\dfrac{-\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}\right)^2=\left(\dfrac{3-2\sqrt{3}+1}{3-1}\right)^2=\left(2-\sqrt{3}\right)^2=7-4\sqrt{3}$;

b) $\dfrac{\dfrac{-\sec(\pi/4)+\csc(\pi/3)}{-\sin(\pi/4)+\cos(\pi/3)}}{1+\tan^2(\pi/6)}=\dfrac{\dfrac{-\sqrt{2}+2\sqrt{3}/3}{-\sqrt{2}/2+1/2}}{1+1/3}=\dfrac{6-3\sqrt{6}+3\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{2}$

**15.** **a)** $cot(5\pi/3)\cdot\dfrac{sin^2(5\pi/8)+cos^2(5\pi/8)}{cot^2(7\pi/6)-tan^2(7\pi/6)}$ **; b) [*sin*(3π/2) – *cos*(2π/3) · *sec*(4π/3)]$^2$**

$-cot(\pi/3)\cdot\dfrac{1}{cot^2(\pi/6)-tan^2(\pi/6)}=\dfrac{-\sqrt{3}/3}{3-1/3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{8}$;

b) $\{-1 + cos(\pi/3) \cdot [-sec(\pi/3)]\}^2 = [-1 + ½ \cdot (-2)]^2 = (-2)^2 = 4$.

**16.** **a) [*sin*(7π/6) – *cos*(5π/6)] · [*sin*(5π/6) + *cos*(7π/6)]; b)** $\dfrac{[sin(3\pi/4)-sin(4\pi/3)]^2}{cos(11\pi/6)+tan(5\pi/4)}$

a) $[-sin(\pi/6) + cos(\pi/6)] \cdot [sin(\pi/6) - cos(\pi/6)] = -\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\right)^2=-\dfrac{3+1-2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}-2}{2}$;

b) $\dfrac{\left[sin(\pi/4)+sin(\pi/3)\right]^2}{cos(\pi/6)+tan(\pi/4)}=\dfrac{\left(\sqrt{2}/2+\sqrt{3}/2\right)^2}{\sqrt{3}/2+1}=\dfrac{2+3+2\sqrt{6}}{2\left(\sqrt{3}+2\right)}=\dfrac{\left(5+2\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{3}-2\right)}{-2}=\dfrac{-5\sqrt{3}+10-6\sqrt{2}+4\sqrt{6}}{2}$

**17.** **a) $sin(\pi+\alpha)-tan(2\pi-\alpha)\cdot cot(\alpha)$; b)** $\dfrac{sin(\pi+\alpha)-sin(-\alpha)}{cos(\pi-\beta)+cos(2\pi-\beta)}$

a) $-sin(\alpha)+tan(\alpha)\cdot cot(\alpha)=1-sin(\alpha)$; b) $\dfrac{-sin(\alpha)-sin(-\alpha)}{-cos(\beta)+cos(\beta)}$, priva di significato.

**18.** **a) $cos(\pi+\beta)\cdot sec(\pi-\beta)+sin(2\pi-\beta)\cdot csc(-\beta)$; b)** $\dfrac{sin(\pi/2-\gamma)+cos(\pi/2+\gamma)}{tan(3\pi/2+\gamma)-cot(\pi/2-\gamma)}$

a) $-cos(\beta)\cdot[-sec(\beta)]-sin(\beta)\cdot[-csc(\beta)]=1+1=2$.

b) $\dfrac{cos(\gamma)-sin(\gamma)}{-cot(\gamma)-tan(\gamma)}=\dfrac{sin(\gamma)-cos(\gamma)}{cos(\gamma)/sin(\gamma)+sin(\gamma)/cos(\gamma)}=$

$=\dfrac{\left[sin(\gamma)-cos(\gamma)\right]\cdot sin(\gamma)\cdot cos(\gamma)}{cos^2(\gamma)+sin^2(\gamma)}=sin(\gamma)\cdot cos(\gamma)\cdot\left[sin(\gamma)-cos(\gamma)\right]$

**19.** **a)** $\dfrac{sin(\pi/2-\alpha)\cdot sin(\pi/2+\alpha)}{cos(\pi-\alpha)\cdot cos(\pi+\alpha)}$ **; b) $[sin(180°+\alpha)+cos(270°+\alpha)]^2$**

a) $\dfrac{cos(\alpha)\cdot cos(\alpha)}{-cos(\alpha)\cdot\left[-cos(\alpha)\right]}=1$; b) $[-sin(\alpha)+sin(\alpha)]^2=0$.

**20.** **a) $[sin(\pi/2-\alpha)+sin(3\pi/2+\alpha)-1]^2$; b)** $\dfrac{sec(\pi-\alpha)+csc(\pi+\alpha)}{sec(\pi/2-\alpha)-csc(\pi/2+\alpha)}$

a) $[cos(\alpha)-cos(\alpha)-1]^2=1$; b) $\dfrac{-sec(\alpha)-csc(\alpha)}{csc(\alpha)-sec(\alpha)}=\dfrac{sec(\alpha)+csc(\alpha)}{sec(\alpha)-csc(\alpha)}$

**21.** **a) $sin(3\pi+\pi/6)+cos(4\pi-\pi/3)-sec(11\pi+\pi/4)$; b) $cos(5\pi/2)\cdot sin(21\pi/4)\cdot tan(20\pi/3)$**

a) $-sin(\pi/6)+cos(\pi/3)+sec(\pi/4)=-½+½+\sqrt{2}=\sqrt{2}$;

b) $cos(\pi/2)\cdot[-sin(\pi/4)]\cdot[-tan(\pi/3)]=0$.

**22.** **a)** $\dfrac{cos(17\pi/3)+sin(23\pi/3)}{sec(25\pi/6)-csc(23\pi/6)}$ **; b)** $\dfrac{sin^2(5\pi/2)+cos^2(9\pi)}{sin(19\pi/4)-cos^2(17\pi/4)}$

a) $\dfrac{cos(\pi/3)-sin(\pi/3)}{sec(\pi/6)+csc(\pi/6)}=\dfrac{1/2-\sqrt{3}/2}{2\sqrt{3}/3+2}=\dfrac{3\left(1-\sqrt{3}\right)}{2\left(2\sqrt{3}+6\right)}=\dfrac{\cancel{3}\left(2\sqrt{3}-6-6+6\sqrt{3}\right)}{-\cancel{48}^{16}}=\dfrac{3-2\sqrt{3}}{4}$;

b) $\dfrac{sin^2(\pi/2)+cos^2(\pi)}{sin(\pi/4)-cos^2(\pi/4)}=\dfrac{1+1}{\sqrt{2}/2-1/2}=\dfrac{4}{1-\sqrt{2}}=4\left(1+\sqrt{2}\right)$

**23.** **a)** $tan(55\pi/4)-\dfrac{cot(29\pi/4)+1}{sec^2(35\pi/6)-1}$ **; b)** $\dfrac{sin(5\pi)-cos(42\pi)+tan(31\pi)}{cot(29\pi/2)-sec(67\pi)+csc(73\pi/2)}$

a) $-tan(\pi/4)-\dfrac{cot(\pi/4)+1}{sec^2(\pi/6)-1}=-1-\dfrac{1+1}{4/3-1}=-7$;

b) $\dfrac{sin(\pi)-cos(0)+tan(\pi)}{cot(\pi/2)-sec(\pi)+csc(\pi/2)}=\dfrac{0-1+0}{0-(-1)+1}=-\dfrac{1}{2}$

**24.** **$[sin(23\pi/6)+cos(-11\pi/3)]\cdot[sin(-33\pi/6)-cos(24\pi/3)]$**

$[-sin(\pi/6)+cos(\pi/3)]\cdot[sin(\pi/6)-cos(0)]=(-½+½)\cdot(½-1)=0$

**25.** **$[sin^2(15\pi/4)+cos^2(25\pi/6)-1]\cdot[tan^2(14\pi/3)+cot^2(16\pi/3)+1]$**

$[sin^2(\pi/4)+cos^2(\pi/6)-1]\cdot[tan^2(\pi/3)+cot^2(\pi/3)+1]=(½+¾-1)\cdot(3+1/3+1)=¼\cdot 13/3=13/2$

**26.** $\dfrac{cot(55\pi/3)+sec(21\pi/4)}{tan(15\pi)-1}+\dfrac{cot(53\pi/3)-sec(20\pi/4)}{tan(16\pi)+1}$

$\dfrac{cot(\pi/3)+sec(\pi/4)}{tan(\pi)-1}+\dfrac{-cot(\pi/3)-sec(\pi)}{tan(0)+1}=\dfrac{\sqrt{3}/3+\sqrt{2}}{-1}+\dfrac{-\sqrt{3}/3+1}{1}=\dfrac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+3}{3}$

**27.** ***sin*(11π/2 – θ) + *cos*(23π/2 + θ) – *tan*(17π – θ)**

$sin(-\pi/2-\theta)+cos(\theta-\pi/2)-tan(\pi-\theta)=-cos(\theta)+sin(\theta)+tan(\theta)$

**28.** ***tan*(15π + δ) · *cot*(37π/2 + δ) – *sec*(15π + δ) · *cos*(21π/2 – δ)**

$tan(\pi+\delta)\cdot cot(\pi/2+\delta)-sec(\pi+\delta)\cdot cos(\pi/2-\delta)=tan(\delta)\cdot[-tan(\delta)]+sec(\delta)\cdot sin(\delta)=-tan^2(\delta)+tan(\delta)$.

**29.** **a)** $\dfrac{sin(15\pi/2+\beta)-cos(37\pi/2-\beta)}{sin(41\pi/2-\beta)+cos(73\pi/2+\beta)}$**; b)** $\left[\dfrac{sin(11\pi/3)+cos(11\pi/2)}{tan(11\pi/4)-1}\right]^2$

a) $\dfrac{sin(\pi/2+\beta)-cos(\pi/2-\beta)}{sin(\pi/2-\beta)+cos(\pi/2+\beta)}=\dfrac{-cos(\beta)-sin(\beta)}{cos(\beta)-sin(\beta)}=\dfrac{sin(\beta)+cos(\beta)}{sin(\beta)-cos(\beta)}$;

b) $\left[\dfrac{sin(-\pi/3)+cos(-\pi/2)}{tan(-\pi/4)-1}\right]^2=\left[\dfrac{-\sqrt{3}/2+0}{-1-1}\right]^2=\dfrac{3}{16}$

**30.** ***sin*(19π/2 + α) · *csc*(α – 13π/2) – *cos*(27π/2 – α) · *sec*(α – 47π)**

$sin(\pi/2+\alpha)\cdot csc(\alpha-\pi/2)-cos(\pi/2-\alpha)\cdot sec(\alpha-\pi)=-cos(\alpha)\cdot[-sec(\alpha)]+sin(\alpha)\cdot[-sec(\alpha)]=1-tan(\alpha)$

**31.** **a)** $\dfrac{sin^2(13\pi+\alpha)+cos^2(15\pi+\alpha)}{tan^2(16\pi-\alpha)\cdot cot(15\pi/2+\alpha)}$**; b)** $\dfrac{tan(51\pi-\gamma)+cot(67\pi/2+\gamma)}{tan(19\pi+\gamma)-cot(75\pi/2-\gamma)}$

a) $\dfrac{sin^2(\pi+\alpha)+cos^2(\pi+\alpha)}{tan^2(-\alpha)\cdot cot(\pi/2+\alpha)}=\dfrac{sin^2(\alpha)+cos^2(\alpha)}{tan^2(\alpha)\cdot[-tan(\alpha)]}=-\dfrac{1}{tan^3(\alpha)}=-cot^3(\alpha)$;

b) $\dfrac{tan(\pi-\gamma)+cot(-\pi/2+\gamma)}{tan(\pi+\gamma)-cot(-\pi/2-\gamma)}=\dfrac{-tan(\gamma)-tan(\gamma)}{tan(\gamma)-tan(\gamma)}$, scritta priva di significato.

**32.** **a) [*cot*(43π/2 + β) · *tan*(87π – β) + 1]²; b)** $1+\dfrac{sin(45\pi/2)}{cos(38\pi/3)}-\dfrac{tan(67\pi/6)}{cot(101\pi/4)}$

a) $[cot(\pi/2+\beta)\cdot tan(\pi-\beta)+1]^2=\{-tan(\beta)\cdot[-tan(\beta)]+1\}^2=[1+tan^2(\beta)]^2$

b) $1+\dfrac{sin(\pi/2)}{-cos(\pi/3)}-\dfrac{tan(\pi/6)}{cot(\pi/4)}=1-\dfrac{1}{1/2}-\dfrac{\sqrt{3}/3}{1}=-\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$

**33.** **Ci sono numeri reali *x* per i quali *cos*(*x*) ha lo stesso valore, indipendentemente dal fatto che *x* sia considerato un angolo in gradi sessagesimali o in radianti?**

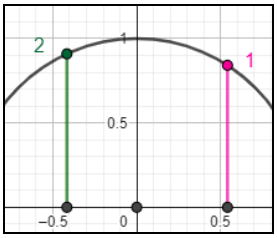
Da $x° = 180° \cdot x^r/\pi \Rightarrow cos(x°) = cos(180° \cdot x^r/\pi)$, quindi come per il seno $x=\dfrac{360\pi k}{\pi-180}$. Ma stavolta i coseni di angoli fra loro opposti sono uguali, pertanto: $x = -180x/\pi + k\cdot 360° \Rightarrow x=\dfrac{360\pi k}{\pi+180}$.

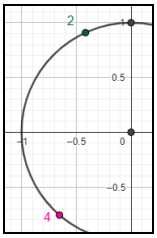
**34.** **Ci sono numeri reali *x* per i quali *tan*(*x*) ha lo stesso valore, indipendentemente dal fatto che *x* sia considerato un angolo in gradi sessagesimali o in radianti?**

$tan(x°) = tan(180° \cdot x^r/\pi) \Rightarrow x = 180 \cdot x/\pi + k\,180 \Rightarrow x=\dfrac{180\cdot\pi\cdot k}{\pi-180}$

***Stabilire quali delle seguenti scritte sono vere***

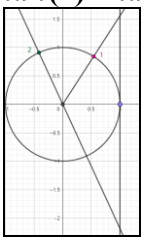
**35.** **a) *sin*(2) > *sin*(1); b) *sin*(4) > *sin*(2); c) *cos*(2) > *cos*(1); d) *cos*(4) > *cos*(2)**

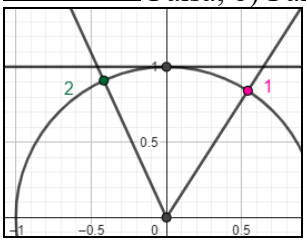
a) 

Vera; b) 

Falsa perché $sin(4) < 0$ e $sin(2) > 0$; c) Considerando la figura a) stavolta è falsa perché ci riferiamo ad ascisse; d) Con riferimento alla figura b), è falsa perché ci riferiamo ad ascisse.

**36.** **a) $tan(2) > tan(1)$; b) $tan(4) > tan(2)$; c) $cot(2) > cot(1)$; d) $cot(4) > cot(2)$**

a) 
Falsa; b) Falsa, riferendoci alla figura 35b) $tan(4) > 0$ e $tan(2) < 0$;

c) 

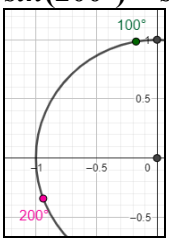
falsa; d) Falsa, riferendoci alla figura 25b) $cot(4) > 0$ e $cot(2) < 0$

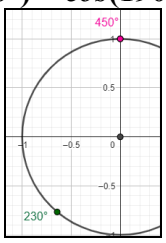
**37.** **a) $sec(2) > sec(1)$; b) $sec(4) > sec(2)$; c) $csc(2) > csc(1)$; d) $csc(4) > csc(2)$**

a) Dalla 35a) $sec(2) < 0$ e $sec(1) > 0$; b) Vera, per la 35b), $cos(4) < cos(2) < 0 \Rightarrow sec(4) > sec(2)$;

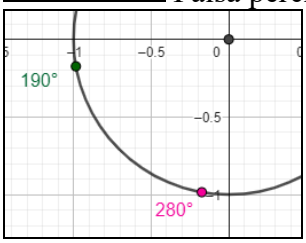
c) Falsa, per la 35 a) $sin(2) > sin(1) > 0 \Rightarrow csc(1) > csc(2)$; d) Falsa, per la 35b) $csc(4) < 0$ e $csc(2) > 0$.

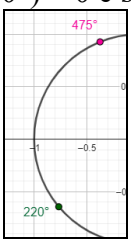
**38.** **a) $sin(200°) > sin(100°)$; b) $sin(450°) > sin(230°)$; c) $cos(280°) > cos(190°)$; d) $cos(475°) > cos(220°)$**

a) 

Falsa perché sin(200°) < 0 e sin(100°) > 0; b) 

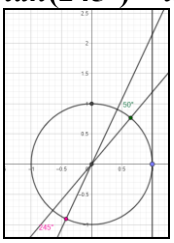
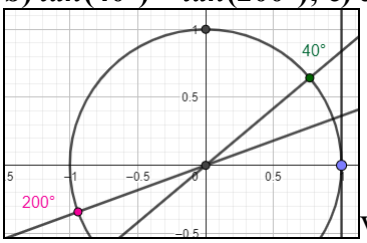
Vera;

c) 

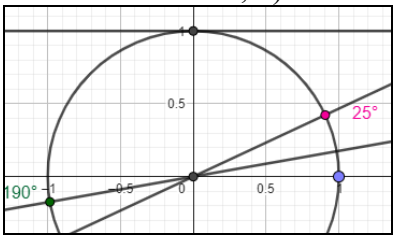
Vera; d) 

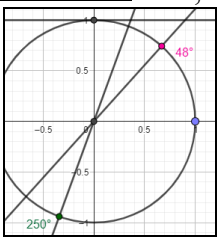
Vera

**39.** **a) $tan(245°) > tan(50°)$; b) $tan(40°) > tan(200°)$; c) $cot(25°) > cot(190°)$; d) $cot(48°) > cot(250°)$**

a) 
Vera; b) 

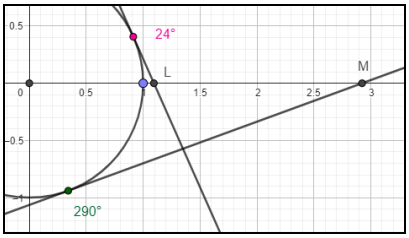
Vera;

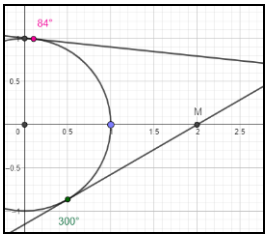
c) 

Falsa; d) 

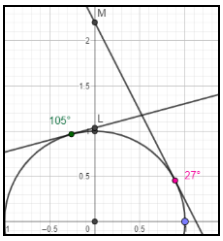
Vera

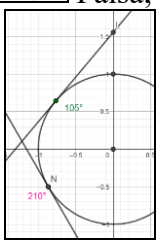
**40.** **a) $sec(24°) > sec(290°)$; b) $sec(84°) > sec(300°)$; c) $csc(27°) > csc(105°)$; d) $csc(140°) > csc(210°)$**

a) 

Falsa; b) 

Vera;

c) 

Vera; d) 

Vera

**41.** **a)** $\boldsymbol{sin(2x) \geq sin(x), 0 \leq x \leq \pi/2}$**; b)** $\boldsymbol{sin(2x) \geq sin(x), 0 \leq x \leq \pi/4}$**; c)** $\boldsymbol{sin(2x) \leq sin(x), \pi/2 \leq x \leq \pi}$

a) è falsa perché per $x > \pi/4$, $2x$ appartiene al secondo quadrante e quindi la funzione decresce, per esempio per $x$ prossimo a $\pi/2$, $sin(x)$ è prossimo a 1, mentre $sin(2x)$ è prossimo a 0. b) invece è vera perché appunto $2x$ rimane nel primo quadrante dove seno è crescente; c) è vera appunto perché essendo nel secondo quadrante, $2x$ sta nel terzo e quindi il senon è negativo, mentre $sin(x) > 0$.

**42.** **a)** $\boldsymbol{sin(2x) \geq sin(x), \pi \leq x \leq 3\pi/2}$**; b)** $\boldsymbol{cos(2x) \geq cos(x), 0 \leq x \leq \pi/2}$**; c)** $\boldsymbol{cos(2x) \geq cos(x), \pi \leq x \leq 3\pi/2}$

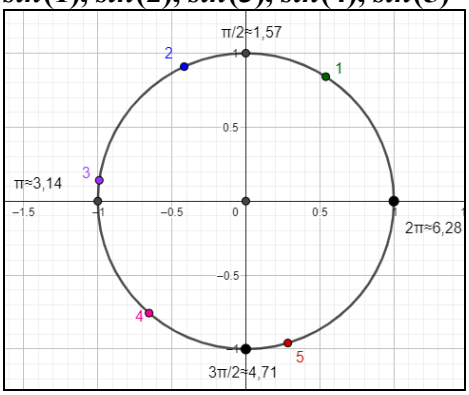
a) vera per quanto detto in precedenza; b) falsa perché con $x$ nel primo quadrante, $2x$ sta nel secondo ed è negativa; c) anch'essa falsa per ragioni simili a b)

**43.** **a)** $\boldsymbol{tan(2x) \geq tan(x), 0 \leq x < \pi/2}$**; b)** $\boldsymbol{tan(2x) \geq tan(x), \pi/2 < x \leq \pi}$

Entrambe vere. a) perché nel primo quadrante la tangente è crescente; la b) perché nel secondo quadrante la tangente è negativa mentre $tan(2x) > 0$.

***Mettere in ordine decrescente i seguenti numeri, tenendo conto che l'unità di misura è in radianti***

**44.** $\boldsymbol{sin(1), sin(2), sin(3), sin(4), sin(5)}$



$sin(2) > sin(1) > sin(3) > sin(4) > sin(5)$

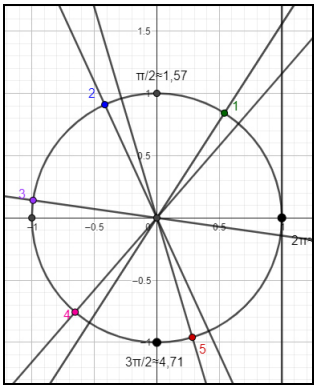
**45.** $\boldsymbol{sec(1), sec(2), sec(3), sec(4), sec(5)}$

Tenuto conto della figura precedente abbiamo: $cos(1) > cos(5) > cos(2) > cos(4) > cos(3)$. La secante è il reciproco del coseno, ma non possiamo semplicemente invertire l'ordine, perché $a > b \Rightarrow 1/a < 1/b$ solo se $a$ e $b$ hanno lo stesso segno, quindi possiamo invertire fra i positivi, che rimangono i maggiori, e i negativi, ottenendo: $sec(5) > sec(1) > sec(3) > sec(4) > sec(2)$

**46.** $\boldsymbol{csc(1), csc(2), csc(3), csc(4), csc(5)}$

Tenuto conto del 44 e di quanto detto nel 45: $csc(3) > csc(1) > csc(2) > csc(5) > csc(4)$

**47.** $\boldsymbol{tan(1), tan(2), tan(3), tan(4), tan(5)}$

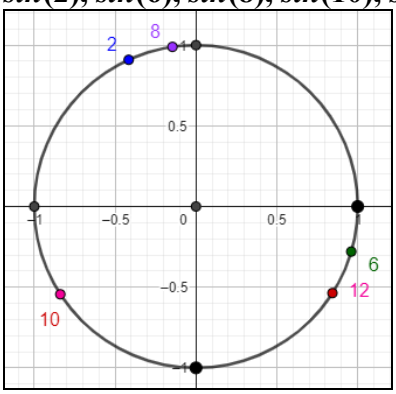



$tan(1) > tan(4) > tan(3) > tan(2) > tan(5)$

**48.** ***cot*(1), *cot*(2), *cot*(3), *cot*(4), *cot*(5)**

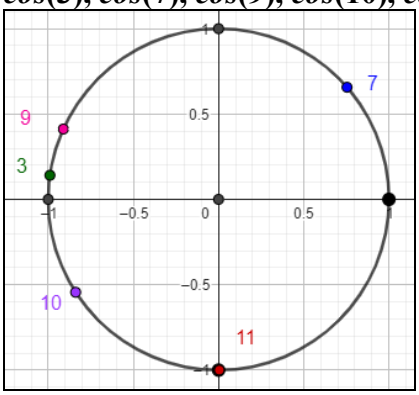
Tenuto conto del precedente e di quanto detto per l'inverso, si ha: $cot(4) > cot(1) > cot(5) > cot(2) > cot(3)$.

**49.** ***sin*(2), *sin*(6), *sin*(8), *sin*(10), *sin*(12)**



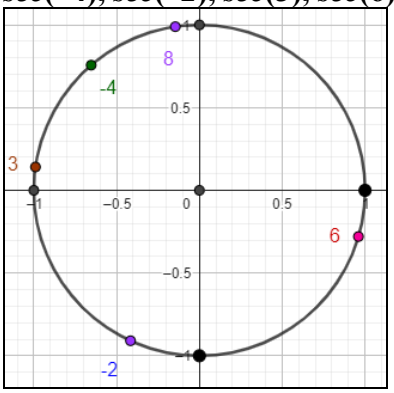

$sin(8) > sin(2) > sin(6) > sin(12) > sin(10)$. Osserviamo che le ordinate di 10 e 12 sono praticamente uguali. Per stabilire chi fra $sin(10)$ e $sin(12)$ è maggiore, consideriamo la "distanza" fra i due valori e $7/2\pi \approx 10{,}99$. Anche se di pochissimo, 10 è più "vicino", quindi ha un'ordinata minore di quella di 12.

**50.** ***cos*(3), *cos*(7), *cos*(9), *cos*(10), *cos*(11)**



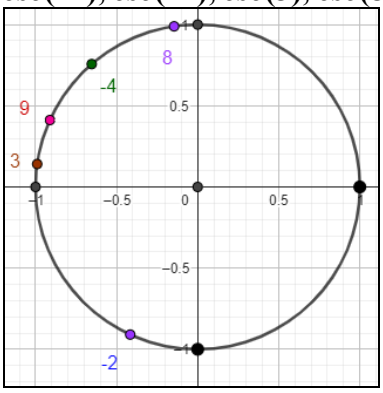

$cos(7) > cos(11) > cos(10) > cos(9) > cos(3)$. Se vi sono dei dubbi su chi fra $cos(10)$ e $cos(9)$ sia maggiore, si consideri la "distanza" fra i due valori e $3\pi \approx 9{,}42$. Ovviamente 9 è più "vicino", quindi ha un'ascissa minore di 10.

**51.** ***sec*(–4), *sec*(–2), *sec*(3), *sec*(6), *sec*(8)**



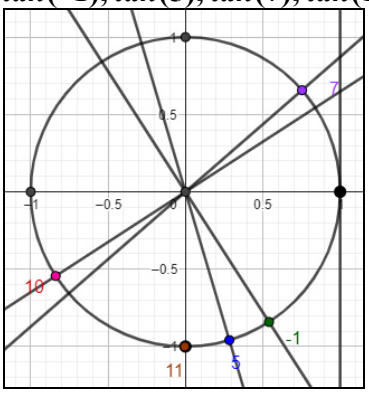

Si ha : $cos(6) > cos(8) > cos(-2) > cos(-4) > cos(3)$, quindi: tenuto conto che invertiamo solo per valori dello stesso segno e che i più grandi sono ovviamente i positivi, si ha: $sec(6) > sec(3) > sec(-4) > sec(-2) > sec(8)$.

**52.** ***csc*(–4), *csc*(–2), *csc*(3), *csc*(8), *csc*(9)**



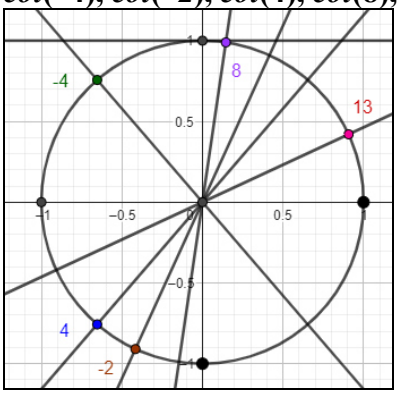

$sin(8) > sin(-4) > sin(9) > sin(3) > sin(-2) \Rightarrow csc(3) > csc(9) > csc(-4) > csc(8) > csc(-2)$

**53.** ***tan*(–1), *tan*(5), *tan*(7), *tan*(10), *tan*(11)**




$tan(7) > tan(10) > tan(-1) > tan(5) > tan(11)$. Osserviamo che $tan(11)$ è di poco minore di $tan(7/2\pi)$, che non esiste. Per curiosità, vale circa –226.

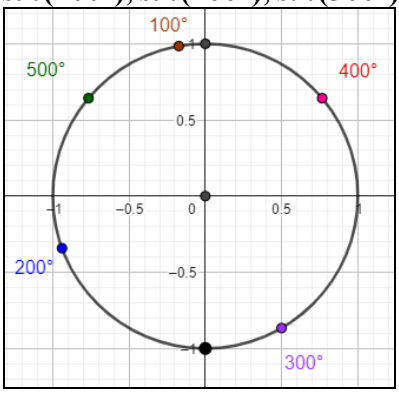
**54.** ***cot*(–4), *cot*(–2), *cot*(4), *cot*(8), *cot*(13)**




$cot(13) > cot(4) > cot(-2) > cot(8) > cot(-4)$

***Mettere in ordine decrescente i seguenti numeri***

**55.** ***sin*(100°), *sin*(200°), *sin*(300°), *sin*(400°), *sin*(500°)**




$sin(100°) > sin(400°) = sin(500°) > sin(200°) > sin(300°)$. $sin(400°) = sin(40°)$, $sin(500°) = sin(140°) = sin(180° - 40°) = sin(40°)$.

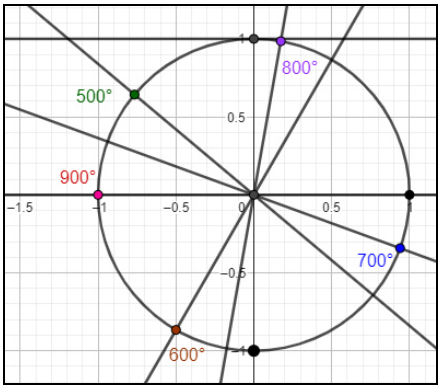
**56.** ***cos*(100°), *cos*(200°), *cos*(300°), *cos*(400°), *cos*(500°)**

Dalla figura precedente: $cos(400°) > cos(300°) > cos(100°) > cos(500°) > cos(200°)$

**57.** ***tan*(100°), *tan*(200°), *tan*(300°), *tan*(400°), *tan*(500°)**

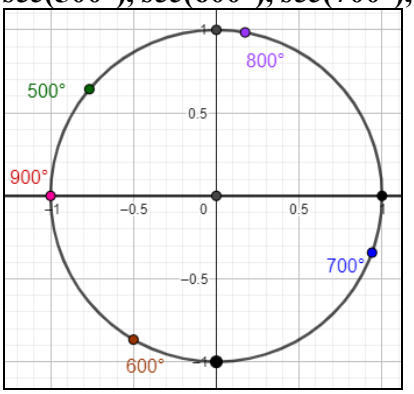
Dalla figura 55 : $tan(400°) > tan(200°) > tan(500°) > tan(300°) > tan(100°)$

**58.** ***cot*(500°), *cot*(600°), *cot*(700°), *cot*(800°), *cot*(900°)**




$cot(600°) > cot(800°) > cot(500°) > cot(700°)$; $cot(900°)$ non esiste

**59.** ***sec*(500°), *sec*(600°), *sec*(700°), *sec*(800°), *sec*(900°)**

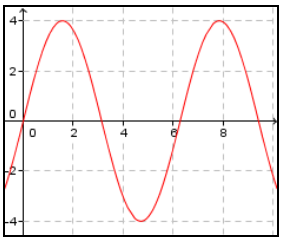
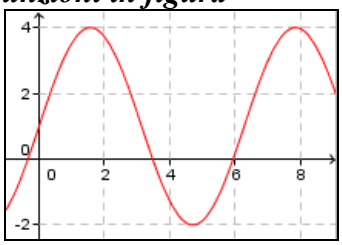
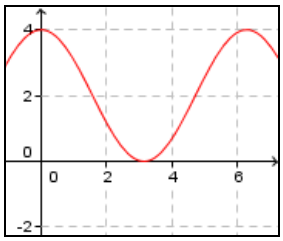



Si ha : $cos(700°) > cos(800°) > cos(600°) > cos(500°) > cos(900°) \Rightarrow sec(800°) > sec(700°) > sec(900°) > sec(500°) > sec(600°)$

**60.** ***csc*(500°), *csc*(600°), *csc*(700°), *csc*(800°), *csc*(900°)**

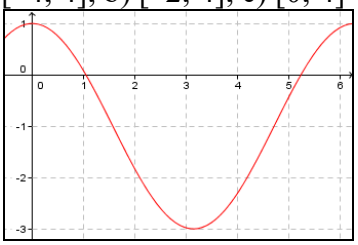
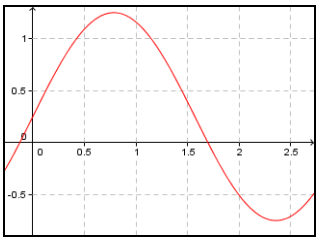
Si ha : $sin(800°) > sin(500°) > sin(900°) = 0 > sin(700°) > sin(600°) \Rightarrow csc(500°) > csc(800°) > csc(600°) > csc(700°)$; $csc(900°)$ non esiste.

***Determinare il codominio delle funzioni in figura***

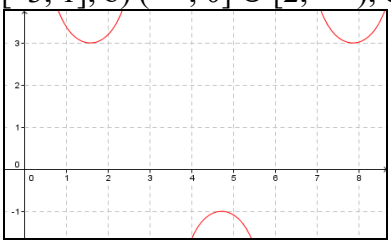
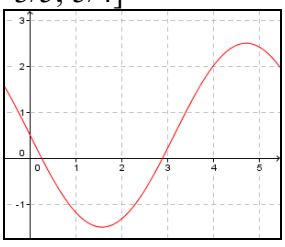
**61.** **a)**  **b)**  **c)** 

Basta guardare le figure, considerando le ordinate minime e massime toccate dai grafici:

a) [–4; 4]; b) [–2; 4]; c) [0; 4]

**62.** **a)**  **b)** **c)** 

a) [–3; 1]; b) (–∞; 0] ∪ [2; +∞); c) [–3/5; 5/4]

**63.** **a)**  **b)** 

a) (–∞;–1] ∪ [5; +∞); b) [–3/2; 5/2]

***Determinare il codominio delle seguenti funzioni***

**64.** **a)** $y = 1 - sin(x)$; **b)** $y = 3 - 2cos(2x)$; **c)** $y = 3/2 - sin(2x)$; **d)** $y = ¼ - ½ \cdot cos(x)$

Dato che $min[sin(x)] = min[cos(x)] = -1$ e $max[sin(x)] = max[cos(x)] = 1$, basta sostituire questi due valori al posto delle funzioni: a) $1 - (-1) = 2$, $1 - 1 = 0 \Rightarrow [0; 2]$; b) $3 - 2 \cdot (-1) = 5$, $3 - 2 = 1 \Rightarrow [1; 5]$; c) $3/2 - (-1) = 5/2$, $3/2 - 1 = ½ \Rightarrow [½; 5/2]$ ; d) $¼ - ½ \cdot (-1) = ¾$, $¼ - ½ = -¼ \Rightarrow [-¼; ¾]$

**65.** **a) $y = 2/3 + sin(x)$; b) $y = 1 + 2sec(x)$; c) $y = 3 - 2\ sec(x)$)**

a) $2/3 - 1 = 1/3$, $2/3 + 1 = 5/3 \Rightarrow [1/3; 5/3]$; b) Per la secante facciamo le stesse sostituzioni che per seno e coseno, ma questi valori sono estremi di intervalli semiaperti e non chiusi: $1 + 2 \cdot (-1) = -1$, $1 + 2 = 3 \Rightarrow (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$; c) $3 - 2 \cdot (-1) = 5$, $3 - 2 = 1 \Rightarrow (-\infty; 1] \cup [5; +\infty)$

**66.** **a)** $y = 2 + \sqrt{2} sin(x+1)$**; b)** $y = \sqrt{3} + 2 \cdot sin(x)$**; c) $y = 2/3 - 3/4csc(x)$**

a) $\left[2-\sqrt{2}; 2+\sqrt{2}\right]$; b) $\left[\sqrt{3}-2; \sqrt{3}+2\right]$; c) $(-\infty; -9/12] \cup [17/12; +\infty)$

***Determinare il periodo delle seguenti funzioni***

**67.** **a) $y = sin(x + 2)$; b) $y = 3 - cos(3x)$; c) $y = 3sin(2x)$; d) $y = 1 + 2cos(x)$; e) $y = tan(4x)$**

Sappiamo che il periodo è $2\pi/|c|$, con $c$ fattore della $x$ nell'argomento di seno o coseno. a) $2\pi$; b) $2\pi/3$; c) $\pi$; d) $2\pi$; e) $\pi/4$

**68.** **a)** $y = \sqrt{5} + cot\left(x + \sqrt{3}\right)$**; b)** $y = 2 - sec\left(1 + \sqrt{2} \cdot x\right)$

Per la tangente e la cotangente il periodo è $\pi/|c|$: a) $\pi$; b) per secante e cosecante come per seno e coseno: $\frac{2\pi}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\pi$

**69.** **a) $y = 1 + 2sec(¾x)$; b) $y = sec(-4/3x)$; c) $y = 5 + 2cot(1 - x/3)$; d) $y = sin(½ + 2x)$**

a) $2\pi/¾ = 8/3\pi$; b) $2\pi/(4/3) = 3/2\pi$; c) $\pi/(1/3) = 3\pi$; d) $\pi$

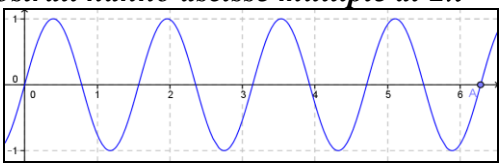
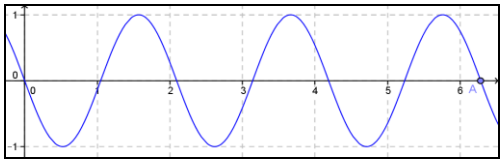
**70.** **a) $y = ½ - 3/5 \cdot cos(¾x - ½)$; b) $y = -1/2 \cdot tan(¾x - ½)$ c)** $y = -2 \cdot sec\left(3 - \sqrt{2} + x/5\right)$

a) $2\pi/¾ = 8/3\pi$; b) $\pi/¾ = 4/3\pi$; c) $2\pi/(1/5) = 10\pi$

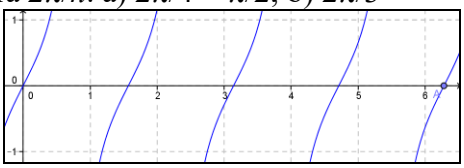
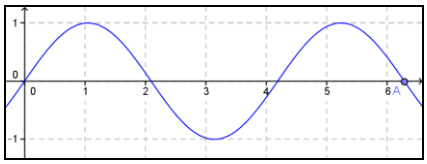
**71.** **a)** $y = sin\left(\frac{k+1}{k-1} \cdot x\right)$**; b)** $y = tan\left(\frac{k^2+1}{k^2-1} \cdot x\right)$**; c) $y = cos(\pi x)$; d) $y = tan(\pi x)$; e)** $y = sec\left(\sqrt{\pi} \cdot x\right)$

a) $\frac{2(k-1)\pi}{k+1}$; b) $\frac{k^2-1}{k^2+1} \cdot \pi$; c) 2; d) 1; e) $\frac{2\pi}{\sqrt{\pi}} = 2\sqrt{\pi}$

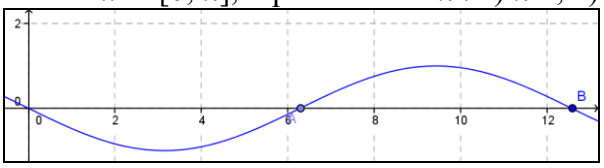
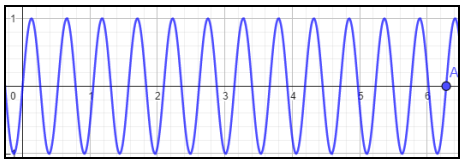
***Tenuto conto del grafico determinare il periodo della funzione, che è sempre un multiplo intero di $\pi$. I punti mostrati hanno ascisse multiple di $2\pi$***

**72.** **a)**  **b)** 

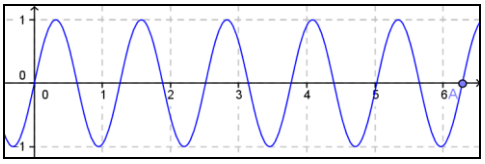
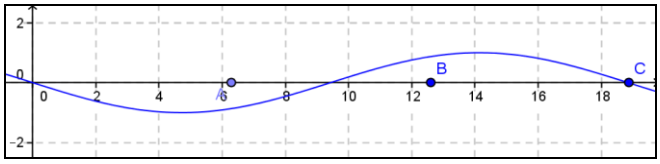
Basta contare quanti massimi o minimi vi sono nel grafico nell'intervallo $[0; 2\pi]$, se sono $n$, il periodo sarà $2\pi/n$. a) $2\pi/4 = \pi/2$; b) $2\pi/3$

**73.** **a)**  **b)** 

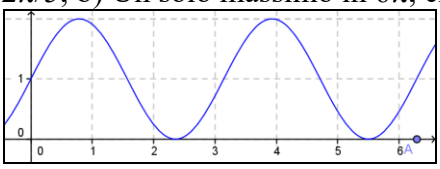
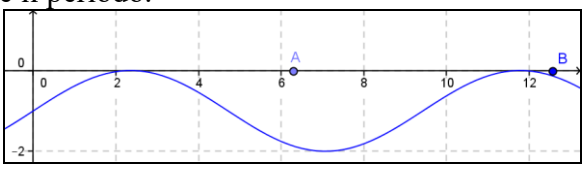
a) abbiamo una tangentoide o una cotangentoide, quindi stavolta contiamo quante intersezioni vi sono con l'asse $x$ in $[0; \pi]$, il periodo sarà $\pi$/. a) $\pi/2$; b) $2\pi/2 = \pi$

**74.** **a)**  **b)** 

a) Stavolta abbiamo un solo massimo ma in $4\pi$, che perciò è il periodo; b) $2\pi/12 = \pi/6$

**75.** **a)**  **b)** 

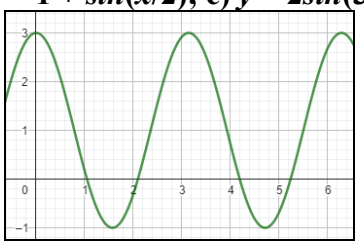
a) $2\pi/5$; b) Un solo massimo in $6\pi$, che è il periodo.

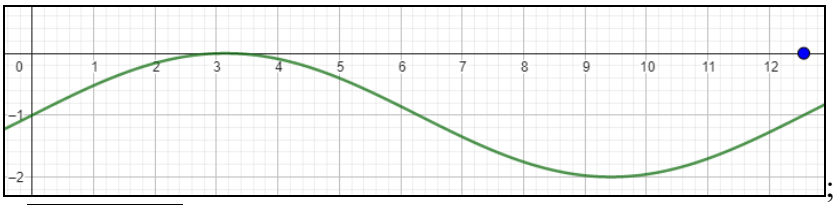
**76.** **a)**  **b)** 

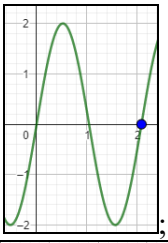
a) $2\pi/2 = \pi$ ; b) Un solo minimo in $4\pi$, che è il periodo.

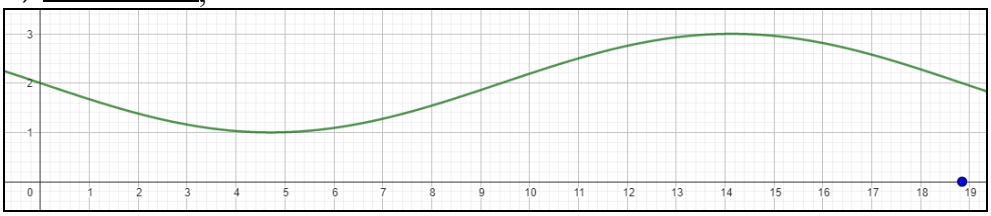
***Disegnare qualitativamente i grafici delle seguenti funzioni***

**77.** **a)** $y = 1 + 2\cos(2x)$; **b)** $y = -1 + \sin(x/2)$; **c)** $y = 2\sin(3x)$; **d)** $y = 2 - \sin(x/3)$

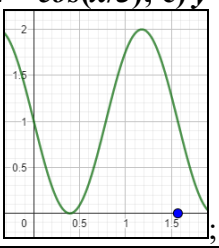
a) P = $\pi$; cod = [–1; 3] ⇒ 

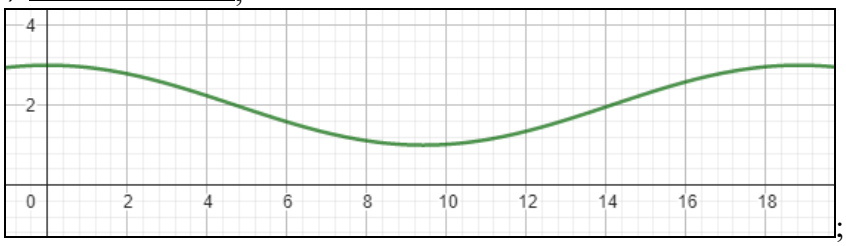
b) P = $4\pi$; cod = [–2; 0] ⇒  ;

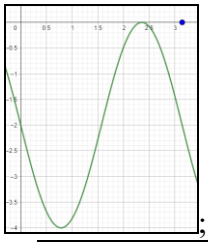
c) P = $2\pi/3$; cod = [–2; 2] ⇒  ;

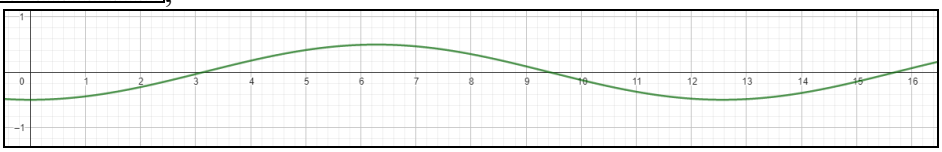
d) P = $6\pi$; cod = [1; 3] ⇒ 

**78.** **a)** $y = 1 - \sin(4x)$; **b)** $y = 2 + \cos(x/3)$; **c)** $y = -2 - 2\sin(2x)$; **d)** $y = ½\cos(x/2)$

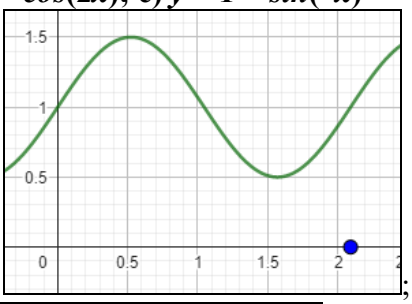
a) P = $\pi/2$; cod = [0; 2] ⇒  ;

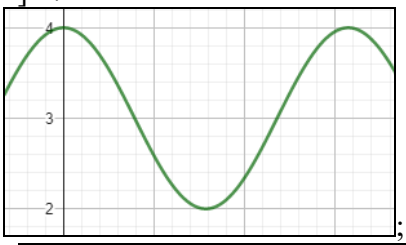
b) P = 6; cod = [1; 3] ⇒  ;

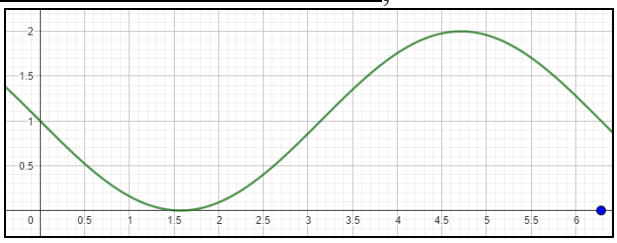
c) P = π; cod = [–4; 0] ⇒  ;

d) P = 4π; cod = [–½; ½] ⇒ 

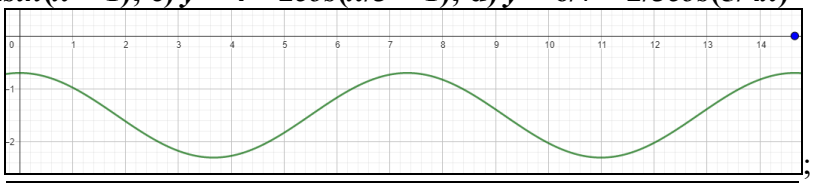
**79.** **a)** $y = 1 + ½\, sin(3x)$; **b)** $y = 3 + cos(2x)$; **c)** $y = 1 + sin(–x)$

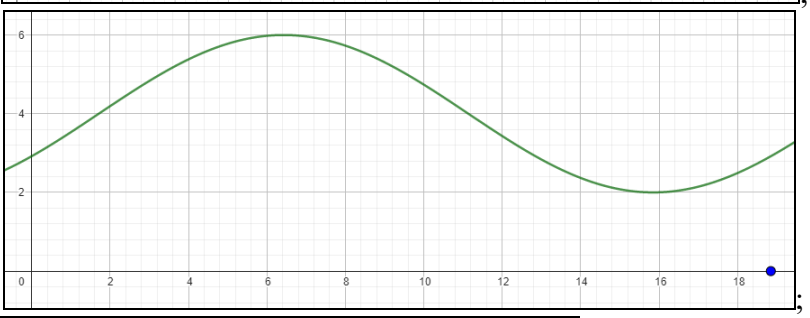
a) P = 2π/3; cod = [½; 3/2] ⇒  ;

b) P = π; cod = [2; 4] ⇒  ;

c) P = 2π; cod = [0; 2] ⇒ 

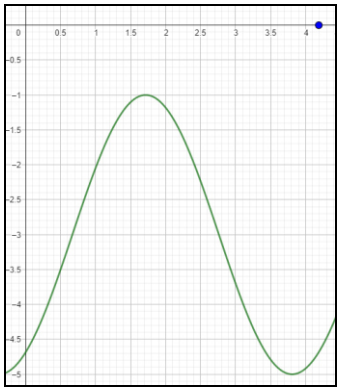
**80.** **a)** $y = –3/2 + 4/5cos(6/7x)$; **b)** $y = 3 – 2sin(x + 1)$; **c)** $y = 4 – 2cos(x/3 + 1)$; **d)** $y = 6/7 – 2/3cos(5/4x)$

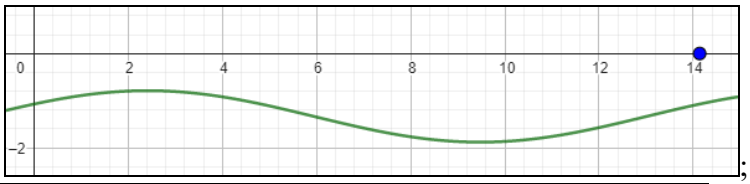
a) P = 14π/3; cod = [–23/10; –7/10] ⇒  ;

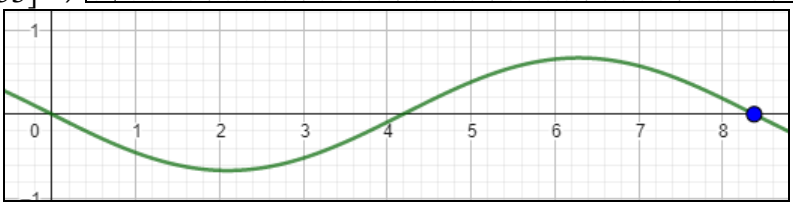
b) P = 14π/3; cod = [–23/10; –7/10] ⇒  ;

c) P = 8π/5; cod = [4/21; 32/21] ⇒

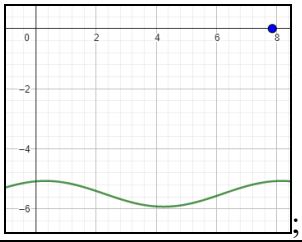
**81.** **a)** $y = –3 + 2sin(3/2x – 1)$; **b)** $y = –4/3 + 6/11sin(4/9x + ½)$; **c)** $y = –2/3sin(¾x)$

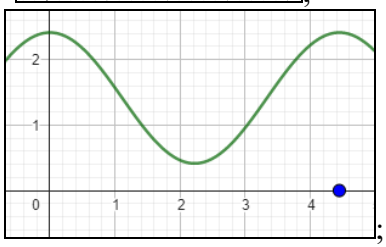
a) P = 4π/3; cod = [–5; –1] ⇒ 

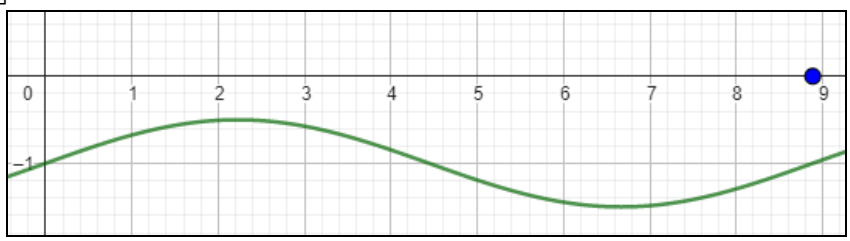
b) P = 9π/2; cod = [–62/33; –26/33] ⇒  ;

c) P = 8π/3; cod = [–2/3; 2/3] ⇒ 

**82. a) $y = -11/2 + 3/7\cos(4/5x - 1/4)$; b)** $y=\sqrt{2}+\cos\left(\sqrt{2}x\right)$**; c)** $y=-1+1/2\sin\left(x/\sqrt{2}\right)$

a) P = 5π/2; cod = [–83/14; –71/14] ⇒  ;

b) $P=\sqrt{2}\pi, cod=\left[\sqrt{2}-1;\sqrt{2}+1\right]$ ⇒  ;

c) $P=2\sqrt{2}\pi; cod=\left[-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right]$ ⇒ 

***Determinare una funzione del tipo y = a + b · sin(c · x), con c > 0, con periodo P e codominio C dati***

**83. a) $P = 2\pi$, $C = [-1; 1]$; b) $P = 3\pi$, $C = [-2; 2]$; c) $P = \pi$, $C = [-1; 3]$; d) $P = 2\pi$, $C = [0; 4]$**

a) in generale : $c = 2\pi/P \Rightarrow c = 1$, $\begin{cases} a-b=-1 \\ a+b=1 \end{cases} \vee \begin{cases} a-b=1 \\ a+b=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases} \vee \begin{cases} a=0 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow y = \pm\sin(\pm x)$;

b) $c = 2\pi/3$, $\begin{cases} a-b=-2 \\ a+b=2 \end{cases} \vee \begin{cases} a-b=2 \\ a+b=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=2 \end{cases} \vee \begin{cases} a=0 \\ b=-2 \end{cases} \Rightarrow y = \pm\sin(\pm 2/3x)$;

c) $c = 2$, $\begin{cases} a-b=-1 \\ a+b=3 \end{cases} \vee \begin{cases} a-b=3 \\ a+b=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \vee \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases} \Rightarrow y = 1 \pm 2\sin(\pm 2x)$;

d) $c = 1$, $\begin{cases} a-b=0 \\ a+b=4 \end{cases} \vee \begin{cases} a-b=4 \\ a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases} \vee \begin{cases} a=2 \\ b=-2 \end{cases} \Rightarrow y = 2 \pm 2sin(\pm x)$

**84. a) $P = \pi/2$, $C = [1; 5]$; b) $P = 2\pi/3$, $C = [-3; 2]$; c) $P = 4\pi/3$, $C = [-2; 5]$**

a) $c = 4$, $\begin{cases} a-b=1 \\ a+b=5 \end{cases} \vee \begin{cases} a-b=5 \\ a+b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=\pm 2 \end{cases} \Rightarrow y = 3 \pm 2sin(\pm 4x)$;

b) $c = 3$, $\begin{cases} a-b=-3 \\ a+b=2 \end{cases} \vee \begin{cases} a-b=2 \\ a+b=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1/2 \\ b=\pm 5/2 \end{cases} \Rightarrow y = -1/2 \pm 5/2sin(\pm 3x)$;

c) $c = 3/2$, $\begin{cases} a-b=-2 \\ a+b=5 \end{cases} \vee \begin{cases} a-b=5 \\ a+b=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3/2 \\ b=\pm 7/2 \end{cases} \Rightarrow y = 3/2 \pm 7/2sin(\pm 3/2x)$

**85. a) $P = 2\pi/5$, $C = [-1/2; 3/2]$; b) $P = 7\pi/6$, $C = [-4; 1]$; c) $P = 2\pi/3$, $C = [-2/3; 1]$**

a) $c = 5$, $\begin{cases} a-b=-1/2 \\ a+b=3/2 \end{cases} \vee \begin{cases} a-b=3/2 \\ a+b=-1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1/2 \\ b=\pm 1 \end{cases} \Rightarrow y = 1/2 \pm sin(\pm 5x)$;

b) $c = 12/7$, $\begin{cases} a-b=-4 \\ a+b=1 \end{cases} \vee \begin{cases} a-b=1 \\ a+b=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-3/2 \\ b=\pm 5/2 \end{cases} \Rightarrow y = -3/2 \pm 5/2sin(\pm 12/7x)$;

c) $c = 3$ , $\begin{cases} a-b=-2/3 \\ a+b=1 \end{cases} \vee \begin{cases} a-b=1 \\ a+b=-2/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1/6 \\ b=\pm 5/6 \end{cases} \Rightarrow y = 1/6 \pm 5/6sin(\pm 3x)$

**86. a) $P = \sqrt{2}\pi, C = [-2/3; 5/4]$; b) $P = \pi + 1$, $C = [-3/2; 5/6]$; c) $P = 2, C = [0; \sqrt{2}]$**

a) $c = \sqrt{2}, \begin{cases} a-b=-2/3 \\ a+b=5/4 \end{cases} \vee \begin{cases} a-b=5/4 \\ a+b=-2/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=7/24 \\ b=\pm 23/24 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{7}{24} \pm \frac{23}{24} sin\left(\pm\sqrt{2}x\right)$

b) $c = \frac{2\pi}{\pi+1}, \begin{cases} a-b=-3/2 \\ a+b=5/6 \end{cases} \vee \begin{cases} a-b=5/6 \\ a+b=-3/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1/3 \\ b=\pm 7/6 \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{1}{3} \pm \frac{7}{6} sin\left(\pm \frac{2\pi}{\pi+1} \cdot x\right)$

c) $c = \pi, \begin{cases} a-b=0 \\ a+b=\sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} a-b=\sqrt{2} \\ a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\sqrt{2}/2 \\ b=\pm\sqrt{2/2} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} sin\left(\pm\pi \cdot x\right)$

**87. a) $P = 4$, $C = [\pi; 2\pi]$; b) $P = \left(\sqrt{2}+1\right)\cdot\pi, C = \left[1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}\right]$; c) $P = p$, $C = [x_1; x_2]$**

a) $c = \frac{\pi}{2}, \begin{cases} a-b=\pi \\ a+b=2\pi \end{cases} \vee \begin{cases} a-b=2\pi \\ a+b=\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3\pi/2 \\ b=\pm\pi/2 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{3\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2} sin \pm \left(\frac{\pi}{2}x\right)$

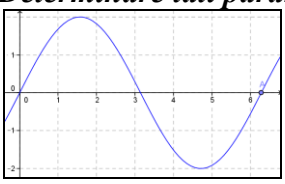
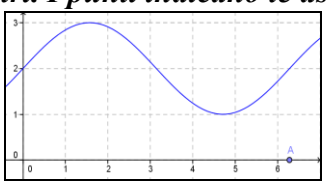
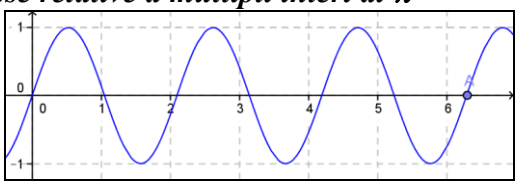
b) $c = \frac{2}{\sqrt{2}+1} = 2\left(\sqrt{2}-1\right), \begin{cases} a-b=1-\sqrt{2} \\ a+b=1+\sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} a-b=1+\sqrt{2} \\ a+b=1-\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=\pm\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow y = 1 \pm \sqrt{2} sin\left[\pm 2\left(\sqrt{2}-1\right)\pi x\right]$

c) $c = \frac{2\pi}{p}, \begin{cases} a-b=x_1 \\ a+b=x_2 \end{cases} \vee \begin{cases} a-b=x_2 \\ a+b=x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{x_1+x_2}{2} \\ b=\pm\frac{x_2-x_1}{2} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{x_1+x_2}{2} \pm \frac{x_2-x_1}{2} sin\left(\pm\frac{2\pi}{p}\cdot x\right)$

**88. Per quali $d$, $y = a + b \cdot sin(c \cdot x + d)$ e $y = a + b \cdot sin(c \cdot x)$ hanno lo stesso grafico?**
$d$ deve essere un multiplo di $2\pi$: $d = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ .

**89. Per quali $d$, $y = a + b \cdot tan(c \cdot x + d)$ e $y = a + b \cdot tan(c \cdot x)$ hanno lo stesso grafico?**
$d$ deve essere un multiplo di $\pi$: $d = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ .

***I seguenti grafici si riferiscono a funzioni del tipo $y = a + b\ sin(c \cdot x)$ con parametri numeri interi o di essi inversi. Determinare tali parametri. I punti indicano le ascisse relative a multipli interi di $\pi$***

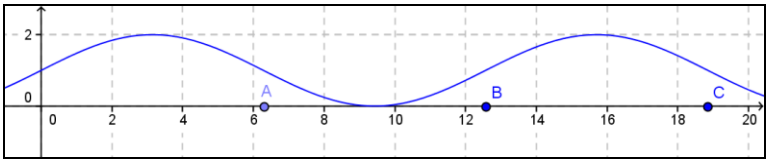
**90. a)**  **b)**  **c)** 

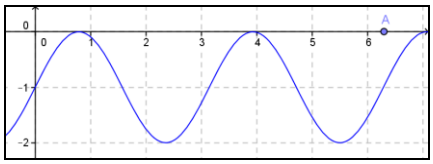
Per determinare $c$ basta contare quanti massimi o minimi si hanno in $[0 ; 2\pi]$ o in multipli di $2\pi$; per $a$ e $b$ si fa come nei precedenti esercizi, estrapolando gli estremi del codominio dal grafico. Per il segno di $b$ si tenga conto del grafico, se il massimo precede il minimo $b > 0$, altrimenti $b < 0$.

a) $c = 1$, $\begin{cases} a-b=-2 \\ a+b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow y = 2sin(x)$;

b) $c = 1$, $\begin{cases} a-b=1 \\ a+b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow y = 2 + sin(x)$;

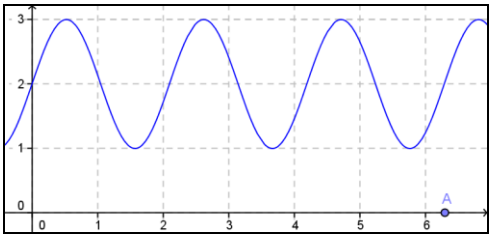
c) $c = 3$, $\begin{cases} a-b=-1 \\ a+b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow y = sin(3x)$

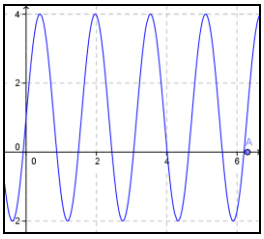
**91.** **a)** 

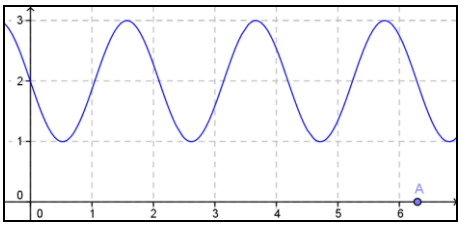
**b)** 


a) $c = ½$, $\begin{cases} a-b=0 \\ a+b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow y = 1 + sin(x/2)$;

b) $c = 2$, $\begin{cases} a-b=-2 \\ a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow y = -1 + sin(2x)$

**92.** **a)** 

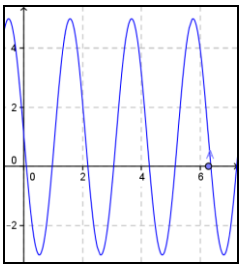
**b)** 

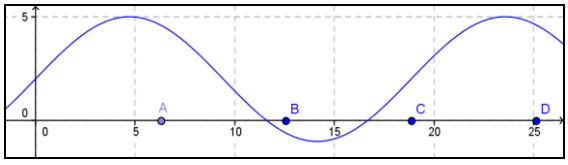
**c)** 


a) $c = 3$, $\begin{cases} a-b=1 \\ a+b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow y = 2 + sin(3x)$;

b) $c = 4$, $\begin{cases} a-b=-2 \\ a+b=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow y = 1 + 3sin(4x)$;

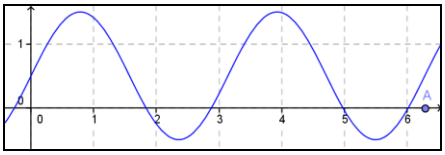
c) $c = 3$, $\begin{cases} a-b=3 \\ a+b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow y = 2 - sin(3x)$

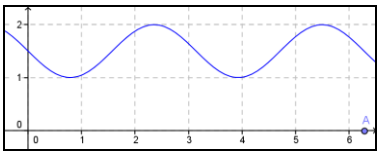
**93.** **a)** 

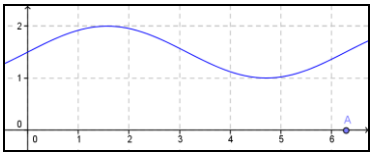
**b)** 


a) $c = 3$, $\begin{cases} a-b=5 \\ a+b=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-4 \end{cases} \Rightarrow y = 1 - 4sin(3x)$;

b) $c = 1/3$, $\begin{cases} a-b=-1 \\ a+b=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow y = 2 + 3sin(x/3)$

**94.** **a)** 

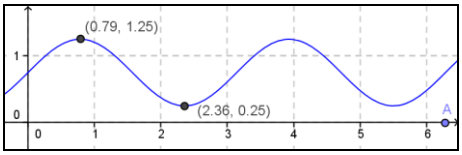
**b)** 

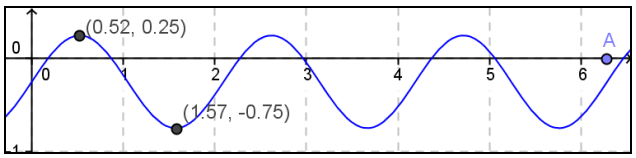
**c)** 


a) $c = 2$, $\begin{cases} a-b=-1/2 \\ a+b=3/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1/2 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow y = ½ + sin(2x)$;

b) $c = 2$, $\begin{cases} a-b=2 \\ a+b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3/2 \\ b=-1/2 \end{cases} \Rightarrow y = 3/2 - ½\, sin(2x)$;

c) $c = ½$, $\begin{cases} a-b=1 \\ a+b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3/2 \\ b=1/2 \end{cases} \Rightarrow y = 3/2 + ½\, sin(x)$

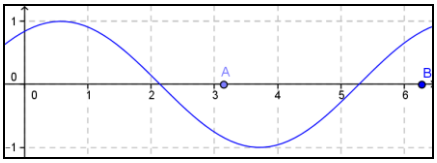
**95.** **a)** 

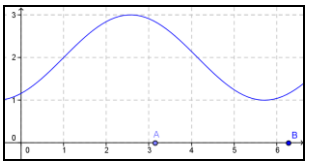
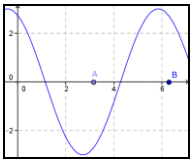
**b)** 


a) $c = 2$, $\begin{cases} a-b=1/4 \\ a+b=5/4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3/4 \\ b=1/2 \end{cases} \Rightarrow y = 3/4 + ½\, sin(2x)$;

b) $c = 3$, $\begin{cases} a-b=-3/4 \\ a+b=1/4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1/4 \\ b=1/2 \end{cases} \Rightarrow y = -1/4 + ½\, sin(3x)$

***I seguenti grafici si riferiscono a funzioni del tipo y = a + b sin(c · x + d) con parametri numeri interi. Determinare tali parametri. I punti a e b indicano le ascisse π e 2π***

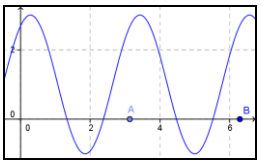
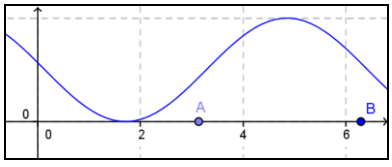
**96.** **a)** 

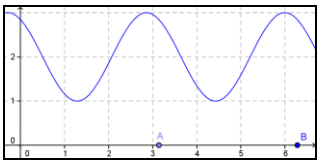
**b)** 
**c)** 

Per i parametri $a$, $b$ e $c$ utilizziamo le tecniche già viste, $d$ si riferisce solo all'eventuale traslazione in orizzontale della curva:

a) $c = 1$, $\begin{cases} a-b=-1 \\ a+b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases}$, $d = 1$ perché il periodo si "chiude" a circa 5,28 invece che 6,28 (2π) ⇒ $y = sin(x + 1)$; b) $c = 1$, $\begin{cases} a-b=1 \\ a+b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$, $d = -1 \Rightarrow y = 2 + sin(x - 1)$;

c) $c = 1$, $\begin{cases} a-b=-3 \\ a+b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=3 \end{cases}$, $d = 2 \Rightarrow y = 3sin(x + 2)$

**97.** **a)** 
**b)** 

**c)** 

a) $c = 2$, $\begin{cases} a-b=-1 \\ a+b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$, $d = 1 \Rightarrow y = 1 + 2\, sin(2x + 1)$;

b) $c = 1$, $\begin{cases} a-b=0 \\ a+b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$, $d = 3 \Rightarrow y = 1 + sin(x + 3)$;

c) $c = 2$, $\begin{cases} a-b=1 \\ a+b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$, $d = -1 \Rightarrow y = 2 - sin(2x - 1)$

**98.** **Dimostrare il Teorema 12.**

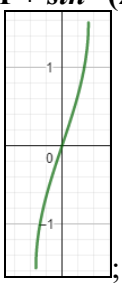
La funzione $y = sin^{-1}(kx + d)$, così come $y = cos^{-1}(kx + d)$, hanno significato solo se il loro argomento appartiene a [–1; 1], quindi deve essere $-1 \le kx + d \le 1 \Rightarrow -1/|k| - d \le x \le 1/|k| - d$ ed usiamo il valore assoluto perché la disuguaglianza abbia sempre significato. Questo è quindi il dominio delle due funzioni. Per quanto riguarda il codominio, dato che $-\pi/2 \le sin^{-1}(kx) \le \pi/2 \Rightarrow a - b\pi/2 \le a + b\, sin^{-1}(kx) \le a + b\pi/2$.

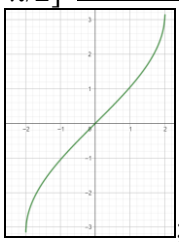
Per $y = cos^{-1}(kx)$ ovviamente il codominio sarà $0 \le cos^{-1}(kx) \le \pi \Rightarrow a \le a + b\, cos^{-1}(kx) \le a + b\pi$.

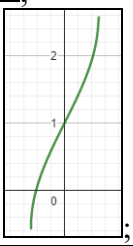
Per la tangente il dominio non dipende da $k$ e rimane sempre (–∞; +∞), mentre il codominio è come quello delle altre due funzioni già viste.

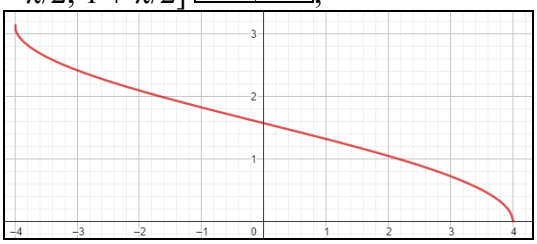
***Tracciare il grafico delle seguenti funzioni, determinandone dominio e codominio***

**99. a) $y = sin^{-1}(3x)$; b) $y = 2sin^{-1}(x/2)$; c) $y = 1 + sin^{-1}(2x)$; d) $y = cos^{-1}(x/4)$**

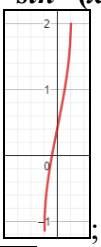
a) $y = sin^{-1}(3x)$: $[-1/3; 1/3] \to [-\pi/2; \pi/2]$  ;

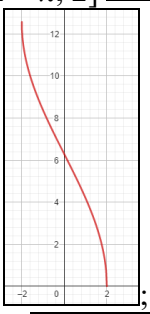
b) $y = 2sin^{-1}(x/2)$: $[-2; 2] \to [-\pi; \pi]$  ;

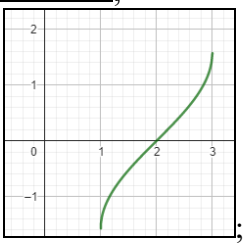
c) $y = 1 + sin^{-1}(2x)$: $[-½; ½] \to [1- \pi/2; 1 + \pi/2]$  ;

d) $y = cos^{-1}(x/4)$: $[-4; 4] \to [0; \pi]$ 

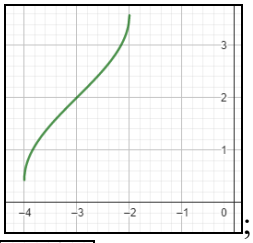
**100. a) $y = 2 - cos^{-1}(5x)$; b) $y = 4cos^{-1}(x/2)$; c) $y = sin^{-1}(x - 2)$**

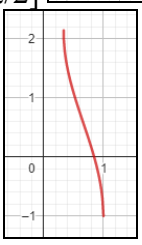
a) $y = 2 - cos^{-1}(5x)$: $[-1/5; 1/5] \to [2 - \pi; 2]$  ;

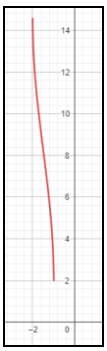
b) $y = 4cos^{-1}(x/2)$ : $[-2; 2] \to [0; 4\pi]$  ;

c) $y = sin^{-1}(x - 2)$ :$[1; 3] \to [-\pi/2; \pi/2]$  ;

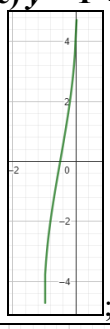
**101. a) $y = 2 + sin^{-1}(3 + x)$; b) $y = -1+ cos^{-1}(3x - 2)$; c) $y = 2 + 4\ cos^{-1}(2x + 3)$**

a) $y = 2 + sin^{-1}(3 + x)$: $[-4; -2] \to [2 - \pi/2; 2 + \pi/2]$  ;

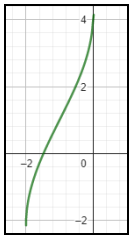
b) $y = -1 + cos^{-1}(3x - 2)$: $[1/3; 1] \to [-1; -1 + \pi]$  ;

c) $y = 2 + 4\, cos^{-1}(2x + 3)$: $[-2; -1] \to [2; 2 + 4\pi]$ 

**102. a) $y = 3sin^{-1}(2x + 1)$; b) $y = 2cos^{-1}(x/2 - 3)$; c) $y = 1 + 2sin^{-1}(1 + x)$**

a) $y = 3sin^{-1}(2x + 1)$: $[-1; 0] \to [-3/2\pi; 3/2\pi]$  ;

b) $y = 2cos^{-1}(x/2 - 3)$: $[4; 8] \to [0; 2\pi]$ ;

c) $y = 1 + 2sin^{-1}(1 + x)$: $[-2; 0] \to [1 - \pi; 1 + \pi]$ 

## La sfida

**1. Se $sin(x) + cos(x) = 1$, quanto vale $sin^n(x) + cos^n(x)$, $n \in \mathbb{N}$**

$sin(x) + cos(x) = 1 \Rightarrow [sin(x) + cos(x)]^2 = 1 \Rightarrow sin^2(x) + 2sin(x)cos(x) + cos^2(x) = 1 \Rightarrow 1 + 2sin(x)cos(x) = 1 \Rightarrow sin(x)cos(x) = 0$. Ora $[sin(x) + cos(x)]^n$ sviluppandola con il triangolo di Tartaglia fornisce $n + 1$ termini formati da $sin^n(x) + cos^n(x)$ e da altri $n - 1$ termini del tipo $sin^k(x)cos^{n-k}(x)$ che perciò sono tutti nulli. Infine $[sin(x) + cos(x)]^n = 1 \Rightarrow sin^n(x) + cos^n(x) = 1$

**2. Se $sin(x) - cos(x) = 1$, quanto vale $sin^n(x) + cos^n(x)$, $n \in \mathbb{N}$**

Tenuto conto del precedente quesito avremo sempre $[sin(x) - cos(x)]^2 = 1 \Rightarrow sin(x)cos(x) = 0$ e quindi

$[sin(x) - cos(x)]^n = sin^n(x) + cos^n(x)$. Però $sin(x) - cos(x) = 1 \Rightarrow sin(x) = 1$ e $cos(x) = 0$, oppure $sin(x) = 0$ e $cos(x) = -1$. Pertanto $sin^n(x) + cos^n(x) = 1 + 0 = 1 \vee 0 + (-1)^n = 1$ se $n$ è pari o $-1$ se $n$ è dispari

***Determinare il periodo delle seguenti funzioni, in cui i parametri rappresentano numeri interi:***

**3.** **a)** $y = \sum_{k=1}^{n} sin(kx)$; **b)** $y = \sum_{k=1}^{n} sin\left(\frac{x}{k}\right)$; **c)** $\boldsymbol{y = sin(kx) + cos(hx) + tan(mx)}$

a) Osserviamo una cosa. Sia $g(x)$ una funzione di periodo $p/k$, con numero intero, cioè $g(x + p/k) = g(x)$, ma allora anche $g(x + p) = g(x)$, dato che ogni $p/k$ la funzione si ripete, quindi anche ogni $2p/k$, $3p/k$ e così via fino a $kp/k = p$. Ciò vuol dire che se $f(x)$ è una funzione di periodo $p$ allora la funzione $f(x) + g(x)$ ha periodo $p$. Pertanto la data funzione ha periodo $2\pi$.

b) Le funzioni hanno periodi $2k\pi$, per quanto detto prima, il periodo della somma è uguale al massimo fra i periodi, ossia a $2n\pi$.

c) Le funzioni hanno periodi $2\pi/k$, $2\pi/h$ e $\pi/m$, per quanto detto prima, il periodo della somma è uguale a $2\pi/\text{MCD}(k, h, m)$.

***Determinare periodo e codominio delle seguenti funzioni***

**4.** **a)** $\boldsymbol{sin^{-1}(ax)}$; **b)** $\boldsymbol{sin^{-1}(ax + b)}$

a) Per il dominio deve essere $-1 \le ax \le 1 \Rightarrow -1/|a| \le x \le 1/|a|$. Il codominio invece è quello di $sin^{-1}(x)$, ossia $[-\pi/2; \pi/2]$;

b) $-1 \le ax + b \le 1 \Rightarrow (-b - 1)/|a| \le x \le (1 - b)/|a|$, il codominio non cambia.

**5.** **a)** $\boldsymbol{h\, sin^{-1}(ax + b)}$; **b)** $\boldsymbol{k + sin^{-1}(ax + b)}$

a) Il dominio è lo stesso di 4b): il codominio: $[-|h|\pi/2;| |h|\pi/2]$

b) Dominio sempre uguale; codominio: $[k - \pi/2; k + \pi/2]$

**6.** **a)** $\boldsymbol{k + h\, sin^{-1}(ax + b)}$; **b)** $\boldsymbol{k + h\, cos^{-1}(ax + b)}$

a) Dominio uguale. Codominio: $[k - |h|\pi/2; k + |h|\pi/2]$;

b) Anche in questo caso il dominio è lo stesso. Il codominio invece tiene conto del fatto che quello di $cos^{-1}(x)$ è $[0; \pi]$, quindi è: $[k; k + |h|\pi]$

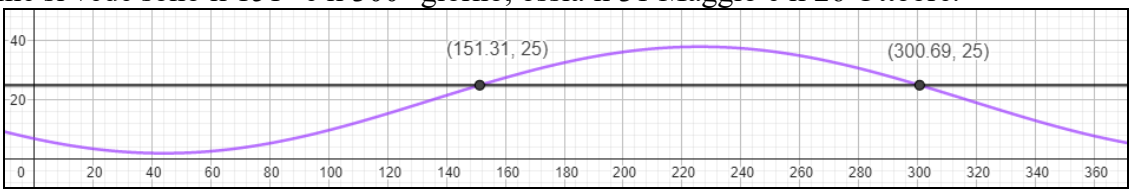
## $\mathcal{E} = mc^2$ L'angolo della MateFisica

**1.** **Gli eventi naturali possono considerarsi generalmente periodici. Supponiamo che la temperatura in una certa regione del mondo segua un andamento del tipo $y(x) = a + b\, sin(c \cdot x + d)$, con $a$, $b$, $c$ e $d$ dei parametri reali. Determinare il valore di tali parametri sapendo che la minima temperatura è stata raggiunta il 13 febbraio ed è stata di 2°, mentre la massima si è raggiunta esattamente dopo 182 giorni dalla minima, ed è stata di 38°.**

Dato che il fenomeno è periodico il periodo è il doppio della differenza fra le ascisse del minimo e quella del massimo, quindi vale $2 \cdot 182 = 364 \Rightarrow c = 2\pi/364 = \pi/182$. Dato che il minimo si ottiene prima del massimo, si ha $b < 0$ e $\begin{cases} a - b = 38 \\ a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 20 \\ b = -18 \end{cases}$. Quindi la funzione è $y(x) = 20 - 18 \cdot sin(\pi x/182 + d)$. Per determinare $d$ calcoliamo che il 13 febbraio è stato il giorno numero 44 e quindi $y(44) = 2 \Rightarrow sin(44\pi/182 + d) = 1 \Rightarrow 22\pi/91 + d = \pi/2 + 2k\pi \Rightarrow d = 47\pi/182 + 2k\pi$. Infine la legge che regola il fenomeno è $y(x) = 20 - 18 \cdot sin[\pi\,(x + 47)\,/182]$. Ovviamente possiamo mettere anche altre soluzioni equivalenti, basta scegliere un qualunque valore intero per $k$.

**2.** **Con riferimento al precedente problema determinare a) quando, approssimativamente la temperatura è stata di circa 25°. b) Che temperatura c'era, all'incirca, il 24 settembre?**

Rappresentiamo la funzione con una calcolatrice grafica e determiniamo graficamente quanto richiesto. Come si vede sono il 151° e il 300° giorno, ossia il 31 Maggio e il 26 Ottobre.




Il 24 settembre è il giorno numero 267, quindi: $y(267) = 20 - 18 \cdot sin[\pi\,(367 + 47)\,/182] \approx 33{,}7°$

**3. Un certo fenomeno fisico segue una legge del seguente tipo $y(x) = a + b \cdot sin(c \cdot x + d)$, in cui $a$, $b$, $c$ e $d$ sono dei parametri reali. Se sappiamo che il periodo della funzione è di 188$s$, che il massimo, pari a 5, si è ottenuto dopo circa 37$s$, mentre il minimo valore è stato di 2. Dopo quanti secondi dall'inizio del fenomeno si è ottenuto il minimo?**

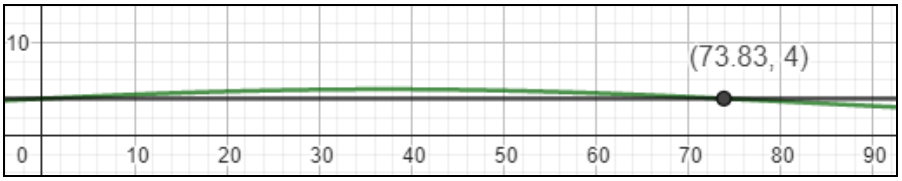
$c = 2\pi/188 = \pi/94$, vi sono due possibilità, a seconda che il minimo sia precedente ($b < 0$) o successivo ($b > 0$) al massimo: $\begin{cases} a-b=2 \\ a+b=5 \end{cases} \vee \begin{cases} a-b=5 \\ a+b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3,5 \\ b=\pm 1,5 \end{cases}$, quindi $y(x) = 3,5 \pm 1,5 \cdot sin(\pi/94x + d)$. Per determinare $d$: $y(37) = 5$ e si ottiene per il massimo, ossia quando $sin(37\pi/94 + d) = \pm 1$, ossia $37\pi/94 + d = \pm \pi/2 + k\pi \Rightarrow d = 5\pi/47 + k\pi \vee d = -42\pi/47 + k\pi$. Abbiamo perciò $y(x) = 3,5 + 1,5 \cdot sin(\pi/94x + 5\pi/47) \vee y(x) = 3,5 - 1,5 \cdot sin(\pi/94x - 42\pi/47)$. Nel primo caso il minimo si ottiene se $\pi/94x + 5\pi/47 = 3\pi/2 \Rightarrow x = 131$; nel secondo se $(\pi/94x - 42\pi/47 = \pi/2 \Rightarrow x = 131$. Ciò significa che il minimo non viene mai prima del massimo, almeno non per valori di $x > 0$.

**4. Con riferimento al precedente esercizio, che valore si ha dopo 57 secondi?**

$y(57) = 3,5 + 1,5 \cdot sin(57\pi/94 + 5\pi/47) \approx 4,68$.

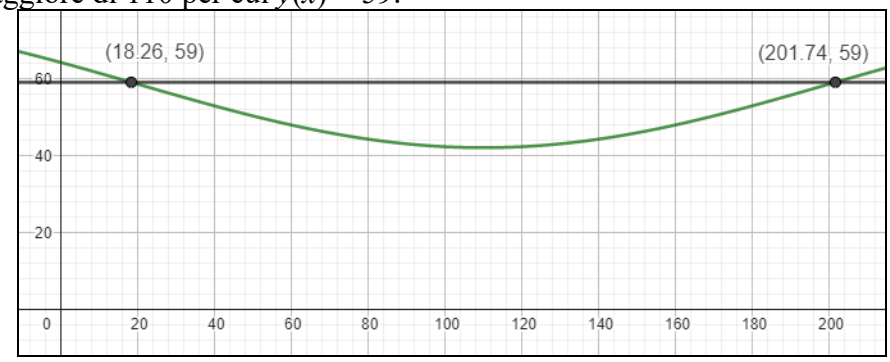
**5. Con riferimento al precedente esercizio, quanti secondi dopo il massimo si ottiene per la prima volta il valore 4?**

Usiamo il grafico.




**6. Il modello matematico di un certo fenomeno naturale è $y(x) = a + b \cdot sin(c \cdot x + d)$, $a$, $b$, $c$ e $d$ numeri reali. Determinare il valore di tali parametri sapendo che il massimo è (290; 75) e il minimo (110; 42). Determinare inoltre per quale $x$ si ottiene, per la prima volta dopo il minimo, il valore 59. Infine determinare il valore ottenuto per $x = 308$.**

Il semiperiodo è 290 – 110 = 180, quindi $c = \pi x/180$; $\begin{cases} a-b=75 \\ a+b=42 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=58,5 \\ b=-16,5 \end{cases}$. $(110\pi/180 + d) = \pi/2 \Rightarrow d = -\pi/9$. La funzione è: $y(x) = 58,5 - 16,5 \cdot sin(\pi x/180 - \pi/9)$. La rappresentiamo e determiniamo il primo valore maggiore di 110 per cui $y(x) = 59$.




Il valore è ≈ 201,7. Infine: $y(308) = 58,5 - 16,5 \cdot sin(308\pi/180 - \pi/9) \approx 74,2$.

**7. Una massa legata a una molla oscilla con legge $y(t) = 1,25 \cdot cos(3t)$. Vogliamo sapere a) il periodo del moto in secondi; b) la massima espansione della molla in *cm*.**

a) Si ha: $y = A \cdot cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$, in cui $T$ è il periodo e $t$ è il tempo, quindi: $2\pi/T = 3 \Rightarrow T = 2\pi/3$; b) ovviamente $A = 1,25$ *cm*.

**8. Con riferimento al problema precedente, determinare gli istanti in cui la molla raggiunge a) la massima espansione; b) la massima contrazione; c) passa per la posizione iniziale di equilibrio.**

a) La massima espansione si ha quando l'argomento del coseno vale $2k\pi$, quindi per $3t = 2k\pi \Rightarrow t = 2k\pi/3$; b) stavolta invece deve essere: $3t = \pi + 2k\pi \Rightarrow t = (2k + 1) \cdot \pi/3$; c) la posizione iniziale si ha per $3t = \pi/2 + k\pi \Rightarrow t = (2k + 1) \cdot \pi/6$.

**9. Con riferimento al problema precedente, determinare a) se dopo 1,28 *s*, la molla si espande o contrae e quanto ampia è tale espansione o contrazione. b) Dopo quanti secondi la molla avrà la stessa espansione? c) Dopo quanti secondi una contrazione di uguale ampiezza?**

a) Essendo il periodo $2\pi/3$, avremo espansione per metà periodo e contrazione per l'altra metà, in particolare, siccome per $t = 0$ il coseno è massimo, partiamo dalla massima espansione, dopo $¼ \cdot 2\pi/3 = \pi/6$, passeremo per il punto di equilibrio, quindi in $[\pi/6; \pi/3]$ avremo contrazione, in $[\pi/3; \pi/2]$ di nuovo espansione e in $[\pi/2; 2\pi/3]$ contrazione, e così via per ogni periodo di $2\pi/3$. Dato che $1{,}28 \in [\pi/3; \pi/2]$, siamo in fase di contrazione. Tale contrazione vale: $y(1{,}28) = 1{,}25 \cdot cos(3 \cdot 1{,}28) \approx -0{,}96\ cm$. Osserviamo che si ottiene un valore negativo, che conferma appunto che siamo in fase di contrazione; b) Per quanto detto deve passare mezzo periodo, cioè $\pi/3\ s \approx 1{,}05s$; c) stavolta deve passare un intero periodo: $2\pi/3\ s \approx 2{,}09s$.

**10. Con riferimento all'esercizio precedente, determinare le leggi della velocità e dell'accelerazione.**

In generale si ha, per la velocità: $y = -A \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Rightarrow y = -\ 3{,}75\ sin(3t)$, e per l'accelerazione:

$y = -A \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Rightarrow\ y = -\ 11{,}25\ cos(3t)$.

**11.** Quanto valgono i moduli della massima velocità e della **massima accelerazione di un moto armonico di legge $y(t) = A \cdot cos(2\pi t/T)$?**

I massimi si hanno sempre quando i coseni sono massimi, e quindi $v_{\max} = A \cdot \frac{2\pi}{T}; a_{\max} = A \cdot \frac{4\pi^2}{T^2}$.

**12. Determinare i moduli della massima velocità ed accelerazione di una molla che oscilla con periodo di 1,32*s* e ampiezza di 3,12*cm*.**

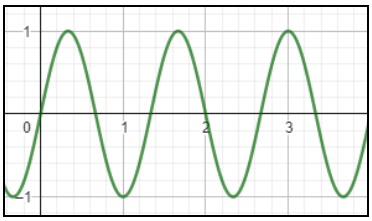
Dal precedente: $v_{max} = 3{,}12\ cm \cdot 2\pi/1{,}32s \approx 14{,}85\ cm/s$; $a_{max} = 3{,}12\ cm \cdot 4\pi^2/(1{,}32s)^2 \approx 70{,}69\ cm^2/s^2$.

**13. Determinare la legge dell'oscillazione di una molla che oscilla con velocità massima di 0,23 *cm/s* e accelerazione massima di 0,41 $cm^2/s^2$.**

$$\begin{cases} 0{,}23 = A \cdot \frac{2\pi}{T} \\ 0{,}41 = A \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0{,}23 = A \cdot \frac{2\pi}{T} \\ 0{,}41 = 0{,}23 \cdot \frac{2\pi}{T} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0{,}23 = A \cdot \frac{0{,}41}{0{,}23} \\ \frac{2\pi}{T} = \frac{0{,}41}{0{,}23} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \approx 0{,}13 \\ T \approx 3{,}52 \end{cases} \Rightarrow y = 0{,}13 \cdot cos(1{,}78t)$$

## Temi assegnati agli esami di stato

**1. (Liceo scientifico 2011/2012) Sia $g(x) = sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right)$, qual è il periodo della funzione *g*? Si disegni il grafico in un conveniente sistema di riferimento cartesiano *Oxy*.**




Facilmente si ha: $P = 2\pi/(3\pi/2) = 4/3$.

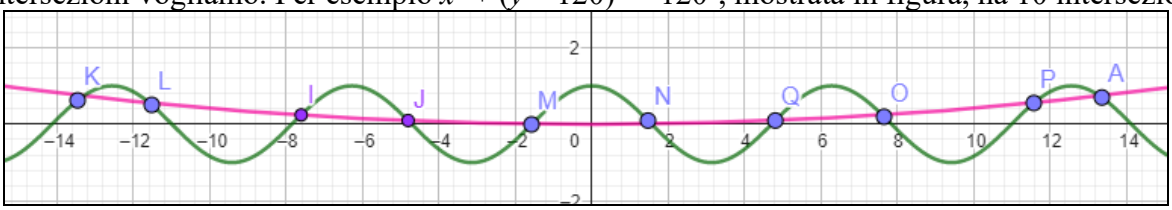
**2. (Liceo scientifico 2011/2012) Quale delle seguenti funzioni è positiva per ogni *x* reale?**
**A) $cos[sin(x^2 + 1)]$ B) $sin[cos(x^2 + 1)]$ C) $sin[ln(x^2 + 1)]$ D) $cos[ln(x^2 + 1)]$ [A]**

Sappiamo che $\cos[f(x)] > 0$ se $-\pi/2 < f(x) < \pi/2$, quindi per A) dovrebbe essere $-\pi/2 < sin(x^2 + 1) < \pi/2$. Essendo $\pi/2 > 1$, l'espressione è sempre vera, quindi la risposta corretta è proprio questa. Stabiliamo che le altre non vanno bene. B) $sin[f(x)] > 0$ se $0 < f(x) < \pi$, deve perciò essere $0 < cos(x^2+1) < \pi$, questa non è vera sempre perché per esempio $\cos(2) < 0$. C) Stavolta deve essere $0 < ln(x^2 + 1) < \pi$, e ancora una volta non è vera sempre perché per esempio $ln(25) > \pi$. D) Infine non è sempre vero che $-\pi/2 < ln(x^2 + 1) < \pi/2$, sempre per il punto C)

## Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

1. **(AHSME 1983) L'equazione $x^2 - px + q = 0$ ha per soluzioni $tan(\alpha)$ e $tan(\beta)$; $x^2 - rx + s = 0$ ha per soluzioni $cot(\alpha)$ e $cot(\beta)$. Determinare $rs$ in funzione di $p$ e $q$.**
   Si ha: $tan(\alpha) \cdot tan(\beta) = q$ e $cot(\alpha) \cdot cot(\beta) = s$. D'altro canto $tan(\alpha) + tan(\beta) = p$ e $cot(\alpha) + cot(\beta) = r$.
   Quindi: $rs = cot(\alpha) \cdot cot(\beta) \cdot [cot(\alpha) + cot(\beta)] = \frac{1}{tan\ \alpha\ tan\ \beta} \cdot \left[\frac{1}{tan\ \alpha} + \frac{1}{tan\ \beta}\right] = \frac{tan\ \alpha + tan\ \beta}{tan^2\ \alpha\ tan^2\ \beta} = \frac{p}{q^2}$.
2. **(AHSME 1987) Calcolare $log[tan(1°)] + log[tan(2°)] + ... + log[tan(89°)]$.**
   $log[tan(1°)] + log[tan(89°)] + log[tan(2°)] + log[tan(88°)] + ... + log[tan(44°)] + log[tan(46°)] + log[tan(45°)] = log[tan(1°) \cdot tan(89°)] + log[tan(2°) \cdot tan(88°)] + ... + log[tan(44°) \cdot tan(46°)] + log(1)$.
   Si ha: $tan(x) \cdot tan(90° - x) = tan(x) \cdot cot(x) = 1$. Quindi tutti gli addendi valgono $\log(1) = 0$.
3. **(AHSME 1999) Sia $sec(x) - tan(x) = 2$, $x \in \mathbb{R}$. Calcolare $sec(x) + tan(x)$.**
   $\frac{1}{cos\ x} - \frac{sin\ x}{cos\ x} = 2 \Rightarrow \frac{1 - sin\ x}{cos\ x} = 2 \Rightarrow \frac{[1 - sin\ x]^2}{cos^2\ x} = 4 \Rightarrow \frac{[1 - sin\ x]^{\cancel{2}}}{\cancel{[1 - sin\ x]}[1 + sin\ x]} = 4 \Rightarrow$ $1 - sen(x) = 4 + 4sin(x) \Rightarrow sin(x) = -3/5 \Rightarrow \frac{1 + 3/5}{cos\ x} = 2 \Rightarrow cos(x) = 4/5 \Rightarrow sec(x) + tan(x) = 5/4 - ¾ = ½$.
4. **(HSMC2001) Calcolare $cos(\pi/2) + 2cos(2\pi/2) + 3cos(3\pi/2) + \ldots + 45cos(45\pi/2)$.**
   Si ha: $cos(4k\pi/2) = cos(2k\pi) = 1$; $cos[(4k + 1)\pi/2] = cos(2k\pi + \pi/2) = 0$; $cos[(4k + 2)\pi/2] = cos(2k\pi + \pi) = -1$; $cos[(4k + 3)\pi/2] = cos(2k\pi + 3\pi/2) = 0$. Quindi la somma vale: $-2 + 4 - 6 + 8 - \ldots + 44 = 4 \cdot (1 + 2 + \ldots + 11) - 2 \cdot (1 + 3 + 5 + \ldots + 21) = 4 \cdot 11 \cdot 12/2 - 2 \cdot 11^2 = 264 - 242 = 22$. Abbiamo usato le formule: $1 + 2 + \ldots + n = n(n + 1)/2$ e $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$.
5. **(HSMC2003) Calcolare $sin\{cos^{-1}[tan(\pi/6)]\}$.**
   $sin\left[cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right] = \sqrt{1 - cos^2\left[cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.
6. **(RICE2007) Calcolare $tan(10°) \cdot tan(20°) \cdot tan(30°) \cdot \ldots \cdot tan(70°) \cdot tan(80°)$.**
   $tan(10°) \cdot tan(20°) \cdot tan(30°) \cdot \ldots \cdot cot(20°) \cdot cot(10°) = 1$
7. **(HSMC2000) Find the exact value of $sin[tan^{-1}(3)]$.**
   Usando le formule stabilite dal Teorema 6: $sin\left[tan^{-1}(3)\right] = \frac{tan\left[tan^{-1}(3)\right]}{\sqrt{1 + tan^2\left[tan^{-1}(3)\right]}} = \frac{3}{\sqrt{1 + 3^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$
8. **(HSMC2001) Find the exact value of $cos\left[sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]$.**
   $cos\left[sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right] = \sqrt{1 - sin^2\left[sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$
9. **(HSMC2003) If $sin(x) + cos(x) = ½$, then $sin^3(x) + cos^3(x)$ is?**
   $sin^3(x) + cos^3(x) = [sin(x) + cos(x)] \cdot [sin^2(x) + cos^2(x) - sin(x)\ cos(x)] = ½ \cdot [1 - sin(x)\ cos(x)]$. D'altro canto: $[sin(x) + cos(x)]^2 = sin^2(x) + cos^2(x) + 2sin(x)\ cos(x) \Rightarrow ¼ = 1 + 2sin(x)\ cos(x) \Rightarrow sin(x)\ cos(x) = -3/8$. Infine: $sin^3(x) + cos^3(x) = ½\ (1 + 3/8) = 11/16$.
10. **(HSMC2003) Suppose that $tan(x) = 2$ and that $cos(x)$ is negative. Then $sin(x)$ is equal to?**
    Dato che $tan(x) > 0$ e $cos(x) < 0$, siamo nel III quadrante, ($sin(x) < 0$). Adesso: $sec^2(x) = 1 + tan^2(x) = 5 \Rightarrow cos^2(x) = 1/5 \Rightarrow sin(x) = -\sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$
11. **(HSMC 2011) An arbitrary circle can intersect the graph of $y = cos(x)$ in**
    **(A) at most 1 points; (b) at most 3 points; (C) at most 5 points;**
    **(D) at most 7 points; (E) at most 9 points; (F) more than 9 points.**

Se consideriamo un cerchio con centro sull'asse $y$ e raggio abbastanza grande, possiamo trovare quante intersezioni vogliamo. Per esempio $x^2 + (y - 120)^2 = 120^2$, mostrata in figura, ha 10 intersezioni..




La risposta è F

# Quelli che … vogliono sapere di più

## Riferimento polare

***Esprimere in forma polare le seguenti curve in forma cartesiana***

***Livello 2***

**1. a) $x^2 + y^2 - 1 = 0$; b) $xy - 1 = 0$; c) $x^2 - y^2 - 1 = 0$; d) $x^2 + 4y^2 - 1 = 0$**

a) Dato che $\rho^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow \rho^2 = 1$;

b) $\rho^2 \cos(\theta)\sin(\theta) - 1 = 0$;

c) $\rho^2 \cos^2(\theta) - \rho^2 \sin^2(\theta) - 1 = 0 \Rightarrow \rho^2 [\cos^2(\theta) - 1 + \cos^2(\theta)] - 1 = 0 \Rightarrow \rho^2 [2\cos^2(\theta) - 1] - 1 = 0$;

d) $\rho^2 \cos^2(\theta) + 4\rho^2\sin^2(\theta) - 1 = 0 \Rightarrow \rho^2[ 4 - 3\cos^2(\theta)] - 1 = 0$

**2. a) $x^2 + x + y = 0$; b) $x^2y - x + 1 = 0$; c) $x^2 + y^2 + xy = 0$; d) $x^3 + y^2 - 1 = 0$**

a) $\rho^2 \cos^2(\theta) - \rho \cos(\theta) + \rho \sin(\theta) = 0 \Rightarrow \rho \cos^2(\theta) - \cos(\theta) + \sin(\theta) = 0$;

b) $\rho^2 \cos^2(\theta)\rho \sin(\theta) - \rho \cos(\theta) + 1 = 0 \Rightarrow \rho \cos(\theta)[\rho^2 \cos(\theta)\sin(\theta) - 1] + 1 = 0$;

c) $\rho^2 + \rho^2 \cos(\theta)\sin(\theta) + 1 = 0 \Rightarrow \rho^2[ 1 + \cos(\theta)\sin(\theta)] + 1 = 0$;

**3. a) Ellisse in forma canonica di semiassi *a* e *b*; b) Iperbole in forma canonica di semiassi *a* e *b***

a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{\rho^2\cos^2(\theta)}{a^2} + \frac{\rho^2\sin^2(\theta)}{b^2} = 1 \Rightarrow \rho^2[b^2\cos^2(\theta) + a^2 \sin^2(\theta)] = a^2b^2$;

b) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1 \Rightarrow \frac{\rho^2\cos^2(\theta)}{a^2} - \frac{\rho^2\sin^2(\theta)}{b^2} = \pm 1 \Rightarrow \rho^2[b^2\cos^2(\theta) - a^2 \sin^2(\theta)] = \pm a^2b^2$.

**4. a) Iperbole equilatera in forma canonica; b) Iperbole equilatera riferita ai propri assi**

a) $x^2 - y^2 = a^2 \Rightarrow \rho^2 \cos^2(\theta) - \rho^2 \sin^2(\theta) - 1 = a^2 \Rightarrow \rho^2 [2\cos^2(\theta) - 1] - a^2 = 0$;

b) $xy = k \Rightarrow \rho^2 \cos(\theta)\sin(\theta) - k = 0$

**5. a) Parabola canonica con asse di simmetria *x*; b) Parabola canonica con asse di simmetria *y***

a) $y = ax^2 \Rightarrow \rho\sin(\theta) - a\rho^2 \cos^2(\theta) = 0 \Rightarrow a\rho\cos^2(\theta) - \sin(\theta) = 0$;

b) $x = ay^2 \Rightarrow \rho\cos(\theta) - a\rho^2 \sin^2(\theta) = 0 \Rightarrow a\rho\sin^2(\theta) - \cos(\theta) = 0$

**6. a) Parabola con asse di simmetria parallelo ad *x*; b) Parabola con asse di simm. parallelo ad *y***

a) $y = ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \rho\sin(\theta) - a\rho^2 \cos^2(\theta) - b\rho\cos(\theta) + c = 0 \Rightarrow a\rho^2\cos^2(\theta) - \rho[\sin(\theta) + b\cos(\theta)] + c = 0$; b) $x = ay^2 + by + c = 0 \Rightarrow \rho\cos(\theta) - a\rho^2 \sin^2(\theta) - b\rho\sin(\theta) + c = 0 \Rightarrow a\rho^2\sin^2(\theta) - \rho[\cos(\theta) + b\sin(\theta)] + c = 0$

***Esprimere in forma cartesiana le seguenti curve in forma polare***

**2. a) $\rho = 5\sin(\theta)$; b) $\sin(\theta)\cos(\theta) = 1$; c) $\rho = \sin(\theta)$; d) $5\sin^2(\theta) + 3 = 0$**

a) $\rho^2 = 5\rho \cdot \sin(\theta) \Rightarrow x^2 + y^2 - 5y = 0$.

b) $\rho^2 \sin(\theta)\cos(\theta) = \rho^2 \Rightarrow xy - (x^2 + y^2) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - xy = 0$;

c) $\rho^2 = \rho \sin(\theta) \Rightarrow x^2 + y^2 - y = 0$;

d) $5\rho^2\sin^2(\theta) + 3\rho^2 = 0 \Rightarrow 5y^2 + 3x^2 + 3y^2 = 0 \Rightarrow 3x^2 + 8y^2 - 1 = 0$;

**3. a) $\rho^2 = 3 \cdot \cos(\theta)$; b) $13\sin^2(\theta) = 3$; c) $\rho^2 = 2\sin(\theta) \cos(\theta)$**

a) $\rho^3 = 3\rho \cdot \cos(\theta) \Rightarrow \left(x^2 + y^2\right)\sqrt{x^2 + y^2} = 3x \Rightarrow \left(x^2 + y^2\right)^3 = 9x^2$.

b) $13\rho^2\sin^2(\theta) = 3\rho^2 \Rightarrow 13y^2 = 3x^2 + 3y^2 \Rightarrow 3x^2 - 10y^2 = 0$;

c) $\rho^4 = 2\rho^2\sin(\theta) \cos(\theta) \Rightarrow (x^2 + y^2)^2 - 2xy = 0$

# Test di Verifica

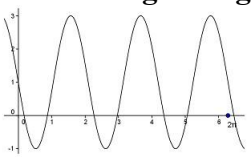
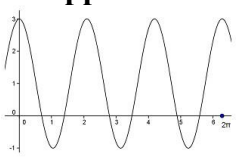
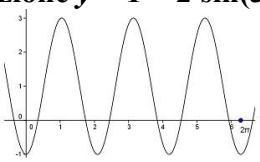
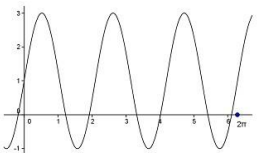
**1. Con riferimento alla funzione $y = 2 + 3\,sin(4x + 1)$, quali affermazioni sono vere?**
**A Il periodo è $4\pi$ B Il codominio è ampio 6 C Il minimo della funzione è –1 D Il punto (–¼; 2) appartiene alla funzione E Il massimo della funzione è 6**
Il periodo è $2\pi/4 = \pi/2$; il codominio è $[2 – 3; 2 + 3] = [–1; 5]$, quindi è ampio 6; $2 + 3\,sin(–4 \cdot ¼ + 1) = 2$. Quindi sono vere: B – C – D

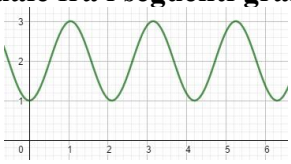
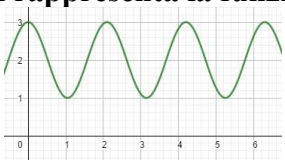
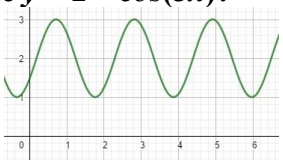
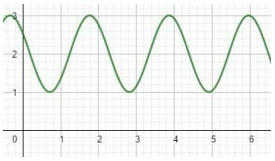
**2. Con riferimento alla funzione $y = 3 + sin(2x – 1)$, quali affermazioni NON sono vere?**
**A Il periodo è $\pi$ B Il codominio è [–3; 3] C La funzione è sempre positiva D Il punto (0; 3) non appartiene alla funzione E Il punto (½; 0) appartiene alla funzione**
Il periodo è $2\pi/2 = \pi$; il codominio è $[3 – 1; 3 + 1] = [2; 4]$; $sin(2x – 1) \geq –1 \Rightarrow 3 + sin(2x – 1) \geq 2 > 0$; $3 + sin(–1) \neq 3$; $3 + sin(0) = 3$. Quindi sono false: B – C – E

**3. Se $tan(x) = 8$, con $180° < x < 270°$, quali delle seguenti uguaglianze sono corrette?**
**A** $cos(x) = -\frac{1}{\sqrt{65}}$ **B** $sin(x) = \frac{8}{\sqrt{65}}$ **C** $1 - csc(x) = \frac{\sqrt{65}-8}{8}$ **D** $cot(180° - x) = -\frac{1}{8}$ **E** $sec^2(x) = 65$
Si ha: $cos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1+8^2}} = -\frac{1}{\sqrt{65}}; sin(x) = -\frac{8}{\sqrt{65}}; 1 - csc(x) = 1 + \frac{\sqrt{65}}{8}; cot(x) = -cot(x) = -\frac{1}{8}; sec^2(x) = 65$
Quindi sono corrette: A – D – E

**4. Quali fra le seguenti scritte sono corrette?**
**A $sin(14) > sin(12)$ B $cos(23) > cos(15)$ C $tan(43) > tan(25)$**
**D $cot(28) > cot(16)$ E $sec(29) > sec(51)$**
$sin(14) > 0 > sin(12)$; $cos(23) > –0{,}6 > cos(15)$; $tan(25) > –1 > tan(43)$; $cot(16) > 0 > cot(28)$; $sec(51) > 0 > sec(29)$. Quindi sono corrette: A – B

**5. Quali fra le seguenti uguaglianze sono corrette, per $–1 \leq x \leq 1$?**
A $sin[sin^{-1}(x)] = 1$ B $cos[sin^{-1}(x)] = \sqrt{1-x^2}$ C $tan[cot^{-1}(x)] = 1/x$
D $sin(x) \cdot sin^{-1}(x) = x$ E $csc[sin^{-1}(x)] = sin[csc^{-1}(x)]$
$sin[sin^{-1}(x)] = x$ ; $cos[sin^{-1}(x)] = \sqrt{1-sin^2\left[sin^{-1}(x)\right]} = \sqrt{1-x^2}$ ; $tan[cot^{-1}(x)] = 1/\,cot[cot^{-1}(x)] = 1/x$ ;
$sin(\pi/2) \cdot sin^{-1}(\pi/2) = sin^{-1}(\pi/2) \neq \pi/2$; $csc[sin^{-1}(x)] = 1/sin[sin^{-1}(x)] = 1/x$ e $1/csc[csc^{-1}(x)] = 1/x$.
Quindi sono corrette: B – C – E

**6. Quale fra i seguenti grafici rappresenta la funzione $y = 1 + 2\,sin(3x)$?**
**A**  **B**  **C**  **D** 
**E Nessuna delle precedenti**
La funzione ha periodo $2\pi/3$ e codominio $[–1; 3]$, il massimo, a partire da $x = 0$, precede il minimo, passa per (0; 1). Quindi risposta corretta: D

**7. Quale fra i seguenti grafici rappresenta la funzione $y = 2 – cos(3x)$?**
**A**  **B**  **C**  **D** 
**E Nessuna delle precedenti**
La funzione ha periodo $2\pi/3$ e codominio $[1; 3]$, un minimo si ha in (0; 1). Quindi Risposta corretta: A

**8. L'uguaglianza $\left[csc(x-90°)+sec(-x)\right]\cdot\left[csc(-x)+sec(x-90°)\right]=0$, è vera per quali valori reali di $x$? A $\forall x \in \mathbb{R}$ B $x \neq k180°$ C $x \neq k360°$ D $x \neq k90°$ E Non si annulla mai**

Deve essere $x - 90° \neq k90° \Rightarrow x \neq k90°$ e $-x \neq k90°$. Quindi $x \neq k90°$. Risposta corretta: D

**9. Quanto vale l'espressione** $\left[sin\left(\frac{17\pi}{2}\right)+cos\left(\frac{31\pi}{2}\right)-tan\left(\frac{15\pi}{4}\right)-cot\left(\frac{32\pi}{3}\right)\right]^2$ **?**

**A** $\frac{13+4\sqrt{3}}{3}$ **B** $\frac{13-4\sqrt{3}}{3}$ **C** $\frac{1}{3}$ **D** $\frac{13}{3}$ **E Nessuna delle precedenti**

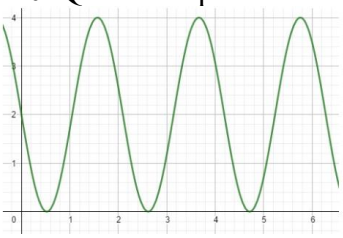
$$\left[sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)-tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)-cot\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]^2=\left(1+0+1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\left(2+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{39+12\sqrt{3}}{9}=\frac{13+4\sqrt{3}}{3}.$$

Risposta corretta: A

**10. Se $sin(x) + cos(x) = 1$, quanto vale $sin^4(x) + cos^4(x)$?**

**A 0 B 4 C 1 D Non si può determinare dai dati E Nessuna delle precedenti**

$sin^4(x) + cos^4(x) = [sin^2(x) + cos^2(x)]^2 - 2sin^2(x)cos^2(x) = 1 - 2sin^2(x)cos^2(x)$. D'altro canto $1 = [sin(x) + cos(x)]^2 = 1 - 2sin(x)cos(x) \Rightarrow sin(x)cos(x) = 0$. Quindi: risposta corretta: C

**11. Scrivi l'equazione della sinusoide in figura** 

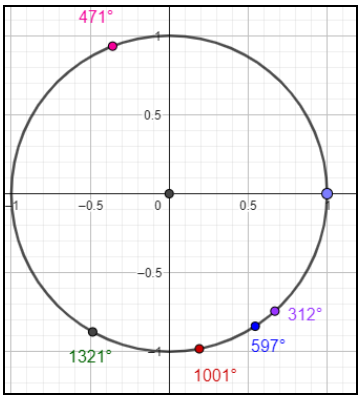
**.**

La funzione ha periodo $2\pi/3$, codominio $[0; 4]$, il minimo precede il massimo, quindi $b < 0$. Infine la sua equazione è: $y = 2 - 2sin(3x)$.

**12. Calcola $sin(1°) + sin(2°) + ... + sin(60°) - sin(121°) - sin(122°) - ... - sin(180°)$**

$[sin(1°) - sin(179°)] + [sin(2°) - sin(172°)] + ... + [sin(59°) - sin(121°)] + sin(60°) = sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

**13. Metti in ordine decrescente: $cos(312°)$, $cos(471°)$, $cos(597°)$, $cos(1001°)$, $cos(1321°)$**




$cos(312°) > cos(597°) > cos(1001°) > cos(471°) > cos(1321°)$

**14. Se la misura di un angolo è 1 rad, vuol dire che l'arco che intercetta l'angolo considerato come angolo al centro di una data circonferenza è** *uguale* **al raggio della stessa circonferenza. Il dominio o** *insieme di esistenza* **di una funzione $y = f(x)$ è l'insieme degli $x$ per i quali esiste $f(x)$. Invece l'insieme degli $y$ per i quali l'equazione $y = f(x)$ ammette almeno una soluzione nell'incognita $x$, si chiama** *codominio* **della funzione.**

**15. La funzione $y = 2 + 3 \cdot sin(4x)$ ha periodo $\pi/2$, codominio $[-1; 5]$; incontra l'asse delle $y$ nel punto** $(0; 0)$

## Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

**1. (Accademia navale) Calcolare la misura in radianti e in gradi sessagesimali di un angolo alla circonferenza che insista su un arco di lunghezza uguale al raggio.**

Se l'arco misura quanto il raggio in radianti la misura dell'angolo al centro su cui insiste l'arco è 1 *rad*, quindi quella dell'angolo alla circonferenza è ½ *rad* = $0{,}5 \cdot 180°/\pi \approx 28°38'52''$.

**2. (Odontoiatria 1997) L'insieme dei valori assunti, per $x$ reale, dalla funzione $f(x) = cos^2(x)$**

**A) è l'intervallo [–1; 1] B) è l'insieme dei numeri reali C) è l'intervallo [0; 2] D) dipende dal fatto che *x* sia espresso in gradi o radianti E) è l'intervallo [0; 1]**

Il codominio di $cos^2[f(x)]$ è ovviamente un intervallo di valori non negativi, per il resto. Come $cos(x)$ è limitato da $y = 1$, pertanto esso è [0; 1]. Risposta corretta: E

3. **(Ingegneria 1999) Siano α e β due angoli legati fra di loro dalla relazione β = π – α. Quale delle seguenti uguaglianze è vera? A) *tan*(α) + *tan*(β) = 0 B) *cos*(α) = *cos*(β) C) *sin*(α) + *sin*(β) = 0 D) *tan*(α) = *tan*(β) E) *cos*(α) + *cos*(β) = –1**

Risposta corretta: A. Infatti: $cos(\alpha) = -cos(\pi - \alpha)$; $sin(\alpha) + sin((\pi - \alpha) = 2\ sin(\alpha)$; $tan(\alpha) = -tan((\pi - \alpha)$; $cos(\alpha) + cos((\pi - \alpha) = 0$.

4. **(Odontoiatria 2000) Un angolo di ampiezza 1 radiante, in gradi sessagesimali, corrisponde a: A) poco più di 60° B) poco meno di 60° C) 50° D) un angolo retto E) 33°**

Dal numero 1:è circa 2 · 28°38′52", quindi risposta corretta: B

5. **(Ingegneria 2000) Si considerino le seguenti tre espressioni numeriche: (1) $log_2[sin(26\pi)]$ (2) $log_2[cos(26\pi)]$ (3) $log_2[tan(26\pi)]$. Allora A) la (1) e la (2) hanno entrambe significato B) la (1) ha significato, la (3) non ha significato C) la (1) e la (2) sono entrambe prive di significato D) la (1) ha significato, la (2) non ha significato E) la (2) ha significato, la (1) non ha significato**

Si ha: $sin(26\pi) = 0$; $cos(26\pi) = 1$ e $tan(26\pi) = 0$, quindi solo (2) ha significato nei reali.
Risposta corretta: E

6. **(Ingegneria 2000) Se un angolo misura 15°, la sua misura ρ in radianti è A) ¼ < ρ < ½ B) ¾ < ρ < 1 C) ρ < ¼ D) ½ < ρ < 1 E) ρ > 1**

15° · π/180° = π/12 ≈ 0,26. Risposta corretta: A

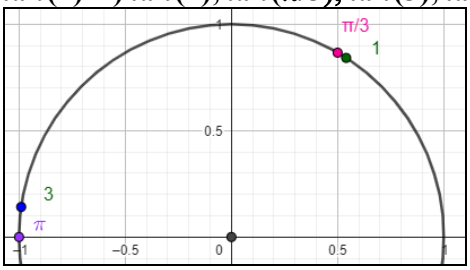
7. **(Veterinaria 2001) Se un angolo *x* misura 2,01π radianti**
**A) allora il punto (*cos*(*x*), *sin*(*x*)) appartiene al I quadrante**
**B) allora il punto (*cos*(*x*), *sin*(*x*)) appartiene al II quadrante**
**C) allora il punto (*cos*(*x*), *sin*(*x*)) appartiene al III quadrante**
**D) allora il punto (*cos*(*x*), *sin*(*x*)) appartiene al IV quadrante**
**E) la sua tangente è negativa**

2,01π equivale, nella circonferenza goniometrica, a circa 0,03 rad, quindi appartiene al primo quadrante. Risposta corretta: A

8. **(Ingegneria 2002) Un angolo di 20° in radianti misura A) π/18 B) π/8 C) π/7 D) π/9 E) π/10**

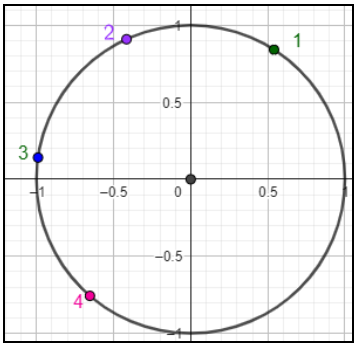
20° · π/180° = π/9. Risposta corretta: D

9. **(Medicina 2005) Si consideri la funzione trigonometrica *y* = *tan*(*x*) con 0 < *x* ≤ π (*x* è misurato in radianti). Quali fra i valori seguenti sono in ordine crescente? A) *tan*(3), *tan*(π), *tan*(1), *tan*(π/3) B) *tan*(1), *tan*(3), *tan*(π), *tan*(π/3) C) *tan*(π), *tan*(1), *tan*(π/3), *tan*(3) D) *tan*(π/3), *tan*(π), *tan*(3), *tan*(1) E) *tan*(1), *tan*(π/3), *tan*(3), *tan*(π)**




Si ha: $tan(3) < tan(\pi) < tan(1) < tan(\pi/3)$. Risposta corretta: A

10. **(Veterinaria 2007) Si consideri la funzione *y* = *sin*(*x*) (*x* esprime l'ampiezza dell'angolo in radianti). I valori della funzione *sin*(1), *sin*(2), *sin*(3) e *sin*(4), disposti in ordine crescente, risultano: A) *sin*(2), *sin*(1), *sin*(4), *sin*(3) B) *sin*(4), *sin*(3), *sin*(2), *sin*(1) C) *sin*(1), *sin*(2), *sin*(3), *sin*(4) D) *sin*(4), *sin*(3), *sin*(1), *sin*(2) E) *sin*(3), *sin*(4), *sin*(2), *sin*(1)**




Si ha: $sin(4) < sin(3) < sin(1) < sin(2)$. Risposta corretta: D

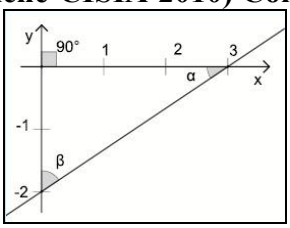
**11. (Ingegneria 2009) Un angolo misura 2 radianti, quindi**
**A) il suo seno è positivo B) seno e coseno hanno lo stesso segno C) l'angolo è acuto**
**D) la sua tangente non esiste E) il suo coseno è positivo**
Dal precedente, la risposta corretta è A

**12. (Ingegneria, 2009) L'espressione $log[x^4 + 2x^2 + sin^2(x) + cos^2(x)]$ coincide con**
**A) $4log(1 + x)$ B) $[log(x^2 + 1)]^2$ C) $2log(x^2 + 1)$**
**D) $log[x^4 + 2x^2)$ $log[sin^2(x) + cos^2(x)]$ E) $2log[1 + x + sin(x) + cos(x)]$**
$log[x^4 + 2x^2 + sin^2(x) + cos^2(x)] = log[x^4 + 2x^2 + 1] = log(x^2 + 1)^2 = 2log(x^2 + 1)$. Risposta corretta: C

**13. (Facoltà scientifiche, Roma La Sapienza 2009) Un angolo di 3 radianti ha misura in gradi (sessagesimali) compresa: A) tra 0° e 90° B) tra 90° e 180° C) tra 180° e 270° D) tra 270° e 360°**
Risposta corretta: B

**14. (Facoltà scientifiche CISIA 2010) Una sola delle seguenti funzioni ha periodo π. Quale?**
**A) $sin(x^2)$ B) $sin^2(x)$ C) $sin(x) + sin^2(x)$ D) $sin\ x + cos\ x$ E) $x + sin\ x$**
$sin[f(x)] = sin[f(x) + 2\pi]$, quindi l'unica che può non avere periodo 2π può essere $sin^2(x)$. Abbiamo $sin^2(x + \pi) = [sin(x + \pi)]^2 = [-sin(x)]^2 = sin^2(x)$. Risposta corretta: B

**15. (Facoltà scientifiche CISIA 2010) Considera gli angoli α, β in figura; quale tra la seguenti relazioni è corretta?**




**A) $tan(\beta) < cos(\alpha)$ B) $sin(\beta) < cos(\alpha)$ C) $cos(\beta) > cos(\alpha)$ D) $tan(\beta) > tan(\alpha)$ E) $sin(\beta) < sin(\alpha)$**
Si ha: $tan(\beta) = 3/2$; $cos(\alpha) = sin(\beta) = \frac{3}{\sqrt{13}} \approx 0,83$; $cos(\beta) = sin(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{13}} \approx 0,55$; $tan(\alpha) = 2/3$. Quindi la risposta corretta è D

**16. (Corso di laurea in Informatica, Udine 2009) Si consideri la funzione $f(x) = sin(\omega x)$, dove $\omega$ è una costante positiva. Se $f(a) = 0$ e $f(b) = 1$, qual è la minima distanza possibile tra $a$ e $b$?**
**A) $\frac{\pi}{2\omega}$ B) $\frac{\pi}{\omega}$ C) $\frac{2\pi}{\omega}$ D) $\frac{\pi}{4\omega}$**
$sin(\omega a) = 0 \Rightarrow \omega a = k\pi$; $sin(\omega b) = 1 \Rightarrow \omega b = \pi/2 + 2k\pi$. Quindi $|\omega a - \omega b| = |k\pi - \pi/2 + 2k\pi|$, il minimo valore si ha per $k = 0 \Rightarrow |\omega a - \omega b| = \pi/2 \Rightarrow |a - b| = \frac{\pi}{2\omega}$. Risposta corretta: A