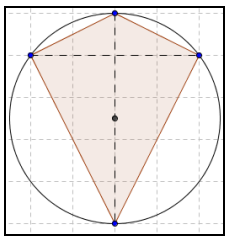
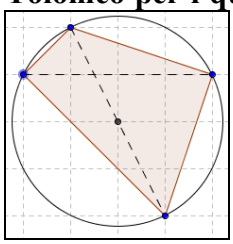
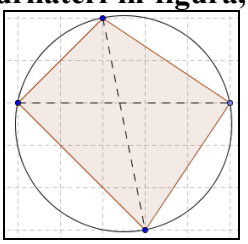
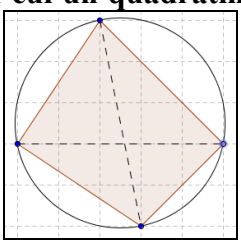
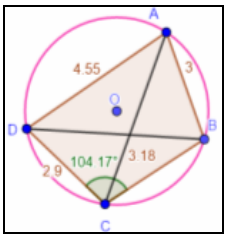
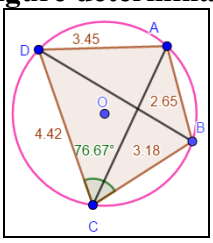
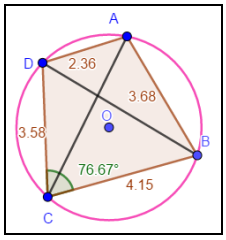
7. La misurazione degli angoli

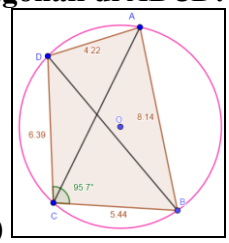
7.4 Formule goniometriche

Formule di addizione, sottrazione, duplicazione e bisezione degli archi

1. **Verificare la validità del Teorema di Tolomeo per un rettangolo generico di lati lunghi *a* e *b*.**
   Un rettangolo ha diagonali uguali di misura $\sqrt{a^2+b^2}$ e si ha: $\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2} = a^2+b^2 = a\cdot a+b\cdot b$.
2. **A quale altro famoso Teorema equivale il teorema di Tolomeo nel caso di un rettangolo?**
   Come si vede dal precedente quesito non è altri che il Teorema di Pitagora, dato che il quadrato della diagonale è la somma dei quadrati dei lati.
3. **Usando il teorema di Tolomeo determinare la misura della diagonale di un trapezio isoscele di basi lunghe *a* e *b* e lato obliquo lungo *c*.**
   In un trapezio isoscele, che è inscrivibile a una circonferenza, anche le diagonali sono uguali e misurano *d*, quindi per il teorema di Tolomeo si ha: $d^2 = a\cdot b + c\cdot c \Rightarrow = \sqrt{ab+c^2}$
4. **Verificare la validità del Teorema di Tolomeo per i quadrilateri in figura, in cui un quadratino ha lato di 1 *cm*. a)**  **b)**  **c)**  **d)** 
   a) Le diagonali misurano 4 e 5. I lati sono a due a due uguali e misurano $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$ e $\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}$. Abbiamo allora: $4\cdot 5=\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}+\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}\Rightarrow 20=10+10$
   b) Le diagonali misurano 4 e $\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}$. I lati $\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$, $\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$, $\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}$ e $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$. Abbiamo allora: $4\cdot\sqrt{20}=\sqrt{10}\cdot\sqrt{18}+\sqrt{10}\cdot\sqrt{2}\Rightarrow 8\sqrt{5}=6\sqrt{5}+2\sqrt{5}$
   c) Le diagonali misurano 5 e $\sqrt{1^2+5^2}=\sqrt{26}$. I lati $\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$, $\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$, $\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}$ e $\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}$. Abbiamo allora: $5\cdot\sqrt{26}=\sqrt{13}\cdot\sqrt{18}+\sqrt{13}\cdot\sqrt{8}\Rightarrow 5\cdot\sqrt{26}=3\cdot\sqrt{26}+2\cdot\sqrt{26}$
   d) Le diagonali misurano 5 e $\sqrt{1^2+5^2}=\sqrt{26}$. I lati $\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}$, $\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}$, $\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$, e $\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$. Abbiamo allora: $5\cdot\sqrt{26}=\sqrt{18}\cdot\sqrt{13}+\sqrt{8}\cdot\sqrt{13}\Rightarrow 5\cdot\sqrt{26}=3\cdot\sqrt{26}+2\cdot\sqrt{26}$
5. **Tenendo conto delle figure determinare la misura delle diagonali di *ABCD*.**
   a) 

   b) 

   c) 

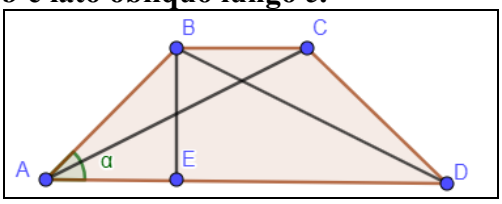
   d) 

   a) Troviamo la prima diagonale con il Teorema di Carnot:
   $\overline{BD}=\sqrt{2.9^2+3.18^2-2\cdot 2.9\cdot 3.18\cdot cos(104.17°)}\approx 4.80$. Con il teorema di Tolomeo troviamo l'altra diagonale: $\overline{AC}\approx\dfrac{4.55\cdot 3.18+3\cdot 2.9}{4.80}\approx 4.83$
   b) $\overline{BD}=\sqrt{4.42^2+3.18^2-2\cdot 4.42\cdot 3.18\cdot cos(76.67°)}\approx 4.81$. Con il teorema di Tolomeo troviamo l'altra diagonale: $\overline{AC}\approx\dfrac{3.45\cdot 3.18+4.42\cdot 2.65}{4.81}\approx 4.72$

c) $\overline{BD}=\sqrt{3.58^2+4.15^2-2\cdot 4.15\cdot 3.58\cdot cos(76.67°)}\approx 4.82$. Con il teorema di Tolomeo troviamo l'altra diagonale: $\overline{AC}\approx\dfrac{2.36\cdot 4.15+3.68\cdot 3.58}{4.82}\approx 4.77$

d) $\overline{BD}=\sqrt{6.39^2+5.44^2-2\cdot 6.39\cdot 5.44\cdot cos(95.7°)}\approx 8.79$. Con il teorema di Tolomeo troviamo l'altra diagonale: $\overline{AC}\approx\dfrac{4.22\cdot 5.44+8.14\cdot 6.39}{8.79}\approx 8.53$

6. **Verificare la validità del Teorema di Tolomeo per un trapezio isoscele generico di basi lunghe *a* e *b* e lato obliquo lungo *c*.**

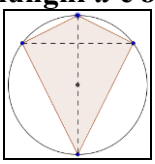


Si ha:

$$\overline{BD}=\overline{AC}=\sqrt{\overline{BE}^2+\overline{ED}^2}=\sqrt{\left[c^2-\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\right]+\left(b-\frac{b-a}{2}\right)^2}=\sqrt{c^2-\frac{\cancel{a^2+b^2}-2ab}{4}+\frac{\cancel{a^2+b^2}+2ab}{4}}=\sqrt{c^2+ab}$$

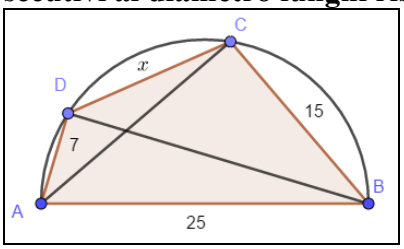
La somma dei prodotti dei lati opposti è: $ab+c^2$, che è effttivamente il quadrato di una diagonale.

7. **Verificare la validità del Teorema di Tolomeo per un aquilone generico di lati lunghi *a* e *b* e diagonali perpendicolari uno dei quali è diametro della circonferenza circoscritta.**



Il diametro della circonferenza misura: $\sqrt{a^2+b^2}$, la diagonale minore è doppio dell'altezza relativa all'ipotenusa dei triangoli rettangoliinscirtti nella semicirconferenza, quindi misura: $2\cdot\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Infine: $2\cdot\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\sqrt{a^2+b^2}=2ab$, che verifica il teorema.

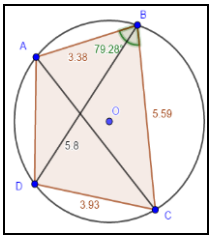
8. **Un quadrilatero è inscritto in una semicirconferenza di diametro lungo 25 *cm*, ha i due lati consecutivi al diametro lunghi rispettivamente 7 *cm* e 15 *cm*. Quanto misura il quarto lato?**



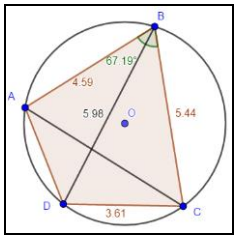
Determiniamo la misure delle diagonali con il teorema di Pitagora: $\sqrt{25^2-7^2}\,cm=24cm;\sqrt{25^2-15^2}\,cm=20cm$. Adesso applichiamo il Teorema di Tolomeo:

$$20\ cm\cdot 24\ cm=7\ cm\cdot 15\ cm+25\ cm\cdot x\ cm\Rightarrow x=15\ cm$$

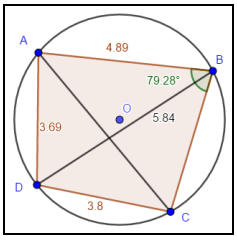
9. **Tenendo conto delle figure determinare la misura della diagonale e del lato incogniti di *ABCD*.**



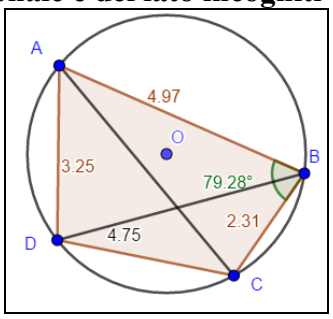
a)



b)



c)

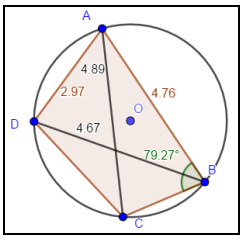


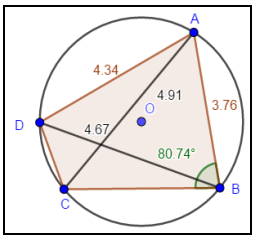
d)

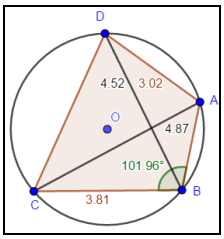
a) $\overline{AC}=\sqrt{3.38^2+5.59^2-2\cdot 3.38\cdot 5.59\cdot cos(79.28°)}\approx 5.97$; 5.8 · 5.97 = 3.38 · 3.93 + 5.59 · $\overline{AD}$ ⇒ $\overline{AD}$ ≈ 3,82; b) $\overline{AC}=\sqrt{4.59^2+5.44^2-2\cdot 4.59\cdot 5.44\cdot cos(67.19°)}\approx$ 5.59; 5.98 · 5.59 = 4.59 · 3.61 +

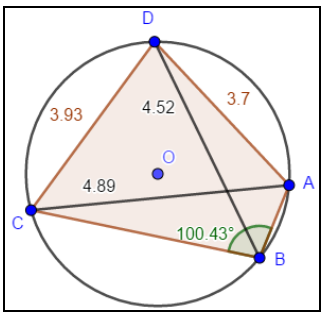
$5.44 \cdot \overline{AD} \Rightarrow \overline{AD} \approx 3.10$; c) $\overline{AC} = \sqrt{3.69^2 + 3.8^2 - 2 \cdot 3.69 \cdot 3.8 \cdot cos(480° - 79.28°)} \approx 5{,}77$; $5.84 \cdot 5.77 = 3.8 \cdot 4.89 + 3.69 \cdot \overline{BC} \Rightarrow \overline{BC} \approx 4{,}10$; d) $\overline{AC} = \sqrt{4.97^2 + 2.31^2 - 2 \cdot 4.97 \cdot 2.31 \cdot cos(79.28°)} \approx 5{,}08$; $5.08 \cdot 4.75 = 3.25 \cdot 2.31 + 4.97 \cdot \overline{CD} \Rightarrow \overline{CD} \approx 3{,}34$

10. **Tenendo conto delle figure determinare la misura dei lati incogniti di *ABCD*.**

a) 

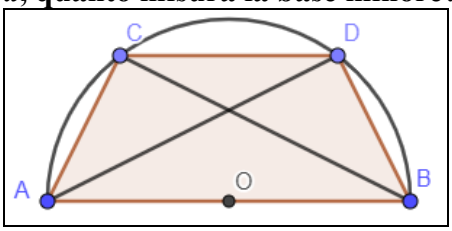
b) 

c) 

d) 

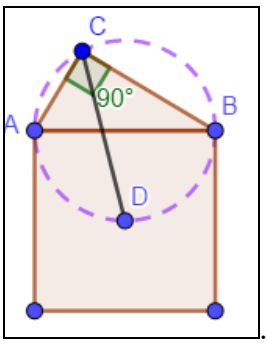
a) $4.89^2 = 4.76^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot 4.76 \cdot \overline{BC} \cdot cos(79.27°) \Rightarrow \overline{BC} \approx -0.54$ (NA) $\vee \approx 2.31$; $\overline{CD} \approx 3.36$.
b) $4.91^2 = 3.76^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot 3.76 \cdot \overline{BC} \cdot cos(80.74°) \Rightarrow \overline{BC} \approx -2.61$ (NA) $\vee \approx 3{,}82$; $\overline{CD} \approx 1{,}69$;
c) $4.87^2 = 3.81^2 + \overline{AB}^2 - 2 \cdot 3.81 \cdot \overline{AB} \cdot cos(101.96°) \Rightarrow \overline{AB} \approx -3.92$ (NA) $\vee \approx 2.34$; $\overline{CD} \approx 4{,}49$;
d) I dati sono insufficienti perché di *ACD* conosciamo tutti i lati mentre di *ABC* conosciamo un solo lato.

11. **Un trapezio isoscele è inscritto in una semicirconferenza di diametro *d*, se il lato obliquo è lungo *a*, quanto misura la base minore?**



Il diametro è la base maggiore, le diagonali sono cateti dei triangoli rettangoli di ipotenusa *AB*, quindi misurano: $\sqrt{d^2 - a^2}$. Per il teorema di Tolomeo, detta *x* la misura della base minore, $d^2 - a^2 = d \cdot x + a^2 \Rightarrow x = \dfrac{d^2 - 2a^2}{d}$.

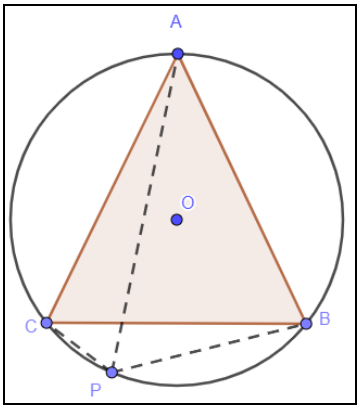
12. **Esternamente a un lato *AB* di un quadrato costruiamo un triangolo rettangolo *ABC* che ha per ipotenusa *AB*. Se i cateti sono lunghi rispettivamente 1,35 *cm* e 1,96 *cm*, determinare la misura del segmento *CD*, in cui *D* è il centro del quadrato. *Suggerimento*: applicare il teorema di Tolomeo al quadrilatero *ACBD*.**

Ci riferiamo alla figura: 

. Perché il quadrilatero ACBD è ciclico? Perché ABC essendo rettangolo di ipotenusa AB è inscritto nella semicirconferenza di diametro AB, la simmetrica di questa semicirconferenza rispetto ad AD deve passare per D perché anche $B\hat{D}A = 90°$. Applichiamo il teorema di Tolomeo: $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AC} \cdot \overline{BD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} \Rightarrow \overline{CD} = \dfrac{\overline{AC} \cdot \overline{BD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD}}{\overline{AB}}$, osserviamo che

$$\overline{AD} = \overline{BD} = \frac{\overline{AB}\sqrt{2}}{2} = \frac{\overline{AB}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \overline{CD} = \frac{(\overline{AC} + \overline{BC}) \cdot \overline{AB}}{\overline{AB}\sqrt{2}} = \frac{\overline{AC} + \overline{BC}}{\sqrt{2}} = \frac{1{,}35cm + 1{,}96cm}{\sqrt{2}} \approx 2{,}34cm$$

13. **Un triangolo isoscele *ABC*, di base *BC*, è inscritto in una circonferenza, si scelga un punto *P* sull'arco BC, trovare una relazione fra $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ e le distanze di *P* dai vertici d*i ABC*.**



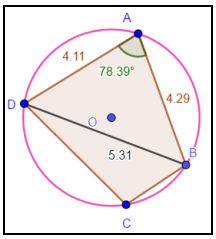
Applichiamo il teorema di Tolomeo al quadrilatero *ABPC*:

$$\overline{AC}\cdot\overline{PB}+\overline{PC}\cdot\overline{AB}=\overline{PA}\cdot\overline{BC}\Rightarrow\overline{AC}\cdot\left(\overline{PB}+\overline{PC}\right)=\overline{PA}\cdot\overline{BC}\Rightarrow\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}+\overline{PC}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

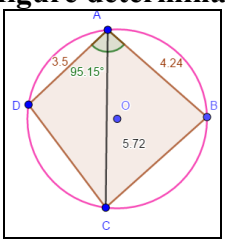
14. **Con riferimento al problema precedente, cosa succede se il triangolo è equilatero?**

Ovviamente il rapporto vale 1, quindi: $\overline{PA}=\overline{PB}+\overline{PC}$.

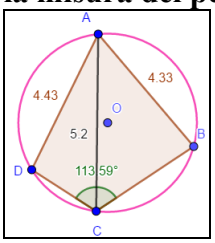
15. **Tenendo conto delle figure determinare la misura del perimetro e dell'area di *ABCD*.**



a)



b)



c)

a) I dati sono insufficienti perché di *ABD* conosciamo tutti i lati mentre di *BCD* conosciamo un solo lato.

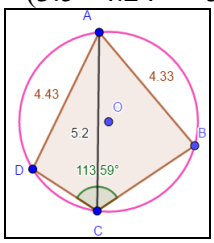
b) Calcoliamo la misura della diagonale *BD* con il teorema di Carnot:

$$\overline{BD}=\sqrt{3.5^2+4.24^2-2\cdot3.5\cdot4.24\cdot cos\left(95.15°\right)}\approx5.74$$

L'angolo di vertice *C* è supplementare di quello di vertice *A*, quindi misura 84.85°. Chiamiamo *x* e *y* le misure dei lati incogniti e li troviamo usando il teorema di Tolomeo e quello di Carnot:

$$\begin{cases}5.72\cdot5.74=3.5x+4.24y\\5.74^2=x^2+y^2-2xy\cdot cos\left(84.85°\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\approx4.36\\y\approx4.14\end{cases}\vee\begin{cases}x\approx3.38\\y\approx4.95\end{cases}$$

Quindi ci sono due possibilità: i perimetri misurano ≈ 3.5 + 4.24 + 4.36 + 4.14 = 16.24 oppure ≈ 3.5 + 4.24 + 3.38 + 4.95 =16.07. Le aree le troviamo come somma delle aree dei triangoli *ABD* e *BCD*: 1/2 · 3.5 · 4.24 · *sin*(95.15°) + 1/2 · 4.36 · 4.14 · *sin*(84.85°) = 1/2 · (3.5 · 4.24 + 4.36 · 4.14) · *sin*(95.15°) ≈ 16.38. Osserviamo che i seni di angoli supplementari sono uguali. Nell'altro caso: 1/2 · (3.5 · 4.24 · + 3.38 · 4.95) · *sin*(95.15°) ≈ 15.72.

c) 

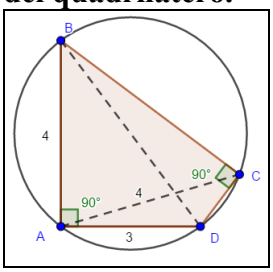
Calcoliamo la misura della diagonale *BD* con il teorema di Carnot:

$$\overline{BD}=\sqrt{4.43^2+4.33^2-2\cdot4.43\cdot4.33\cdot cos\left(66.41°\right)}\approx4.80$$

L'angolo di vertice *C* è supplementare di quello di vertice *A*, quindi misura 66.41°. Chiamiamo *x* e *y* le misure dei lati incogniti e li troviamo usando il teorema di Tolomeo e quello di Carnot:

$\begin{cases} 5.2\cdot 4.80 = 4.43x + 4.33y \\ 4.80^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cdot cos(113.59°) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \approx 3.48 \\ y \approx 2.20 \end{cases} \vee \begin{cases} x \approx 2.36 \\ y \approx 3.35 \end{cases}$. Quindi ci sono due possibilità: i perimetri misurano ≈ 4.43 + 4.33 + 3.48 + 2.20 = 14.44 oppure ≈ 4.43 + 4.33 + 2.36 + 3.35 =14.47. Le aree le troviamo come somma delle aree dei triangoli *ABD* e *BCD*: 1/2 · (4.43 · 4.33 + 3.48 · 2.20) · *sin*(66.41°) ≈ 12.30. Osserviamo che i seni di angoli supplementari sono uguali. Nell'altro caso: 1/2 · (4.43 · 4.33 + 2.36 · 3.35) · *sin*(66.41°) ≈ 12.41.

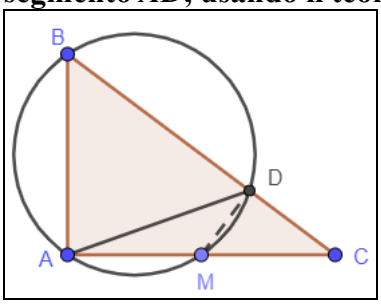
16. **Un quadrilatero ciclico ha due lati consecutivi lunghi 3 e 4, l'angolo fra essi compreso retto, la diagonale che parte da tale angolo lunga anch'essa 4. Determinare la misura dei rimanenti lati del quadrilatero.**



Ovviamente anche l'angolo in C è retto. Inoltre $\overline{BD} = 5$, per trovare le misure dei rimanenti lati impostiamo il sistema:

$$\begin{cases} \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 = 25 \\ 4\cdot 5 = 3\overline{BC} + 4\overline{CD} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{20-4\overline{CD}}{3}\right)^2 + \overline{CD}^2 = 25 \\ \overline{BC} = \dfrac{20-4\overline{CD}}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{CD} = \dfrac{7}{5} = 1,4 \\ \overline{BC} = \dfrac{24}{5} = 4,8 \end{cases}$$

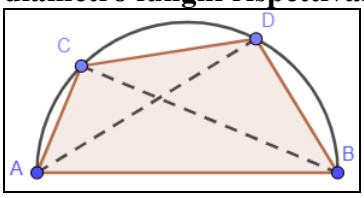
17. **Dato il triangolo rettangolo *ABC* di cateti lunghi 3 e 4, dal punto medio del cateto maggiore si tracci la perpendicolare all'ipotenusa *BC*, che la incontra nel punto *D*, determinare la misura del segmento *AD*, usando il teorema di Tolomeo.**



Consideriamo la circonferenza passante per *A, B* e *D*, questa passa anche per *M*, dato che gli angoli opposti di vertici *A* e *D* sono retti, glli altri due sono fra loro supplementari, Quindi *ABDM* è ciclico. Applicando il teorema di Tolomeo si ha: 3 · $\overline{DM}$ + 2 · $\overline{BD}$ = $\overline{AD}\cdot\sqrt{3^2+2^2}$.

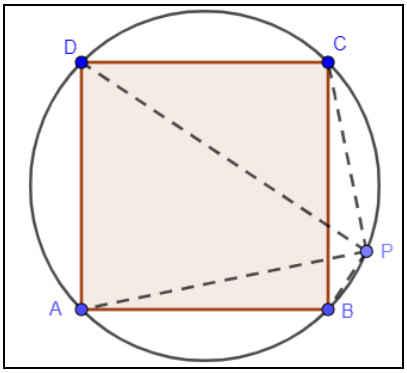
I triangoli *ABC* e *MDC* sono simili, quindi: $\overline{DM}:\overline{MC} = \overline{AB}:\overline{BC} \Rightarrow \overline{DM} = \dfrac{2\cdot 3}{5} = 1,2$ da cui: $\overline{DC} = \sqrt{4-1,44} = 1,6; \overline{BD} = 3,4$. Infine: $\overline{AD} = \dfrac{3\cdot 1,2 + 2\cdot 3,4}{\sqrt{13}} = \dfrac{10,4}{\sqrt{13}}$

18. **Un quadrilatero è inscritto in una semicirconferenza di diametro *d*, con i due lati consecutivi al diametro lunghi rispettivamente *a* e *b*. Quanto misura il quarto lato?**



Per il teorema di Tolomeo, indicando con *x* la misura da determinare: $ax + bd = \sqrt{d^2-a^2}\cdot\sqrt{d^2-x^2} \Rightarrow a^2x^2 + b^2d^2 + 2abdx = (d^2 - a^2)\cdot(d^2 - x^2) \Rightarrow d^2x^2 + 2abdx + (a^2 + b^2 - d^2)d = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\sqrt{(d^2-a^2)\cdot(d^2-b^2)} - ab}{d}$.

19. **Un quadrato *ABCD* è inscritto in una circonferenza, si scelga un punto *P* sull'arco BC, esprimere $\frac{\overline{PD}}{\overline{PA}}$, mediante la distanza di *P* dai vertici del quadrato.**



Applichiamo il teorema di Tolomeo al quadrilatero ciclico *PADC*, indichiamo con ℓ la misura del lato del quadrato: $\overline{PC}\cdot\ell+\overline{PA}\cdot\ell=\overline{PD}\cdot\ell\sqrt{2}\Rightarrow\overline{PC}+\overline{PA}=\sqrt{2}\overline{PD}$. Facciamo lo stesso con il quadrilatero *PBAD*: $\overline{PB}\cdot\ell+\overline{PD}\cdot\ell=\overline{PA}\cdot\ell\sqrt{2}\Rightarrow\overline{PB}+\overline{PD}=\sqrt{2}\overline{PA}$, dividiamo memebro a membro: $\frac{\overline{PD}}{\overline{PA}}=\frac{\overline{PA}+\overline{PC}}{\overline{PB}+\overline{PD}}$

Formule di addizione e sottrazione

20. **Dimostrare le formule di addizione e sottrazione della cotangente.**

$$cot(\alpha\pm\beta)=\frac{cos(\alpha\pm\beta)}{sin(\alpha\pm\beta)}=\frac{cos(\alpha)cos(\beta)\mp sin(\alpha)sin(\beta)}{sin(\alpha)cos(\beta)\pm sin(\beta)cos(\alpha)}\cdot\frac{sin(\alpha)sin(\beta)}{sin(\alpha)sin(\beta)}=\frac{cot(\alpha)cot(\beta)\mp 1}{cot(\beta)\pm cot(\alpha)}.$$

21. **Dimostrare le formule di addizione e sottrazione della secante.**

$$sec(\alpha\pm\beta)=\frac{1}{cos(\alpha\pm\beta)}=\frac{1}{cos(\alpha)cos(\beta)\mp sin(\alpha)sin(\beta)}=\frac{1}{1/sec(\alpha)\cdot 1/sec(\beta)\mp 1/csc(\alpha)\cdot 1/csc(\beta)}=$$

$$=\frac{sec(\alpha)\cdot sec(\beta)\cdot csc(\alpha)\cdot csc(\beta)}{csc(\alpha)\cdot csc(\beta)\mp sec(\alpha)\cdot sec(\beta)}$$

22. **Dimostrare le formule di addizione e sottrazione della cosecante.**

$$csc(\alpha\pm\beta)=\frac{1}{sin(\alpha\pm\beta)}=\frac{1}{1/csc(\alpha)\cdot 1/sec(\beta)\pm 1/csc(\beta)\cdot 1/sec(\alpha)}=\frac{sec(\alpha)\cdot sec(\beta)\cdot csc(\alpha)\cdot csc(\beta)}{sec(\alpha)\cdot csc(\beta)\pm csc(\alpha)\cdot sec(\beta)}$$

Usando le formule di addizione e sottrazione degli archi e i valori degli archi notevoli calcolare quanto richiesto

23. **a) *sin*(75°) = *sin*(45° + 30°); b) *cos*(105°) = *cos*(60° + 45°); c) *sin*(15°) = *sin*(45° – 30°)**

Basta applicare le formule:

a) $sin(45°+30°)=sin(45°)\cdot cos(30°)+sin(30°)\cdot cos(45°)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

b) $cos(60°+45°)=cos(60°)\cdot cos(45°)-sin(60°)\cdot sin(45°)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

c) $sin(45°-30°)=sin(45°)\cdot cos(30°)-sin(30°)\cdot cos(45°)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

24. **a) *cos*(90°) = *cos*(45° + 45°); b) *tan*(15°) = *tan*(45° – 30°); c) *cot*(60°) = *cot*(30° + 30°)**

a) $cos(45°+45°)=cos(45°)\cdot cos(45°)-sin(45°)\cdot sin(45°)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2-2}{4}=0$

b) $\frac{tan(45°)-tan(30°)}{1+tan(45°)\cdot tan(30°)}=\frac{1-\sqrt{3}/3}{1+1\cdot\sqrt{3}/3}=\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\cdot\frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\frac{9-6\sqrt{3}+3}{9-3}=\frac{12-6\sqrt{3}}{6}=2-\sqrt{3}$

c) $cot(30°+30°)=\frac{cot(30°)\cdot cot(30°)-1}{cot(30°)+cot(30°)}=\frac{3-1}{2\sqrt{3}}=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

25. ***tan*(120°) = *tan*(60° + 60°) = *tan*(90° + 30°) = *tan*(120° – 30°)**

$$\frac{tan(60°)+tan(60°)}{1-tan(60°)\cdot tan(60°)}=\frac{2\sqrt{3}}{1-3}=-\sqrt{3}$$

26. **a) *sin*(150°) = *sin*(75° + 75°) = *sin*(180° – 30°); b) *cot*(0°) = *cot*(45° – 45°)**

a) $$2sin(75°)cos(75°)=\cancel{2}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\cancel{4}^{2}}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{16-6-2-4\sqrt{3}}}{4}=$$; oppure

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{6-2}{8}=\frac{1}{2}$$

sin(180°) · *cos*(30°) – *sin*(30°) · *cos*(180°) = 0 – ½ · (–1) = ½.

b) L'espressione è ovviamente priva di senso.

27. **a) *cos*(135°) = *cos*(30° + 105°); b) *sin*(105°) = *sin*(15° + 90°)**

a) $$cos(30°)\cdot cos(105°)-sin(30°)\cdot sin(105°)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}=\frac{\cancel{\sqrt{6}}-3\sqrt{2}-\sqrt{2}-\cancel{\sqrt{6}}}{8}=\frac{-4\sqrt{2}}{8}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

b) $$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\cdot 0+1\cdot\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^{2}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

28. **a) *sec*(75°); b) *csc*(75°); c) *sec*(105°); d) *csc*(105°)**

a) $$\frac{sec(30°)\cdot sec(45°)\cdot csc(30°)\cdot csc(45°)}{csc(30°)\cdot csc(45°)-sec(30°)\cdot sec(45°)}=\frac{2/\sqrt{3}\cdot\cancel{\sqrt{2}}\cdot\cancel{2}\cdot\sqrt{2}}{\cancel{2}\cdot\cancel{\sqrt{2}}-\cancel{2}/\sqrt{3}\cdot\cancel{\sqrt{2}}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}=\frac{2\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$$

b) $$\frac{sec(30°)\cdot sec(45°)\cdot csc(30°)\cdot csc(45°)}{sec(30°)\cdot csc(45°)+csc(30°)\cdot sec(45°)}=\frac{2/\sqrt{3}\cdot\cancel{\sqrt{2}}\cdot\cancel{2}\cdot\sqrt{2}}{\cancel{2}/\sqrt{3}\cdot\cancel{\sqrt{2}}+\cancel{2}\cdot\cancel{\sqrt{2}}}=\frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$$

c) $$\frac{sec(60°)\cdot sec(45°)\cdot csc(60°)\cdot csc(45°)}{csc(60°)\cdot csc(45°)-sec(60°)\cdot sec(45°)}=\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{\sqrt{2}}\cdot 2/\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{\cancel{2}/\sqrt{3}\cdot\cancel{\sqrt{2}}-\cancel{2}\cdot\cancel{\sqrt{2}}}=\frac{2\sqrt{2}}{1-\sqrt{3}}=-\frac{2\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{6}-\sqrt{2}$$

d) $$\frac{sec(60°)\cdot sec(45°)\cdot csc(60°)\cdot csc(45°)}{sec(60°)\cdot csc(45°)+csc(60°)\cdot sec(45°)}=\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{\sqrt{2}}\cdot 2/\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{\cancel{2}\cdot\cancel{\sqrt{2}}+\cancel{2}/\sqrt{3}\cdot\cancel{\sqrt{2}}}=\frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$$

Determinare quanto richiesto sulla base dei dati noti

29. **$sin(\alpha) = 1/2$, $cos(\beta) = 1$, $\alpha \in [\pi/2; \pi]$, $\beta \in [3\pi/2; 2\pi]$; a) $cos(\alpha + \beta) = ?$; b) $tan(\alpha - \beta) = ?$**

a) Dobbiamo applicare la formula: $cos(\alpha + \beta) = cos(\alpha) \cdot cos(\beta) - sin(\alpha) \cdot sin(\beta)$, prima dobbiamo calcolare $cos(\alpha) = -\sqrt{1-sin^2(\alpha)}=-\sqrt{1-\frac{1}{4}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, valore negativo perché siamo nel II quadrante; e $sin(\beta) = 0$ perché $cos(\beta) = 1$. Quindi: $cos(\alpha + \beta) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot 0=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) Ora applichiamo la formula: $tan(\alpha-\beta)=\frac{tan(\alpha)-tan(\beta)}{1+tan(\alpha)\cdot tan(\beta)}$, $tan(\alpha) = \frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)}=\frac{1/2}{-\sqrt{3}/2}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ e $tan(\beta) = \frac{sin(\beta)}{cos(\beta)}=\frac{0}{1}=0$. Quindi: $tan(\alpha-\beta)=\frac{-1/\sqrt{3}-0}{1-1/\sqrt{3}\cdot 0}=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$. Osserviamo che essendo i dati angoli notevoli, potevamo trovare subito i risultati.

30. **$sin(\alpha) = 2/7$, $cos(\beta) = -7/9$, $\alpha \in [\pi/2; \pi]$, $\beta \in [\pi; 3/2\pi]$; a) $sin(\alpha + \beta) = ?$; b) $tan(\alpha - \beta) = ?$**

a) Dobbiamo applicare la formula: $sin(\alpha + \beta) = sin(\alpha) \cdot cos(\beta) + sin(\beta) \cdot cos(\alpha)$, prima dobbiamo calcolare $cos(\alpha) = -\sqrt{1-sin^2(\alpha)}=-\sqrt{1-\frac{4}{49}}=-\frac{3\sqrt{5}}{7}$, valore negativo perché siamo nel II quadrante;

e $sin(\beta) = -\sqrt{1-cos^2(\beta)} = -\sqrt{1-\frac{49}{81}} = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$ valore negativo perché siamo nel III quadrante.

Quindi: $sin(\alpha+\beta) = \frac{2}{7}\cdot\left(-\frac{7}{9}\right)+\left(-\frac{4\sqrt{2}}{9}\right)\cdot\left(-\frac{3\sqrt{5}}{7}\right) = \frac{-14+12\sqrt{10}}{63}$;

b) $tan(\alpha-\beta) = \frac{tan(\alpha)-tan(\beta)}{1+tan(\alpha)\cdot tan(\beta)}$, prima dobbiamo calcolare $tan(\alpha) = \frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)} = \frac{2/7}{-3\sqrt{5}/7} = -\frac{2}{3\sqrt{5}}$

e $tan(\beta) = \frac{sin(\beta)}{cos(\beta)} = \frac{-4\sqrt{2}/9}{-7/9} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$. Quindi: $tan(\alpha-\beta) = \frac{-\frac{2}{3\sqrt{5}}-\frac{4\sqrt{2}}{7}}{1+\left(-\frac{2}{3\sqrt{5}}\right)\cdot\left(\frac{4\sqrt{2}}{7}\right)} = -\frac{14+12\sqrt{10}}{21\sqrt{5}-8\sqrt{2}}$.

31. **$sin(\alpha) = -3/5$, $cos(\beta) = 6/7$, $\alpha \in [\pi; 3\pi/2]$, $\beta \in [3\pi/2; 2\pi]$; a) $sin(\alpha-\beta) = ?$; b) $tan(\alpha+\beta) = ?$**

a) $sin(\beta) = -\sqrt{1-36/49} = -\sqrt{13}/7; cos(\alpha) = -\sqrt{1-9/25} = -4/5$

$$sin(\alpha-\beta) = -\frac{3}{5}\cdot\frac{6}{7}-\left(-\frac{\sqrt{13}}{7}\right)\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{4\sqrt{13}+18}{35}$$

b) $tan(\alpha) = \frac{3}{4}, tan(\beta) = -\frac{\sqrt{13}}{6} \Rightarrow tan(\alpha+\beta) = \frac{3/4-\sqrt{13}/6}{1+\sqrt{13}/8} = \frac{2}{3}\cdot\frac{9-2\sqrt{13}}{8+\sqrt{13}} = -2\cdot\frac{25\sqrt{13}-98}{153}$

32. **$sin(\alpha) = 3/4$, $cos(\beta) = 8/9$, $\alpha \in [\pi/2; \pi]$, $\beta \in [3\pi/2; 2\pi]$; a) $cos(\alpha+\beta) = ?$; b) $cot(\alpha-\beta) = ?$**

a) $sin(\beta) = -\sqrt{1-64/81} = -\sqrt{17}/9; cos(\alpha) = -\sqrt{1-9/16} = -\sqrt{7}/4$

$$cos(\alpha+\beta) = -\frac{\sqrt{7}}{4}\cdot\frac{8}{9}-\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{\sqrt{17}}{9}\right) = \frac{3\sqrt{17}-8\sqrt{7}}{36}$$

b) $cot(\alpha) = -\frac{\sqrt{7}}{3}, cot(\beta) = -\frac{8\sqrt{17}}{17}, cot(\alpha-\beta) = \frac{-\frac{\sqrt{7}}{3}\cdot-\frac{8\sqrt{17}}{17}+1}{-\frac{8\sqrt{17}}{17}-\frac{\sqrt{7}}{3}} = -\frac{16\sqrt{17}+141\sqrt{7}}{457}$

33. **$sin(\alpha) = -0{,}1$; $cos(\beta) = -0{,}2$; $\alpha \in [3\pi/2; 2\pi]$, $\beta \in [\pi; 3/2\pi]$; a) $cos(\alpha-\beta) = ?$; b) $cot(\alpha+\beta) = ?$**

a) $sin(\beta) = -\sqrt{1-1/25} = -2\sqrt{6}/5; cos(\alpha) = \sqrt{1-1/100} = 3\sqrt{11}/10$

$$cos(\alpha-\beta) = \frac{3\sqrt{11}}{10}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)+\left(-\frac{1}{10}\right)\cdot\left(-\frac{2\sqrt{6}}{5}\right) = \frac{-3\sqrt{11}+2\sqrt{6}}{50}$$

b) $cot(\alpha) = -3\sqrt{11}; cot(\beta) = \sqrt{6}/12, cot(\alpha+\beta) = \frac{-3\sqrt{11}\cdot\frac{\sqrt{6}}{12}-1}{-3\sqrt{11}+\frac{\sqrt{6}}{12}} = \frac{3\sqrt{11}+8\sqrt{6}}{95}$

34. **$sin(\alpha) = 0{,}3$; $cos(\beta) = -0{,}4$; $\alpha \in [0; \pi/2]$, $\beta \in [\pi; 3/2\pi]$; a) $sin(\alpha+\beta) = ?$; b) $tan(\alpha+\beta) = ?$**

a) $sin(\beta) = -\sqrt{1-4/25} = -\sqrt{21}/5; cos(\alpha) = \sqrt{1-9/100} = \sqrt{91}/10$

$$sin(\alpha+\beta) = \frac{3}{10}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)+\left(-\frac{\sqrt{21}}{5}\right)\cdot\frac{\sqrt{91}}{10} = -\frac{6+7\sqrt{39}}{50}$$

b) $tan(\alpha) = \frac{3\sqrt{91}}{91}, tan(\beta) = \frac{\sqrt{21}}{2} \Rightarrow tan(\alpha+\beta) = \frac{3\sqrt{91}/91+\sqrt{21}/2}{1-21\sqrt{39}/182} = \frac{3\sqrt{91}+8\sqrt{21}}{7}$

Semplificare le seguenti espressioni usando, laddove possibile, le formule di addizione e sottrazione degli archi

35. **a) $sin(x-y)\cdot sin(x)+cos(x-y)\cdot cos(x)$; b) $sin(x+y)\cdot cos(x)-cos(x-y)\cdot sin(x)$**

a) $[\sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x)] \cdot \sin(x) + [\cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)] \cdot \cos(x) = \sin^2(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)\cos(x) + \cos^2(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)\cos(x) = \cos(y) \cdot [\sin^2(x) + \cos^2(x)] = \cos(y)$;

b) $[\sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x)] \cdot \cos(x) - [\cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)] \cdot \sin(x) = \sin(x)\cos(x)\cos(y) - \sin(y)\cos^2(x) - \sin(x)\cos(x)\cos(y) - \sin^2(x)\sin(y) = \sin(y) \cdot [\cos^2(x) - \sin^2(x)] = \sin(y) \cdot [2\cos^2(x) - 1]$

36. **a) $\sin(x - 30°) + \cos(x + 60°)$; b) $\sin(x - 45°) + \cos(x + 45°)$; c) $\sin(x + 45°) - \cos(x + 45°)$**

a) $\sqrt{3}/2\sin(x) - ½\cos(x) + ½\cos(x) - \sqrt{3}/2\sin(x) = 0$;

b) $\sqrt{2}/2\sin(x) - \sqrt{2}/2\cos(x) + \sqrt{2}/2\cos(x) - \sqrt{2}/2\sin(x) = 0$;

c) $\sqrt{2}/2\sin(x) + \sqrt{2}/2\cos(x) - \sqrt{2}/2\cos(x) + \sqrt{2}/2\sin(x) = \sqrt{2}\sin(x)$.

37. **a) $\sin(x + 60°) - \cos(x - 30°)$; b) $\sin(x + y) - \cos(x + y)$**

a) $½\sin(x) + \sqrt{3}/2\cos(x) - \sqrt{3}/2\cos(x) - ½\sin(x) = 0$;

b) $\sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x) - \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) = \sin(x) \cdot [\cos(y) + \sin(y)] + \cos(x) \cdot [\sin(y) - \cos(y)]$

38. **a) $\tan(x + y) \cdot \tan(x - y)$; b) $\tan(x + 45°) \cdot \tan(x - 45°)$; c) $\tan(x + 30°) \cdot \tan(x - 60°)$**

a) $\dfrac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)} \cdot \dfrac{\tan(x)-\tan(y)}{1+\tan(x)\tan(y)} = \dfrac{\tan^2(x)-\tan^2(y)}{1-\tan^2(x)\tan^2(y)}$; b) $\dfrac{\tan^2(x)-\tan^2(45°)}{1-\tan^2(x)\tan^2(45°)} = \dfrac{\tan^2(x)-1}{1-\tan^2(x)} = -1$;

c) $\dfrac{\tan(x)+\sqrt{3}/3}{1-\sqrt{3}\tan(x)/3} \cdot \dfrac{\tan(x)-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\tan(x)} = \dfrac{3\tan(x)+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}\tan(x)} \cdot \dfrac{\tan(x)-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\tan(x)} = \dfrac{3\tan^2(x)-2\sqrt{3}\tan(x)-3}{3+2\sqrt{3}\tan(x)-3\tan^2(x)} = -1$

39. **a) $\tan^2(x + 45°) - \tan^2(x - 45°)$; b) $\sin^2(x + 30°) - \sin^2(x + 60°)$**

a) $\left[\dfrac{\tan(x)+1}{1-\tan(x)}\right]^2 - \left[\dfrac{\tan(x)-1}{1+\tan(x)}\right]^2 = \left[\dfrac{\tan(x)+1}{1-\tan(x)} - \dfrac{\tan(x)-1}{1+\tan(x)}\right] \cdot \left[\dfrac{\tan(x)+1}{1-\tan(x)} + \dfrac{\tan(x)-1}{1+\tan(x)}\right] =$

$= \dfrac{[\tan(x)+1]^2 - [1-\tan(x)]^2}{1-\tan^2(x)} \cdot \dfrac{[\tan(x)+1]^2 + [1-\tan(x)]^2}{1-\tan^2(x)} = \dfrac{4\tan(x) \cdot [1+\tan^2(x)]}{[1-\tan^2(x)]^2}$;

b) $[\sqrt{3}/2\sin(x) + ½\cos(x)]^2 - [½\sin(x) + \sqrt{3}/2\cos(x)]^2 = ¾\sin^2(x) + ¼\cos^2(x) + \sqrt{3}/2\sin(x)\cos(x) - ¼\sin^2(x) - ¾\cos^2(x) - \sqrt{3}/2\sin(x)\cos(x) = ½\sin^2(x) - ½\cos^2(x) = ½ \cdot [\sin^2(x) - \cos^2(x)]$

40. **a) $\cos^2(x + 45°) + \sin^2(x - 45°)$; b) $\cos^2(x + 45°) - \cos^2(x - 45°)$**

a) $[\sqrt{2}/2\cos(x) - \sqrt{2}/2\sin(x)]^2 + [\sqrt{2}/2\sin(x) - \sqrt{2}/2\cos(x)]^2 = ½\cos^2(x) + ½\sin^2(x) - 2\sin(x)\cos(x) = 1 - 2\sin(x)\cos(x)$

b) $[\sqrt{2}/2\cos(x) - \sqrt{2}/2\sin(x)]^2 - [\sqrt{2}/2\sin(x) - \sqrt{2}/2\cos(x)]^2 = 2\sin(x)\cos(x)$

41. **a) $\cos^2(x + y) + \sin^2(x - y)$; b) $\cot(x + y) \cdot \cot(x - y)$; c) $\dfrac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{\sin(x+y)-\sin(x-y)}$**

a) $\cos^2(x)\cos^2(y) + \sin^2(x)\sin^2(y) - 2\cos(x)\cos(y)\sin(x)\sin(y) + \sin^2(x)\cos^2(y) + \cos^2(x)\sin^2(y) - 2\cos(x)\cos(y)\sin(x)\sin(y) = \cos^2(x) \cdot [\cos^2(y) + \sin^2(y)] + \sin^2(x) \cdot [\cos^2(y) + \sin^2(y)] - 4\cos(x)\cos(y)\sin(x)\sin(y) = \cos^2(x) + \sin^2(x) - 4\cos(x)\cos(y)\sin(x)\sin(y) = 1 - 4\cos(x)\cos(y)\sin(x)\sin(y)$;

b) $\dfrac{\cot(x)\cot(y)-1}{\cot(x)+\cot(y)} \cdot \dfrac{\cot(x)\cot(y)+1}{\cot(x)-\cot(y)} = \dfrac{\cot^2(x)\cot^2(y)-1}{\cot^2(x)-\cot^2(y)}$;

c) $\dfrac{\cos(x)\cos(y) - \cancel{\sin(x)\sin(y)} + \cos(x)\cos(y) + \cancel{\sin(x)\sin(y)}}{\cancel{\sin(x)\cos(y)} + \cos(x)\sin(y) - \cancel{\sin(x)\cos(y)} + \cos(x)\sin(y)} = \dfrac{\cancel{\cos(x)}\cos(y)}{\cancel{\cos(x)}\sin(y)} = \cot(y)$

42. **Sviluppare $\sin(x + y + z)$**

$\sin(x + y + z) = \sin(x + y)\cos(z) + \sin(z)\cos(x + y) = \sin(x + y + z) = [\sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)]\cos(z) + \sin(z)[\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)] = \sin(x)\cos(y)\cos(z) + \sin(y)\cos(x)\cos(z) + \sin(z)\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)\sin(z)$

43. **Sviluppare $\cos(x + y + z)$**

$\cos(x + y)\cos(z) - \sin(x + y)\sin(z) = [\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)]\cos(z) - [\sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)]\sin(z) = \cos(x)\cos(y)\cos(z) - \sin(x)\sin(y)\cos(z) - \sin(x)\cos(y)\sin(z) + \cos(x)\sin(y)\sin(z)$

44. **Se $\cos(x) + \cos(y) = p$ e $\sin(x) + \sin(y) = q$, determinare $\cos(x - y)$.**

Si ha: $p^2 + q^2 = [\cos(x) + \cos(y)]^2 + [\sin(x) + \sin(y)]^2 = 2 + 2\cos(x)\cos(y) + 2\sin(x)\sin(y) = 2 + 2\cos(x - y)$ da cui: $\cos(x - y) = p^2 + q^2 - 1$.

Verificare se le seguenti sono identità, stabilendo altresì il relativo dominio nella circonferenza goniometrica

45. $\dfrac{cos^2(x+y)-cos^2(x-y)}{sin^2(x)\cdot cos^2(y)}=-4\cdot cot(x)\cdot tan(y)$

Deve essere il denominatore diverso da zero: $x \notin \{0; \pi, 2\pi\}$, $y \notin \{\pi/2; 3\pi/2\}$.

$$\frac{\left[cos(x+y)-cos(x-y)\right]\cdot\left[cos(x+y)+cos(x-y)\right]}{sin^2(x)\cdot cos^2(y)}=-4cot(x)\cdot tan(y)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{-2\,\cancel{sin(x)}sin(y)\cdot 2cos(x)\,\cancel{cos(y)}}{sin^{\cancel{2}}(x)\cdot cos^{\cancel{2}}(y)}=-4cot(x)\cdot tan(y)\Rightarrow -4cot(x)\cdot tan(y)=-4cot(x)\cdot tan(y)$$

è un'identità.

46. $\dfrac{sin^2(x+y)-sin^2(x-y)}{sin(x)\cdot sin(y)}=4\cdot cos(x)\cdot cos(y)$

Si ha: $\dfrac{\left[sin(x)cos(y)+sin(y)cos(x)\right]^2-\left[sin(x)cos(y)-sin(y)cos(x)\right]^2}{sin(x)\cdot sin(y)}=4\cdot cos(x)\cdot cos(y)$. Osserviamo che i due quadrati di binomio hanno opposti i soli doppi prodotti, pertanto sono gli unici che rimangono eseguendo la sottrazione: $\dfrac{4\,\cancel{sin(x)}cos(y)\,\cancel{sin(y)}cos(x)}{\cancel{sin(x)}\cdot\cancel{sin(y)}}=4\cdot cos(x)\cdot cos(y)$. Quindi abbiamo a che fare con un'identità che ha senso quando il denominatore non è nullo, ossia quando $x, y \notin \{0; \pi; 2\pi\}$

47. $\dfrac{cos^2(x+y)+cos^2(x-y)}{sin^2(x)\cdot cos^2(y)}=2\cdot\left[cot^2(x)+tan^2(y)\right]$

Denominatore diverso da zero: $x \notin \{0; \pi; 2\pi\}$, $y \notin \{\pi/2; 3\pi/2\}$. Identità:

$$\frac{2cos^2(x)cos^2(y)+2sin^2(x)sin^2(y)}{sin^2(x)\cdot cos^2(\ )}=\frac{2cos^2(x)\,\cancel{cos^2(y)}}{sin^2(x)\cdot\cancel{cos^2(y)}}+\frac{2\,\cancel{sin^2(x)}sin^2(y)}{\cancel{sin^2(x)}\cdot cos^2(y)}=2\cdot\left[cot^2(x)+tan^2(y)\right]$$

48. **a)** $\dfrac{sin^2(x+y)+sin^2(x-y)}{sin^2(x)\cdot sin^2(y)}=2\cdot\left[cot^2(x)-cot^2(y)\right]$**; b)** $\dfrac{sin(x+y)-sin(x-y)}{cos(x+y)+cos(x-y)}=-tan(y)$

a) Denominatore diverso da zero: $x, y \notin \{0; \pi; 2\pi\}$. Non è identità:

$$\frac{2sin^2(x)cos^2(y)+2cos^2(x)sin^2(y)}{sin^2(x)\cdot sin^2(y)}=\frac{2\,\cancel{sin^2(x)}cos^2(y)}{\cancel{sin^2(x)}\cdot sin^2(y)}+\frac{2cos^2(x)\,\cancel{sin^2(y)}}{sin^2(x)\cdot\cancel{sin^2(y)}}=2\cdot\left[cot^2(y)+cot^2(x)\right];$$

b) Denominatore diverso da zero: $cos(x+y)\neq -cos(x-y)\Rightarrow cos(x+y)\neq cos(\pi-x+y)\Rightarrow x+y\neq\pi-x+y\vee x+y\neq x-\pi-y\Rightarrow x\neq\pi/2\vee y\neq 3\pi/2$. Non è identità: $\dfrac{2\cancel{cos(x)}sin(y)}{2\cancel{cos(x)}cos(y)}=tan(y)$.

49. $\dfrac{1+tan(x)}{1-tan(x)}=\dfrac{sin(x+45°)}{sin(45°-x)}$

Abbiamo: $\dfrac{1+\dfrac{sin(x)}{cos(x)}}{1-\dfrac{sin(x)}{cos(x)}}=\dfrac{sin(x)\,\cancel{cos(45°)}+\cancel{sin(45°)}cos(x)}{\cancel{sin(45°)}cos(x)-sin(x)\,\cancel{cos(45°)}}\Rightarrow\dfrac{cos(x)+sin(x)}{cos(x)-sin(x)}=\dfrac{sin(x)+cos(x)}{cos(x)-sin(x)}$ che è un'identità quando $\begin{cases}x\neq 90°,270°\\ tan(x)\neq 1\\ 45°-x\neq -180°,0°\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq 90°,270°\\ x\neq 45°,135°\\ x\neq 45°,225°\end{cases}\Rightarrow x\notin\{45°;90°;135°;225°;270°\}$. Osserviamo che abbiamo eliminato $sin(45°)$ e $cos(45°)$ perché hanno lo stesso valore.

50. $\dfrac{sin(x+y)+sin(x-y)}{cos(x+y)-cos(x-y)}=-cot(y)$

Denominatore diverso da zero: $cos(x + y) \neq cos(x - y) \Rightarrow x + y \neq x - y + 2k\pi \vee x + y \neq - x + y + 2k\pi \Rightarrow y \notin \{0; \pi; 2\pi\} \vee x \notin \{0; \pi; 2\pi\}$. Inoltre $sin(y) \neq 0 \Rightarrow y \notin \{0; \pi; 2\pi\}$, Identità: Sì; $x \neq 0 \wedge y \notin \{0, \pi\}$]

51. $\left[sin(x+30°)-sin(x-30°)\right]\cdot tan(x+45°)=\dfrac{cos(x)\cdot\left[sin(x)+cos(x)\right]}{cos(x)-sin(x)}$

Lavoriamo solo sul primo membro: $2sin(30°)cos(x) \cdot tan(x + 45°) \Rightarrow 2 \cdot ½\, cos(x) \cdot tan(x + 45°) \Rightarrow$

$$cos(x)\cdot\frac{tan(x)+tan(45°)}{1-tan(x)tan(45°)}\Rightarrow cos(x)\cdot\frac{tan(x)+1}{1-tan(x)}\Rightarrow cos(x)\cdot\frac{sin(x)/cos(x)+1}{1-sin(x)/cos(x)}\Rightarrow cos(x)\cdot\frac{sin(x)+cos(x)}{cos(x)-sin(x)}$$

E un'identità se $\begin{cases} x+45° \neq 90°, 270° \\ sin(x) \neq cos(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 45°, 225° \\ x \neq 45°, 225° \end{cases}$

52. **a)** $\boldsymbol{sin^2(x) - sin^2(y) = sin(x + y) \cdot sin(x - y)}$**; b)** $\dfrac{sin(x+45°)}{cos(x-45°)}\cdot\dfrac{cos(x+45°)}{sin(x-45°)}=-1$

a) Nessuna limitazione per gli argomenti. Lavoriamo sul secondo memebro: $[sin(x)cos(y) + cos(x)\, sin(y)] \cdot [sin(x)cos(y) - cos(x)\, sin(y)] = sin^2(x)cos^2(y) - cos^2(x)\, sin^2(y) = sin^2(x)[1 - sin^2(y)] - [1 - sin^2(x)]\, sin^2(y) = sin^2(x) - sin^2(x)sin^2(y) - sin^2(y) + sin^2(x)\, sin^2(y) = sin^2(x) - sin^2(y)$. Identità.

b) Analogamente:

$$\frac{cos(90°-x-45°)}{cos(x-45°)}\cdot\frac{sin(90°-x-45°)}{sin(x-45°)}=-1\Rightarrow\frac{cos(45°-x)}{cos(x-45°)}\cdot\frac{sin(45°-x)}{sin(x-45°)}=-1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\cancel{cos(x-45°)}}{\cancel{cos(x-45°)}}\cdot\frac{\cancel{sin(45°-x)}}{-\cancel{sin(45°-x)}}=-1\Rightarrow -1=-1$$

è un'identità se $\begin{cases} x-45° \neq 90°, 270° \\ x-45° \neq 0°, 180° \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 135°, 315° \\ x \neq 45°, 225° \end{cases}$

53. **a)** $1-cot(\alpha)=\dfrac{2}{1-cot(45°-\alpha)}$**; b)** $1+tan(\alpha)=\dfrac{2}{1+tan(45°-\alpha)}$**.**

a) escludiamo $x \notin \{0°; 45°; 180°; 225°\}$. Si ha:

$$1=cot(45°)=cot\left[(45°-\alpha)+\alpha\right]=\frac{cot(45°-\alpha)cot(\alpha)-1}{cot(45°-\alpha)+cot(\alpha)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow cot(45°-\alpha)cot(\alpha)-1=cot(45°-\alpha)+cot(\alpha)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[cot(45°-\alpha)-1\right]cot(\alpha)=cot(45°-\alpha)+1\Rightarrow 1-cot(\alpha)= ;$$

$$=1-\frac{cot(45°-\alpha)+1}{cot(45°-\alpha)-1}=\frac{\cancel{cot(45°-\alpha)}-1-\cancel{cot(45°-\alpha)}-1}{cot(45°-\alpha)-1}=$$

$$=\frac{-2}{cot(45°-\alpha)-1}=\frac{2}{1-cot(45°-\alpha)}$$

b) escludiamo $x \notin \{45°; 90°; 225°; 270°\}$. Si ha:

$$1=tan(45°)=tan\left[(45°-\alpha)+\alpha\right]=\frac{tan(45°-\alpha)+tan(\alpha)}{1-tan(45°-\alpha)tan(\alpha)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-tan(45°-\alpha)tan(\alpha)=tan(45°-\alpha)+tan(\alpha)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[1+tan(45°-\alpha)\right]tan(\alpha)=1-tan(45°-\alpha)\Rightarrow$$

$$1+tan(\alpha)=1+\frac{1-tan(45°-\alpha)}{1+tan(45°-\alpha)}=\frac{1+\cancel{tan(45°-\alpha)}+1-\cancel{tan(45°-\alpha)}}{1+tan(45°-\alpha)}=$$

$$=\frac{2}{1+tan(45°-\alpha)}$$

Risolvere le equazioni seguenti negli intervalli indicati

54. ***sin(x + y) – sin(x – y) = 0, x, y ∈ [–150°; 400°]***
Abbiamo: $sin(x)cos(y) + sin(y)cos(x) - [sin(x)cos(y) - sin(y)cos(x)] = 0 \Rightarrow 2\,sin(y)cos(x) = 0 \Rightarrow sin(y) = 0 \vee cos(x) = 0 \Rightarrow y = k180° \vee x = 90° + k180°$. Le soluzioni accettabili sono: $x = –90° \vee 90° \vee 270°$; $y = 0° \vee 180° \vee 360°$

55. ***cos(x – y) + cos(x + y) = 0, x, y ∈ [–300°; 300°]***
$cos(x)cos(y) + sin(x)sin(y) + cos(x)cos(y) - sin(x)sin(y) = 0 \Rightarrow 2cos(x)cos(y) = 0 \Rightarrow cos(x) = 0 \vee cos(y) = 0 \Rightarrow x = y = 90° + k180°$. Le soluzioni accettabili sono: $x, y = –270° \vee –90° \vee 90° \vee 270°$.

56. ***sin(x + 30°) – cos(x) = 0, x ∈ [–100°; 431°]***
$\sqrt{3}/2\,sin(x) + ½\,cos(x) - cos(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{3}\,sin(x) - cos(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{3}\,tan(x) - 1 = 0 \Rightarrow x = 30° + k180° \Rightarrow x = 30° \vee 210° \vee 390°$

57. ***sin(x + 45°) – cos(x – 45°) = 0, x ∈ [–210°; 410°]***
$\sqrt{2}/2\,sin(x) + \sqrt{2}/2\,cos(x) - \sqrt{2}/2\,cos(x) - \sqrt{2}/2\,sin(x) = 0 \Rightarrow 0 = 0$, è un'identità

58. ***sin(x) + cos(x – 60°) = 0, x ∈ [–250°; 317°]***
$sin(x) + ½\,cos(x) + \sqrt{3}/2\,sin(x) = 0 \Rightarrow tan(x)=\sqrt{3}-2 \Rightarrow x = –15° + k180° \Rightarrow x = -195° \vee -15° \vee 165°$

59. ***sin(x + 45°) – cos(x – 60°) = 0, x ∈ [0°; 360°]***
$\sqrt{2}/2\,sin(x) + \sqrt{2}/2\,cos(x) - ½\,cos(x) - \sqrt{3}/2\,sin(x) = 0 \Rightarrow tan(x)=\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}+2 \Rightarrow x = 52°30' + k180° \Rightarrow x = 52°30' \vee 232°30'$

60. ***cos(x + π/6) + 2cos(x) – 3sin(x) = 0, x ∈ [–2; 4]***
$\sqrt{3}/2\,cos(x) - ½sin(x) + 2cos(x) - 3sin(x) = 0 \Rightarrow tan(x)=\frac{\sqrt{3}+4}{8} \Rightarrow x \approx 0{,}62 + k\pi \Rightarrow x \approx 0{,}62 \vee \approx 3{,}76$

61. ***sin(x – π/3) + sin(x) – cos(x) = 0, x ∈ [–2; 4]***
$½\,sin(x) - \sqrt{3}/2\,cos(x) + sin(x) - cos(x) = 0 \Rightarrow tan(x)=\frac{\sqrt{3}+2}{3} \Rightarrow x \approx 0{,}89 + k\pi \Rightarrow x \approx 0{,}89$

62. ***sin(x + 1) – sin(x – 1) + 5cos(x) = 0, x ∈ [2; 5]***
$cos(1)sin(x) + sin(1)cos(x) - cos(1)sin(x) + sin(1)cos(x) + 5cos(x) = 0 \Rightarrow cos(x)\,[sin(1) + 5] = 0 \Rightarrow x = \pm\,\pi/2 + k\pi \Rightarrow x = 3\pi/2$

63. ***cos(x + 2) – cos(x – 2) – sin²(x) = 0, x ∈ [–1; 5]***
$cos(2)cos(x) - sin(2)sin(x) - cos(2)cos(x) - sin(2)sin(x) - sin^2(x) = 0 \Rightarrow sin(x)[sin(x) + 2sin(2)] = 0 \Rightarrow x = k\pi \Rightarrow x = 0 \vee \pi$. $sin(x) + 2sin(2) = 0$ non ha soluzioni poiché $2sin(2) > 1$.

64. ***sin(x + y) – sin(x – y) – 3cos(x) = 0, x ∈ [125°; 348°]***
$2cos(x)sin(y) - 3cos(x) = 0 \Rightarrow cos(x)[2sin(y) - 3] = 0 \Rightarrow cos(x) = 0 \Rightarrow x = 270°$

65. ***cos(x + y) – cos(x – y) + 4sin(x) = 0, x ∈ [247°; 415°]***
$2sin(x)sin(y) + 4sin(x) = 0 \Rightarrow sin(x)[sin(y) + 2] = 0 \Rightarrow x = 360°$

66. ***sin(x + y) + sin(x – y) + 5cos(x) = 0, y ∈ [27°; 218°]***
$2sin(x)cos(y) + 5cos(y) = 0 \Rightarrow cos(y)[2sin(x) + 5] = 0 \Rightarrow y = 90°$

67. ***cos(x + 30°) – cos(x – 30°) + 3sin(x) = 1, x ∈ [25°; 541°]***

Applichiamo le formule tenendo conto che non scriviamo i termini uguali perché si annulleranno nella sottrazione e raddoppiando i termini opposti per lo stesso motivo:
$-2sin(x)\cdot sin(30°) + 3sin(x) = 1 \Rightarrow -2sin(x)\cdot 1/2 + 3sin(x) = 1 \Rightarrow 2sin(x) = 1 \Rightarrow sin(x) = 1/2 \Rightarrow x = 30° + k360° \vee x = 150° + k360°$. Gi unici valori compresi nell'intervallo indicato sono: $30° \vee 150° \vee 390° \vee 510°$.

68. $\boldsymbol{cos(x + \pi/4) - cos(x - \pi/4) - 1 = 0, x \in [-2; 5]}$

Come nel precedente: $-2sin(x)\cdot sin(\pi/4) - 1 = 0 \Rightarrow -2sin(x)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = 0 \Rightarrow -\sqrt{2}\,sin(x) = 1 \Rightarrow sin(x) = -1/\sqrt{2} \Rightarrow sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Con soluzioni: $x = -\pi/4 + 2k\pi \vee x = 5\pi/4 + 2k\pi$. Le uniche soluzioni accettabili si ottengono per k = 0: $-\pi/4 \vee 5\pi/4$

69. $\boldsymbol{sin(x + \pi/3) - sin(x) + cos(x - \pi/6) = 0, x \in [-2; 3]}$

$\frac{1}{2}\,sin(x) + \sqrt{3}/2\,cos(x) - sin(x) + \sqrt{3}/2\,cos(x) + \frac{1}{2}sin(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{3}\,cos(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\pi/2$

70. $\boldsymbol{cos(x + \pi/3) - \frac{1}{2}\,cos(x) + sin(x) - 0{,}1 = 0, x \in [-3; 1]}$

$\frac{1}{2}\,cos(x) - \sqrt{3}/2\,sin(x) - \frac{1}{2}\,cos(x) + sin(x) - 0{,}1 = 0 \Rightarrow sin(x) = \frac{0{,}2}{2-\sqrt{3}} \Rightarrow x \approx 0{,}84$

71. $\boldsymbol{sin(x + \pi/3) - 0{,}5sin(x) - 3cos(x) + 0{,}51 = 0, x \in [1; 4]}$

$\frac{1}{2}\,sin(x) + \sqrt{3}/2\,cos(x) - 0{,}5sin(x) - 3cos(x) + 0{,}51 = 0 \Rightarrow cos(x) = \frac{0{,}51}{6-\sqrt{3}} \Rightarrow x \approx 1{,}33$

72. $\boldsymbol{tan(x + \pi/4) - tan(x - \pi/4) - 1 = 0, x \in [1; 4]}$

$\frac{tan(x)+1}{1-tan(x)} - \frac{tan(x)-1}{1+tan(x)} - 1 = 0 \Rightarrow [\,tan(x) + 1]^2 + [tan(x) - 1]^2 - 1 + tan^2(x) = 0 \Rightarrow 3tan^2(x) + 1 = 0 \Rightarrow$ nessuna soluzione

73. $\boldsymbol{tan(x + \pi/6) - tan(x - \pi/3) + 5 = 0, x \in [-3; 3]}$

$tan(x + \pi/6) - tan(x - \pi/3) + 5 = 0$ $[\approx -1{,}89 \vee \approx -0{,}73 \vee \approx 1{,}25 \vee \approx 2{,}41]$

$\frac{tan(x)+\sqrt{3}/3}{1-\sqrt{3}/3tan(x)} - \frac{tan(x)-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}tan(x)} + 5 = 0 \Rightarrow \frac{3tan(x)+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}tan(x)} - \frac{tan(x)-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}tan(x)} + 5 = 0 \Rightarrow tan(x) \approx -0{,}89 \vee \approx 3{,}03 \Rightarrow x \approx -0{,}73 + k\pi \vee \approx 1{,}25 + k\pi \Rightarrow x \approx -1{,}89 \vee \approx -0{,}73 \vee \approx 1{,}25 \vee \approx 2{,}41$

Risolvere le seguenti disequazioni nella circonferenza goniometrica

74. $\boldsymbol{sin(x + 45°) - sin(x - 30°) > 0}$

$sin(x)cos(45°) + sin(45°)cos(x) - [sin(x)cos(30°) - sin(30°)cos(x)] > 0 \Rightarrow sin(x) \cdot [cos(45°) - cos(30°)] + cos(x) \cdot [sin(45°) + sin(30°)] > 0 \Rightarrow$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)sin(x) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\right)cos(x) > 0 \Rightarrow \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)sin(x) - \left(\sqrt{2} + 1\right)cos(x) < 0$$

Abbiamo adesso le due opzioni: $\Rightarrow \begin{cases} tan(x) < \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \\ cos(x) > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} tan(x) > \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \\ cos(x) < 0 \end{cases}$. Abbiamo:

$tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right) = 82°30' \vee 262°30'$, quindi:

$$\begin{cases} 0 \le x < 82°30' \vee 90° < x < 262°30' \vee 270° < x \le 360° \\ 0 < x < 90° \vee 270° < x < 360° \end{cases} \vee \begin{cases} 82°30' < x < 90° \vee 262°30' < x < 270° \\ 90° < x < 270° \end{cases}$$

Le soluzioni sono: $0° \le x < 82°30'$ e $270° < x \le 360°$ per il primo sistema e $262°30' < x < 270°$ per il secondo. Vediamo cosa accade quando $cos(x) = 0$, ossia se $x = 90°$ o $x = 270°$.

$sin(90° + 45°) - sin(90° - 30°) = sin(135°) - sin(60°) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} < 0$, quindi $x = 90°$ non è soluzione.

$sin(270° + 45°) - sin(270° - 30°) = sin(315°) - sin(240°) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$, quindi $x = 270°$ è soluzione. Possiamo perciò riunire le soluzioni: $0° \le x < 82°30' \vee 262°30' < x \le 360°$

75. ***cos(x – 45°) + cos(x + 60°) ≤ 0***

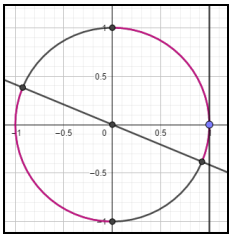
Osserviamo che $cos(x - 45°) + cos(x + 60°) = cos(45° - x) + cos(x + 60°) = sin(90° - 45° + x) + sin(90° - x - 60°) = sin(45° + x) + sin(30° - x) = sin(45° + x) - sin(x - 30°)$, Ossia è la stessa disequazione della precedente, ma con il verso cambiato, pertanto ammette le soluzioni complementari: $82°30' \le x \le 262°30'$.

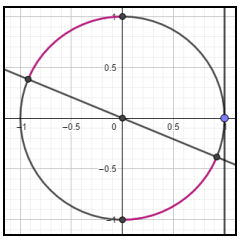
76. ***sin(x + 45°) + sin(x) ≥ 0***

Si ha: $sin(x)cos(45°) + cos(x)\ sin(45°) + sin(x) \ge 0 \Rightarrow sin(x) \cdot [cos(45°) + 1] + cos(x)\ sin(45°) \ge 0 \Rightarrow$

$sin(x)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}cos(x)\ge 0 \Rightarrow sin(x)\cdot\left(\sqrt{2}+2\right)+\sqrt{2}cos(x)\ge 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow sin(x)\cdot\left(1+\frac{2}{\sqrt{2}}\right)+cos(x)\ge 0 \Rightarrow sin(x)\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)+cos(x)\ge 0$. Abbiamo due casi distinti, osservando altresì che $\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$:

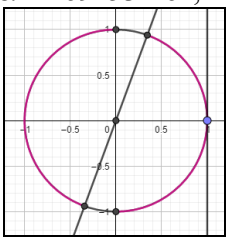
$\begin{cases} tan(x)\ge 1-\sqrt{2} \\ cos(x)>0 \end{cases} \vee \begin{cases} tan(x)\le 1-\sqrt{2} \\ cos(x)<0 \end{cases}$. Dato che $tan^{-1}\left(1-\sqrt{2}\right)=-22°30'+k180°$, i valori che rientrano nel nostro intervallo sono 157°30' e 337°30′. Avremo:  per il primo sistema sono i valori indicati che ricadono solo nel primo e nel quarto quadrante: $0° \le x < 90° \vee 337°30' \le x \le 360°$.

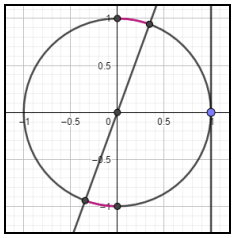
Per il secondo  i valori indicati che ricadono solo nel secondo quadrante: $90° < x < 157°30'$. Controlliamo adesso se 90° è soluzione: $sin(90° + 45°) + sin(90°) > 0$ perché somma di quantità positive. Infine scriviamo le soluzioni in unico modo: $0° \le x \le 157°30' \vee 337°30' \le x \le 360°$

77. ***2cos(x + 30°) + cos(x) ≥ 0***

Si ha: $2cos(x)cos(30°) - 2sin(x)sin(30°) + cos(x) \ge 0 \Rightarrow cos(x) \cdot [2cos(30°) + 1] - 2sin(x)\cdot 1/2 \ge 0 \Rightarrow$

$cos(x)\cdot\left(2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)-sin(x)\ge 0 \Rightarrow sin(x)\le\left(\sqrt{3}+1\right)cos(x)$. Abbiamo due casi distinti:

$\begin{cases} tan(x)\le 1+\sqrt{3} \\ cos(x)>0 \end{cases} \vee \begin{cases} tan(x)\ge 1+\sqrt{3} \\ cos(x)<0 \end{cases}$. Dato che $tan^{-1}\left(1+\sqrt{3}\right)\approx 69°53'46''+k180°$. Per semplicità chiamiamo $\alpha \approx 69°53'46''$, così i valori che rientrano nel nostro intervallo sono α e $180° + \alpha \approx 249°53'46''$.  Per il primo sistema sono i valori indicati che ricadono solo nel primo e



nel quarto quadrante: $0° \le x \le \alpha \vee 270° \le x \le 360°$. Per il secondo i valori indicati che ricadono solo nel terzo quadrante: $180° + \alpha \le x < 270°$. Controlliamo adesso se 270° è soluzione: $2cos(270° + 30°) + cos(270°) = 2cos(30°) > 0$, quindi è soluzione. Infine scriviamo le soluzioni in unico modo: $0° \le x \le \alpha \vee 180° + \alpha \le x \le 360°$; $\alpha \approx 69°53'46''$

78. ***tan*(*x* – 45°) + *tan*(*x* + 45°) > 0**

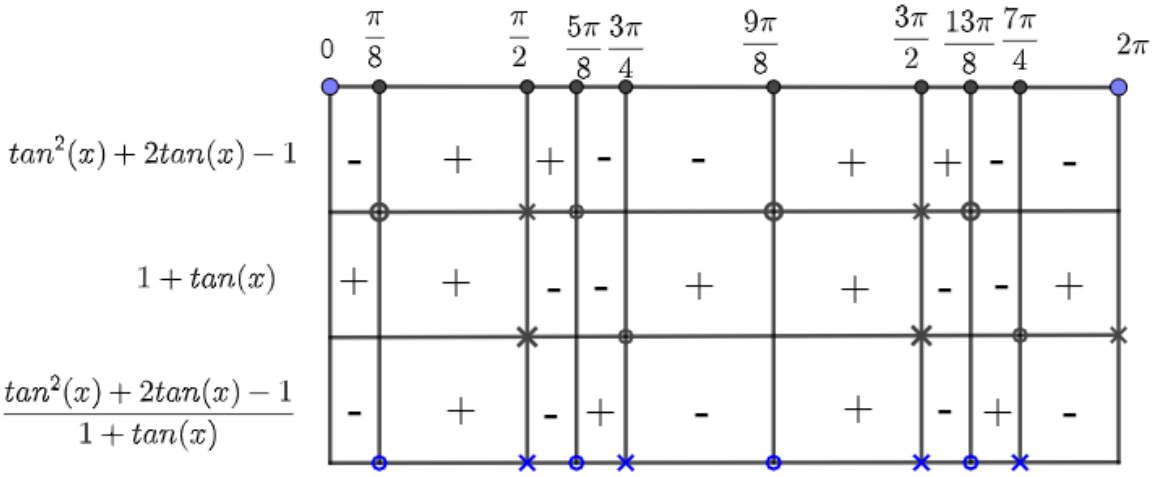
$\frac{tan(x)-1}{1+tan(x)}+\frac{tan(x)+1}{1-tan(x)}>0 \Rightarrow \frac{4tan(x)}{1-tan^2(x)}>0$. Il numeratore è positivo in (0°; 90°) ∪ (180°; 270°), il denominatore per $-1 < tan(x) < 1 \Leftrightarrow$ (0°; 45°) ∪ (135°; 225°) ∪ (315°; 365°). Pertanto la soluzione finale è: $0° < x < 45° \vee 90° < x < 135° \vee 180° < x < 225° \vee 270° < x < 315°$.

79. ***tan*(*x* + π/4) – *tan*(*x* – π/4) > 0**

$\frac{tan(x)+1}{1-tan(x)}-\frac{tan(x)-1}{1+tan(x)}>0 \Rightarrow \frac{2tan^2(x)+2}{1-tan^2(x)}>0$. Il numeratore è sempre positivo, quindi conta solo il segno del denominatore, che è positivo per $\pi/4 < x < 3\pi/4 \vee 5\pi/4 < x < 7\pi/4$.

80. ***tan*(*x* – π/4) + *tan*(*x*) < 0**

$\frac{tan(x)-1}{1+tan(x)}+tan(x)<0 \Rightarrow \frac{tan^2(x)+2tan(x)-1}{1+tan(x)}>0$. Il numeratore è positivo per $tan(x)<-1-\sqrt{2} \vee tan(x)>-1+\sqrt{2} \Rightarrow \pi/8 < x < 5\pi/8 \vee 9\pi/8 < x < 13\pi/8$, $x \notin \{\pi/2; 3\pi/2\}$, il denominatore per $0 < x < \pi/2 \vee 3\pi/4 < x < 3\pi/2 \vee 7\pi/4 < x < 2\pi$.



Pertanto la soluzione finale è: $0 \le x < \pi/8 \vee \pi/2 < x < 5\pi/8 \vee 3\pi/4 < x < 9\pi/8 \vee 3\pi/2 < x < 13\pi/8 \vee 7\pi/4 < x \le 2\pi$

81. ***tan*(*x* + π/4) – *tan*(*x*) ≥ 0**

Abbiamo:

$$\frac{tan(x)+1}{1-tan(x)}-tan(x)\ge 0 \Rightarrow \frac{\cancel{tan(x)}+1-\cancel{tan(x)}+tan^2(x)}{1-tan(x)}\ge 0 \Rightarrow \frac{1+tan^2(x)}{1-tan(x)}\ge 0 \Rightarrow 1-tan(x)>0$$

Il segno dipende solo dal denominatore, quindi: $tan(x) < 1 \Leftrightarrow 0 \le x < \pi/4 \vee \pi/2 < x < 5\pi/4 \vee 3\pi/2 < x \le 2\pi$.

82. ***sin*(*x* + 2) – *sin*(*x* – 2) – 3*sin*(*x*) < 0**

$sin(x)cos(2) + sin(2)cos(x) - sin(x)cos(2) + sin(2)cos(x) - 3sin(x) < 0 \Rightarrow 2sin(2)cos(x) - 3sin(x) < 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} 3tan(x) > 2sin(2) \\ cos(x) > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 3tan(x) < 2sin(2) \\ cos(x) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha < x < \pi/2 \vee \alpha + \pi < x < 3\pi/2 \\ 0 < x < \pi/2 \vee 3\pi/2 < x < 2\pi \end{cases} \vee \begin{cases} 0 \le x < \alpha \vee \pi \le x < \alpha + \pi \\ \pi/2 < x < 3\pi/2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \alpha < x < \alpha + \pi$, con $\alpha \approx 0{,}54$.

83. ***cos*(*x* + 3) + *cos*(*x* – 3) + *cos*(*x*) < 0**

Abbiamo: $2cos(x)cos(3) + cos(x) < 0 \Rightarrow cos(x) \cdot [2cos(3) + 1] < 0$, dato che $2cos(3) + 1 < 0$, quindi la disequazione equivale a $cos(x) > 0$, quindi: $\pi < x < 2\pi$.

84. **Spiegare come mai le disequazioni 74 e 75 hanno soluzioni complementari.**

Sono la stessa disequazione con il verso contrario

Verificare la validità delle seguenti identità in un triangolo qualsiasi

85. **a) *sin*(α) = *sin*(β) · *cos*(γ) + *sin*(γ) · *cos*(β); b) *cos*(α) = *sin*(β) · *sin*(γ) – *cos*(β) · *cos*(γ)**

a) $sin(180° - \beta - \gamma) = sin(\beta + \gamma) = sin(\beta) \cdot cos(\gamma) + sin(\gamma) \cdot cos(\beta)$;

b) $cos(180° - \beta - \gamma) = -cos(\beta + \gamma) = sin(\beta) \cdot sin(\gamma) - cos(\beta) \cdot cos(\gamma)$

86. **Come diventa l'identità verificata nel box Lavoriamo insieme in un triangolo rettangolo di ipotenusa *c*?**

$$1 + cos(\alpha - \beta) \cdot 0 = \frac{c^2}{4 \cdot R^2} \Rightarrow c = 2R$$

87. ***sin*(α)*cos*(β)*cos*(γ) – *sin*(α)*sin*(β)*sin*(γ) + *cos*(α)*sin*(β)*cos*(γ) + *cos*(α)*cos*(β)*sin*(γ) = 0.**

$cos(\gamma) \cdot [sin(\alpha)cos(\beta) + cos(\alpha)sin(\beta)] + sin(\gamma) \cdot [cos(\alpha)cos(\beta) - sin(\alpha)sin(\beta)] = cos(\gamma)sin(\alpha + \beta) + sin(\gamma)cos(\alpha + \beta) = cos(\gamma)sin(\gamma) - sin(\gamma)cos(\gamma) = 0$

88. **a) *a* · [*cos*(α) + *cos*(β)*cos*(γ)] = 2*Rsin*(α)*sin*(β)*sin*(γ); b)** $csc(\alpha - \beta) \cdot [a \cdot cos(\beta) - b \cdot cos(\alpha)] = \frac{a}{sin(\alpha)}$

a) $a \cdot [-cos(\beta + \gamma) + cos(\beta)cos(\gamma)] = a \cdot sin(\beta)sin(\gamma) = 2Rsin(\alpha)sin(\beta)sin(\gamma)$. Abbiamo usato l'identità: $a = 2Rsin(\alpha)$

b) $$\frac{a \cdot cos(\beta) - b \cdot cos(\alpha)}{sin(\alpha - \beta)} = \frac{a \cdot cos(\beta) - a \cdot sin(\beta)/sin(\alpha) \cdot cos(\alpha)}{sin(\alpha)cos(\beta) - cos(\alpha)sin(\beta)} = \frac{\cancel{sin(\alpha)cos(\beta) - sin(\beta)cos(\alpha)}}{\cancel{sin(\alpha)cos(\beta) - cos(\alpha)sin(\beta)}} \cdot \frac{a}{sin(\alpha)}$$

89. **a) *tan*(α) + *tan*(β) + *tan*(γ) = *tan*(α)*tan*(β)*tan*(γ); b) b^2 · [*cot*(α) + *cot*(β)] = c^2 · [*cot*(α) + *cot*(γ)]**

a) $tan(\alpha) + tan(\beta) + tan[180° - (\alpha + \beta)] = tan(\alpha) + tan(\beta) - tan(\alpha + \beta) = tan(\alpha) + tan(\beta) -$

$$\frac{tan(\alpha) + tan(\beta)}{1 - tan(\alpha)tan(\beta)} = \frac{\cancel{tan(\alpha) + tan(\beta)} - tan^2(\alpha)tan(\beta) - tan(\alpha)tan^2(\beta) \cancel{- tan(\alpha) - tan(\beta)}}{1 - tan(\alpha)tan(\beta)} =$$

$$= -\frac{tan(\alpha)tan(\beta) \cdot [tan(\alpha) + tan(\beta)]}{1 - tan(\alpha)tan(\beta)} = -tan(\alpha)tan(\beta)tan(\alpha + \beta) = tan(\alpha)tan(\beta)tan(\gamma)$$

b) $$b^2\left[\frac{cos(\alpha)}{sin(\alpha)} + \frac{cos(\beta)}{sin(\beta)}\right] = b^2 \frac{cos(\alpha)sin(\beta) + cos(\beta)sin(\alpha)}{sin(\alpha)sin(\beta)} = b^2 \frac{sin(\alpha + \beta)}{sin(\alpha)sin(\beta)} = b^2 \frac{sin(\gamma)}{sin(\alpha)sin(\beta)} =$$

$$= \frac{c^2 \frac{sin^{\cancel{2}}(\beta)}{sin^{\cancel{2}}(\gamma)} \cancel{sin(\gamma)}}{sin(\alpha)\cancel{sin(\beta)}} = \frac{c^2 sin(\alpha + \gamma)}{sin(\alpha)sin(\gamma)} = c^2 \frac{sin(\alpha)cos(\gamma) + cos(\alpha)sin(\gamma)}{sin(\alpha)sin(\gamma)} = c^2\left[\frac{cos(\gamma)}{sin(\gamma)} + \frac{cos(\alpha)}{sin(\alpha)}\right];$$

90. **a)** $\frac{1 + cos(\alpha - \beta) \cdot cos(\gamma)}{1 + cos(\alpha - \gamma) \cdot cos(\beta)} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + c^2}$ **; b)** $\frac{b^2}{c^2} = \frac{cot(\alpha) + cot(\gamma)}{cot(\alpha) + cot(\beta)}$ **; c) a^2*sin*(β – γ) = (b^2 – c^2)*sin*(α)**

$$\frac{1 - cos(\alpha - \beta) \cdot cos(\alpha + \beta)}{1 - cos(\alpha - \gamma) \cdot cos(\alpha + \gamma)} = \frac{1 - [cos(\alpha)cos(\beta) + sin(\alpha)sin(\beta)] \cdot [cos(\alpha)cos(\beta) - sin(\alpha)sin(\beta)]}{1 - [cos(\alpha)cos(\gamma) + sin(\alpha)sin(\gamma)] \cdot [cos(\alpha)cos(\gamma) - sin(\alpha)sin(\gamma)]} =$$

a) $$= \frac{1 - cos^2(\alpha)cos^2(\beta) + sin^2(\alpha)sin^2(\beta)}{1 - cos^2(\alpha)cos^2(\gamma) + sin^2(\alpha)sin^2(\gamma)} = \frac{1 - [1 - sin^2(\alpha)][1 - sin^2(\beta)] + sin^2(\alpha)sin^2(\beta)}{1 - [1 - sin^2(\alpha)][1 - sin^2(\gamma)] + sin^2(\alpha)sin^2(\gamma)} =$$

$$= \frac{sin^2(\alpha) + sin^2(\beta)}{sin^2(\alpha) + sin^2(\gamma)} = \frac{1 + sin^2(\beta)/sin^2(\alpha)}{1 + sin^2(\gamma)/sin^2(\alpha)} = \frac{1 + b^2/a^2}{1 + c^2/a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + c^2}$$

b) Lavoriamo sul secondo membro:

$$\frac{cot(\alpha)+cot(\gamma)}{cot(\alpha)+cot(\beta)}=\frac{\frac{cos(\alpha)}{sin(\alpha)}+\frac{cos(\gamma)}{sin(\gamma)}}{\frac{cos(\alpha)}{sin(\alpha)}+\frac{cos(\beta)}{sin(\beta)}}=\frac{\frac{cos(\alpha)\cdot sin(\gamma)+cos(\gamma)\cdot sin(\alpha)}{\cancel{sin(\alpha)}\cdot sin(\gamma)}}{\frac{cos(\alpha)\cdot sin(\beta)+cos(\beta)\cdot sin(\alpha)}{\cancel{sin(\alpha)}\cdot sin(\beta)}}=\frac{sin(\alpha+\gamma)}{sin(\gamma)}\cdot\frac{sin(\beta)}{sin(\alpha+\beta)}$$

Siamo in un triangolo, quindi: $\alpha+\beta+\gamma=180°\Rightarrow\alpha+\beta=180°-\gamma\Rightarrow sin(\alpha+\beta)=sin(180°-\gamma)=sin(\gamma)$; analogamente: $sin(\alpha+\gamma)=sin(\beta)$. Quindi: $\frac{sin(\beta)}{sin(\gamma)}\cdot\frac{sin(\beta)}{sin(\gamma)}=\left[\frac{sin(\beta)}{sin(\gamma)}\right]^2$. Applicando il teorema dei seni abbiamo: $\frac{b}{sin(\beta)}=\frac{c}{sin(\gamma)}\Rightarrow\frac{b}{c}=\frac{sin(\beta)}{sin(\gamma)}$.

c) Per il teorema di Carnot: $b^2-c^2=a^2+c^2-2ac\cdot cos(\beta)-[a^2+b^2-2ab\cdot cos(\gamma)]=c^2-a^2+2a\cdot[b\cdot cos(\gamma)-c\cdot cos(\beta)]\Rightarrow b^2-c^2=a\cdot[b\cdot cos(\gamma)-c\cdot cos(\beta)]\Rightarrow(b^2-c^2)\,sin(\alpha)=a\cdot sin(\alpha)\cdot[b\cdot cos(\gamma)-c\cdot cos(\beta)]=a\cdot[a\cdot sin(\beta)\cdot cos(\gamma)-a\cdot sin(\gamma)\cdot cos(\beta)]=a^2\cdot sin(\beta-\gamma)$.

Determinare la misura del perimetro dei seguenti triangoli con i dati accanto indicati

91. ***sin*(α + β) = ½, *cos*(β + γ) = –¼, *a* = 5**

Abbiamo $sin(\gamma)=sin[180°-(\alpha+\beta)]=sin(\alpha+\beta)=½$ e $cos(\alpha)=-cos[180°-(\beta+\gamma)]=-cos(\beta+\gamma)=¼$. perciò $sin(\alpha)=\sqrt{1-cos^2(\alpha)}=\sqrt{1-\frac{1}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$. Possiamo quindi applicare il teorema dei seni: $\frac{a}{sin(\alpha)}=\frac{c}{sin(\gamma)}\Rightarrow c=\frac{a\cdot sin(\gamma)}{sin(\alpha)}=5\cdot\frac{1/2}{\sqrt{15}/4}=\frac{10}{\sqrt{15}}=\frac{2\sqrt{15}}{3}$. Troviamo $sin(\beta)=sin(\alpha+\gamma)=sin(\alpha)cos(\gamma)+sin(\gamma)cos(\alpha)$. Tenuto conto che $cos(\gamma)=\sqrt{1-sin^2(\gamma)}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, abbiamo: $sin(\beta)=\frac{\sqrt{15}}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3\sqrt{5}+1}{8}$. Troviamo b sempre con il teorema dei seni: $\frac{a}{sin(\alpha)}=\frac{b}{sin(\beta)}\Rightarrow b=\frac{a\cdot sin(\beta)}{sin(\alpha)}=5\cdot\frac{\frac{3\sqrt{5}+1}{8}}{\sqrt{15}/4}=5\cdot\frac{3\sqrt{5}+1}{2\sqrt{15}}=\cancel{5}\cdot\frac{15\sqrt{3}+\sqrt{15}}{\cancel{30}^{6}}=\frac{15\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6}$. Infine il perimetro è $5+\frac{2\sqrt{15}}{3}+\frac{15\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6}=\frac{30+4\sqrt{15}+15\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6}=\frac{30+5\sqrt{15}+15\sqrt{3}}{6}$

92. ***sin*(α + γ) = 1/5, *cos*(α + β) = 1/8, *b* = 5**

Abbiamo $sin(\beta)=sin[180°-(\alpha+\gamma)]=sin(\alpha+\gamma)=1/5$ e $cos(\gamma)=-cos[180°-(\alpha+\beta)]=-cos(\alpha+\beta)=-1/8$. perciò $sin(\gamma)=\sqrt{1-cos^2(\gamma)}=\sqrt{1-\frac{1}{64}}=\frac{\sqrt{63}}{8}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$. Possiamo quindi applicare il teorema dei seni: $\frac{b}{sin(\beta)}=\frac{c}{sin(\gamma)}\Rightarrow c=\frac{b\cdot sin(\gamma)}{sin(\beta)}=5\cdot\frac{3\sqrt{7}/8}{1/5}=\frac{75\sqrt{7}}{8}$. Troviamo $sin(\alpha)=sin(\beta+\gamma)=sin(\beta)cos(\gamma)+sin(\gamma)cos(\beta)$. Tenuto conto che $cos(\beta)=\sqrt{1-sin^2(\beta)}=\sqrt{1-\frac{1}{25}}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$, abbiamo: $sin(\alpha)=sin(\beta+\gamma)=\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)+\frac{3\sqrt{7}}{8}\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}=\frac{6\sqrt{42}-1}{40}$. Troviamo a sempre con il teorema dei seni:

$\frac{a}{sin(\alpha)}=\frac{b}{sin(\beta)}\Rightarrow a=\frac{b\cdot sin(\alpha)}{sin(\beta)}=\cancel{5}\cdot\frac{\frac{6\sqrt{42}-1}{\cancel{40}^{8}}}{\frac{1}{5}}=\frac{30\sqrt{42}-5}{8}$. Infine il perimetro è $5+\frac{30\sqrt{42}-5}{8}+\frac{75\sqrt{7}}{8}=\frac{35+30\sqrt{42}+75\sqrt{7}}{8}$.

93. **a) *cos*(α + β) = –2/3, *a* = 4, *b* = 3; b) *sin*(α + γ) = 0,87, *a* = 3,64, *c* = 5,96**

a) *cos*(γ) = –*cos*(α + β) = 2/3 ⇒ $c=\sqrt{16+9-\cancel{24}^{8}\cdot\frac{2}{\cancel{3}}}=3\Rightarrow 2p=4+3+3=10$;

b) *sin*(β) = 0,87 ⇒ $cos(\beta)=\pm\sqrt{1-0,87^2}\approx 0,49$, vi sono due distinti triangoli, uno dei quali ottusangolo. Quindi:

$b_1\approx\sqrt{3,64^2+5,96^2-2\cdot 3,64\cdot 5,96\cdot 0,49}\approx 5,25; b_2\approx\sqrt{3,64^2+5,96^2+2\cdot 3,64\cdot 5,96\cdot 0,49}\approx 8,37$. E perciò due diversi perimetri: $2p_1\approx 14,85 \vee 2p_2\approx 17,97$.

Senza usare la calcolatrice determinare l'area dei seguenti triangoli con i dati accanto indicati

94. **a) *sin*(β + γ) = 3/8, *cos*(α + γ) = –4/9, *b* = 5; b) *sin*(α + γ) = 2/5, *cos*(α + β) = 5/9, *b* = 3.**

a) *sin*(α) = 3/8; *cos*(β) = 4/9; $sin(\beta)=\sqrt{1-\frac{16}{81}}=\frac{\sqrt{65}}{9}$; $cos(\alpha)=\sqrt{1-\frac{9}{64}}=\frac{\sqrt{55}}{8}\Rightarrow sin(\gamma)=sin(\alpha+\beta)=\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{9}+\frac{\sqrt{55}}{8}\cdot\frac{\sqrt{65}}{9}=\frac{12+5\sqrt{143}}{72}\approx 0,997\Rightarrow c\approx\frac{5\cdot 9}{\sqrt{65}}\cdot 0,997\approx 5,56$. Infine, l'area misura circa ½ · 5 · 5,56 · 3/8 ≈ 5,21.

b) *sin*(β) = 2/5; *cos*(γ) = –5/9; $cos(\beta)=\sqrt{1-\frac{4}{25}}=\frac{\sqrt{21}}{5}$; $sin(\gamma)=\sqrt{1-\frac{25}{81}}=\frac{\sqrt{55}}{9}$; ⇒ $sin(\alpha)=sin(\beta+\gamma)=\frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{5}{9}\right)+\frac{\sqrt{21}}{5}\cdot\frac{\sqrt{55}}{9}=\frac{\sqrt{1155}-10}{45}\approx 0,53\Rightarrow c\approx\frac{3\cdot 5}{2}\cdot\frac{\sqrt{55}}{9}\approx 6,18$. Infine, l'area misura circa ½ · 3 · 6,18 · 0,53 ≈ 4,91.

95. **a) *sin*(α + β) = 8/15, *cos*(α + γ) = 7/8, *c* = 3; b) *sin*(β + γ) = 5/9, *cos*(α + γ) = 5/8, *c* = 4.**

1) *sin*(γ) = 8/15; *cos*(β) = –7/8; $cos(\gamma)=\sqrt{1-\frac{64}{225}}=\frac{\sqrt{161}}{15}$; $sin(\beta)=\sqrt{1-\frac{49}{64}}=\frac{\sqrt{15}}{8}\Rightarrow sin(\alpha)=sin(\beta+\gamma)=\frac{\sqrt{15}}{8}\cdot\frac{\sqrt{161}}{15}-\frac{7}{8}\cdot\frac{8}{15}\approx -0,057\Rightarrow$ un triangolo del genere non esiste perché il seno degli angoli interni di un traingolo è sempre positivo.

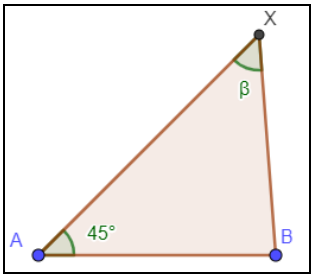
2) *sin*(α) = 5/9; *cos*(β) = –5/8; $cos(\alpha)=\sqrt{1-\frac{25}{81}}=\frac{2\sqrt{14}}{9}$; $sin(\beta)=\sqrt{1-\frac{25}{64}}=\frac{\sqrt{39}}{8}\Rightarrow sin(\gamma)=sin(\alpha+\beta)=\frac{5}{9}\cdot\left(-\frac{5}{8}\right)+\frac{2\sqrt{14}}{9}\cdot\frac{\sqrt{39}}{8}\approx 0,30\Rightarrow b\approx\frac{4}{0,30}\cdot\frac{\sqrt{39}}{8}\approx 10,41$. Infine, l'area misura circa ½ · 4 · 10,41 · 5/9 ≈ 11,57.

96. ***cos*(α + γ) = –7/9, *b* = 4, *c* = 3.**

cos(β) = 7/9 ⇒ $sin(\beta)=\sqrt{1-\frac{49}{81}}=\frac{4\sqrt{2}}{9}\Rightarrow sin(\gamma)=\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{4}\sqrt{2}}{\cancel{9}^{3}}=\frac{\sqrt{2}}{3}\Rightarrow cos(\gamma)=\sqrt{1-\frac{2}{9}}=\frac{\sqrt{7}}{3}$, percò:

$sin(\alpha)=\frac{4\sqrt{2}}{9}\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}+\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{7}{9}=\frac{4\sqrt{14}+7\sqrt{2}}{27}\Rightarrow S=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{4}^{2}\cdot\cancel{3}\cdot\frac{4\sqrt{14}+7\sqrt{2}}{\cancel{27}^{9}}=\frac{8\sqrt{14}+14\sqrt{2}}{9}$.

97. **Nel triangolo *AXB*, *AB* è lungo 4,07, $B\hat{A}X=45°$, determinare la misura di $A\hat{X}B$ se $\overline{XA}=5,26$.**

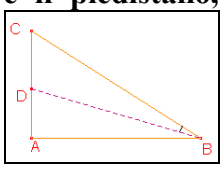


Per il teorema dei seni:

$$\frac{4,07}{sin\left(A\hat{X}B\right)}=\frac{5,26}{sin\left(135°-A\hat{X}B\right)}\Rightarrow 4,07\cdot\left[\frac{\sqrt{2}}{2}cos\left(A\hat{X}B\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}sin\left(A\hat{X}B\right)\right]=5,26sin\left(A\hat{X}B\right)\Rightarrow$$

$\Rightarrow 2,38\ sin(A\hat{X}B) \approx 2,88\ cos(A\hat{X}B) \Rightarrow tan(A\hat{X}B) \approx 2,88/2,38 \Rightarrow A\hat{X}B \approx 50°25'48"$.

98. **(Dal Progetto Matematica & realtà dell'Università di Perugia) La statua della libertà è alta 92 *m* compreso il piedistallo di 46 *m*. Descrivere come varia l'angolo di visuale in funzione della distanza dalla statua. Determinare qual è l'angolo di visuale corrispondente a 70 *m*. In figura, *AD* è il piedistallo, *CD* la statua, *AB* la distanza e l'angolo segnato è quello da determinare.**



Abbiamo: $tan(C\hat{B}A) = 92/\overline{AB}$; $tan(D\hat{B}A) = 46/\overline{AB}$, quindi:

$$tan\left(C\hat{B}D\right)=tan\left(C\hat{B}A-D\hat{B}A\right)=\frac{tan\left(C\hat{B}A\right)-tan\left(D\hat{B}A\right)}{1+tan\left(C\hat{B}A\right)\cdot tan\left(D\hat{B}A\right)}=\frac{(92-46)/\overline{AB}}{1+92\cdot 46/\overline{AB}^2}=\frac{46\cdot\overline{AB}}{\overline{AB}^2+46\cdot 92}\Rightarrow C\hat{B}D=tan^{-1}\left(\frac{46\cdot\overline{AB}}{\overline{AB}^2+46\cdot 92}\right)$$

Nel caso particolare: $C\hat{B}D=tan^{-1}\left(\frac{46\cdot 70}{70^2+46\cdot 92}\right)\approx 19°25'23"$

99. **Con riferimento al problema precedente, determinare $\overline{AB}$ se l'angolo di visuale è circa 18°.**

$$\frac{46\cdot\overline{AB}}{\overline{AB}^2+46\cdot 92}=tan(18°)\Rightarrow\overline{AB}\approx 42,88\,m\vee 98,69\,m$$

100. **Con riferimento al problema della statua, se $\overline{AD}=\overline{CD},\overline{AB}=70\,m$, determinare $\overline{AD}$, se l'angolo di visuale è circa 15°.**

$$\frac{70\cdot\overline{AD}}{70^2+2\overline{AD}^2}=tan(15°)\Rightarrow\overline{AD}\approx 22,70\,m\vee 107,92\,m\,.$$

101. **Con riferimento al problema della statua, se $\overline{AB}=70\,m,\overline{CD}=46\,m$, determinare $\overline{AD}$ se l'angolo di visuale è circa 23°.**

$\frac{46\cdot 70}{70^2+\left(46+\overline{AD}\right)\cdot\overline{AD}}=tan(23°)\Rightarrow\overline{AD}\approx 33,70\,m$, la seconda soluzione dell'equazione è negativa, quindi non accettabile.

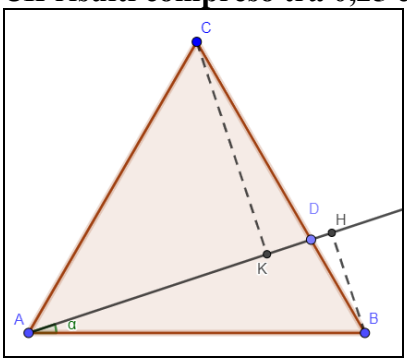
102. **In un cerchio di raggio che misura 3, tracciare una corda *AB* uguale al lato del quadrato inscritto nella circonferenza. Considerare poi un punto *C* appartenente al maggiore dei due archi *AB*. Determinare la misura di $C\hat{A}B$ in modo che la somma dei quadrati dei lati del triangolo *ABC* sia 50.**

Per il teorema della corda:

$$\overline{AB}^2=\left[6\cdot sin(45°)\right]^2=18;\overline{BC}^2=\left[6\cdot sin(\alpha)\right]^2=36sin^2(\alpha);\overline{AC}^2=36sin^2(135°-\alpha)$$

Quindi l'equazone risolvente è: $\cancel{18}^9 + \cancel{36}^{18}\ sin^2(\alpha) + \cancel{36}^{18}\ sin^2(135° - \alpha) = \cancel{50}^{25} \Rightarrow 9 + 18\ sin^2(\alpha) + 18[sin(135°)cos(\alpha) - cos(135°)sin(\alpha)]^2 - 25 = 0 \Rightarrow 18sin^2(\alpha) + 18sin(\alpha)cos(\alpha) - 7 = 0 \Rightarrow 11sin^2(\alpha) + 18sin(\alpha)cos(\alpha) - 7cos^2(\alpha) = 0 \Rightarrow 11tan^2(\alpha) + 18tan(\alpha) - 7 = 0 \Rightarrow tan(\alpha)=\frac{-9\pm\sqrt{158}}{11}\Rightarrow \alpha \approx 17°58'47" \vee \alpha \approx 117°1'13"$

103. ***ABC* è un triangolo equilatero di perimetro 6 *cm*, si tracci una semiretta per *A* che incontra il lato opposto, e siano *H* e *K* le proiezioni ortogonali di *B* e *C* su essa. Determinare i valori in gradi interi, che deve assumere l'angolo $B\hat{A}H$, in modo che il rapporto fra le misure dei segmenti *BH* e *CK* risulti compreso tra 0,25 e 2,41.**



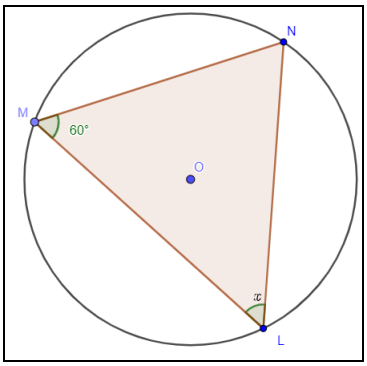
$$\frac{\overline{BH}}{\overline{CH}}=\frac{2\cdot sin(\alpha)}{2\cdot sin(60°-\alpha)}\Rightarrow 0,25\le\frac{sin(\alpha)}{sin(60°-\alpha)}\le 2,41\Rightarrow\begin{cases}sin(\alpha)\le 2,41\cdot sin(60°-\alpha)\\ sin(\alpha)\ge 0,25\cdot sin(60°-\alpha)\\ 0°<\alpha<60°\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}sin(\alpha)\le 2,41\cdot\left[\sqrt{3}/2cos(\alpha)-1/2sin(\alpha)\right]\\ sin(\alpha)\ge 0,25\cdot\left[\sqrt{3}/2cos(\alpha)-1/2sin(\alpha)\right]\\ 0°<\alpha<60°\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2,21\cdot sin(\alpha)\le 2,09\cdot cos(\alpha)\\ 1,13\cdot sin(\alpha)\ge 0,22\cdot cos(\alpha)\\ 0°<\alpha<60°\end{cases}\Rightarrow$$, dato che vo-

$$\Rightarrow\begin{cases}tan(\alpha)\le 2,09/2,21\\ tan(\alpha)\ge 0,22/1,13\\ 0°<\alpha<60°\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha\le 43°24'5"\\ \alpha\ge 11°1'2"\\ 0°<\alpha<60°\end{cases}$$

gliamo solo valori ineri deve essere 12° ≤ α ≤ 43°.

104. **Un triangolo *LMN* è inscritto in una circonferenza di diametro lungo 6,17 *cm* e $\angle L\hat{M}N=60°$. Determina l'ampiezza di $N\hat{L}M$ in modo che sia $\left|\overline{LM}^2-\overline{MN}^2\right|=3$.**

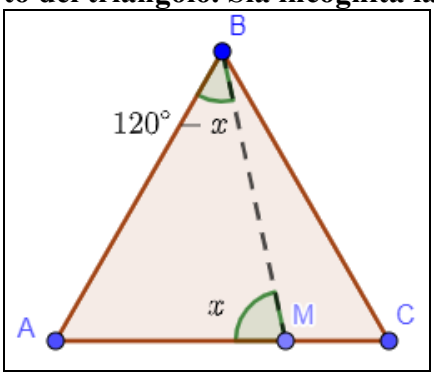


Per il teorema della corda: $\overline{LM}=6,17\,cm\cdot sin(x);\overline{MN}=6,17\,cm\cdot sin(120°-x)$, quindi l'equazione risolvente è: $[6,17\ sin(x)]^2-[6,17\ sin(120°-x)]^2=\pm 3\Rightarrow 6,17^2 sin(x)^2-6,17^2\cdot[¾\ cos^2(x)+¼\ sin^2(x)+\sqrt{3}/2\ sin(x)cos(x)]=\pm 3\Rightarrow 57,10\ sin^2(x)-32,97 sin(x)cos(x)-31,55=0\vee 57,10\ sin^2(x)-32,97 sin(x)cos(x)-25,55=0$ (abbiamo approssimato i coefficienti) $\Rightarrow 25,55\ tan^2(x)-32,97\ tan(x)-31,55=0\vee 25,55\ tan^2(x)-32,97\ tan(x)-25,55=0\Rightarrow x\approx 61°24'55"\vee x\approx 62°36'42"$

105. **Con riferimento al problema della statua della libertà, lasciando inalterati tutti i dati tranne l'altezza della statua, che è sempre uguale al piedistallo, per quali angoli di visuale α il problema ha soluzione?**

Sia s l'altezza della statua: $tan(\alpha)=\frac{s\cdot\overline{AB}}{\overline{AB}^2+2s^2}\Rightarrow tan(\alpha)\cdot\overline{AB}^2-s\cdot\overline{AB}+2s^2\cdot tan(\alpha)=0\Rightarrow\ \Delta=s^2-8s^2tan^2(\alpha)\geq 0\Rightarrow\ 0\leq tan(\alpha)\leq\frac{\sqrt{2}}{4}\Rightarrow\ 0°<\alpha<19°28'16''$.

106. **Dato un triangolo equilatero *ABC* di lato *a*, determinare sul lato *AC* un punto *M* in modo che la somma dei quadrati delle sue distanze dai vertici *A* e *B* abbia rapporto 7/5 con il quadrato del lato del triangolo. Sia incognita la misura di $B\hat{M}A$.**



$$\frac{\overline{MA}}{sin(120°-x)}=\frac{\overline{MB}}{sin(60°)}=\frac{\ell}{sin(x)}\Rightarrow\overline{MA}=\frac{\ell\cdot sin(120°-x)}{sin(x)};\overline{MB}=\frac{\ell\sqrt{3}}{2sin(x)};\overline{MC}=\frac{\ell\cdot sin(x-60°)}{sin(x)}$$

Perciò: $\frac{4\cancel{\ell^2}\cdot sin^2(120°-x)+3\cancel{\ell^2}+4\cancel{\ell^2}sin^2(x-60°)}{4\cancel{\ell^2}sin^2(x)}=\frac{7}{5}\Rightarrow 16cos^2(x)=1\Rightarrow cos(x)=¼\Rightarrow x\approx 75°31'21''$

Formule di duplicazione e bisezione

Determinare quanto richiesto sulla base dei dati noti, usando le formule di duplicazione o bisezione

107. ***sin*(α) = 2/7, *cos*(β) = –7/9, α∈[90°; 180°], β∈[180°; 270°]; *cos*(2α) = ?, *cot*(2β) = ?**
   - $cos(2\alpha)=1-2\cdot(2/7)^2=1-8/49=41/49$;
   - $cot(\beta)=\frac{-7/9}{-\sqrt{1-49/81}}=\frac{7}{4\sqrt{2}}\Rightarrow cot(2\beta)=\frac{49/32-1}{7}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{17\sqrt{2}}{112}$

108. ***sin*(α) = –3/5, *cos*(β) = 6/7, α∈[π; 3π/2], β∈[3π/2; 2π]; *csc*(2α) = ?, *sin*(2β) = ?**
   - $cos(\alpha)=-\sqrt{1-9/25}=-\frac{4}{5}$; $csc(2\alpha)=½\cdot(-5/4)\cdot(-5/3)=25/24$;
   - $sin(\beta)=-\sqrt{1-36/49}=-\frac{\sqrt{13}}{7}\Rightarrow sin(2\beta)=2\cdot\left(-\frac{\sqrt{13}}{7}\right)\cdot\frac{6}{7}=-\frac{12\sqrt{13}}{49}$.

109. ***sin*(α) = 3/4, *cos*(β) = 8/9, α∈[0; 90°], β∈[270°; 360°]; *sec*(2α) = ?, *tan*(2β) = ?**
   - $cos(\alpha)=\sqrt{1-9/16}=\frac{\sqrt{7}}{4}\Rightarrow sec(2\alpha)=\frac{16/7\cdot16/9}{16/9-16/7}=-8$
   - $sin(\beta)=-\sqrt{1-64/81}=-\frac{\sqrt{17}}{9}\Rightarrow tan(2\beta)=\frac{2\cdot\left(-\sqrt{17}/8\right)}{1-17/64}=\frac{16\sqrt{17}}{47}$.

110. ***sin*(α) = –5/6, *cos*(β) = 7/9, α∈[180°; 270°], β∈[270°; 360°]; *tan*(2α) = ?, *cos*(2β) = ?**
   - $cos(\alpha)=-\sqrt{1-25/36}=-\frac{\sqrt{11}}{6}\Rightarrow tan(2\alpha)=\frac{2\cdot\left(5/\sqrt{11}\right)}{1-25/11}=-\frac{5\sqrt{11}}{7}$
   - $cos(2\beta)=2\cdot49/81-1=17/81$.

111. ***sin*(α) = 2/7, *cos*(β) = –5/8, α∈[0; π/2], β∈[π; 3π/2]; *cot*(2α) = ?, *cos*(2β) = ?**
   - $cos(\alpha)=\sqrt{1-4/49}=\frac{3\sqrt{5}}{7}\Rightarrow cot(2\alpha)=\frac{45/4-1}{2\cdot3\sqrt{5}/2}=\frac{41\sqrt{5}}{60}$;
   - $cos(2\beta)=2\cdot25/64-1=-7/32$.

112. ***sin*(α) = ¼, *cos*(β) = 3/5, α∈[π/2; π], β∈[0; π/2]; *sin*(2α) = ?, *tan*(2β) = ?**

- $cos(\alpha) = -\sqrt{1-1/16} = -\frac{\sqrt{15}}{4} \Rightarrow sin(2\alpha) = -2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = -\frac{\sqrt{15}}{8}$;
- $sin(\beta) = \sqrt{1-9/25} = \frac{4}{5} \Rightarrow tan(2\beta) = \frac{2 \cdot 4/3}{1-16/9} = -\frac{24}{7}$.

113. ***sin*(α) = 1/5, *cos*(β) = –2/3, α∈[90°;180°], β∈[180°;270°]; *cos*(α/2) = ?, *cot*(β/2) = ?**
- $cos(\alpha) = -\sqrt{1-1/25} = -\frac{2\sqrt{6}}{5} \Rightarrow cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-2\sqrt{6}/5}{2}} = \frac{\sqrt{30-2\sqrt{5}}}{10}$
- $cot\left(\frac{\beta}{2}\right) = -\sqrt{\frac{1-2/3}{1+2/3}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

114. ***sin*(α) = 2/5, *cos*(β) = 3/4, α∈[90°; 180°], β∈[270°; 360°]; *csc*(α/2) = ?, *sin*(β/2) = ?**
- $sec(\alpha) = \frac{1}{-\sqrt{1-4/25}} = -\frac{5\sqrt{21}}{21} \Rightarrow csc\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{-10\sqrt{21}}{-5\sqrt{21}/21-1}} = \frac{\sqrt{35}-\sqrt{15}}{2}$
- $sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-3/4}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

115. ***sin*(α) = 1/3, *cos*(β) = 4/9, α∈[0°; 90°], β∈[270°; 360°]; *sec*(α/2) = ?, *tan*(β/2) = ?**
- $sec(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1-1/9}} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \Rightarrow sec\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}/2}{1+3\sqrt{2}/4}} = 2\sqrt{3}-\sqrt{6}$;
- $tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = -\sqrt{\frac{1-4/9}{1+4/9}} = -\sqrt{\frac{5}{13}}$.

116. ***sin*(α) = –3/5, *cos*(β) = 5/8, α∈[180°; 270°], β∈[0°; 90°]; *tan*(α/2) = ?, *cos*(β/2) = ?**
- $cos(\alpha) = -\frac{4}{5} \Rightarrow tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\sqrt{\frac{1+4/5}{1-4/5}} = -3$;
- $cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+5/8}{2}} = \frac{\sqrt{13}}{4}$.

117. ***sin*(α) = 1/7, *cos*(β) = –8/9, α∈[0; π/2], β∈[π; 3π/2]; *csc*(α/2) = ?, *cos*(β/2) = ?**
- $sec(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1-1/49}} = \frac{7\sqrt{3}}{12} \Rightarrow csc\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{7\sqrt{3}/6}{7\sqrt{3}/12-1}} = \sqrt{42}+2\sqrt{14}$;
- $cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = -\sqrt{\frac{1-8/9}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{6}$.

Esprimere la prima funzione mediante la seconda funzione

118. **a) *cos*(13α/2), *cos*(13α/4); b) *cos*(13α/2), *sin*(13α); c) *cos*(3α), *cos*(α); d) *cos*(4α), *cos*(α)**
a) $2cos^2(13\alpha/4) - 1$; b) $1 - 2sin^2(13\alpha)$;
c) $cos(3\alpha) = cos(2\alpha + \alpha) = cos(2\alpha)cos(\alpha) - sin(2\alpha)sin(\alpha) = [2cos^2(\alpha) - 1] \cdot cos(\alpha) - 2sin^2(\alpha)cos(\alpha)$ $= 2cos^3(\alpha) - cos(\alpha) - 2[1 - cos^2(\alpha)] \cdot cos(\alpha) = 4cos^3(\alpha) - 3cos(\alpha)$;
d) $cos(4\alpha) = 2cos^2(2\alpha) - 1 = 2 \cdot [2cos^2(2\alpha) - 1]^2 - 1 = 8cos^4(\alpha) - 8cos^2(\alpha) + 1$.

119. **a) *cos*(4α), *sin*(α); b) *cos*(α), *cos*(α/4); c) *sin*(4α), *sin*(α) e *cos*(α)**
a) $cos(4\alpha) = 1 - 2sin^2(2\alpha) = 1 - 8sin^2(\alpha)cos^2(\alpha) = 1 - 8sin^2(\alpha) \cdot [1 - sin^2(\alpha)] = 8sin^4(\alpha) - 8sin^2(\alpha) + 1$;
b) Fra 4α e α vi è lo stesso rapporto che fra α e α/4, quindi: $cos(\alpha) = 8cos^4(\alpha/4) - 8cos^2(\alpha/4) + 1$;
c) $sin(4\alpha) = 2sin(2\alpha)cos(2\alpha) = 4sin(\alpha)cos(\alpha)[2cos^2(\alpha) - 1] = 8sin(\alpha)cos^3(\alpha) - 4sin(\alpha)cos(\alpha)$, oppure $4sin(\alpha)cos(\alpha)[1 - 2sin^2(\alpha)] = -8sin^3(\alpha)cos(\alpha) + 4sin(\alpha)cos(\alpha)$

120. **a) *sin*(2*x*)*cos*(*x*) + *sin*(3*x*), *sin*(*x*); b) *cos*(2*x*)*cos*(*x*) – *cos*(3*x*), *cos*(*x*); c) *sin*(2*x*)*sin*(*x*) – *cos*(3*x*), *cos*(*x*)**
a) $2sin(x)cos^2(x) + 3sin(x) - 4sin^3(x) = 2sin(x) - 2sin^3(x) + 3sin(x) - 4sin^3(x) = 5sin(x) - 6sin^3(x)$;
b) $[2cos^2(x) - 1]cos(x) - 4cos^3(x) + 3cos(x) = 2cos(x) - 2cos^3(x)$;
c) $2sin^2(x)cos(x) - 4cos^3(x) + 3cos(x) = 2cos(x) - 2cos^3(x) - 4cos^3(x) + 3cos(x) = 5cos(x) - 6cos^3(x)$

121. **a) *sin*(4*x*)*cos*(*x*) – *sin*(3*x*), *sin*(*x*); b) *cos*(4*x*) – *sin*(3*x*), *sin*(*x*)**

a) $4sin(x)cos^2(x) \cdot [1 - 2sin^2(x)] - 3sin(x) + 4sin^3(x) = 4sin(x) \cdot [1 - sin^2(x)] \cdot [1 - 2sin^2(x)] - 3sin(x) + 4sin^3(x) = 8sin^5(x) - 8sin^3(x) + sin(x)$;

b) $8sin^4(x) - 8sin^2(x) + 1 - 3sin(x) + 4sin^3(x) = 8sin^4(x) + 4sin^3(x) - 8sin^2(x) - 3sin(x) + 1$.

Verificare la validità delle seguenti identità, e determinare l'insieme di definizione, con gli angoli, ove non specificato, misurati in radianti.

122. **a) $1 - 4sin^2(\alpha)cos^2(\alpha) = cos^2(2\alpha)$; b) $sec(x) = ½ \cdot [tan(\pi/4 + x/2) + tan(\pi/4 - x/2)]$**

a) Non ci sono problemi per il dominio. $1 - 4sin^2(\alpha)cos^2(\alpha) = 1 - sin^2(2\alpha) = cos^2(2\alpha)$.

b) Deve essere $x \neq \pi/2 + k\pi$ e $\pi/4 + x/2 \neq \pi/2 + k\pi$ e $\pi/4 - x/2 \neq \pi/2 + k\pi \Rightarrow x \neq \pi/2 + k\pi/2$.

$$\frac{1+tan(x/2)}{1-tan(x/2)}+\frac{1-tan(x/2)}{1+tan(x/2)}=2\cdot\frac{1+tan^2(x/2)}{1-tan^2(x/2)}=2\cdot\frac{1+\frac{1-cos(x)}{1+cos(x)}}{1-\frac{1-cos(x)}{1+cos(x)}}=2\cdot\frac{2}{2cos(x)}=\frac{2}{cos(x)}=2sec(x)$$

123. **a) $tan(x) = ½ \cdot [tan(\pi/4 + x/2) - tan(\pi/4 - x/2)]$; b)** $tan(\alpha)=\frac{2}{cot(\alpha/2)-tan(\alpha/2)}$

a) Come in precedenza: $x \neq \pi/2 + k\pi/2$.

$$\frac{1+tan(x/2)}{1-tan(x/2)}-\frac{1-tan(x/2)}{1+tan(x/2)}=4\cdot\frac{tan(x/2)}{1-tan^2(x/2)}=4\cdot\frac{\frac{sin(x/2)}{cos(x/2)}}{1-\frac{sin^2(x/2)}{cos^2(x/2)}}=$$

$$=4\cdot\frac{sin(x/2)\cdot cos(x/2)}{cos^2(x/2)-sin^2(x/2)}=2\frac{sin(x)}{cos(x)}=2tan(x)$$

b) Deve essere $\alpha/2 \neq k\pi/2$ e $\alpha/2 \neq \pi/4 + k\pi \Rightarrow \alpha \neq k\pi/2$.

$$\frac{2}{1/tan(\alpha/2)-tan(\alpha/2)}=\frac{2tan(\alpha/2)}{1-tan^2(\alpha/2)}=tan(\alpha)$$

124. **a)** $\frac{sin^2(\alpha)}{cot^2(\alpha/2)}+\frac{sin(2\alpha)}{sin(\alpha)}=2-sin^2(\alpha)$ **; b)** $\frac{sin^2(\alpha)}{cos^2(\alpha/2)}+cos(\alpha)=2-cos(\alpha)$

a) Deve essere $\alpha/2 \neq k\pi/2$ e $\alpha \neq k\pi \Rightarrow \alpha \neq k\pi$. $\frac{sin^2(\alpha)}{\frac{1+cos(\alpha)}{1-cos(\alpha)}}+\frac{2\,\cancel{sin(\alpha)}cos(\alpha)}{\cancel{sin(\alpha)}}=\frac{1-cos^2(\alpha)}{\frac{1+cos(\alpha)}{1-cos(\alpha)}}+2cos(\alpha)$

$= [1 - cos(\alpha)]^2 + 2cos(\alpha) = 1 + cos^2(\alpha) = 2 - sin^2(\alpha)$.

b) Deve essere $\alpha/2 \neq \pi/2 + k\pi \Rightarrow \alpha \neq \pi + 2k\pi$.

$$\frac{4sin^2(\alpha/2)\,\cancel{cos^2(\alpha/2)}}{\cancel{cos^2(\alpha/2)}}+cos(\alpha)=\cancel{4}^{2}\cdot\frac{1-cos(\alpha)}{\cancel{2}}+cos(\alpha)=2-cos(\alpha)$$

125. $\frac{cos(2\alpha)}{cos(\alpha)-sin(\alpha)}-cos(\alpha)-2sin(\alpha)cos(\alpha)=sin(\alpha)\cdot[1-2cos(\alpha)]$

Deve essere $\alpha \neq \pi/4 + k\pi$. $\frac{cos^2(\alpha)-sin^2(\alpha)}{cos(\alpha)-sin(\alpha)}-cos(\alpha)-2sin(\alpha)cos(\alpha)=$ $\cancel{cos(\alpha)} + sin(\alpha) - \cancel{cos(\alpha)} - 2sin(\alpha)cos(\alpha) = sin(\alpha) \cdot [1 - 2cos(\alpha)]$.

126. **a)** $tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{sin(\alpha)}{1+cos(\alpha)}$; b) $\mathbf{sec(\gamma) = 1 + tan(\gamma/2) \cdot tan(\gamma)}$

a) Deve essere $\alpha/2 \neq \pi/2 + k\pi$ e $\alpha \neq \pi + 2k\pi \Rightarrow \alpha \neq \pi + 2k\pi$.

$$tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-cos(\alpha)}{1+cos(\alpha)}}=\sqrt{\frac{1-cos^2(\alpha)}{[1+cos(\alpha)]^2}}=\frac{sin(\alpha)}{1+cos(\alpha)}=\frac{sin(\alpha)[1-cos(\alpha)]}{1-cos^2(\alpha)}=\frac{1-cos(\alpha)}{sin(\alpha)}$$

a) Deve essere $\gamma/2 \neq \pi/2 + k\pi$ e $\gamma \neq \pi/2 + k\pi \Rightarrow \gamma \neq k\,\pi/2$.

$$1+tan(\gamma/2)\cdot\frac{2tan(\gamma/2)}{1-tan^2(\gamma/2)}=\frac{1-tan^2(\gamma/2)+2tan^2(\gamma/2)}{1-tan^2(\gamma/2)}=$$

$$=\frac{1+tan^2(\gamma/2)}{1-tan^2(\gamma/2)}=\frac{1+\frac{1-cos(\gamma)}{1+cos(\gamma)}}{1-\frac{1-cos(\gamma)}{1+cos(\gamma)}}=\frac{2}{2cos(\gamma)}=sec(\gamma)$$

127. **a)** $sin^2(\gamma)=\left[\frac{sin(2\gamma)}{2}\right]^2+\left[\frac{1-sin(90°-2\gamma)}{2}\right]^2$ **; b) 1 – *sin*(2α) = 2*sin*(45° – α)*cos*(45° + α)**

a) Non ci sono problemi per il dominio. $sin^2(\gamma)cos^2(\gamma)+\left[\frac{1-cos(2\gamma)}{2}\right]^2$ = $sin^2(\gamma)cos^2(\gamma) + sin^4(\gamma) = sin^2(\gamma)[cos^2(\gamma) + sin^2(\gamma)]= sin^2(\gamma)$.

b) Non ci sono problemi per il dominio. $\sqrt{2}\ [cos(\alpha) - sin(\alpha)] \cdot \sqrt{2}\ [cos(\alpha) - sin(\alpha)]/2 = [cos(\alpha) - sin(\alpha)]^2 = cos^2(\alpha) + sin^2(\alpha) - 2sin(\alpha)cos(\alpha) = 1 - sin(2\alpha)$.

128. **a) *cot*(2*x*) + *tan*(*x*) = *csc*(2*x*); b)** $cos(\beta)=\frac{cot(\beta/2)-tan(\beta/2)}{cot(\beta/2)+tan(\beta/2)}$

a) Deve essere $2x \neq k\pi$ e $x \neq \pi/2 + k\pi \Rightarrow x \neq k\pi/2$.

$$\frac{1-tan^2(x)}{2tan(x)}+tan(x)=\frac{1-tan^2(x)+2tan^2(x)}{2tan(x)}=\frac{1+tan^2(x)}{2tan(x)}=\frac{cos^2(x)+sin^2(x)}{2\frac{sin(x)}{\cancel{cos(x)}}\cdot cos^{\cancel{2}}(x)}=\frac{1}{sin(2x)}=csc(2x)$$

b) Deve essere $\beta/2 \neq k\pi/2$ e $\beta/2 \neq -\pi/4 + k\pi \Rightarrow \beta \neq k\pi$ e $\beta \neq -\pi/2 + 2k\pi$.

$$\frac{1-tan^2(\beta/2)}{1+tan^2(\beta/2)}=\frac{1-\frac{1-cos(\beta)}{1+cos(\beta)}}{1+\frac{1-cos(\beta)}{1+cos(\beta)}}=\frac{2}{2cos(\beta/2)}=sec(\beta)$$

129. $sin(x)\cdot sin(y)=sin^2\left(\frac{x+y}{2}\right)-sin^2\left(\frac{x-y}{2}\right)$

Non ci sono problemi per il dominio. $[sin(x/2)cos(y/2) + cos(x/2)sin(y/2)]^2 - [sin(x/2)cos(y/2) + cos(x/2)sin(y/2)]^2 = 4\, sin(x/2)cos(x/2)sin(y/2)\, cos(y/2) = sin(x)sin(y)$

Risolvere le seguenti equazioni negli intervalli indicati

130. **a) *cos*(2*x*) – 3*sin*(*x*) + 4 = 0; *x*∈[207°; 426°]; b) *cos*(2*x*) – 3*cos*(*x*) – 1 = 0; *x*∈[207°; 426°]**

a) $1 - 2sin^2(x) - 3sin(x) + 4 = 0 \Rightarrow 2sin^2(x) + 3sin(x) - 5 = 0 \Rightarrow sin(x) = -5/2$ (NA) $\vee\ sin(x) = 1$, non vi sono soluzioni nell'intervallo considerato.

b) $2cos^2(x) - 1 - 3cos(x) - 1 = 0 \Rightarrow 2cos^2(x) - 3cos(x) - 2 = 0 \Rightarrow cos(x) = -½ \vee cos(x) = 2$ (NA) $\Rightarrow x = 240°$.

131. **a) *sin*(2*x*) – 7*sin*²(*x*) + 1 = 0; *x*∈[374°; 536°]; b) *sin*(2*x*) + 3*cos*²(*x*) – 2 = 0; *x*∈[57°; 327°]**

a) $2sin(x)cos(x) - 7sin^2(x) + sin^2(x) + cos^2(x) = 0 \Rightarrow 6tan^2(x) - 2tan(x) - 1 = 0 \Rightarrow tan(x)=\frac{1\pm\sqrt{7}}{6} \Rightarrow$ $x \approx -15°20'19'' + k180° \vee \approx 31°17'2'' + k180° \Rightarrow x \approx 391°17'2'' \vee \approx 524°39'41''$

b) $2sin(x)cos(x) + 3cos^2(x) - 2sin^2(x) - 2cos^2(x)] = 0 \Rightarrow 2tan^2(x) - 2tan(x) - 1 = 0 \Rightarrow tan(x)=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow x \approx -20°6'14'' + k180° \vee x \approx 53°47'38'' + k180°$. Le soluzioni accettabili sono: $x_1 \approx 159°53'46'' \vee x_2 \approx 233°47'38''$.

132. **a) *sin*(2*x*) – 5*sin*²(*x*) + 3 = 0; *x*∈[102°; 425°]; b) *cos*(2*x*) – 7*sin*(*x*) + 1 = 0; *x*∈[374°; 536°]**

a) $2sin(x)cos(x) - 5sin^2(x) + 3sin^2(x) + 3cos^2(x) = 0 \Rightarrow 2tan^2(x) - 2tan(x) - 3 = 0 \Rightarrow tan(x) = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}$ $\Rightarrow x \approx -39°27' + k180° \vee x \approx 61°15'6'' + k180°$. Le soluzioni accettabili sono: $x_1 \approx 140°33' \vee x_2 \approx 320°33' \vee x_3 \approx 241°15'6'' \vee x_4 \approx 421°15'6''$

b) $1 - 2sin^2(x) - 7sin(x) + 1 = 0 \Rightarrow 2sin^2(x) + 7sin(x) - 2 = 0 \Rightarrow sin(x) = \frac{-7 + \sqrt{65}}{4} \Rightarrow x \approx 15°24'2'' + k360° \vee x \approx 164°35'58'' + k\,360° \Rightarrow x \approx 375°24'2'' \vee \approx 524°35'58''$.

133. **a) $cos^2(x) + cos^2(x/2) - 1 = 0$; $x \in [207°; 426°]$; b) $tan(2x) - cot(2x) + tan(x) = 0$; $x \in [-3; 0]$**

a) $cos^2(x) + ½ + ½\, cos(x) - 1 = 0 \Rightarrow 2cos^2(x) + cos(x) - 1 = 0 \Rightarrow cos(x) = ½ \vee cos(x) = -1 \Rightarrow x = 300° \vee 420°$;

b) $\frac{2tan(x)}{1 - tan^2(x)} - \frac{1 - tan^2(x)}{2tan(x)} + tan(x) = 0 \Rightarrow 4tan^2(x) - 1 + 2tan^2(x) - tan^4(x) + 2tan^2(x) - 2tan^4(x) = 0$ $\Rightarrow 3tan^4(x) - 8tan^2(x) + 1 = 0 \Rightarrow tan(x) = \pm\frac{\sqrt{12 \pm 3\sqrt{13}}}{3} \Rightarrow x \approx \pm 0{,}35 + k\pi \vee x \approx \pm 1{,}01 + k\pi \Rightarrow x \approx -2{,}79 \vee x \approx -2{,}13 \vee x \approx -1{,}01 \vee x \approx -0{,}35$

134. **a) $tan(2x) \cdot tan^2(x) + 2tan(x) + 1 = 0$; $x \in [-120°; 135°]$; b) $sin^2(x/2) - 5cos^2(x) - 2 = 0$; $x \in [178°; 502°]$**

a) $\frac{2tan^3(x)}{1 - tan^2(x)} + 2tan(x) + 1 = 0 \Rightarrow \cancel{2tan^3(x)} + 2tan(x) - \cancel{2tan^3(x)} + 1 - tan^2(x) = 0 \Rightarrow tan^2(x) - 2tan(x) - 1 = 0 \Rightarrow tan(x) = 1 \pm \sqrt{2} \Rightarrow x = -22°30' + k180° \vee 67°30' + k180° \Rightarrow x = -112°30' \vee -22°30' \vee 67°30'$;

b) $½ - ½\, cos(x) - 5cos^2(x) - 2 = 0 \Rightarrow 10\, cos^2(x) + cos(x) + 3 = 0 \Rightarrow \Delta < 0$.

135. **a) $tan^2(x/2) - 5cos(x) = 0$; $x \in [1; 4]$; b) $cot^2(x/2) + cos(x) - 1 = 0$; $x \in [2; 4]$**

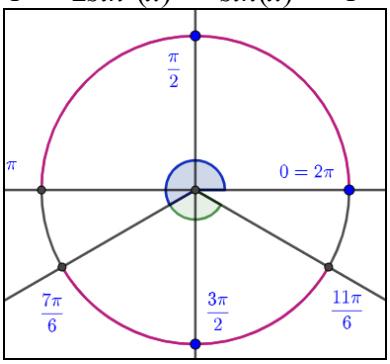
a) $1 - cos(x) - 5cos(x) \cdot [1 + cos(x)] = 0 \Rightarrow 5cos^2(x) + 6 - 1 = 0 \Rightarrow cos(x) = \frac{\sqrt{14} - 3}{5} \Rightarrow x \approx \pm 1{,}42 + 2k\pi \Rightarrow x \approx 1{,}42 \vee \approx 1{,}72$;

b) $\cancel{1} + cos(x) + cos(x) - cos^2(x) - \cancel{1} + cos(x) = 0 \Rightarrow cos^2(x) + 3cos(x) = 0 \Rightarrow cos(x) = 0 \Rightarrow x = 3\pi/2$

Risolvere le seguenti disequazioni nella circonferenza goniometrica

136. **a) $cos(2x) - sin(x) - 1 < 0$; b) $2sin(2x) - sin^2(x) + 3 > 0$**

a) $1 - 2sin^2(x) - sin(x) - 1 < 0$ $sin(x) \cdot [2sin(x) + 1] > 0 \Rightarrow sin(x) < -½ \vee sin(x) > 0 \Rightarrow$

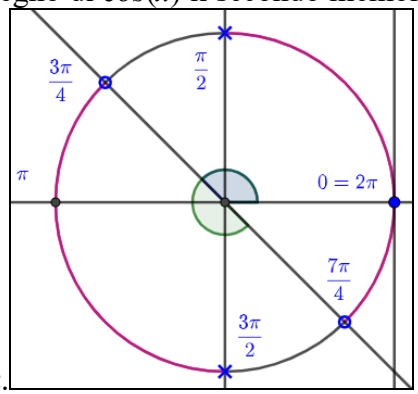


$\Rightarrow 0 < x < \pi \vee 7\pi/6 < x < 11\pi/6$;

b) $4sin(x)cos(x) - sin^2(x) + 3sin^2(x) + 3cos^2(x) > 0 \Rightarrow 2tan^2(x) + 4tan(x) + 3 > 0 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow$ l'espressione è sempre positiva, quindi $0 \le x \le 2\pi$. Non dobbiamo escludere i valori in cui la tangente non esiste perché la disequazione iniziale è positiva anche per $x = \pi/2 \vee 3\pi/2$.

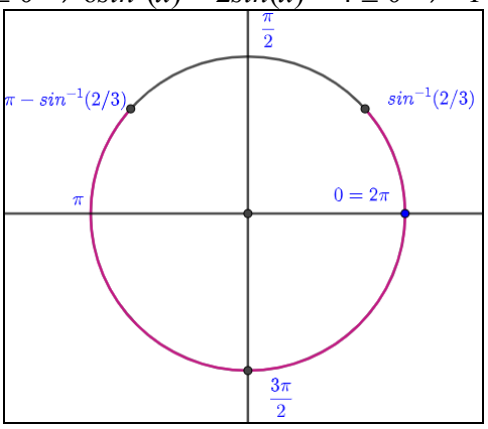
137. **a) $sin(2x) - 2sin^2(x) + 2 > 0$; b) $3cos(2x) - 2sin(x) + 1 \ge 0$**

a) $2sin(x)cos(x) - \cancel{2sin^2(x) + 2sin^2(x)} + 2cos^2(x) > 0 \Rightarrow cos(x) \cdot [sin(x) + cos(x)] > 0 \Rightarrow tan(x) + 1 > 0$ $\Rightarrow$ qualunque sia il segno di $cos(x)$ il secondo membro stabilisce il segno: $0 \le x < \pi/2 \vee 3\pi/4 < x <$



$3\pi/2 \vee 7\pi/4 < x \le 2\pi$.

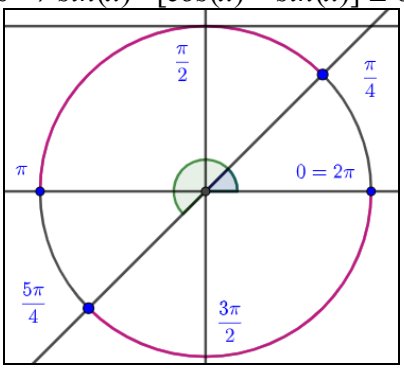
b) $3 - 6sin^2(x) - 2sin(x) + 1 \ge 0 \Rightarrow 6sin^2(x) + 2sin(x) - 4 \le 0 \Rightarrow -1 \le sin(x) \le 2/3 \Rightarrow 0 \le x \le sin^{-1}(2/3)$



$\vee \pi - sin^{-1}(2/3) < x \le 2\pi$.

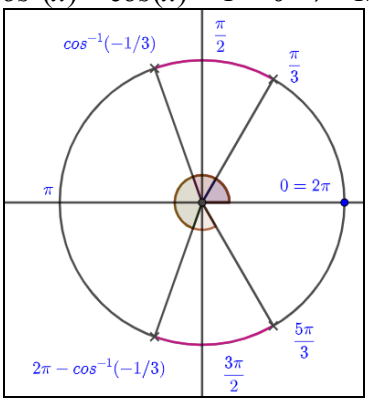
138. **a) $sin(2x) + 2cos^2(x) - 2 \le 0$; b) $3cos^2(x) + sin^2(x/2) - 1 < 0$**

a) $2sin(x)cos(x) + \cancel{2cos^2(x)} - 2sin^2(x) - \cancel{2cos^2(x)} \le 0 \Rightarrow sin(x) \cdot [cos(x) - sin(x)] \le 0 \Rightarrow cot(x) - 1 \le 0 \Rightarrow$



si accettano anche i valori in cui il seno è nullo $\pi/4 \le x \le \pi \vee 5\pi/4 \le x \le 2\pi$;

b) $3cos^2(x) + ½ - ½\, cos(x) - 1 < 0 \Rightarrow 6cos^2(x) - cos(x) - 1 < 0 \Rightarrow -1/3 < cos(x) < ½ \Rightarrow \pi/3 < x < cos^{-}$



$^1(-1/3) \vee 2\pi - cos^{-1}(-1/3) < x < 5\pi/3$.

139. **a) $4cos(2x) - 5sin(x) + 1 < 0$; b) $sin(2x) - sin^2(x) + 3 \ge 0$**

a) $4 - 8sin^2(x) - 5sin(x) + 1 < 0 \Rightarrow 8sin^2(x) + 5sin(x) - 5 > 0 \Rightarrow sin(x) > \frac{\sqrt{185}-5}{16} \Rightarrow$

$sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{185}-5}{16}\right) < x < \pi - sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{185}-5}{16}\right)$

b) $2sin(x)cos(x) - sin^2(x) + 3sin^2(x) + 3cos^2(x) \geq 0 \Rightarrow 2tan^2(x) + 2tan(x) + 3 \geq 0 \Rightarrow \Delta < 0$, la diseuqazione ha sempre soluzioni.

140. **a) $cos(2x) + sin(x) > 0$; b) $cos(2x) + cos^2(x) \leq 0$**

a) $1 - 2sin^2(x) + sin(x) > 0 \Rightarrow -½ < sin(x) < 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq 7\pi/6 \vee 11\pi/6 \leq x \leq 2\pi$;

b) $2cos^2(x) - 1 + cos^2(x) \leq 0 \Rightarrow 3cos^2(x) - 1 \leq 0 \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3} \leq cos(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$

$cos^{-1}\left(-\sqrt{3}/3\right) < x < cos^{-1}\left(\sqrt{3}/3\right) \vee 2\pi - cos^{-1}\left(-\sqrt{3}/3\right) < x < 2\pi - cos^{-1}\left(\sqrt{3}/3\right)$

141. **a) $cos^2(x/2) - cos^2(x) + 2 > 0$; b) $tan^2(x/2) - cos(x) + 1 < 0$**

a) $½ + ½cos(x) - cos^2(x) + 2 > 0 \Rightarrow 2cos^2(x) - cos(x) - 5 < 0 \Rightarrow \frac{1-\sqrt{41}}{4} < cos(x) < \frac{1+\sqrt{41}}{4} \Rightarrow$

$cos^{-1}\left(\frac{1-\sqrt{41}}{4}\right) < x < cos^{-1}\left(\frac{1+\sqrt{41}}{4}\right) \vee 2\pi - cos^{-1}\left(\frac{1-\sqrt{41}}{4}\right) < x < 2\pi - cos^{-1}\left(\frac{1+\sqrt{41}}{4}\right)$

b) $1 - cos(x) - \cancel{cos(x)} - cos^2(x) + 1 + \cancel{cos(x)} < 0$, $x \neq \pi \Rightarrow cos^2(x) + cos(x) - 2 > 0 \Rightarrow cos(x) < -2 \vee cos(x) > 1$. Quindi nessuna soluzione

142. **a) $tan^2(x/2) - sin^2(x/2) - 1 < 0$; b) $sin(2x) - cos(2x) + 1 < 0$**

a) $1 - cos(x) - ½ \cdot [1 - cos^2(x)] - 1 - cos(x) > 0$, $x \neq \pi \Rightarrow cos^2(x) - 4cos(x) - 1 > 0 \Rightarrow cos(x) < 2 - \sqrt{5}$

$\Rightarrow 0 \leq x < cos^{-1}\left(2-\sqrt{5}\right) \vee 2\pi - cos^{-1}\left(2-\sqrt{5}\right) < x \leq 2\pi$;

b) $2sin(x)cos(x) - 1 + 2sin^2(x) + 1 < 0 \Rightarrow sin(x) \cdot [cos(x) + sin(x)] < 0 \Rightarrow 0 < x < \pi/4 \vee \pi < x < 7\pi/4$.

143. **Esprimere mediante i lati, le seguenti funzioni goniometriche, in un triangolo rettangolo.**
a) $sin(\beta/2)$; b) $cos(\beta/2)$; c) $tan(\beta/2)$; d) $sin(2\beta)$; e) $cos(2\beta)$; f) $tan(2\beta)$

a) $sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-cos(\beta)}{2}} = \sqrt{\frac{1-c/a}{2}} = \sqrt{\frac{a-c}{2a}}$;

b) $cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+cos(\beta)}{2}} = \sqrt{\frac{1+c/a}{2}} = \sqrt{\frac{a+c}{2a}}$;

c) $tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-cos(\beta)}{1+cos(\beta)}} = \sqrt{\frac{1-c/a}{1+c/a}} = \sqrt{\frac{a-c}{a+c}} = \sqrt{\frac{(a-c)^2}{a^2-c^2}} = \frac{a-c}{b}$;

d) $sin(2\beta) = 2sin(\beta)cos(\beta) = \frac{2bc}{a}$;

e) $cos(2\beta) = cos^2(\beta) - sin^2(\beta) = \frac{c^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2-b^2}{c^2+b^2}$;

f) $tan(2\beta) = \frac{2tan(\beta)}{1-tan^2(\beta)} = \frac{2b/c}{1-b^2/c^2} = \frac{2bc}{c^2-b^2}$

Verificare la validità delle seguenti identità in un triangolo qualsiasi

144. **a) $a^2 = (b + c)^2 - 4bc \cdot cos^2(\alpha/2)$; b) $(a - b + c) \cdot (a + b - c) = 4bc \cdot sin^2(\alpha/2)$**

a) Per il teorema di Carnot: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos(\alpha) = b^2 + c^2 + 2bc - 2bc \cdot [1 - cos(\alpha)] = (b + c)^2 - 2bc \cdot 2cos^2(\alpha/2) = (b + c)^2 - 4bc \cdot cos^2(\alpha/2)$;

b) $a^2 - (b - c)^2 =$ (per ilpunto a) $(b + c)^2 - 4bc \cdot cos^2(\alpha/2) - (b - c)^2 = 4bc - 4bc \cdot cos^2(\alpha/2) = 4bc \cdot sin^2(\alpha/2)$.

145. **Provare le formule di Briggs-Retico: a)** $cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{p\cdot(p-a)}{b\cdot c}}$ **; b)** $tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{(p-b)\cdot(p-c)}{p\cdot(p-a)}}$

a) $$cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+cos(\alpha)}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}=\sqrt{\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{(b+c+a)\cdot(b+c-a)}{4bc}}$$

Dato che $p-a=\frac{a+b+c}{2}-a=\frac{b+c-a}{2}$, facilmente si ottiene: $cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{p\cdot(p-a)}{b\cdot c}}$.

b) $$tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-cos(\alpha)}{1+cos(\alpha)}}=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{(b+c)^2-a^2}}=\sqrt{\frac{(a-b+c)\cdot(a+b-c)}{(b+c+a)\cdot(b+c-a)}}=\sqrt{\frac{(p-b)\cdot(p-c)}{p\cdot(p-a)}}$$

146. Provare che in un triangolo qualsiasi si ha: $tan\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)=cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{c-b}{c+b}$

$$tan\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)=cot\left(\frac{\pi-\beta-\gamma}{2}\right)\cdot\frac{c-b}{c+b}\Rightarrow tan\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)=tan\left(\frac{\gamma+\beta}{2}\right)\cdot\frac{c-b}{c+b}\Rightarrow$$

$$\frac{tan\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)}{tan\left(\frac{\gamma+\beta}{2}\right)}=\sqrt{\frac{\frac{1-cos(\gamma-\beta)}{1+cos(\gamma-\beta)}}{\frac{1-cos(\gamma+\beta)}{1+cos(\gamma+\beta)}}}=\sqrt{\frac{1-cos(\gamma-\beta)}{1+cos(\gamma-\beta)}\cdot\frac{1+cos(\gamma+\beta)}{1-cos(\gamma+\beta)}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1-cos(\gamma)cos(\beta)-sin(\gamma)sin(\beta)}{1+cos(\gamma)cos(\beta)+sin(\gamma)sin(\beta)}\cdot\frac{1+cos(\gamma)cos(\beta)-sin(\gamma)sin(\beta)}{1-cos(\gamma)cos(\beta)+sin(\gamma)sin(\beta)}}=$$

$$=\sqrt{\frac{[1-sin(\gamma)sin(\beta)]^2-cos^2(\gamma)cos^2(\beta)}{[1+sin(\gamma)sin(\beta)]^2-cos^2(\gamma)cos^2(\beta)}}=\sqrt{\frac{[1-sin(\gamma)sin(\beta)]^2-[1-sin^2(\gamma)]\cdot[1-sin^2(\beta)]}{[1+sin(\gamma)sin(\beta)]^2-[1-sin^2(\gamma)]\cdot[1-sin^2(\beta)]}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\cancel{1}-2sin(\gamma)sin(\beta)+\cancel{sin^2(\gamma)sin^2(\beta)}-\cancel{1}+sin^2(\gamma)+sin^2(\beta)-\cancel{sin^2(\gamma)sin^2(\beta)}}{\cancel{1}+2sin(\gamma)sin(\beta)+\cancel{sin^2(\gamma)sin^2(\beta)}-\cancel{1}+sin^2(\gamma)+sin^2(\beta)-\cancel{sin^2(\gamma)sin^2(\beta)}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{sin^2(\gamma)+sin^2(\beta)-2sin(\gamma)sin(\beta)}{sin^2(\gamma)+sin^2(\beta)+2sin(\gamma)sin(\beta)}}=\sqrt{\frac{[sin(\gamma)-sin(\beta)]^2}{[sin(\gamma)+sin(\beta)]^2}}=\frac{|sin(\gamma)-sin(\beta)|}{sin(\gamma)+sin(\beta)}=\frac{\frac{c}{2R}-\frac{b}{2R}}{\frac{c}{2R}+\frac{b}{2R}}=\frac{c-b}{c+b}$$

147. **Provare che se in un triangolo si ha: *b* · *cos*(β) = *c* · *cos*(γ), allora il triangolo è isoscele di base *a* o rettangolo di ipotenusa *a*.**

La condizione sufficiente è banale. Se $b = c \Rightarrow \beta = \gamma \Rightarrow b \cdot cos(\beta) = c \cdot cos(\gamma)$; oppure se il triangolo è rettangolo di ipotenusa a, allora ovviamente $a = b \cdot cos(\beta) = c \cdot cos(\gamma)$. Passiamo alla condizione necessaria. Per il teorema dei seni: $b \cdot cos(\beta) = c \cdot cos(\gamma) \Rightarrow c \cdot sin(\beta)/sin(\gamma) \cdot cos(\beta) = c \cdot cos(\gamma) \Rightarrow sin(\beta) \cdot cos(\beta) = sin(\gamma) \cdot cos(\gamma)$, per la formula di duplicazione: $sin(2\beta) = sin(2\gamma) \Rightarrow 2\beta = 2\gamma \vee 2\beta = 180° - 2\gamma \Rightarrow \beta = \gamma \vee \beta = 90° - \gamma$, che è la tesi.

Verificare la validità delle seguenti identità in un triangolo qualsiasi, in cui S indica l'area, p il semiperimetro, r il raggio della circonferenza inscritta, R il raggio della circonferenza circoscritta. Ricordiamo che r = S/p e R = abc/(4S).

148. **a)** $S = p^2 \cdot tan(\alpha/2) \cdot tan(\beta/2) \cdot tan(\gamma/2)$**; b)** $r = (p - a) \cdot tan(\alpha/2) = (p - b) \cdot tan(\beta/2) = (p - c) \cdot tan(\gamma/2)$

a) $$p^2\cdot\sqrt{\frac{\cancel{(p-b)}\cdot\cancel{(p-c)}}{p\cdot\cancel{(p-a)}}\cdot\frac{(p-a)\cdot(p-c)}{p\cdot\cancel{(p-b)}}\cdot\frac{\cancel{(p-a)}\cdot(p-b)}{p\cdot\cancel{(p-c)}}}=$$

$$=\frac{p^{\cancel{2}}}{\cancel{p}}\cdot\sqrt{\frac{(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}{p}}=\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}=S$$

b) $(p-a)\cdot\sqrt{\frac{(p-b)\cdot(p-c)}{p\cdot(p-a)}}=\cancel{(p-a)}\cdot\frac{\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}}{p\cdot\cancel{(p-a)}}=\frac{S}{p}=r$, analogamente si provano le altre due.

149. **a) $r = 4R \cdot sin(\alpha/2) \cdot sin(\beta/2) \cdot sin(\gamma/2)$; b) $p \cdot S = abc \cdot cos(\alpha/2) \cdot cos(\beta/2) \cdot cos(\gamma/2)$**

a) $\frac{abc}{S}\cdot\sqrt{\frac{(p-b)\cdot(p-c)}{bc}\cdot\frac{(p-a)\cdot(p-c)}{ac}\cdot\frac{(p-a)\cdot(p-b)}{ab}}=\frac{(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}{S}=$
$=\frac{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}{S\cdot p}=\frac{S^{\cancel{2}}}{\cancel{S}\cdot p}=r$

b) $abc\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(p-a)}{bc}\cdot\frac{p\cdot(p-b)}{ac}\cdot\frac{p\cdot(p-c)}{ab}}=p\cdot\sqrt{(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}=p\cdot S$

150. **Applicare il risultato dell'esercizio svolto nel box Lavoriamo insieme alla terna (3, 4, 5), determinando l'altra terna e le misure degli angoli acuti dei due triangoli.**
$(2 \cdot 3 \cdot 4, 4^2 - 3^2, 5^2) = (24, 7, 25)$ ed effettivamente $24^2 + 7^2 = 25^2$; $\beta_1 = tan^{-1}(3/4) \approx 36°52'12''$; $\gamma_1 = tan^{-1}(4/3) \approx 53°7'48''$; $\beta_2 = tan^{-1}(24/7) \approx 73°44'23'' \approx 2\beta_1$; $\gamma_2 = tan^{-1}(7/24) \approx 16°15'37''$.

151. **Provare questo risultato di Viète: se (B, D, A) è una terna pitagorica e le quantità sono tutte positive, allora anche $(3BD^2 - B^3, D^3 - 3B^2D, A^3)$ è pitagorica e quest'ultimo triangolo ha un angolo acuto triplo di uno di quello di partenza. Bisogna usare la formula di triplicazione della tangente.**
$(3BD^2 - B^3)^2 + (D^3 - 3B^2D)^2 = B^6 + 3B^4D^2 + 3B^2D^4 + D^6 = (B^2 + D^2)^3 = (A^3)^2$.

$$tan(3\beta)=\frac{tan(2\beta)+tan(\beta)}{1-tan(2\beta)tan(\beta)}=\frac{\frac{2tan(\beta)}{1-tan^2(\beta)}+tan(\beta)}{1-\frac{2tan(\beta)}{1-tan^2(\beta)}tan(\beta)}=\frac{tan(\beta)\cdot\left[tan^2(\beta)-3\right]}{3tan^2(\beta)-1}=$$

$$=\frac{B/D\cdot\left[B^2/D^2-3\right]}{3B^2/D^2-1}=\frac{3BD^2-B^3}{D^3-3B^2D}=tan(\beta')$$

152. **Applicare il risultato dell'esercizio precedente alla terna (5, 12, 13), determinando l'altra terna e le misure degli angoli acuti dei due triangoli.**
$(3 \cdot 5 \cdot 12^2 - 5^3, 12^3 - 3\cdot5^2 \cdot 12, 13^3) = (2035, 828, 2197)$; $\beta_1 = tan^{-1}(5/12) \approx 22°37'12''$; $\gamma_1 = tan^{-1}(12/5) \approx 67°22'48''$; $\beta_2 = tan^{-1}(2035/828) \approx 67°51'35'' \approx 3\beta_1$; $\gamma_2 = tan^{-1}(828/2035) \approx 22°8'25''$

Risolvere i seguenti problemi in cui vi è da impostare e risolvere un'equazione in cui sono da applicarsi formule di duplicazione e/o bisezione

153. **Con riferimento al problema risolto nel box lavoriamo insieme, determinare il perimetro del trapezio.**
Per il teorema di Carnot i lati obliqui misurano: $\sqrt{2r^2\cdot\left[1-cos(\alpha)\right]}=2r\cdot\sqrt{\frac{1-cos(\alpha)}{2}}=2r\cdot sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$;
la base minore: $\sqrt{2r^2\cdot\left[1-cos(\pi-2\alpha)\right]}=2r\cdot\sqrt{1+cos(2\alpha)}=2r\cdot cos(\alpha)$, pertanto il perimetro misura: $2r \cdot [1 + 2sin(\alpha/2) + cos(\alpha)]$.

154. **In un triangolo si ha: $cos(2\alpha) = ¾$, $cos(2\beta) = 7/8$, $a = 10$. Determinare la misura di b.**
$1 - 2sin^2(\alpha) = ¾ \Rightarrow sin(\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{4}$; $1 - 2sin^2(\beta) = 7/8 \Rightarrow sin(\beta) = ¼ \Rightarrow b=\frac{1}{\cancel{4}}\cdot10\cdot\frac{\cancel{4}}{\sqrt{2}}=5\sqrt{2}$.

155. **In un triangolo si ha: $sin(\alpha + \beta) = 5/7$, $sin(2\gamma) = 11/15$. Determinare $cos(\gamma)$.**
$sin(\alpha + \beta) = sin(\gamma) = 5/7$; $2 \cdot 5/7 \cdot cos(\gamma) = 11/15 \Rightarrow cos(\gamma) = 77/150$.

156. **In un triangolo si ha: $cos(\alpha + \beta) = -3/8$, $sin(2\gamma) = 8/13$. Determinare $sin(\gamma)$.**
$cos(\gamma) = 3/8$, $2 \cdot sin(\gamma) \cdot 3/8 = 8/13 \Rightarrow sin(\gamma) = 32/39$.

Oppure $sin(\gamma) = sin(\alpha+\beta) = \sqrt{1-(-3/8)^2} = \frac{\sqrt{55}}{8}$. I risultati non coincidono, quindi i dati sono incoerenti. Del resto se conosciamo α + β conosciamo anche γ e 2γ.

157. **Trovare le lunghezze dei segmenti che le bisettrici del triangolo i cui lati sono lunghi 3, 5 e 7 unità, intercettano sul triangolo stesso.**

Vogliamo usare il risultato del Teorema 8, pertanto dobbiamo determinare i coseni degli angoli metà.

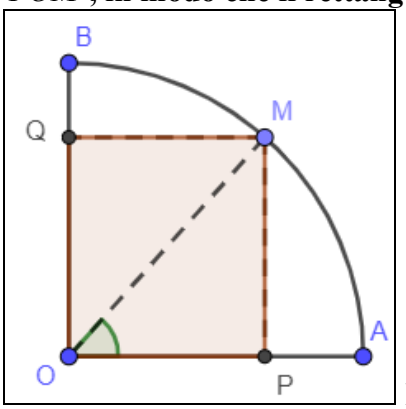
Abbiamo: $cos(\alpha) = \frac{5^2+7^2-3^2}{2\cdot 5\cdot 7} = \frac{13}{14}; cos(\beta) = \frac{5^2-7^2+3^2}{2\cdot 5\cdot 3} = -\frac{1}{2}; cos(\gamma) = \frac{-5^2+7^2+3^2}{2\cdot 3\cdot 7} = \frac{11}{14}$, da cui: $cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\frac{13}{14}}{2}} = \frac{3\sqrt{21}}{14}; cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{1}{2}; cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{5\sqrt{7}}{14}$, applichiamo le formule del Teorema 8:

$$b_a = \frac{2\cdot 35\cdot\frac{3\sqrt{21}}{14}}{12} = \frac{5\sqrt{21}}{4}; b_b = \frac{2\cdot 15\cdot\frac{1}{2}}{8} = \frac{15}{8}; b_c = \frac{2\cdot 21\cdot\frac{5\sqrt{7}}{14}}{10} = \frac{3\sqrt{7}}{2}$$

158. **Calcolare l'area di un triangolo di lati lunghi 5, 7 e 9.**

Basta usare la formula di Erone: $p = (5 + 7 + 9)/2 = 21/2 \Rightarrow S = \sqrt{\frac{21}{2}\cdot\frac{11}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{3}{2}} = \frac{21\sqrt{11}}{4}$

159. **Si consideri un punto *M* su un quarto di cerchio di raggio 1 *cm*, con centro *O* ed estremi *A* e *B*. Siano *P* e *Q* le proiezioni di *M* su *OA* e *OB*, determinare i valori che deve assumere l'angolo $P\hat{O}M$, in modo che il rettangolo *OPMQ* abbia area compresa tra 0,37 e 0,45.**

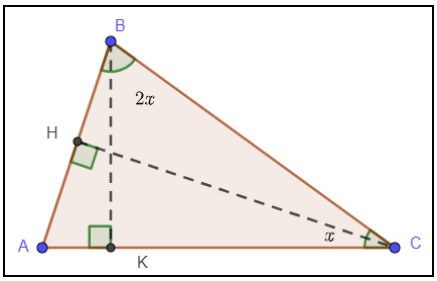


Deve essere: $0{,}37 < sin(x)cos(x) < 0{,}45 \Rightarrow 0{,}74 < 2sin(x)cos(x) < 0{,}90 \Rightarrow 0{,}74 < sin(2x) < 0{,}90 \Rightarrow 2x$ deve stare fra i valori approssimati: (47°43'53"; 64°9'29"), quindi x sta fra ≈ 23°51′57″ e ≈ 32°4′45″.

160. **Determinare in quale intervallo varia la misura dell'angolo acuto maggiore di un triangolo rettangolo di ipotenusa lunga 8,58 e di area compresa tra 13,12 e 14,38.**

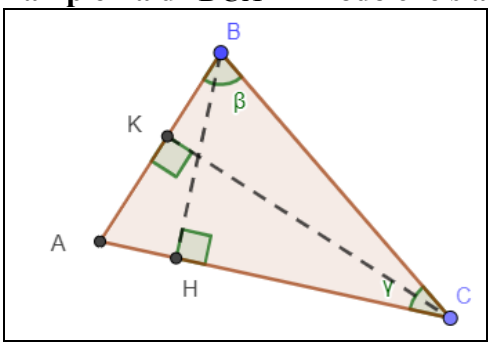
L'area è ½ bc = ½ · 8,58 $sin(x)$ · 8,58 $cos(x)$ = ¼ · $8{,}58^2$ $sin(2x)$, con x misura dell'angolo acuto cercato. Deve perciò essere: $13{,}12 < ¼ \cdot 8{,}58^2\, sin(2x) < 14{,}38 \Rightarrow 0{,}71 < sin(2x) < 0{,}78$, valori ovviamente approssimati, da cui: ≈ 22°37′3″ < α < ≈ 25°37′49″

161. **In un triangolo *ABC* l'angolo di vertice *C* è la metà di quello di vertice *B*; $\overline{BC} = 3$, *BH* e *CK* sono altezze. Determinare $\angle ACB$ in modo che si abbia $\overline{BH}^2 + 3\cdot\overline{CK} = 9$.**



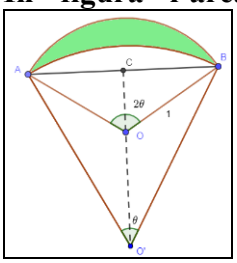
$9sin^2(x) + 9sin(2x) = 0 \Rightarrow sin^2(x) + 2sin(x)cos(x) - 1 = 0 \Rightarrow sin^2(x) + 2sin(x)cos(x) - sin^2(x) - cos^2(x) = 0 \Rightarrow cos(x) \cdot [2sin(x) - cos(x)]\ 0 \Rightarrow 2tan(x) - 1 = 0 \Rightarrow x \approx$ 26°33′54″.

162. **In un triangolo *ABC* si ha: $2\cdot BCA = ABC, \overline{BC}=3$, *BH* e *CK* sono altezze. Determinare l'ampiezza di BCA in modo che sia $\overline{BH}^2+\overline{CK}=5$.**



$9sin^2(\gamma) + 3sin(\beta) = 5 \Rightarrow 9sin^2(\gamma) + 3sin(2\gamma) - 5 = 0 \Rightarrow 9sin^2(\gamma) + 6sin(\gamma)cos(\gamma) - 5sin^2(\gamma) - 5cos^2(\gamma) = 0 \Rightarrow 4tan^2(\gamma) + 6tan(\gamma) - 5 = 0 \Rightarrow tan(\gamma) = \frac{-1+\sqrt{6}}{3}$ (non consideriamo la soluzione negativa perché fornisce angoli ottusi) $\Rightarrow \gamma \approx 25°47'17''$

163. **In figura l'area evidenziata, compresa fra i due settori circolari si chiama *lunula*.**



Determinare l'area di tale figura in funzione dell'angolo θ misurato in radianti, sapendo che il minore dei due raggi è lungo 1 unità.

Troviamo l'area, togliendo dall'area del settore circolare di centro *O*, angolo al centro 2θ e raggio 1, l'area del triangolo isoscele *ABO* e quella del segmento circolare di corda *AB* relativo al cerchio di centro *O'*, angolo al centro θ. L'area di un settore circolare di angolo al centro *x*, in radianti, e raggio *r*, vale $\frac{1}{2} r^2 x$; quella di un segmento circolare: $\frac{1}{2} r^2 [x - sin(x)]$. Intanto troviamo la misura di *O'B*:

$\overline{O'B} = \frac{\overline{BC}}{sin(\theta/2)} = \frac{sin(\theta)}{sin(\theta/2)} = \frac{2\,\cancel{sin(\theta/2)}cos(\theta/2)}{\cancel{sin(\theta/2)}} = 2cos(\theta/2)$. Adesso calcoliamo l'area cercata:

$\frac{1}{2}\cdot 2\theta - \frac{1}{2}\cdot sin(2\theta) - \frac{1}{2}\cdot[\theta - sin(\theta)]\cdot 4cos^2(\theta/2) = \theta - sin(\theta)cos(\theta) - [\theta - sin(\theta)]\cdot[1 + cos(\theta)] = \cancel{\theta} - \cancel{sin(\theta)cos(\theta)} - \cancel{\theta} + sin(\theta) - \theta\, cos(\theta) + \cancel{sin(\theta)cos(\theta)} = sin(\theta) - \theta\, cos(\theta)$.

164. **Il triangolo isoscele *ABC* ha i lati obliqui che misurano $\sqrt{3}$ e la base che misura almeno 3. Quanto misura al minimo l'angolo al vertice?**

Gli angoli misurano α, α e 180° – 2α, quindi si ha:

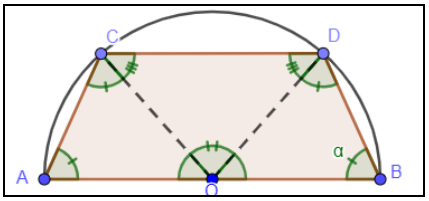
$$\frac{\sqrt{3}}{sin(\alpha)} = \frac{\ell}{sin(180°-2\alpha)} \Rightarrow \ell = \frac{\sqrt{3}sin(2\alpha)}{sin(\alpha)} \geq 3 \Rightarrow \frac{2\sqrt{3}\,\cancel{sin(\alpha)}cos(\alpha)}{\cancel{sin(\alpha)}} \geq 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow cos(\alpha) \geq \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 0° < \alpha \leq 30° \Rightarrow 180° - 2\alpha \geq 180° - 60° = 120°$$

165. **Di un triangolo *ABC* si sa che l'angolo di vertice *A* misura il doppio di quello di vertice *B* e che i lati *BC* e *AC* misurano rispettivamente 11,41 e 7,32. Determinare la misura del lato incognito e degli angoli.**

$\frac{11,41}{sin(2\beta)} = \frac{7,32}{sin(\beta)} \Rightarrow \frac{11,41}{2\,\cancel{sin(\beta)}cos(\beta)} = \frac{7,32}{\cancel{sin(\beta)}} \Rightarrow cos(\beta) = 11,41/14,64 \Rightarrow \beta \approx 38°47'49'' \Rightarrow \alpha \approx 77°35'38''$, $\gamma \approx 63°36'33''$, $c \approx \sqrt{11,41^2 + 7,32^2 - 2\cdot 11,41\cdot 7,32\cdot cos(63°36'33'')} \approx 10,47$

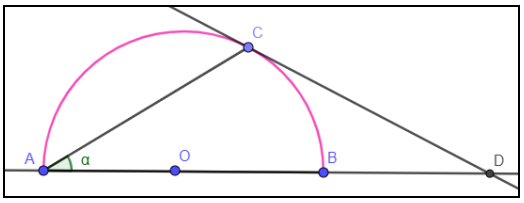
166. **Un trapezio è inscritto in una semicirconferenza, con la base maggiore coincidente con il diametro. Dopo avere provato che il trapezio è isoscele, determinare la misura dell'area mediante il raggio della circonferenza e uno degli angoli adiacenti alla base.**



Con semplici ragionamenti si prova che gli angoli ugualmente segnati in figura sono fra loro uguali, quindi il trapezio è isoscele. La sua area è somma delle aree dei tre triangoli in cui è diviso dai raggi, quindi: $\frac{1}{2} r^2 \cdot \{2\, sin(180° - 2\alpha) + sin[180° - 2 \cdot (180° - 2\alpha)]\} = \frac{1}{2} r^2 \cdot [2\, sin(2\alpha) + sin(4\alpha - 180°)] = \frac{1}{2} r^2 \cdot [2\, sin(2\alpha) - sin(4\alpha)] = r^2 \cdot sin(2\alpha)\, [1 - cos(2\alpha)]$

167. **Provare che se in un triangolo si ha $a = 4$, $b = 5$, $c = 6$, allora si ha $\gamma = 2\alpha$.**

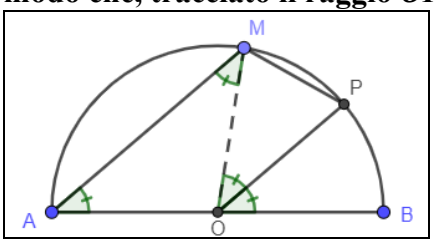
Per il Teorema di Carnot: $cos(\gamma) = \frac{16+25-36}{40} = \frac{1}{8}; cos(\alpha) = \frac{-16+25+36}{60} = \frac{3}{4}$, ora: $cos(2\alpha) = 2 \cdot 9/16 - 1 = 9/8 - 1 = 1/8$.

168. **In figura** 

***CD* è tangente alla semicirconferenza di diametro 2*r*, determinare la misura di *AD*.**

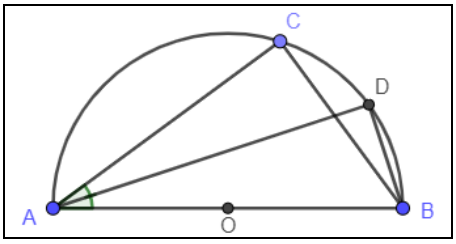
La retta è tangente alla circonferenza quindi il triangolo OCD è retto in C, $D\hat{O}C = 2\alpha$ perché angolo al centro che insiste sullo stesso arco su cui insiste l'angolo alla circonferenza α. Si ha: $\overline{AD} = \overline{AO} + \overline{OD} = r + \frac{r}{cos(2\alpha)} = \frac{r \cdot [1 + cos(2\alpha)]}{cos(2\alpha)} = \frac{2r \cdot cos^2(\alpha)}{cos(2\alpha)}$.

169. **Sia *M* un punto su una semicirconferenza di centro *O* e diametro $\overline{AB} = 2$, determinare $\angle M\hat{A}B$ in modo che, tracciato il raggio *OP* parallelo ad *AM*, si abbia $\overline{AM} + 2 \cdot \overline{MP}^2 = 3$.**



è facile mostrare che tutti gli angoli segnati sono uguali, la misura comune la indichiamo con x, infatti quelli di vertici A e M sono angoli alla base di un triangolo isoscele, mentre $B\hat{O}P$ è angolo corrispondente di A rispetto alle parallele tagliate dal diametro. Infine $B\hat{O}M$ è angolo esterno del triangolo AMO e quindi misura $2x$, perciò anche $P\hat{O}M = x$. A questo punto l'equazione diviene: $2cos(x) + 2\, [2sin(x/2)]^2 = 3 \Rightarrow 2cos(x) + 8sin^2(x/2) = 3 \Rightarrow 2cos(x) + 4 \cdot [1 - cos(x)] = 3 \Rightarrow cos(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 60°$.

170. **In una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2$, condurre una corda *AC*, quindi la corda *AD* che biseca l'angolo BAC. Determinare $\angle BAC$ in modo che sia: $\overline{AC} + \overline{AD} = 3{,}75$.**



Indichiamo con $2x$ la misura di BAC, Abbiamo: $2cos(2x) + 2cos(x) = 3{,}75 \Rightarrow 4cos^2(x) + 2cos(x) - 23/4 = 0 \Rightarrow cos(x) = \frac{2\sqrt{6}-1}{4} \Rightarrow x \approx 12°54'15'' \Rightarrow BAC \approx 25°48'30''$.

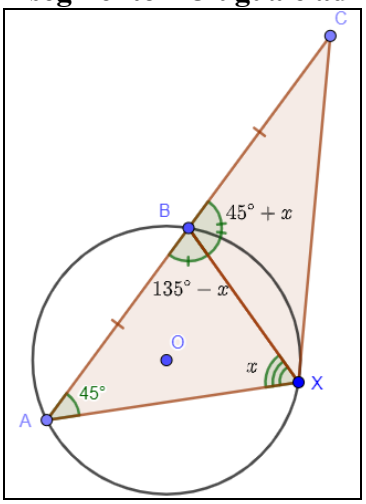
171. **Come il precedente, determinare $\angle BAC$ in modo che sia $2{,}75 < \overline{AC} + \overline{AD} < 3{,}60$.**

$11/4 < 4cos^2(x) + 2cos(x) < 18/5 \Rightarrow$

$$\begin{cases} cos(x) < -\frac{1+2\sqrt{3}}{4} \vee cos(x) > \frac{2\sqrt{3}-1}{4} \\ -\frac{5-\sqrt{385}}{20} < cos(x) < \frac{\sqrt{385}-5}{20} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} cos(x) > \frac{2\sqrt{3}-1}{4} \\ 0 < cos(x) < \frac{\sqrt{385}-5}{20} \end{cases} \Rightarrow \frac{2\sqrt{3}-1}{4} < cos(x) < \frac{\sqrt{385}-5}{20} \Rightarrow$$

Si ottengono valori compresi tra $\approx 43°1'26''$e $\approx 51°58'25''$

172. **Un punto *X* appartiene a una circonferenza, *AB* è una corda lunga 3, della stessa circonferenza scelta in modo tale che sia $\angle B\hat{A}X = 45°$. Prolunghiamo *AB* dalla parte di *B* in modo da ottenere il segmento *BC* uguale ad *AB*. Determinare $\angle B\hat{X}A$ in modo che sia $\overline{XA}^2 = 2\overline{XC}^2$.**



Intanto osserviamo che per il teorema della corda: si ha: $3 = 2r\ sin(x) \Rightarrow r = 3/[2sin(x)]$. Da cui: $\overline{XA}^2 = 4r^2 \cdot sin^2(135° - x) = 4\frac{9}{4sin^2(x)} \cdot sin^2(135° - x) = \frac{9sin^2(135° - x)}{sin^2(x)}$; e

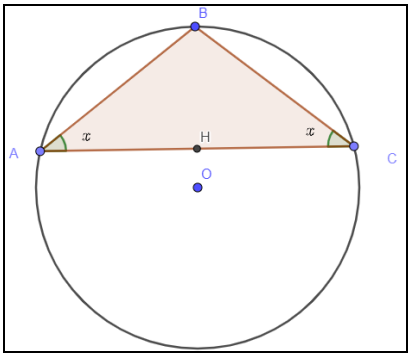
$$\overline{XC}^2 = \frac{9sin^2(135°-x)}{sin^2(x)} + 6^2 - 2 \cdot \frac{3sin(135°-x)}{sin(x)} \cdot 6 \cdot cos(45°) = \frac{9sin^2(135°-x) + 36sin^2(x) - 18\sqrt{2}sin(x) \cdot sin(135°-x)}{sin^2(x)}$$

Infine: $9sin^2(135° - x) = 18\ sin^2(135° - x) + 72\ sin^2(x) - 36\sqrt{2}\ sin(x) \cdot sin(135° - x) \Rightarrow sin^2(135° - x) + 8sin^2(x) - 4\sqrt{2}\ sin(x) \cdot sin(135° - x) = 0 \Rightarrow [\sqrt{2}/2cos(x) + \sqrt{2}/2sin(x)]^2 + 8sin^2(x) - 4\sqrt{2}\ sin(x) \cdot [\sqrt{2}/2cos(x) + \sqrt{2}/2sin(x)] = 0 \Rightarrow ½cos^2(x) + ½sin^2(x) + sin(x)cos(x) + 8sin^2(x) - 4sin(x) \cdot cos(x) - 4sin^2(x) = 0 \Rightarrow 9sin^2(x) - 6sin(x) \cdot cos(x) - cos^2(x) = 0 \Rightarrow 9tan^2(x) - 6tan(x) - 1 = 0 \Rightarrow$ $tan(x) = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{3} \Rightarrow x \approx 38°49'30''$

173. **Nel triangolo *ABC*, $\overline{AB} = 6,23cm, \overline{BC} = 3,14cm$. Sapendo che $\angle A\hat{B}C = 2 \cdot \angle B\hat{A}C$, determinare le misure degli angoli. (Servono le formule di triplicazione)**

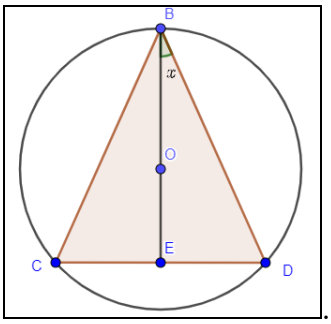
Sia $\angle B\hat{A}C = x$, per il teorema dei seni: $3,14\ sin(180° - 3x) = 6,23\ sin(x) \Rightarrow 3,14\ sin(3x) = 6,23\ sin(x) \Rightarrow 3,14\ \cancel{sin(x)} \cdot [3 - 4sin^2(x)] = 6,23\ \cancel{sin(x)} \Rightarrow 12,56sin^2(x) = 9,42 - 6,23 \Rightarrow sin^2(x) = 3,19/12,56 \Rightarrow \approx 30°; 60°; 90°$.

174. **Determinare l'angolo alla base di un triangolo isoscele ottusangolo sapendo che il raggio del cerchio circoscritto è di 2,83 *cm*, e che la differenza fra il doppio della base e il triplo dell'altezza è di 4,35 *cm*.**



$\overline{AC} = 2R\ sin(180° - 2x) = 2R\ sin(2x) = 4R\ sin(x)cos(x)$; $\overline{BH} = \frac{\overline{AC}}{2} tan(x) = 2R\ sin^2(x)$. Da cui: $8R\ sin(x)cos(x) - 6Rsin^2(x) = 4{,}35 \Rightarrow 22{,}64\ sin(x)cos(x) - 16{,}98sin^2(x) = 4{,}35 \Rightarrow 21{,}33tan^2(x) - 22{,}64tan(x) + 4{,}35 = 0 \Rightarrow x \approx 14°8'27''$ o $\approx 38°59'22''$.

175. **Un cono retto è inscritto in una sfera di raggio *R*, determinare l'ampiezza della sua apertura in modo che la sua superficie laterale sia $3/2\pi R^2$.**



Consideriamo la sezione piana in figura: . Il raggio del cono misura, usando il teorema della corda, $R\ sin(2x)$; l'apotema $2R\ sin(90° - x) = 2R\ cos(x)$. Pertanto abbiamo: $4\pi R^2\ sin(x)\ cos^2(x) = 3/2\pi R^2 \Rightarrow 8sin(x) - 8sin^3(x) - 3 = 0 \Rightarrow [2sin(x) - 1] \cdot [4sin^2(x) + 2sin(x) - 3] = 0 \Rightarrow x = 30° \vee x \approx 40°38'47''$

176. **Provare che se in un triangolo si ha $a^2 = b \cdot (b + c)$, allora si ha: $\alpha = 2\beta$.**

$$a^2 = b^2 + bc \Rightarrow cos(\alpha) = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{c^2-bc}{2bc} = \frac{c-b}{2b}; cos(\beta) = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{bc+c^2}{2ac} = \frac{b+c}{2a}.$$

Adesso: $cos(2\beta) = 2cos^2(\beta) - 1 =$

$$2\left(\frac{b+c}{2a}\right)^2 - 1 = \cancel{2}\frac{b^2+c^2+2bc}{\cancel{4}^2 a^2} - 1 = \frac{b^2+c^2+2bc-2a^2}{2a^2} = \frac{b^2+c^2-2b^2}{2a^2} = \frac{\cancel{(b+c)}(c-b)}{2b\cancel{(b+c)}} = \frac{c-b}{2b}$$

177. **Se in un triangolo si ha $\gamma = 2\alpha$, determinare una relazione fra *a*, *c* e α.**

Per il teorema dei seni: $c \cdot sin(\alpha) = a \cdot sin(\gamma)$; da $\gamma = 2\alpha \Rightarrow : c \cdot sin(\alpha) = a \cdot sin(2\alpha) \Rightarrow c = 2a \cdot cos(\alpha)$.

178. **Spiegare perché non è possibile che in un triangolo si abbia: $sin(2\alpha) > 0$, $cos(\beta + \gamma) > 0$.**

$cos(\beta + \gamma) = - cos(\alpha)$, quindi se $cos(\beta + \gamma) > 0 \Rightarrow cos(\alpha) < 0 \Rightarrow 2sin(\alpha)cos(\alpha) < 0$ (dato che il seno di angoli interni di un triangolo è sempre positivo).

Leggi della rotazione

Determinare i trasformati dei punti P rispetto alle rotazioni di centro C e angolo α indicati

179. **a) $P \equiv (0; 0)$, $C \equiv (1; 1)$, $\alpha = 45°$; b) $P \equiv (1; 2)$, $C \equiv (0; 0)$, $\alpha = 45°$**

$$a)\begin{cases} x' = 1 - cos(45°) + sin(45°) \\ y' = 1 - sin(45°) - cos(45°) \end{cases} \Rightarrow P' \equiv \left(1; 1-\sqrt{2}\right);\ b)\begin{cases} x' = cos(45°) - 2sin(45°) \\ y' = sin(45°) + 2cos(45°) \end{cases} \Rightarrow P' \equiv \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

180. **a) $P \equiv (-1; 0)$, $C \equiv (0; 0)$, $\alpha = 30°$: b) $P \equiv (-1; -2)$, $C \equiv (0; 0)$, $\alpha = 150°$**

$$a)\begin{cases} x' = -cos(30°) \\ y' = -sin(30°) \end{cases} \Rightarrow P' \equiv \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right);\ b)\begin{cases} x' = -cos(150°) + 2sin(150°) \\ y' = -sin(150°) - 2cos(150°) \end{cases} \Rightarrow P' \equiv \left(\frac{\sqrt{3}+2}{2}; \frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right)$$

181. **a) $P \equiv (2; -1)$, $C \equiv (0; 0)$, $\alpha = -45°$; b) $P \equiv (0; -1)$, $C \equiv (-1; 1)$, $\alpha = 90°$**

a) $\begin{cases} x' = 2cos(-45°) + sin(-45°) \\ y' = 2sin(-45°) - cos(-45°) \end{cases} \Rightarrow P' \equiv \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$; b) $\begin{cases} x' = -1 + cos(90°) + 2sin(90°) \\ y' = 1 + sin(90°) - 2cos(90°) \end{cases} \Rightarrow P' \equiv (1;2)$

182. **a) $P \equiv (1; 0)$, $C \equiv (0; 0)$, $\alpha = 270°$; b) $P \equiv (1; -2)$, $C \equiv (1; -1)$, $\alpha = 60°$**

a) $\begin{cases} x' = cos(270°) \\ y' = sin(270°) \end{cases} \Rightarrow P' \equiv (0;-1)$; b) $\begin{cases} x' = 1 + sin(60°) \\ y' = -1 - cos(60°) \end{cases} \Rightarrow P' \equiv \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}; -\frac{3}{2}\right)$

183. **a) $P \equiv (0; 2)$, $C \equiv (0; 0)$, $\alpha = 210°$; c) $P \equiv (0; -2)$, $C \equiv (0; 0)$, $\alpha = 240°$**

a) $\begin{cases} x' = -2sin(210°) \\ y' = 2cos(210°) \end{cases} \Rightarrow P' \equiv \left(1; -\sqrt{3}\right)$; b) $\begin{cases} x' = 2sin(240°) \\ y' = -2cos(240°) \end{cases} \Rightarrow P' \equiv \left(-\sqrt{3}; 1\right)$

184. **a) $P \equiv (3; -2)$, $C \equiv (1; 2)$, $\alpha = 120°$; b) $P \equiv (-2; -1)$, $C \equiv (2; 1)$, $\alpha = 180°$**

a) $\begin{cases} x' = 1 + 2cos(120°) + 4sin(120°) \\ y' = 2 + 2sin(120°) - 4cos(120°) \end{cases} \Rightarrow P' \equiv \left(2\sqrt{3}; 4+\sqrt{3}\right)$

b) $\begin{cases} x' = 2 - 4cos(180°) + 2sin(180°) \\ y' = 1 - 4sin(180°) - 2cos(180°) \end{cases} \Rightarrow P' \equiv (6;3)$

Determinare le equazioni delle rotazioni delle seguenti coniche rispetto all'origine di angolo α indicato

$$\begin{cases} x' = x \cdot cos(\alpha) - y \cdot sin(\alpha) \\ y' = x \cdot sin(\alpha) + y \cdot cos(\alpha) \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} x' & -sin(\alpha) \\ y' & cos(\alpha) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{vmatrix}} = x' \cdot cos(\alpha) + y' \cdot sin(\alpha),$$

Troviamo le leggi inverse:

$$y = \begin{vmatrix} cos(\alpha) & x' \\ sin(\alpha) & y' \end{vmatrix} = -x' \cdot sin(\alpha) + y' \cdot cos(\alpha) \Rightarrow \begin{cases} x = x' \cdot cos(\alpha) + y' \cdot sin(\alpha) \\ y = -x' \cdot sin(\alpha) + y' \cdot cos(\alpha) \end{cases}$$

185. **a) $x^2/9 + y^2 = 1$, $\alpha = 45°$; b) $x^2/4 - y^2 = 1$, $\alpha = -45°$; c) $x^2/16 + y^2/9 = 1$, $\alpha = 30°$**

a) $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x' + y') \end{cases} \Rightarrow \frac{(x'+y')^2}{18} + \frac{(-x'+y')^2}{2} = 1 \Rightarrow$ (non scriviamo gli apici) $5x^2 - 8xy + 5y^2 - 9 = 0$

b) $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \end{cases} \Rightarrow \frac{(x'-y')^2}{8} - \frac{(x'+y')^2}{2} = 1 \Rightarrow 3x^2 - 6xy + 3y^2 + 8 = 0;$

c) $\begin{cases} x = \sqrt{3}x'/2 + y'/2 \\ y = -x'/2 + \sqrt{3}y'/2 \end{cases} \Rightarrow 43x^2 - 14\sqrt{3}xy + 57y^2 - 576 = 0$

186. **a) $y^2 - x^2/25 = 1$, $\alpha = 150°$; b) $x^2 - y^2 = 1$, $\alpha = -135°$; c) $y = x^2$, $\alpha = 60°$**

a) $\begin{cases} x = -\sqrt{3}x'/2 + y'/2 \\ y = -x'/2 - \sqrt{3}y'/2 \end{cases} \Rightarrow ; 11x^2 + 26\sqrt{3}xy + 37y^2 - 50 = 0$

b) $\begin{cases} x = -\sqrt{2}x'/2 - \sqrt{2}y'/2 \\ y = \sqrt{2}x'/2 - \sqrt{2}y'/2 \end{cases} \Rightarrow 2xy - 1 = 0;$

c) $\begin{cases} x = x'/2 + \sqrt{3}y'/2 \\ y = -\sqrt{3}x'/2 + y'/2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + 2\sqrt{3}x - 2y = 0$

187. **a) $y = -x^2$, $\alpha = -330°$; b) $x = 2y^2 - 1$, $\alpha = -60°$; c) $y = x^2 - x + 1$, $\alpha = 150°$**

a) $\begin{cases} x = \sqrt{3}x'/2 + y'/2 \\ y = -x'/2 + \sqrt{3}y'/2 \end{cases} \Rightarrow 3x^2 + 2\sqrt{3}\,xy + y^2 - 2x + 2\sqrt{3}\,y = 0;$

b) $\begin{cases} x = x'/2 - \sqrt{3}y'/2 \\ y = \sqrt{3}x'/2 + y'/2 \end{cases} \Rightarrow;$

c) $\begin{cases} x = -\sqrt{3}x'/2 + y'/2 \\ y = -x'/2 - \sqrt{3}y'/2 \end{cases} \Rightarrow 3x^2 - 2\sqrt{3}\,xy + y^2 + (2\sqrt{3} + 1)x + (2 - 2\sqrt{3})y + 4 = 0$

188. **Tenuto conto degli esercizi precedenti, possiamo dire che l'equazione di un'ellisse canonica ruotata attorno all'origine si riconosce da quale particolarità?**
Considerando gli esercizi 184a) e 184c) possiamo dire che manca dei termini in x e y.

189. **L'equazione di un'iperbole canonica ruotata attorno all'origine si riconosce da quale particolarità?**
Stavolta sono gli esercizi 184b), 185a) e 185b) a dare la stessa conclusione precedente.

Equazioni lineari in seno e coseno

Risolvere le seguenti equazioni lineari in seno e coseno negli intervalli indicati

1. a) $3sin(x) + cos(x) = -2$; $x \in [0°; 360°]$; b) $2sin(x) - cos(x) = 2$; $x \in [-3; 0]$

a) Usando le formule parametriche: $\frac{6t + 1 - t^2}{1 + t^2} + 2 = 0 \Rightarrow t^2 + 6t + 3 = 0 \Rightarrow tan\left(\frac{x}{2}\right) = -3 \pm \sqrt{6} \Rightarrow x \approx$ $-159°12'12'' + k\,360° \vee x \approx -57°39'59'' + k\,360° \Rightarrow x \approx 122°20'1'' \vee \approx 302°20'1''$. Dobbiamo verificare che $x = 180°$ non sia soluzione. $3sin(180°) + cos(180°) = -1$. In effetti basta solo controllare che $b\,cos(180°) = c$ o $b\,cos(\pi) = c$.

b) $4t - 1 + t^2 - 2 - 2t^2 = 0 \Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow tan(x/2) = 1 \vee tan(x/2) = 3 \Rightarrow x = \pi/2 + 2k\pi \vee \approx 2{,}50 + 2k\pi$. $x = \pi + 2k\pi$ anche se fosse soluzione non appartiene a $[-3; 0]$.Non ci sono soluzioni nell'intervallo dato.

2. a) $3sin(x) + \sqrt{3}\,cos(x) = -3$; $x \in [115°; 270°]$; b) $cos(x) - \sqrt{2}\,sin(x) = 1$; $x \in [-20°; 525°]$

a) $\left(\sqrt{2} - 1\right)t^2 + 2t - \sqrt{2} - 1 = 0 \Rightarrow tan\left(\frac{x}{2}\right) = -3 - 2\sqrt{2} \vee 1 \Rightarrow x \approx -150° + k\,360° \vee x = -90° + k\,360° \Rightarrow$ $x = 210° \vee 270°$; $\sqrt{3}\,cos(180°) \neq 1$.

b) $t^2 + \sqrt{2}t = 0 \Rightarrow tan\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \vee -\sqrt{2} \Rightarrow x \approx -109°28'16'' + k360° \vee x = k360° \Rightarrow x = 0° \vee$ $\approx 250°31'44'' \vee x = 360°$. $cos(180°) \neq 1$

3. a) $3sin(x) + 4cos(x) = 2$; $x \in [-1; 2]$; b) $sin(x) + cos(x) = 1/3$; $x \in [2; 6]$;
c) $sin(x) + cos(x) + 1 = 0$; $x \in [-4; 4]$

a) $3t^2 - 3t - 1 = 0 \Rightarrow tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{6} \Rightarrow x \approx -0{,}52 + 2k\pi \vee x \approx 1{,}80 + 2k\pi \Rightarrow x \approx 0{,}52 \vee \approx 1{,}80$; π in ogni caso non fa parte di $[-1; 2]$;

b) $2t^2 - 3t - 1 = 0 \Rightarrow tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4} \Rightarrow x \approx -0{,}55 + 2k\pi \vee x \approx 2{,}12 + 2k\pi \Rightarrow x \approx 2{,}12 \vee \approx 5{,}74$; $cos(\pi) \neq 1/3$.

c) $t + 1 = 0 \Rightarrow x = -\pi/2 + 2k\pi \Rightarrow x = -\pi/2$. $cos(\pm\pi) = -1$, quindi anche $x = \pm\pi$ sono soluzioni.

4. $sin(x + 12°) + 2cos(x + 12°) = 1$; $x \in [220°; 410°]$

$3t^2 - 2t - 1 = 0 \Rightarrow tan(x/2 + 6°) = -1/3 \vee 1 \Rightarrow x/2 + 6° \approx -18°26'6'' + k\,180° \vee x/2 + 6° = 45° + k\,180°$ $\Rightarrow x \approx -48°52'12'' + k\,360° \vee x = 78° + k\,360° \Rightarrow x \approx 311°7'48''$. Dobbiamo sempre controllare se è soluzione il valore di x che fa sì che l'argomento valga 180°, in questo caso $x = 168°$: $2cos(168° + 12°) \neq 1$.

5. $6sin(3x + 27°) - 7cos(3x + 27°) = 0{,}71$; $x \in [100°; 420°]$

$6{,}29t^2 + 12t - 7{,}71 = 0 \Rightarrow 3x/2 + 13°30' \approx -67°30'32'' + k\,180° \vee \approx 26°54'28'' + k180° \Rightarrow x \approx -54°21'' + k\,120° \vee x \approx 8°56'18'' + k\,120° \Rightarrow x \approx 128°56'18'' \vee \approx 185°59'38'' \vee \approx 248°56'18'' \vee \approx 305°59'38'' \vee \approx 368°56'18''$. $7cos(180°) \neq 0{,}71$.

6. **$3sin(4x + 2°) - 7cos(4x + 2°) = -0{,}25;\ x \in [-40°; 200°]$**
$7.25t^2 + 6t - 6{,}75 = 0 \Rightarrow 2x + 1° \approx 55°39'31'' + k\,180° \vee \approx 32°27'36'' + k\,180° \Rightarrow x \approx -28°19'45'' + k\,90° \vee x \approx 15°43'48'' + k90° \Rightarrow x \approx -28°19'45'' \vee \approx 15°43'48'' \vee \approx 61°40'15'' \vee x \approx 105°43'48'' \vee x \approx 151°40'15'' \vee x \approx 195°43'48''$. $7cos(180°) \neq -0{,}25$.

7. **$sin(2x - 4°) + 3cos(2x - 4°) = 0{,}31;\ x \in [250°; 542°]$**
$3{,}31t^2 - 2t - 2{,}69 = 0 \Rightarrow x - 2° \approx -32°58'11'' + k\,180° \vee \approx 51°24'17'' + k\,180° \Rightarrow x \approx -30°58'11'' + k\,180° \vee \approx 53°24'17'' + k\,180° \Rightarrow x \approx 329°1'49'' \vee \approx 413°24'17'' \vee \approx 509°1'49''$. $3cos(180°) \neq 0{,}31$;

8. **$4sin(4x + 25°) - 3cos(4x + 25°) = 0{,}75;\ x \in [15°; 550°]$**
$9t^2 + 32t - 15 = 0 \Rightarrow tan(2x + 12°30') = \frac{-16 \pm \sqrt{391}}{9} \Rightarrow 2x + 12°30' \approx -75°52'42'' + k\,180° \vee \approx 22°44'54'' + k\,180° \Rightarrow x \approx -44°11'21'' + k90° \vee x \approx 5°7'27'' + k90°$, $1 \leq k \leq 6$. $3cos(180°) \neq 0{,}75$.

9. **$sin(2x + 35°) + 2cos(2x + 35°) + 2 = 0;\ x \in [-100°; 100°]$**
$t + 2 = 0 \Rightarrow tan(x + 17°30') = -2 \Rightarrow x + 17°30' \approx -63°26'6'' + k\,180° \Rightarrow x \approx -80°56'6'' + k\,180° \Rightarrow x \approx -80°56'6'' \vee \approx 99°3'54''$. $2cos(180°) + 2 = 0 \Rightarrow 2x + 35° = 180° \Rightarrow x = 72°30'$ è soluzione.

10. **$sin(5x - 2) + 6cos(5x - 2) = 0{,}21;\ x \in [1; 4]$**
$6{,}21t^2 + 2t + 5{,}79 = 0 \Rightarrow 5x/2 - 1 \approx -0{,}69 + k\pi \vee \approx 0{,}85 + k\pi \Rightarrow x \approx 0{,}12 + 2k\pi/5 \vee \approx 0{,}74 + 2k\pi/5 \Rightarrow x \approx 1{,}38 \vee \approx 2{,}00 \vee \approx 2{,}64 \vee \approx 3{,}25 \vee \approx 3{,}89$. $6cos(\pi) \neq 0{,}21$.

11. **$sin(3x + 2) + 4cos(3x + 2) = 0{,}75;\ x \in [-1; 2]$**
$19t^2 - 8t - 13 = 0 \Rightarrow tan\left(\frac{3}{2}x + 1\right) = \frac{4 \pm \sqrt{263}}{19} \Rightarrow 3x/2 + 1 \approx -0{,}57 + k\pi \vee \approx 0{,}82 + k\pi \Rightarrow x \approx -0{,}12 + 2k\pi/3 \vee \approx -1{,}05 + 2k\pi/3 \Rightarrow \approx -0{,}12 \vee \approx 1{,}04 \vee \approx 1{,}97$. $4cos(\pi) \neq 0{,}75$.

12. **$sin(x + 12) + 2\,cos(x + 12) = -0{,}59;\ x \in [3; 4]$**
$1{,}41t^2 - 2t + 2{,}59 = 0 \Rightarrow x/2 + 6 \approx -0{,}69 + k\pi \vee \approx 1{,}15 + k\pi \Rightarrow x \approx -13{,}38 + 2k\pi \vee \approx -9{,}70 + 2k\pi$. Non ci sono soluzioni nell'intervallo considerato. $2\,cos(\pi) \neq -0{,}59$

13. **$cos(x + \pi/4) - cos(x - \pi/3) - cos(x) = -0{,}1;\ x \in [-2; 5]$**
$\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)sin(x) + \left(3 - \sqrt{2}\right)cos(x) - 0{,}1 = 0 \Rightarrow \left(10\sqrt{2} - 31\right)t^2 + 20\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)t - 10\sqrt{2} + 29 = 0 \Rightarrow tan(x/2) \approx -0{,}22 \vee \approx 3{,}96 \Rightarrow x \approx -0{,}43 + 2k\pi \vee \approx 1{,}45 + 2k\pi \Rightarrow x \approx -0{,}43 \vee \approx 1{,}45$. $x = \pi + k\pi$ non è soluzione.

14. **$sin(x + \pi/3) + cos(x - \pi/6) = 1;\ x \in [-2; 3]$**
$sin(x) + \sqrt{3}cos(x) - 1 = 0 \Rightarrow \left(1 + \sqrt{3}\right)t^2 - 2t + 1 - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{3} - 2 \vee 1 \Rightarrow x = -\pi/6 + 2k\pi \vee \pi/2 + 2k\pi \Rightarrow x = -\pi/6 \vee \pi/2$. $x = \pi + k\pi$ non è soluzione.

15. **$cos(x + \pi/4) - cos(x) + sin(x) + 0{,}25 = 0;\ x \in [-3; 1]$**
$\left(4 - 2\sqrt{2}\right)sin(x) + \left(2\sqrt{2} - 4\right)cos(x) + 1 = 0 \Rightarrow \left(5 - 2\sqrt{2}\right)t^2 - 4\left(\sqrt{2} - 2\right)t + +2\sqrt{2} - 3 = 0 \Rightarrow tan(x/2) \approx -1{,}15 \vee \approx 0{,}07 \Rightarrow x \approx -1{,}71 + 2k\pi \vee \approx 0{,}14 + 2k\pi \Rightarrow x \approx -1{,}71 \vee \approx 0{,}14$. $x = \pi + k\pi$ non è soluzione.

16. **$sin(x + \pi/3) - sin(x) - 3cos(x) - 0{,}23 = 0;\ x \in [1; 4]$**
$sin(x) + \left(6 - \sqrt{3}\right)cos(x) + 0{,}46 = 0 \Rightarrow tan(x/2) \approx -0{,}88 \vee \approx 1{,}41 \Rightarrow x \approx -1{,}44 + 2k\pi \vee \approx 1{,}91 + 2k\pi \Rightarrow x \approx 1{,}91$. $x = \pi + k\pi$ non è soluzione.

17. **Sotto quale condizione sui parametri a, b e c, l'equazione $a \cdot sin(x) + b \cdot cos(x) + c = 0$, ha come una delle sue soluzioni $x = \pi + 2k\pi$?**
$a \cdot sin(\pi + 2k\pi) + b \cdot cos(\pi + 2k\pi) + c = 0 \Rightarrow -b + c = 0 \Rightarrow b = c$.

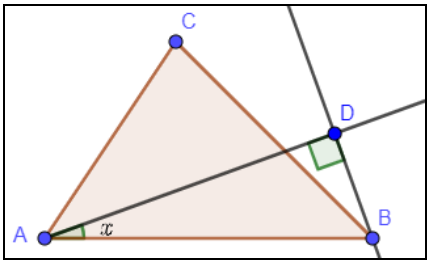
18. **Con riferimento al precedente quesito, in che relazione sono a e $b = c$, se $x = \pi + 2k\pi$ è l'unica soluzione?**
$a \cdot sin(\pi + 2k\pi) + b \cdot cos(\pi + 2k\pi) + b = 0 \Rightarrow 0 = 0$, che effettivamente è soluzione. Vogliamo però che sia l'unica soluzione. L'equazione $a \cdot sin(x) + b \cdot cos(x) + b = 0$ diventa $a \cdot tan(x/2) + b = 0 \Rightarrow tan(x/2) = -b/a$, $x = tan^{-1}(-b/a) + 2k\pi$, quindi non è possibile che l'unica soluzione sia $x = \pi + 2k\pi$.

19. Dimostrare che l'equazione $sin(x) + cos(x) = a$, ammette soluzioni solo se $-\sqrt{2} \le a \le \sqrt{2}$.
Con le formule parametriche l'equazione diventa: $2t + 1 - t^2 - a - at^2 = 0 \Rightarrow (a + 1)t^2 - 2t + a - 1 = 0$, che ha soluzioni solo se $\Delta/4 = 1 - (a^2 - 1) = 2 - a^2 \ge 0 \Rightarrow -\sqrt{2} \le a \le \sqrt{2}$

Risolvere i seguenti problemi

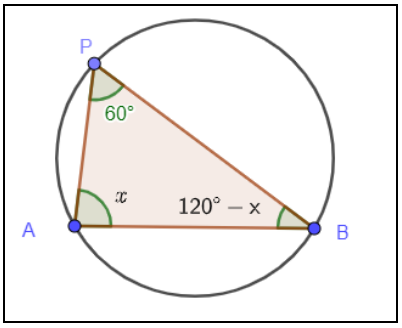
20. Sia M un punto su una semicirconferenza di centro O e diametro AB. Determinare il valore dell'angolo $M\hat{A}B$ in modo che sia $\overline{AM} + 4\overline{BM} = 4\overline{AB}$.
$\overline{AB}\, cos(x) + 4\,\overline{AB}\, sin(x) = 4\,\overline{AB} \Rightarrow 4sin(x) + cos(x) - 4 = 0 \Rightarrow 5tan^2(x/2) - 8tan(x/2) + 3 = 0 \Rightarrow tan(x/2) = 3/5 \vee 1 = 0 \Rightarrow x \approx 61°55'39'' \vee 90°$, ovviamente la seconda soluzione non è accettabile.

21. Il lato AB di un triangolo ABC è lungo 5. Si tracci una semiretta di vertice A interna al triangolo, sia D la proiezione di B sulla detta semiretta. Determinare la misura di $D\hat{A}B$ in modo che sia $\overline{AD} + 2\overline{BD} = 2\overline{AB}$.



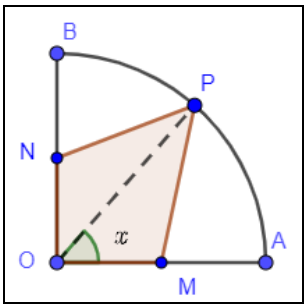
$5cos(x) + 10sin(x) = 10 \Rightarrow 2sin(x) + cos(x) - 2 = 0 \Rightarrow 3tan^2(x) - 4tan(x/2) + 1 = 0 \Rightarrow tan(x/2) = 1/3 \vee tan(x/2) = 1 \Rightarrow x \approx 36°52'12'' \vee x = 90°$ (non accettabile).

22. Dato un cerchio di raggio che misura r, si consideri su di esso una corda AB uguale al lato del triangolo equilatero inscritto nella circonferenza. Dato un punto P sull'arco maggiore AB, determinare $\angle P\hat{A}B$ in modo che sia $\overline{AP} + \overline{PB} = 2r$.



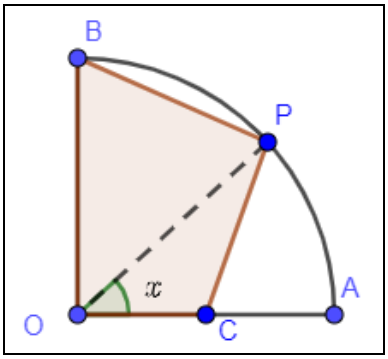
$2r\, sin(120° - x) + 2r\, sin(x) = 2r \Rightarrow \sqrt{3}/2cos(x) + ½\, sin(x) + sin(x) - 1 = 0 \Rightarrow + 3sin(x) + \sqrt{3}\, cos(x) - 2 = 0 \Rightarrow \left(\sqrt{3}+2\right)tan^2\left(x/2\right) - 6tan\left(x/2\right) - \sqrt{3} + 2 = 0 \Rightarrow x \approx 5°15'52'' \vee \approx 114°44'8''$

23. Sia P un punto sull'arco AB, quarta parte di un cerchio di centro O e raggio r. Determinare $\angle AOP$ in modo che l'area del quadrilatero $NOMP$ (M e N punti medi di OA e OB) sia $5r^2/16$.



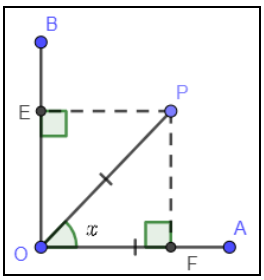
Dividiamo il quadrilatero in due triangoli mediante il raggio OP, la sua area misura: $½\, r/2 \cdot r\, sin(90° - x) + ½\, r/2 \cdot r\, sin(x) = ¼\, r^2 \cdot [cos(x) + sin(x)]$, quindi l'equazione risolutrice è: $cos(x) + sin(x) = 5/4 \Rightarrow 9tan^2(x) - 8tan(x/2) + 1 = 0 \Rightarrow tan\left(x/2\right) = \dfrac{4 \pm \sqrt{7}}{9} \Rightarrow x \approx 17°6'52'' \vee \approx 72°53'8''$.

24. Si consideri un punto P su un quarto di cerchio di raggio 1 cm, di centro O ed estremi A e B. Determinare i valori che deve assumere l'angolo $C\hat{O}P = x$, in modo che il quadrilatero $OCPB$, con C punto medio di OA, abbia area maggiore di 0,42.



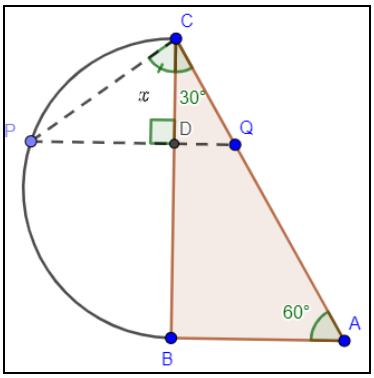
Ripetendo quanto visto nel precedente: ½ $cos(x)$ + ¼ $sin(x)$ > 0,42 ⇒ $sin(x) + 2cos(x) - 1{,}68 > 0 \Rightarrow 3{,}68tan^2(x/2) - 2tan(x/2) - 0{,}32 > 0 \Rightarrow \approx 67°51'37'' < x < 90°$

25. I due segmenti *OA* e *OB* sono fra loro ortogonali e lunghi rispettivamente 3,26 *cm* e 3,56 *cm*. Sia *P* un punto interno all'angolo tale che sia $\overline{OP} = \overline{OA}$. Determinare $\angle AOP$ in modo che si abbia $2\overline{PE} + 3\overline{PF} = 3\overline{OB}$, in cui $\overline{PE}$ è la distanza di *P* da *OB* e $\overline{PF}$ la distanza di *P* da *OA*. Ci sono dati inutili?



$2 \cdot 3{,}26\ cos(x) + 3 \cdot 3{,}26\ sin(x) = 3 \cdot 3{,}26 \Rightarrow 2cos(x) + 3sin(x) = 3 \Rightarrow 5tan^2(x/2) - 6tan(x/2) + 1 = 0 \Rightarrow tan(x/2) = 1/5 \vee 1 \Rightarrow x \approx 22°37'12''$, non accettiamo la soluzione $x = 90°$. Le misure di *OA* e *OB* non le abbiamo usate.

26. Nel triangolo *ABC*, rettangolo in *B*, l'angolo acuto di vertice *C* è di 30°. Tracciata la semicirconferenza di diametro *BC*, esterna al triangolo, sia su di essa un punto *P* e sia *Q* l'intersezione della perpendicolare per *P* a *BC* con l'ipotenusa *AC*. Determinare $\angle P\hat{C}B$ in modo che si abbia $\overline{CQ} + \overline{QP} = 2\overline{CP}$.

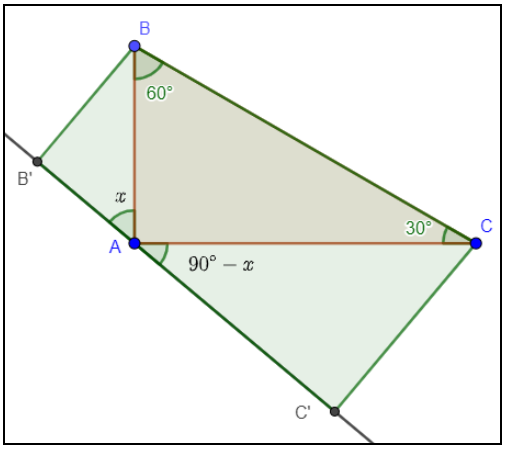


Per il teorema dei seni:

$$\frac{\overline{CQ}}{sin(90°-x)} = \frac{\overline{QP}}{sin(30°+x)} = \frac{\overline{CP}}{sin(60°)} \Rightarrow \overline{CQ} = \frac{2\overline{CP} \cdot cos(x)}{\sqrt{3}}; \overline{QP} = \frac{2\overline{CP} \cdot sin(30°+x)}{\sqrt{3}}$$

L'equazione risolvente diviene: $\frac{2cos(x)}{\sqrt{3}} + \frac{2sin(30°+x)}{\sqrt{3}} = 2 \Rightarrow cos(x) + ½\ cos(x) + \sqrt{3}/2sin(x) - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \sqrt{3}\,sin(x) + 3cos(x) - 2\sqrt{3} = 0 \Rightarrow 3sin(x) + 3\sqrt{3}\,cos(x) - 6 = 0 \Rightarrow \left(3\sqrt{3}+6\right)tan^2(x/2) - 6tan(x/2) + 6 - 3\sqrt{3} = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow tan(x/2) = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow x = 30°$.

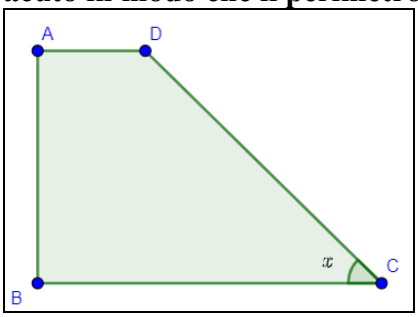
27. Sia il triangolo rettangolo *ABC* con angoli acuti di 60° e 30° e l'ipotenusa *BC* lunga 4,90 *cm*. Per *A*, conduciamo una retta *s* esterna al triangolo e siano *B'* e *C'* le proiezioni ortogonali di *B* e *C* su di essa. Determinare le misure dei due angoli che i cateti formano con *s*, sapendo che il perimetro del trapezio *BCC'B'* è 14 *cm*.



$\overline{AC} = 4,90 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} cm = 2,45\sqrt{3}\, cm; \overline{AB} = \frac{4,90}{2} cm = 2,45\, cm$,

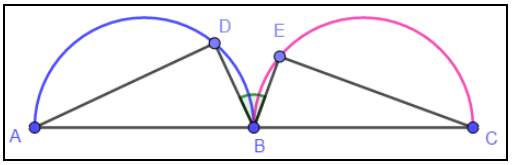
quindi l'equazione risolvente è: $4,90 + 2,45\sqrt{3}\,[cos(x) + sin(x)] + 2,45\,[cos(x) + sin(x)] = 14 \Rightarrow 2,45 \cdot (\sqrt{3} + 1)\, sin(x) + 2,45 \cdot (\sqrt{3} + 1)\, cos(x) - 9,10 = 0 \Rightarrow x \approx 29°50'' \vee \approx 60°59'10''$.

28. Un trapezio rettangolo ha basi lunghe 2,74 *cm* e 8,75 *cm*. Determinare la misura del suo angolo acuto in modo che il perimetro sia lungo 25,81 *cm*.



$2,74 + 8,75 + (8,75 - 2,74)/cos(x) + (8,75 - 2,74)tan(x) = 25,81 \Rightarrow 6,01sin(x) - 14,32cos(x) + 6,01 = 0 \Rightarrow 20,33\, tan^2(x/2) + 12,02\, tan(x/2) - 8,31 = 0 \Rightarrow tan(x/2) = -1 \vee 16,62/40,66 \Rightarrow x \approx 44°27'54''$

29. Due semicirconferenze di diametri uguali *AB* e *BC*, sono tangenti esternamente in *B*. Presi i punti *D* sulla prima ed *E* sulla seconda in modo che $C\hat{B}E = 45°$. Calcolare la misura di $D\hat{B}A$ in modo che sia $2\overline{BD} + 3\overline{ED} = 4\overline{AB}$.



Riferendoci alla figura chiamiamo per esempio $\angle D\hat{B}A = x$ avremo: $\angle C\hat{B}E = 180° - (45° + x) = 135° - x$. Quindi sfruttando il fatto che i triangoli ADB e BEC sono rettangoli abbiamo: $2\overline{BD} + 3\overline{EC} = 2\overline{AB} \Rightarrow 2\overline{AB} \cdot cos(x) + 3\overline{BC} \cdot sin(135° - x) = 4\overline{AB}$, tenuto conto che $\overline{AB} = \overline{BC}$ l'equazione diviene: $2cos(x) + 3sin(135° - x) = 4 \Rightarrow 2cos(x) + 3sin(135°)cos(x) - 3cos(135°)sin(x) = 4 \Rightarrow$

$$2cos(x) + 3\frac{\sqrt{2}}{2}cos(x) + 3\frac{\sqrt{2}}{2}sin(x) - 4 = 0 \Rightarrow \left(4 + 3\sqrt{2}\right)cos(x) + 3\sqrt{2}sin(x) - 8 = 0$$

E' un'equazione lineare non omogenea che si risolve per esempio usando le formule parametriche:

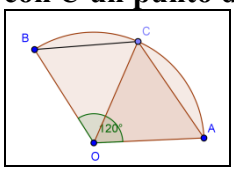
$$\left(4 + 3\sqrt{2}\right)\frac{1 - t^2}{1 + t^2} + 3\sqrt{2}\frac{2t}{1 + t^2} - 8 = 0 \Rightarrow 4 + 3\sqrt{2} - \left(4 + 3\sqrt{2}\right)t^2 + 6\sqrt{2}t - 8 - 8t^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(12 + 3\sqrt{2}\right)t^2 - 6\sqrt{2}t + 4 - 3\sqrt{2} = 0 \Rightarrow \left(12\sqrt{2} + 6\right)t^2 - 12t + 4\sqrt{2} - 6 = 0 \Rightarrow \left(6\sqrt{2} + 3\right)t^2 - 6t + 2\sqrt{2} - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 12\sqrt{2} - 15}}{4\sqrt{2} + 3} = \frac{3 \pm \sqrt{12\sqrt{2} - 6}}{4\sqrt{2} + 3} \prec \begin{matrix} \approx 0.55 \\ \approx -0.027 \end{matrix}$$

Ovviamente non accettiamo la soluzione negativa perché fornisce un angolo ottuso. Quindi: $x \approx 2 \cdot tan^{-1}(0.55) \approx 57°37'18''$

30. Dato un settore circolare in cui l'angolo al centro *AOB* è di 120°, determinare la misura di $A\hat{O}C$, con *C* un punto dell'arco *AB*, tale che il rapporto fra i perimetri dei triangoli *AOC* e *COB* sia 3/5.



Indichiamo con x la misura di AOC, quindi usando il teorema della corda per determinare le misure di AC e BC, otteniamo: $\frac{2r+2r\cdot sin(x/2)}{2r+2r\cdot sin(60°-x/2)}=\frac{3}{5}\Rightarrow$ $5 + 5sin(x/2) = 3 + 3sin(60° - x/2) \Rightarrow$ $2+5sin(x/2)-\frac{3\sqrt{3}}{2}cos(x/2)-\frac{3}{2}sin(x/2)=0\Rightarrow$ $7sin(x/2) - 3\sqrt{3}\,cos(x/2) + 4 = 0$

$\Rightarrow \frac{14t}{1+t^2}-\frac{3\sqrt{3}\cdot(1-t^2)}{1+t^2}+4=0\Rightarrow(4+3\sqrt{3})t^2+14t+4-3\sqrt{3}=0\Rightarrow tan\left(\frac{x}{2}\right)\approx 0,081\Rightarrow$ $x/2 \approx 4°37'51"$ $\Rightarrow x\approx 9°15'42"$.

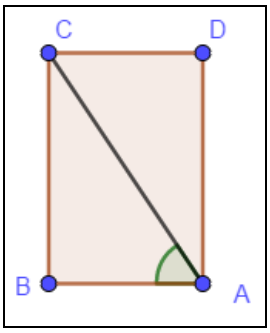
31. Il trapezio rettangolo *ABCD* ha retti gli angoli di vertici *A* e *D*, la base minore *AB* e il lato obliquo *BC* sono lunghi rispettivamente 3 *cm* e 4 *cm*. Determinare le misure degli angoli non retti, sapendo che il rapporto fra la somma delle basi e la somma dei rimanenti lati è 7/8.

Chiamiamo x la misura dell'angolo acuto, abbiamo:

$\frac{3+\overline{CD}}{4+\overline{AD}}=\frac{7}{8}\Rightarrow\frac{3+[3+4cos(x)]}{4+4sin(x)}=\frac{7}{8}\Rightarrow\frac{6+4cos(x)}{1+sin(x)}=\frac{7}{2}\Rightarrow$ $12 + 8cos(x) = 7 + 7sin(x) \Rightarrow 7sin(x) - 8cos(x) - 5 = 0 \Rightarrow$ $\frac{14t}{1+t^2}-8\frac{1-t^2}{1+t^2}-5=0\Rightarrow 14t - 8 + 8t^2 - 5 - 5t^2 = 0 \Rightarrow 3t^2 + 14t - 13 = 0 \Rightarrow$

$tan\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{-7+2\sqrt{22}}{3}\Rightarrow x/2\approx 38°26'9"\Rightarrow x\approx 76°52'18"$, l'altro misura $\approx 103°7'42"$

32. Sia *d* la misura della diagonale *AC* del rettangolo *ABCD*; determinare l'angolo che essa forma con la base *AB* in modo che valga la relazione $\overline{AB}+2\overline{BC}=\sqrt{3}d$.



Chiamiamo x questo angolo. Abbiamo:

$$\overline{AB}+2\cdot\overline{BC}=\sqrt{3}\cdot d\Rightarrow d\cdot cos(x)+2d\cdot sin(x)=\sqrt{3}d\Rightarrow cos(x)+2sin(x)-\sqrt{3}=0$$

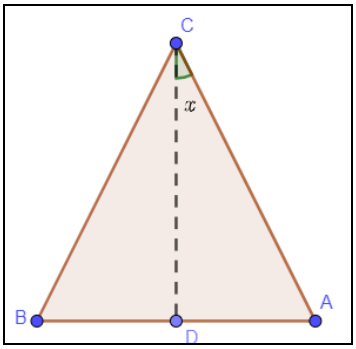
Usiamo sempre le formule parametriche:

$$\frac{1-t^2}{1+t^2}+2\frac{2t}{1+t^2}-\sqrt{3}=0\Rightarrow 1-t^2+4t-\sqrt{3}-\sqrt{3}t^2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(1+\sqrt{3})t^2-4t+\sqrt{3}-1=0\Rightarrow t=\frac{2\pm\sqrt{4-2}}{1+\sqrt{3}}=\frac{2\pm\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$$

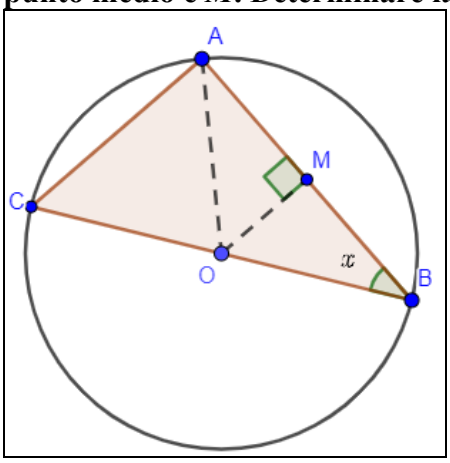
Quindi: $x=2tan^{-1}\left(\frac{2\pm\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}\right)\prec\begin{matrix}\approx 102°39'59"(N.A.)\\ \approx 24°12'12"\end{matrix}$

33. Calcolare l'ampiezza 2*x* dell'angolo al vertice di un triangolo isoscele, dato il rapporto ¼ tra l'altezza relativa alla base e il perimetro.



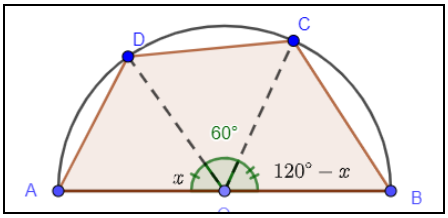
$$\frac{\overline{CH}}{2tan(x)\cdot\overline{CH}+2\overline{CH}/cos(x)}=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{cos(x)}{2sin(x)+2}=\frac{1}{4}\Rightarrow sin(x)+1-2cos(x)=0\Rightarrow sin(x)-2cos(x)+1=0\Rightarrow 3tan^2(x/2)+2tan(x/2)-1=0\Rightarrow tan(x/2)=-1\vee 1/39\Rightarrow 2x\approx 73°44'23''$$

34. È data una circonferenza di centro *O* e raggio lungo 3 *cm*, della quale sia *AB* una corda il cui punto medio è *M*. Determinare la lunghezza di tale corda in modo che sia $\overline{AB}+\overline{OM}=2\overline{OA}$.



OM appartiene all'asse di *AB*, come è noto dalle proprietà della circonferenza. Pertanto: l'equazione risolvente è $6cos(x)+3sin(x)=6\Rightarrow 2cos(x)+sin(x)=2\Rightarrow 2tan^2(x/2)-tan(x/2)=0\Rightarrow tan(x/2)=½\Rightarrow x\approx 53°7'48''\Rightarrow \overline{AB}=3{,}6\ cm$.

35. Il diametro *AB* di una semicirconferenza di centro *O* misura 6 *cm* e il quadrilatero *ABCD* in essa inscritto ha il lato *CD* lungo 3 *cm*. Determinare $\angle D\hat{O}A$, in modo che sia $\frac{\overline{AD}^2+\overline{BC}^2}{\overline{AB}+\overline{CD}}=2$.



CD misura quanto il raggio: il triangolo *COD* è equilatero, quindi gli angoli di vertici *O* misurano quanto indicato in figura. $\frac{[6sin(x/2)]^2+[6sin(60°-x/2)]^2}{6+3}=2\Rightarrow$

$36sin^2(x/2)+36sin^2(60°-x/2)=18\Rightarrow 2sin^2(x/2)+2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}cos\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}sin\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2-1=0\Rightarrow 2sin^2(x/2)+3/2cos^2(x/2)+½\ sin^2(x/2)-\sqrt{3}\,sin(x/2)cos(x/2)-sin^2(x/2)-cos^2(x/2)=0\Rightarrow 3sin^2(x/2)-2\sqrt{3}\,sin(x/2)cos(x/2)+cos^2(x/2)=0\Rightarrow 3tan^2(x/2)-2\sqrt{3}\,tan(x/2)+1=0\Rightarrow tan(x/2)=\sqrt{3}/3\Rightarrow x=60°$.

36. Con riferimento al problema 19, stabilire se esso ha soluzioni, al variare del parametro reale $k\neq 0$, nel caso: a) $\overline{AM}+k\overline{BM}=k\overline{AB}$; b) $\overline{AM}+k\overline{BM}=4\overline{AB}$.

a) $k\ sin(x)+cos(x)-k=0\Rightarrow(k+1)tan^2(x/2)-2k\ tan(x/2)+k-1=0\Rightarrow\Delta/4=k^2-(k^2-1)=1$, quindi ha sempre soluzioni, per ogni k ed esse sono: $tan(x/2)=1$ (Non accettabile) e $tan(x/2)=(k-1)/(k+1)$, che va bene per ogni $k\neq 1$.

b) $k\ sin(x) + cos(x) - 4 = 0 \Rightarrow 5tan^2(x/2) - 2k\ tan(x/2) + 3 = 0 \Rightarrow \Delta/4 = k^2 - 15 \geq 0 \Rightarrow$ $k \leq -\sqrt{15} \vee k \geq \sqrt{15}$, le soluzioni reali sono: $tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{k \pm \sqrt{k^2-15}}{5}$, non sono accettabili i valori per cui le soluzioni valgono 1, questo accade per $k = 4$ per la soluzione $\frac{k+\sqrt{k^2-15}}{5}$, mentre l'altra non vale mai 1. Per $k = 4$ otteniamo l'esercizio 19.

37. Con riferimento al problema precedente, nel caso b) quando esistono due angoli soluzione?

Abbiamo visto che per $k \leq -\sqrt{15} \vee k \geq \sqrt{15}, k \neq 4$ l'equazione ha due soluzioni, perché vi siano gli angoli acuti devono però essere due soluzioni positive, il che accade solo per $k \geq \sqrt{15}$.

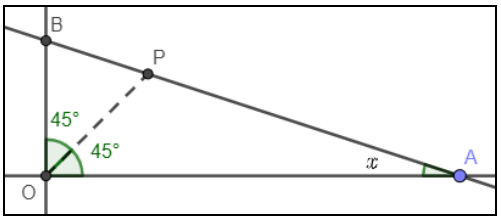
38. Con riferimento al problema 30 Se il rapporto è *k*, per quali valori il problema ha soluzioni?

$\frac{6+4cos(x)}{4+4sin(x)} = k \Rightarrow 6 + 4cos(x) = 4k + 4k \cdot sin(x) \Rightarrow 4k \cdot sin(x) - 4cos(x) + 4k - 6 = 0 \Rightarrow$

$\frac{4kt}{1+t^2} - 4\frac{1-t^2}{1+t^2} + 4k - 6 = 0 \Rightarrow 4kt - 4 + 4t^2 + 4k + 4k \cdot t^2 - 6 - 6t^2 = 0 \Rightarrow (2k-1)\ t^2 + 2k\ t + 2k - 5 = 0$

$\Rightarrow \Delta/4 = k^2 - (2k-1)(2k-5) = -3k^2 + 12k - 5 \geq 0 \Rightarrow \frac{6-\sqrt{21}}{3} \leq k \leq \frac{6+\sqrt{21}}{3}$

39. E' dato l'angolo retto *xOy* ed il punto *P* della sua bisettrice per il quale $\overline{OP}$ = 1 condurre per *P* una trasversale in modo che dette *A* e *B* le sue intersezioni con i lati *Ox* e *Oy* si abbia. $\frac{1}{\overline{PA}} + \frac{1}{\overline{PB}} = 2$. Calcolare $\angle P\hat{A}O$.



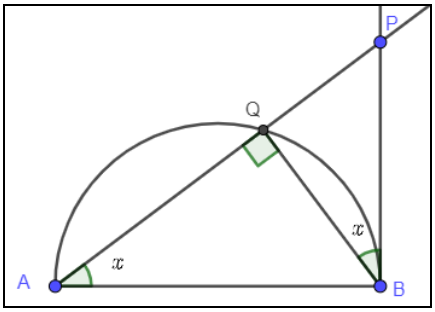
Abbiamo: $\angle O\hat{P}A = 135° - x; \angle B\hat{P}O = 45° + x; \angle O\hat{B}P = 90° - x$, da cui, usando il teorema dei seni: $\frac{sin(x)}{sin(45°)} + \frac{sin(90°-x)}{sin(45°)} = 2 \Rightarrow \sqrt{2}\ sin(x) + \sqrt{2}\ cos(x) - 2 = 0 \Rightarrow$ $sin(x) + cos(x) - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow (\sqrt{2} + 1)tan^2(x/2) - 2tan(x/2) + \sqrt{2} - 1 = 0 \Rightarrow tan(x/2) = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow x =$ 45°.

40. Con riferimento al precedente quesito. Studiare la soluzione di $\frac{1}{\overline{PA}} + \frac{1}{\overline{PB}} = k$ al variare di *k* > 0.

L'equazione risolvente è: $2sin(x) + 2cos(x) - k\sqrt{2} = 0 \Rightarrow (k\sqrt{2} + 2)tan^2(x/2) - 4tan(x/2) + k\sqrt{2} - 2 =$ $0 \Rightarrow \Delta/4 = 8 - 2k^2 \geq 0$ e $k > 0 \Rightarrow 0 < k \leq 2$. In questo caso le soluzioni sono: $tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2 \pm \sqrt{8-2k^2}}{2+\sqrt{2}k}$, dobbiamo controllare che nessuna di queste soluzioni valga 1.

Si ha: $\frac{2+\sqrt{8-2k^2}}{2+\sqrt{2}k} = 1 \Rightarrow k = \sqrt{2}; \frac{2-\sqrt{8-2k^2}}{2+\sqrt{2}k} = 1 \Rightarrow \varnothing$. Vediamo cosa accade per $k = \sqrt{2}$, l'altra soluzione vale: $\frac{2-2}{2+2} = 0$, quindi nessuna soluzione. Infine deve essere: $0 < k \leq 2, k \neq \sqrt{2}$.

41. È data la semicirconferenza di diametro *AB* lungo 2*r* e la semiretta *t* tangente in *B* e giacente nel medesimo semipiano della semicirconferenza rispetto alla retta *AB*. Dato su *t* un punto *P*, determinare $\angle B\hat{A}P$ in modo che, detta *Q* l'ulteriore intersezione della retta *AP* con la semicirconferenza, si abbia: $2\overline{BQ} + 3\overline{PQ} = 3\overline{BP}$.

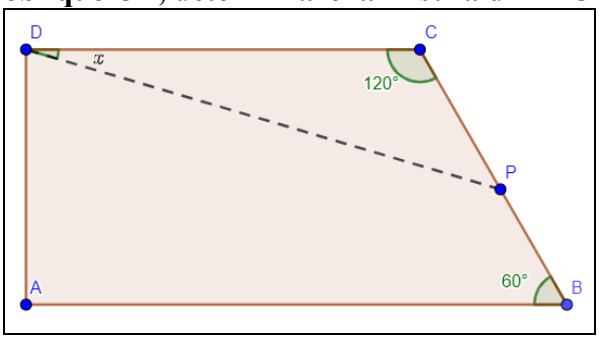


$2 \cdot 2r\,sin(x) + 3 \cdot [2r\,sin(x)] \cdot tan(x) = 3 \cdot 2r\,tan(x) \Rightarrow 2sin(x)cos(x) + 3sin^2(x) - 3sin(x) = 0 \Rightarrow 3sin(x) + 2cos(x) - 3 = 0 \Rightarrow 5tan^2(x/2) - 6tan(x/2) + 1 = 0 \Rightarrow tan(x/2) = 1/5 \vee 1 \Rightarrow x = 90°$ (NA) $\vee \approx 22°37'12''$

42. Con riferimento al precedente quesito. Studiare la soluzione di $2\overline{BQ}+3\overline{PQ}=k\overline{BP}$ al variare di *k* > 0.

$3sin(x) + 2cos(x) - k = 0 \Rightarrow (k+2)tan^2(x/2) - 6tan(x/2) + 2 - k = 0 \Rightarrow \Delta/4 = tan(x/2) = 1/5 \vee 1 \Rightarrow x = 90°$ (NA) $\vee \approx 22°37'12''$

43. Nel trapezio *ABCD* rettangolo in *A* e *D*, l'angolo di vertice *B* è di 60°. Dato un punto *P* sul lato obliquo *CB*, determinare la misura di $P\hat{D}C$ in modo che si abbia $\overline{DP}+\overline{CP}=2\overline{DC}$.



Per il teorema dei seni:

$\overline{CP}=\overline{DP}\cdot\frac{sin(x)}{sin(120°)}=\frac{2\overline{DP}sin(x)}{\sqrt{3}};\overline{DC}=\overline{DP}\cdot\frac{sin(60°-x)}{sin(120°)}=\frac{2\overline{DP}sin(60°-x)}{\sqrt{3}}$, quindi l'equazione risolutiva è: $\cancel{\overline{DP}}+\frac{2\cancel{\overline{DP}}sin(x)}{\sqrt{3}}=\frac{4\cancel{\overline{DP}}sin(60°-x)}{\sqrt{3}}\Rightarrow\sqrt{3}+2sin(x)-2\sqrt{3}cos(x)+2sin(x)=0\Rightarrow$ $4\sqrt{3}\,sin(x) - 6cos(x) + 3 = 0 \Rightarrow 9tan^2(x/2) + 8\sqrt{3}\,tan(x/2) - 3 = 0 \Rightarrow tan(x/2) = -\sqrt{3} \vee /9\sqrt{3} \Rightarrow x \approx 21°47'12''$.

Formule di prostaferesi e di Werner

Verificare quali fra le seguenti uguaglianze sono identità nel loro insieme di definizione, usando Le formule di prostaferesi

1. a) $\frac{cos(x)+cos(y)}{cos(x)-cos(y)}=\frac{cot\left(\frac{x+y}{2}\right)}{tan\left(\frac{x-y}{2}\right)}$ **; b)** $\frac{sin(x)+sin(y)}{cos(x)+cos(y)}=\frac{cos(y)-cos(x)}{sin(x)-sin(y)}$

a) Applicando le formule di prostaferesi: $\frac{\cancel{2}cos\left(\frac{x+y}{2}\right)cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}{-\cancel{2}sin\left(\frac{x+y}{2}\right)sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}=-\frac{cot\left(\frac{x+y}{2}\right)}{tan\left(\frac{x-y}{2}\right)}$, quindi non è un'dentità.

b) $\dfrac{\cancel{2}sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cancel{cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}}{\cancel{2}cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cancel{cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}}=\dfrac{\cancel{-2}sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cancel{sin\left(\frac{y-x}{2}\right)}}{\cancel{2}\cancel{sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}cos\left(\frac{x+y}{2}\right)}\Rightarrow tan\left(\frac{x+y}{2}\right)=tan\left(\frac{x+y}{2}\right)$ è un'identità.

Abbiamo usato l'identità $-sin\left(\frac{y-x}{2}\right)=sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

2. **a)** $\dfrac{sin(x)+sin(y)}{cos(y)-cos(x)}=\dfrac{cos(x)+cos(y)}{sin(x)-sin(y)}$**; b)** $tan(\alpha)+tan(\beta)=\dfrac{sin(\alpha+\beta)}{sin(\alpha)sin(\beta)}$

a) $\dfrac{\cancel{2sin\left(\frac{x+y}{2}\right)}cos\left(\frac{y-x}{2}\right)}{\cancel{-2sin\left(\frac{x+y}{2}\right)}sin\left(\frac{y-x}{2}\right)}=\dfrac{\cancel{2}\cancel{cos\left(\frac{x+y}{2}\right)}cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}{\cancel{2}sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cancel{cos\left(\frac{x+y}{2}\right)}}\Rightarrow -cot\left(\frac{y-x}{2}\right)=cot\left(\frac{x-y}{2}\right)$. Identità.

b) $\dfrac{sin(\alpha)cos(\beta)+cos(\alpha)sin(\beta)}{sin(\alpha)\cdot sin(\beta)}=\dfrac{\cancel{sin(\alpha)}cos(\beta)}{\cancel{sin(\alpha)}sin(\beta)}+\dfrac{cos(\alpha)\cancel{sin(\beta)}}{sin(\alpha)\cancel{sin(\beta)}}=cot(\alpha)+cot(\beta)$, non è identità.

3. **a)** $tan(\alpha)-tan(\beta)=\dfrac{sin(\alpha-\beta)}{cos(\alpha)cos(\beta)}$**; b)** $\boldsymbol{sin(x)\,cos(45°+x)+cos(x)\,sin(45°+x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

a) $\dfrac{sin(\alpha)cos(\beta)-cos(\alpha)sin(\beta)}{cos(\alpha)cos(\beta)}=\dfrac{sin(\alpha)\cancel{cos(\beta)}}{cos(\alpha)\cancel{cos(\beta)}}-\dfrac{\cancel{cos(\alpha)}sin(\beta)}{\cancel{cos(\alpha)}cos(\beta)}=tan(\alpha)-tan(\beta)$. Identità.

b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}sin(x)[cos(x)-sin(x)]+\dfrac{\sqrt{2}}{2}cos(x)\,[cos(x)+sin(x)]=\sqrt{2}\;sin(x)cos(x)+\dfrac{\sqrt{2}}{2}[cos^2(x)-sin^2(x)]\neq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Non è identità.

Le formule di Werner

4. $\boldsymbol{cos(27°+x)\,cos(18°-x)-sin(27°+x)\,sin(18°-x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

$\frac{1}{2}\cdot[cos(27°+18°)+cos(27°-18°-2x)]-\frac{1}{2}\cdot[cos(27°+18°)-cos(27°-18°-2x)]=cos(27°+18°)=cos(45°)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Identità.

5. $\boldsymbol{cos(13°+x)\,cos(47°-x)-sin(47°+x)\,sin(13°-x)=\frac{1}{2}}$

$cos(13°+47°)=cos(60°)=\frac{1}{2}$

6. **a)** $\boldsymbol{sin^2(x)-sin^2(y)-sin(x+y)\cdot sin(x-y)=0}$**; b)** $\boldsymbol{cos^2(x)+cos^2(y)-cos(x+y)\cdot cos(x-y)=0}$

a) $sin^2(x)-sin^2(y)-\frac{1}{2}\cdot[cos(2y)-cos(2x)]=sin^2(x)-sin^2(y)-\frac{1}{2}\cdot[1-2sin^2(y)-1+2sin^2(x)]=0$;

b) $cos^2(x)+cos^2(y)-\frac{1}{2}\cdot[cos(2y)+cos(2x)]=cos^2(x)+cos^2(y)-\frac{1}{2}\cdot[2cos^2(y)-1+2cos^2(x)-1]=1$

Senza l'uso della calcolatrice calcolare o semplificare le seguenti espressioni

7. **a)** $\dfrac{1}{2cos(10°)}-2cos(70°)$**; b)** $\dfrac{1}{2sin(20°)}+2cos(50°)$**; c)** $\dfrac{\sqrt{2}}{2sin(52°30')}-2cos(7°30')$

a) $\dfrac{1-4cos(10°)cos(70°)}{2cos(10°)}=\dfrac{1-2\left[cos(60°)+cos(80°)\right]}{2cos(10°)}=\dfrac{1-1-2\cdot sin(10°)}{2cos(10°)}=-tan(10°)$;

b) $\frac{1+4sin(20°)cos(50°)}{2sin(20°)}=\frac{1+2\cdot[sin(-30°)+sin(70°)]}{2sin(20°)}=\frac{1-1+2sin(70°)}{2sin(20°)}=\frac{cos(20°)}{sin(20°)}=cot(20°)$;

c) $\frac{\sqrt{2}-4sin(52°30')cos(7°30')}{2sin(52°30')}=\frac{\sqrt{2}-2[sin(45°)+sin(60°)]}{2sin(52°30')}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2sin(52°30')}=-\frac{\sqrt{3}}{2sin(52°30')}$

8. **a) *sin*(10°)*sin*(20°) – *cos*(10°)*cos*(20°); b) *sin*²(58°) – *sin*²(32°) – *cos*(64°)**

a) ½ [*cos*(10°) – *cos*(30°)] – ½ [*cos*(10°) + *cos*(30°)] = – *cos*(30°) = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

b) [*sin*(58°) – *sin*(32°)] · [*sin*(58°) + *sin*(32°)] – *cos*(64°) = 2*sin*(13°)*cos*(45°) · 2*cos*(13°)*sin*(45°) – *cos*(64°) = 2*sin*(13°) *cos*(13°) · 2 · ½ – *cos*(64°) = *sin*(26°) – *cos*(64°) = 0

9. **a) *cos*(74°)*cos*(29°) + *sin*(74°)*sin*(29°); b) *cos*²(22°30′) – *cos*²(67°30′);**
c) *cos*²(17°) – *cos*²(73°) – *cos*(34°)

a) ½ [*cos*(45°) + *cos*(103°)] + ½ [*cos*(45°) – *cos*(103°)] = $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

b) [*cos*(22°30′) – *cos*(67°30′)] · [*cos*(22°30′) + *cos*(67°30′)] = –4*cos*(22°30')*cos*(45°)*sin*(22°30')*sin*(–45°) = *sin*(45°) · 2 · ½ = $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

c) [*cos*(17°) – *cos*(73°)] · [*cos*(17°) + *cos*(73°)] – *cos*(34°) = –4*cos*(45°)*cos*(28°)*sin*(28°)*sin*(–45°) – *cos*(34°) = *sin*(56°) – *cos*(34°) = 0

10. **a) *sin*(20°)*sin*(25°) + *cos*(20°)*sin*(25°); b) *sin*(58°)*cos*(28°) – *cos*(58°)*sin*(28°)**

a) ½ [*cos*(5°) – *cos*(45°)] + ½ [*sin*(5°) + *sin*(45°)] = ½ [*cos*(5°) + *sin*(5°)] = ½ [*sin*(85°) + *sin*(5°)] = *sin*(45°)*cos*(40°) = $\frac{\sqrt{2}}{2}cos(80°)$

b) ½ [*sin*(30°) + *sin*(86°)] – ½ [*sin*(–30°) + *sin*(86°)] = ½

11. **a)** $\frac{sin(\pi/9)+sin(2\pi/9)+sin(4\pi/9)+sin(5\pi/9)}{cos(\pi/9)+cos(2\pi/9)+cos(4\pi/9)+cos(5\pi/9)}$ **; b) *cos*(π/8) + *cos*(3π/8) + *cos*(5π/8) + *cos*(7π/8)**

a) $\frac{\cancel{2}sin(\pi/6)\,\cancel{cos(\pi/18)}+\cancel{2}sin(\pi/2)\,\cancel{cos(\pi/18)}}{\cancel{2}cos(\pi/6)\,\cancel{cos(\pi/18)}+\cancel{2}cos(\pi/2)\,\cancel{cos(\pi/18)}}=\frac{1/2+1}{\sqrt{3}/2+0}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

b) 2*cos*(π/4)*cos*(π/8) + 2*cos*(3π/4)*cos*(π/8) = 2*cos*(π/4)*cos*(π/8) – 2*cos*(π/4)*cos*(π/8) = 0

12. ***sin*(π/8) + *sin*(3π/8) + *sin*(5π/8) + *sin*(7π/8)**

2*sin*(π/4)*cos*(π/8) + 2*sin*(3π/4)*cos*(π/8) = 4*sin*(π/4)*cos*(π/8) =

$$\left[\sqrt{4+2\cdot\sqrt{2}}\right]\cancel{4}^{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\cdot\sqrt{\frac{1+cos(\pi/4)}{2}}=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}=\cancel{2}\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\cancel{2}}=\sqrt{4+2\sqrt{2}}$$

13. **Affinché possa calcolarsi senza calcolatrice il valore esatto di *sin*(α)*sin*(β) – *cos*(α)*cos*(β), dobbiamo conoscere il valore di quale espressione?**

sin(α)*sin*(β) – *cos*(α)*cos*(β) = ½ [*cos*(α – β) – *cos*(α + β)] – ½ [*cos*(α – β) + *cos*(α + β)] = –*cos*(α + β)

Determinare la minima soluzione positiva delle seguenti equazioni

14. **a) *cos*(81°) + *cos*(39°) = *cos*(*x*); b) *sin*(21°) + *sin*(39°) = *cos*(*x*); c) *sin*(72°) – *sin*(48°) = *sin*(*x*)**

a) 2*cos*(60°)*cos*(20°) = *cos*(*x*) ⇒ *cos*(20°) = *cos*(*x*) ⇒ *x* = 20°;

b) 2*sin*(30°)*cos*(9°) = *cos*(*x*) ⇒ *cos*(9°) = *cos*(*x*) ⇒ *x* = 9°;

c) 2*sin*(12°)*cos*(60°) = *sin*(*x*) ⇒ *sin*(12°) = *sin*(*x*) ⇒ *x* = 12°.

15. **a) *sin*(63°) – *sin*(3°) = *cos*(*x*); b) *sin*(65°) – *cos*(35°) = *sin*(*x*); c) *sin*(84°) – *cos*(54°) = *cos*(*x*)**

a) 2*sin*(30°)*cos*(33°) = *cos*(*x*) ⇒ *x* = 33°;

b) *sin*(65°) – *sin*(55°) = *sin*(*x*) ⇒ 2*sin*(5°)*cos*(60°) = *sin*(*x*) ⇒ *x* = 5°;

c) *sin*(84°) – *sin*(36°) = *cos*(*x*) ⇒ 2*sin*(24°)*cos*(60°) = *cos*(*x*) ⇒ *sin*(24°) = *cos*(*x*) ⇒ *cos*(66°) = *cos*(*x*) ⇒ *x* = 66°

16. **Verificare che in un triangolo si ha: 4*R cos*(α/2)*cos*(β/2)*cos*(γ/2) = *sin*(α) + *sin*(β) + *sin*(γ).**

Abbiamo: $sin(\alpha) + sin(\beta) + sin(\gamma) = sin(\alpha) + sin(\beta) + sin(180° - \alpha - \beta) = sin(\alpha) + sin(\beta) + sin(\alpha + \beta)$. Adesso applichiamo le formule di prostaferesi alla prima somma e la formula di duplicazione al terzo addendo:

$$2sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+2sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=2sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\left[cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right]$$

Applichiamo ancora una formula di prostaferesi:

$$2sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot 2cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)cos\left(\frac{\beta}{2}\right)=4sin\left(\frac{180°-\gamma}{2}\right)cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)cos\left(\frac{\beta}{2}\right)=$$

$$=4sin\left(90°-\frac{\gamma}{2}\right)cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)cos\left(\frac{\beta}{2}\right)=4cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)cos\left(\frac{\beta}{2}\right)cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

Risolvere le seguenti equazioni negli intervalli indicati

17. **a)** $\frac{cos(5x)-cos(3x)}{sin(5x)+sin(3x)}=-\frac{7}{3}$, $\boldsymbol{x \in [-94°; 216°]}$; **b)** $\frac{sin(7x)-sin(x)}{cos(7x)+cos(x)}=\frac{4}{3}$, $\boldsymbol{x \in [-74°; 167°]}$

a) Applichiamo le formule di prostaferesi:

$$\frac{-\cancel{2sin\left(\frac{5x+3x}{2}\right)}sin\left(\frac{5x-3x}{2}\right)}{\cancel{2sin\left(\frac{5x+3x}{2}\right)}cos\left(\frac{5x-3x}{2}\right)}=-\frac{7}{3}\Rightarrow tan(x)=\frac{7}{3}\Rightarrow x\approx 66°48'5''+k180°$$

. L'unica soluzione appartenente all'intervallo dato è $\approx 66°48'5''$.

b) Applichiamo le formule di prostaferesi:

$$\frac{\cancel{2}sin\left(\frac{7x-x}{2}\right)\cancel{cos\left(\frac{7x+x}{2}\right)}}{\cancel{2}\cancel{cos\left(\frac{7x+x}{2}\right)}cos\left(\frac{7x-x}{2}\right)}=\frac{4}{3}\Rightarrow tan(3x)=\frac{4}{3}\Rightarrow 3x\approx 53°7'48''+k180°\Rightarrow x\approx 17°42'36''+k60°$$

. Le soluzioni accettabili sono: $\approx -42°17'24'' \vee \approx 17°42'36'' \vee \approx 77°42'36'' \vee \approx 137°42'36''$

18. **a)** $\frac{sin(10x)+sin(4x)}{cos(10x)-cos(4x)}=-\frac{3}{4}$, $\boldsymbol{x \in [-27°; 168°]}$; **b)** $\frac{sin(12x)-sin(6x)}{cos(12x)-cos(6x)}=-5$, $\boldsymbol{x \in [-30°; 29°]}$

a) $$\frac{\cancel{2sin\left(\frac{10x+4x}{2}\right)}cos\left(\frac{10x-4x}{2}\right)}{-\cancel{2sin\left(\frac{10x+4x}{2}\right)}sin\left(\frac{10x-4x}{2}\right)}=-\frac{3}{4}\Rightarrow 3x\approx 53°7'48''+k180°\Rightarrow x\approx 17°42'36''+k60°.\Rightarrow\approx$$

$17°42'36'' \vee \approx 77°42'36'' \vee \approx 137°42'36''$.

b) $$\frac{\cancel{2sin\left(\frac{12x-6x}{2}\right)}cos\left(\frac{12x+6x}{2}\right)}{-\cancel{2sin\left(\frac{12x-6x}{2}\right)}sin\left(\frac{12x+6x}{2}\right)}=-5\Rightarrow cot(9x)=5\Rightarrow 9x\approx 11°18'36''+k180°\Rightarrow x\approx 1°15'24''+$$

$k20° \Rightarrow x \approx -18°44'36'' \vee \approx 1°15'24'' \vee \approx 21°15'24''$

19. **a)** $\frac{cos(9x)+cos(3x)}{sin(9x)-sin(3x)}=9$, $\boldsymbol{x \in [105°; 229°]}$; **b)** $\frac{cos(5x)-cos(2x)}{sin(5x)-sin(2x)}=5$, $\boldsymbol{x \in [-45°; 109°]}$

a) $$\frac{\cancel{2cos\left(\frac{9x+3x}{2}\right)}cos\left(\frac{9x-3x}{2}\right)}{\cancel{2cos\left(\frac{9x+3x}{2}\right)}sin\left(\frac{9x-3x}{2}\right)}=9\Rightarrow cot(3x)=9\Rightarrow 3x\approx 6°20'25''+k180°\Rightarrow x\approx 2°6'48''+k30°\Rightarrow$$

$\approx 22°6'48'' \vee 152°6'48'' \vee 182°6'48'' \vee 212°6'48''$

b) $\dfrac{-2\cancel{sin\left(\frac{5x-2x}{2}\right)}sin\left(\frac{5x+2x}{2}\right)}{2\cancel{sin\left(\frac{5x-2x}{2}\right)}cos\left(\frac{5x+2x}{2}\right)}=5 \Rightarrow$ $tan(7x/2) = -5 \Rightarrow 7x/2 \approx -78°41'24" + k180° \Rightarrow x \approx -$

$22°28'58" + k51°25'43" \Rightarrow x \approx -22°28'58' \vee 28°56'45" \vee 80°22'28"$

20. **a)** $\dfrac{sin(4x)+sin(3x)}{cos(4x)-cos(3x)}=3$, **$x \in$ [–71°; 291°]; b)** $\dfrac{cos(5x)+cos(7x)}{sin(5x)+sin(7x)}=-\dfrac{2}{3}$, **$x \in$ [–8°; 90°]**

a) $\dfrac{2\cancel{sin\left(\frac{4x+3x}{2}\right)}cos\left(\frac{4x-3x}{2}\right)}{-2\cancel{sin\left(\frac{4x+3x}{2}\right)}sin\left(\frac{4x-3x}{2}\right)}=3 \Rightarrow$ $cot(x/2) = -3 \Rightarrow x \approx 323°7'48" + k360° \Rightarrow x \approx -36°52'12''$

b) $\dfrac{2\cancel{cos\left(\frac{7x-5x}{2}\right)}cos\left(\frac{7x+5x}{2}\right)}{2\cancel{cos\left(\frac{7x-5x}{2}\right)}sin\left(\frac{7x+5x}{2}\right)}=-\dfrac{2}{3} \Rightarrow$ $cot(6x) = -2/3 \Rightarrow 6x \approx 123°41'24" + k180° \Rightarrow x \approx$

$20°36'54'' + k30° \Rightarrow x \approx 20°36'54'' \vee \approx 50°36'54'' \vee \approx 80°36'54''$

21. **a)** $\dfrac{cos(12x)-cos(7x)}{sin(12x)-sin(7x)}=\dfrac{11}{3}$, **$x \in$ [–9°; 48°]; b)** $\dfrac{cos(13x)-cos(17x)}{sin(13x)+sin(17x)}=-\dfrac{14}{5}$, **$x \in$ [–84°; 214°]**

a) $\dfrac{-2\cancel{sin\left(\frac{12x-7x}{2}\right)}sin\left(\frac{12x+7x}{2}\right)}{2\cancel{sin\left(\frac{12x-7x}{2}\right)}cos\left(\frac{12x+7x}{2}\right)}=\dfrac{11}{3} \Rightarrow$ $tan(19x/2) = -11/3 \Rightarrow 19x/2 \approx -74°44'42" + k180° \Rightarrow x$

$\approx -7°52'4'' + k18°56'51" \Rightarrow x \approx -7°52'4'' \vee \approx 11°4'46'' \vee \approx 30°1'38''$

b) $\dfrac{-2\cancel{sin\left(\frac{13x+17x}{2}\right)}sin\left(\frac{13x-17x}{2}\right)}{2\cancel{sin\left(\frac{13x+17x}{2}\right)}cos\left(\frac{13x-17x}{2}\right)}=-\dfrac{14}{5} \Rightarrow$ $tan(2x) = -14/5 \Rightarrow 2x \approx -70°20'46" + k180° \Rightarrow x \approx -$

$35°10'23'' + k90° \Rightarrow x \approx -35°10'23'' \vee \approx 54°49'37'' \vee \approx 144°49'37''$

22. **a)** $\dfrac{sin(14x)-sin(7x)}{cos(14x)+cos(7x)}=\dfrac{15}{4}$, $x \in [-74°; 35°]$**$\in$ [–74°; 35°] b)** $\dfrac{sin(\sqrt{2}x)-sin(\sqrt{3}x)}{cos(\sqrt{2}x)+cos(\sqrt{3}x)}=\dfrac{1}{4}$, **$x \in$ [–50°; 84°]**

a) $\dfrac{2\cancel{cos\left(\frac{14x+7x}{2}\right)}sin\left(\frac{14x-7x}{2}\right)}{2\cancel{cos\left(\frac{14x+7x}{2}\right)}cos\left(\frac{14x-7x}{2}\right)}=\dfrac{15}{4} \Rightarrow tan(7x/2) = 15/4 \Rightarrow 7x/2 \approx 75°4'7" + k180° \Rightarrow x \approx$

$21°26'53" + k51°25'43" \Rightarrow x \approx -29°58'50'' \vee \approx 21°26'53''$

b) $\dfrac{2\cancel{cos\left(\frac{\sqrt{2}x+\sqrt{3}x}{2}\right)}sin\left(\frac{\sqrt{2}x-\sqrt{3}x}{2}\right)}{2\cancel{cos\left(\frac{\sqrt{2}x+\sqrt{3}x}{2}\right)}cos\left(\frac{\sqrt{2}x-\sqrt{3}x}{2}\right)}=\dfrac{1}{4} \Rightarrow tan\left(\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}x\right)=\dfrac{1}{4} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}x \approx 14°2'10" + k180°$

$\Rightarrow x \approx -88°19'21" + k-1132°39'18" \Rightarrow \varnothing$

***Risolvere le seguenti disequazioni in* [0°; 360°]**

Livello 2

23. **a)** $\frac{sin(8x)+sin(2x)}{cos(8x)-cos(2x)}>\sqrt{3}$ **; b)** $\frac{sin(7x)-sin(x)}{cos(7x)+cos(x)}<\frac{\sqrt{3}}{3}$

a) $\frac{\cancel{2sin\left(\frac{8x+2x}{2}\right)}cos\left(\frac{8x-2x}{2}\right)}{-\cancel{2sin\left(\frac{8x+2x}{2}\right)}sin\left(\frac{8x-2x}{2}\right)}>\sqrt{3}\Rightarrow cot(3x)<-\sqrt{3}\Rightarrow 150°+k180°<3x<180°+k180°\Rightarrow$

$50°+k60°<x<60°+k60°,\ 0\le k\le 5.$

b) $\frac{\cancel{2cos\left(\frac{7x+x}{2}\right)}sin\left(\frac{7x-x}{2}\right)}{\cancel{2cos\left(\frac{7x+x}{2}\right)}cos\left(\frac{7x-x}{2}\right)}<\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow tan(3x)<\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow -90°+k180°<3x<30°+k180°\Rightarrow 0°\le x<$

$10°\vee -30°+k60°<x<10°+k60°,\ 1\le k\le 4\vee 300°<x\le 360°$

24. **a)** $\frac{sin(10x)+sin(4x)}{cos(10x)-cos(4x)}>-\sqrt{3}$ **; b)** $\frac{sin(12x)-sin(6x)}{cos(12x)-cos(6x)}<-1$

a) $\frac{\cancel{2sin\left(\frac{10x+4x}{2}\right)}cos\left(\frac{10x-4x}{2}\right)}{-\cancel{2sin\left(\frac{10x+4x}{2}\right)}sin\left(\frac{10x-4x}{2}\right)}>-\sqrt{3}\Rightarrow cot(3x)<\sqrt{3}\Rightarrow 30°+k180°<3x<180°+k180°\Rightarrow$

$10°+k60°<x<60°+k60°,\ 0\le k\le 5.$

b) $\frac{\cancel{2sin\left(\frac{12x-6x}{2}\right)}cos\left(\frac{12x+6x}{2}\right)}{-\cancel{2sin\left(\frac{12x-6x}{2}\right)}sin\left(\frac{12x+6x}{2}\right)}<-1\Rightarrow cot(9x)>1\Rightarrow\ k180°<9x<45°+k180°\Rightarrow k20°<x<5°$

$+k20°,\ 0\le k\le 17.$

25. **a)** $\frac{cos(5x)-cos(3x)}{sin(5x)+sin(3x)}>1$ **; b)** $\frac{cos(9x)+cos(3x)}{sin(9x)-sin(3x)}<0$

a) $\frac{-\cancel{2sin\left(\frac{5x+3x}{2}\right)}sin\left(\frac{5x-3x}{2}\right)}{\cancel{2sin\left(\frac{5x+3x}{2}\right)}cos\left(\frac{5x-3x}{2}\right)}>1\Rightarrow\ tan(x)<-1\Rightarrow 90°<x<135°\vee 270°<x<315°.$

b) $\frac{\cancel{2cos\left(\frac{9x+3x}{2}\right)}cos\left(\frac{9x-3x}{2}\right)}{\cancel{2cos\left(\frac{9x+3x}{2}\right)}sin\left(\frac{9x-3x}{2}\right)}<0\Rightarrow\ cot(3x)<0\Rightarrow 90°+k180°<3x<180°+k180°\Rightarrow 30°+$

$k60°<x<60°+k60°,\ 0\le k\le 5.$

***Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni nell'intervallo* [0°; 360°]**

26. ***cos*(2*x*) + *cos*(3*x*) + *cos*(4*x*) = 0**

Possiamo applicare in tre diversi modi la formula di prostaferesi, ottenendo le seguenti equazioni: $2cos(5x/2)cos(x/2)+cos(4x)=0$; $2cos(3x)cos(x)+cos(3x)=0$; $2cos(7x/2)cos(x/2)+cos(2x)=0$. È facile capire che conviene scegliere la seconda di queste perché in essa vi è un fattore comune. Quindi: $cos(3x)\cdot[2cos(x)+1]=0\Rightarrow cos(3x)=0\vee cos(x)=-1/2\Rightarrow(3x=90°+k\ 180°,\ 0\le k\le 2)\vee(x=120°$

$\vee\ x = 240°) \Rightarrow (x = 30° + k60°,\ 0 \le k \le 2) \vee (x = 120° \vee x = 240°) \Rightarrow x = 30° \vee 90° \vee 120° \vee 150° \vee 210° \vee 240° \vee 270° \vee 330°$.

27. $\boldsymbol{sin(x) - sin(2x) + sin(3x) = 0}$

Tenuto conto dell'esercizio precedente usiamo prostaferesi fra primo e terzo addendo: $2sin(2x)cos(x) - sin(2x) = 0 \Rightarrow sin(2x) \cdot [2cos(x) - 1] = 0 \Rightarrow sin(2x) = 0 \vee cos(x) = 1/2 \Rightarrow (2x = k180°,\ 0 \le k \le 3) \vee (x = 60° \vee x = 300°) \Rightarrow (x = k90°,\ 0 \le k \le 3) \vee (x = 60° \vee x = 300°) \Rightarrow x = 0° \vee 60° \vee 90° \vee 180° \vee 270° \vee 300° \vee 360°$

28. $\boldsymbol{cos(x) - cos(3x) + sin(2x) = 0}$

$-2sin(2x)sin(-x) + sin(2x) = 0 \Rightarrow sin(2x) \cdot [1 + 2sin(x)] = 0 \Rightarrow sin(2x) = 0 \vee sin(x) = -½ \Rightarrow 2x = k180° \vee x = 210° \vee 330° \Rightarrow x = 0° \vee 90° \vee 180° \vee 210° \vee 270° \vee 330° \vee 360°$

29. $\boldsymbol{cos(3x) - sin(5x) + sin(x) = 0}$

$cos(3x) - 2sin(2x)cos(3x) = 0 \Rightarrow cos(3x) \cdot [1 - 2sin(2x)] = 0 \Rightarrow cos(3x) = 0 \vee sin(2x) = ½ \Rightarrow 3x = 90° + k180° \vee 2x = 30° + k360° \vee 2x = 150° + k360° \Rightarrow x = 30° + k60° \vee x = 15° + k180° \vee x = 75° + k180° \Rightarrow x = 30° \vee 90° \vee 150° \vee 210° \vee 270° \vee 330° \vee 15° \vee 75° \vee 195° \vee 255°$

30. $\boldsymbol{cos(4x) + cos(8x) + sin(4x)cos(6x) = 0}$

$2cos(6x)cos(2x) + sin(4x)cos(6x) = 0 \Rightarrow cos(6x) \cdot [2cos(2x) + sin(4x)] = 0 \Rightarrow cos(6x) = 0 \vee 2cos(2x) + 2sin(2x)cos(2x) = 0 \Rightarrow 6x = 90° + k180° \vee cos(2x) = 0 \vee sin(2x) = -1 \Rightarrow x = 15° + k30° \vee 2x = 90° + k180° \vee 2x = 270° + k360° \Rightarrow x = 15° + k30°,\ 0 \le k \le 11 \vee x = 45° + k90° \vee x = 135° + k180°$. Osserviamo che le ultime due equazioni hanno soluzioni già contenute in quelle della prima.

31. $\boldsymbol{sin(8x) - sin(4x) - sin(4x)cos(6x) = 0}$

$2sin(2x)cos(6x) - sin(4x)cos(6x) = 0 \Rightarrow cos(6x) \cdot [2\ sin(2x) - sin(4x)] = 0 \Rightarrow cos(6x) = 0 \vee 2sin(2x) - 2sin(2x)cos(2x) = 0 \Rightarrow 6x = 90° + k180° \vee sin(2x) = 0 \vee cos(2x) = ½ \Rightarrow x = 15° + k30° \vee 2x = k180° \vee 2x = 60° + k360° \vee 2x = 300° + k360° \Rightarrow x = 15° + k30°,\ 0 \le k \le 11 \vee x = k90° \vee x = 30° + k180° \vee x = 150° + k180° \Rightarrow x = 15° + k30°,\ 0 \le k \le 11 \vee (0° \vee 90° \vee 180° \vee 270° \vee 360°) \vee (30° \vee 210°) \vee (150° \vee 330°) \Rightarrow x = 15° + k30°,\ 0 \le k \le 11 \vee (0° \vee 90° \vee 180° \vee 270° \vee 360°)$

32. $\boldsymbol{cos(6x) - cos(4x) + sin(2x)sin(5x) = 0}$

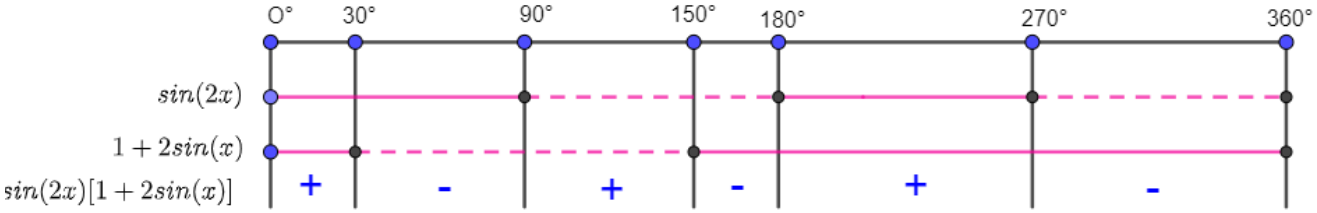
Applichiamo prostaferesi: $-2sin(5x)sin(x) + sin(2x)sin(5x) = 0 \Rightarrow sin(5x) \cdot [-2sin(x) + sin(2x)] = 0 \Rightarrow sin(5x) = 0 \vee -2sin(x) + 2sin(x)cos(x) = 0 \Rightarrow 5x = k180° \vee sin(x) \cdot [-1 + cos(x)] = 0 \Rightarrow x = k36° \vee sin(x) = 0 \vee cos(x) = 1 \Rightarrow x = k36°,\ 0 \le k \le 10 \vee (x = 0° \vee x = 180° \vee x = 360°) \vee x = 0°$. Eliminando le soluzioni che si ripetono: $x = k36°,\ 0 \le k \le 10$

33. $\boldsymbol{sin(4x) + sin(6x) - sin(2x)sin(5x) = 0}$

Applichiamo prostaferesi: $2sin(5x)cos(x) - sin(2x)sin(5x) = 0 \Rightarrow sin(5x) \cdot [2cos(x) - sin(2x)] = 0 \Rightarrow sin(5x) = 0 \vee 2cos(x) - 2sin(x)cos(x) = 0 \Rightarrow 5x = k180° \vee cos(x) \cdot [1 - sin(x)] = 0 \Rightarrow x = k36° \vee cos(x) = 0 \vee sin(x) = 1 \Rightarrow x = k36°,\ 0 \le k \le 10 \vee (x = 90° \vee x = 270°) \vee x = 90°$. Eliminando le soluzioni che si ripetono: $x = k36°,\ 0 \le k \le 10 \vee 90° \vee 270°$

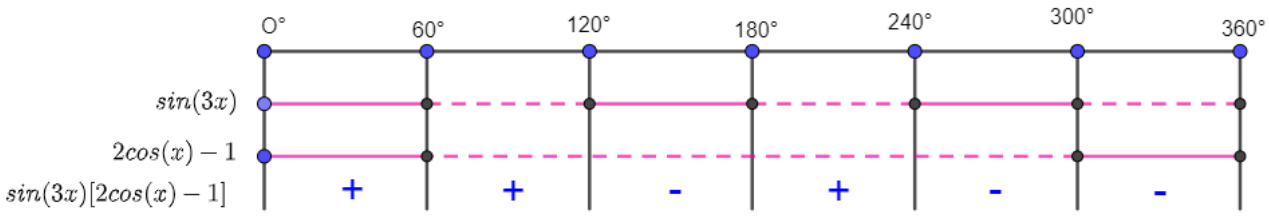
34. $\boldsymbol{sin(2x) - cos(x) + cos(3x) < 0}$

$sin(2x) - 2sin(2x)sin(x) < 0 \Rightarrow sin(2x) \cdot [1 - 2sin(x)] < 0 \Rightarrow sin(2x) > 0 \Rightarrow k360° < 2x < 180° + k360° \Rightarrow k180° < x < 90° + k180°,\ 0 \le k \le 1$. $1 - 2sin(x) > 0 \Rightarrow sin(x) < ½ \Rightarrow 0° \le x < 30° \vee 150° < x \le 360°$. Soluzioni: $30° < x < 90° \vee 150° < x < 180° \vee 270° < x < 360°$



35. $\boldsymbol{sin(2x) - sin(3x) + sin(4x) < 0}$

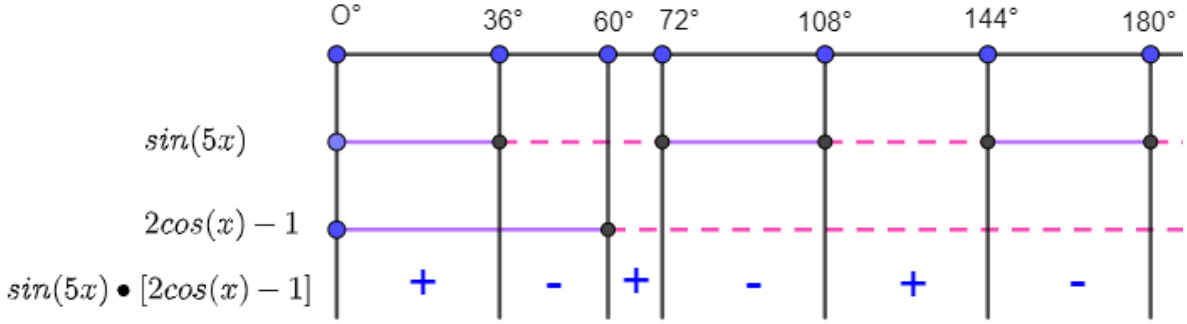
$2sin(3x)cos(x) - sin(3x) < 0 \Rightarrow sin(3x) \cdot [2cos(x) - 1] < 0 \Rightarrow sin(3x) > 0 \Rightarrow k360° < 3x < 180° + k360° \Rightarrow k120° < x < 60° + k120°,\ 0 \le k \le 2$. $2cos(x) - 1 > 0 \Rightarrow cos(x) > ½ \Rightarrow 0° \le x < 60° \vee 300° < x \le 360°$. Soluzioni:$[120° < x < 180° \vee 240° < x < 360° \vee x \ne 300°$



***In* [0°; 180°]**

36. ***sin*(4*x*) – *sin*(5*x*) + *sin*(6*x*) > 0**

Applichiamo prostaferesi al primo e terzo addendo: $2sin(5x)cos(x) – sin(5x) > 0 \Rightarrow sin(5x) \cdot [2cos(x) – 1] > 0$. Studiamo i segni dei due fattori: $sin(5x) > 0 \Rightarrow k360° < 5x < 180° + k360° \Rightarrow k72° < x < 36° + k72°$, $0 \le k \le 4$. $2cos(x) – 1 > 0 \Rightarrow cos(x) > ½ \Rightarrow 0° < x < 60°$.



Le soluzioni sono: $0° < x < 36° \vee 60° < x < 72° \vee 108° < x < 144°$.

37. ***sin*(4*x*) – *sin*(8*x*) + $\sqrt{3}$ *sin*(2*x*) ≤ 0**

$–2sin(2x)cos(6x) + \sqrt{3}\, sin(2x) \le 0 \Rightarrow sin(2x)[–2cos(6x) + \sqrt{3}\,] \le 0 \Rightarrow sin(2x) \ge 0 \Rightarrow k360° < 2x < 180° + k360° \Rightarrow k180° \le x \le 90° + k180°$, $0 \le k \le 1$. $–cos(6x) + \sqrt{3}/2 \ \ge\ 0 \Rightarrow cos(6x) \le \sqrt{3}/2 \Rightarrow 30° + k360° \le 6x \le 330° + k360° \Rightarrow 5° + k60° \le x \le 55° + k60°$, $0 \le k \le 2$. Soluzioni: $0° \le x \le 5° \vee 55° \le x \le 65° \vee 90° \le x \le 115° \vee 115° \le x \le 175°$

38. ***sin*(3*x*) + *sin*(7*x*) + $\sqrt{2}$ *sin*(5*x*) = 0**

$2sin(5x)cos(2x) + \sqrt{2}\, sin(5x) = 0 \Rightarrow sin(5x)[2cos(2x) + \sqrt{2}\,] = 0 \Rightarrow sin(5x) = 0 \ \vee\ cos(2x) = –\sqrt{2}/2 \Rightarrow 5x = k180° \vee 2x = 135° + k360° \vee 2x = 225° + k360° \Rightarrow x = k36° \vee x = 67°30' + k180° \vee x = 112°30' + k180° \Rightarrow$ Soluzioni: $x = 0° \vee 67°30' \vee 72° \vee 112°30' \vee 144°$

39. ***cos*(5*x*) – *cos*(3*x*) + *sin*(2*x*) = 0**

$–2sin(4x)sin(x) + sin(2x) = 0 \Rightarrow –2sin(4x)sin(x) + 2sin(x)cos(x) = 0 \Rightarrow sin(x)[cos(x) – sin(4x)] = 0 \Rightarrow sin(x) = 0 \ \vee\ sin(90° – x) – sin(4x) = 0 \Rightarrow x = 0° \vee 180° \vee 2sin(45° – 5x/2)cos(45° + 3x/2) = 0 \Rightarrow x = 0° \vee 180° \vee 45° – 5x/2 = k180° \vee 45° + 3x/2 = 90° + k180° \Rightarrow x = 0° \vee 180° \vee x = 18° + k72° \vee x = 30° + k120° \Rightarrow$ Soluzioni: $x = 0° \vee 18° \vee 30° \vee 90° \vee 150° \vee 162° \vee 180°$

40. ***cos* (11*x*) + *cos*(7*x*) – 2*cos*(9*x*) ≥ 0**

$2cos(9x)cos(2x) – 2cos(9x) \ge 0 \Rightarrow cos(9x)[cos(2x) – 1] \ge 0 \Rightarrow cos(9x) \ge 0 \Rightarrow –90° + k360° < 9x < 90° + k360° \Rightarrow –10° + k40° \le x \le 10° + k40°$. $cos(2x) \ge 1 \Rightarrow cos(2x) = 1 \Rightarrow 2x = k360° \Rightarrow x = 0° \vee 180°$. Le soluzioni sono quindi: $0° \le x \le 10° \vee –10° + k40° \le x \le 10° + k40°$, $1 \le k \le 4 \vee 180°$

41. ***sin*(2*x* + 15°) + *sin*(4*x* – 15°) – *sin*(3*x*) = 0**

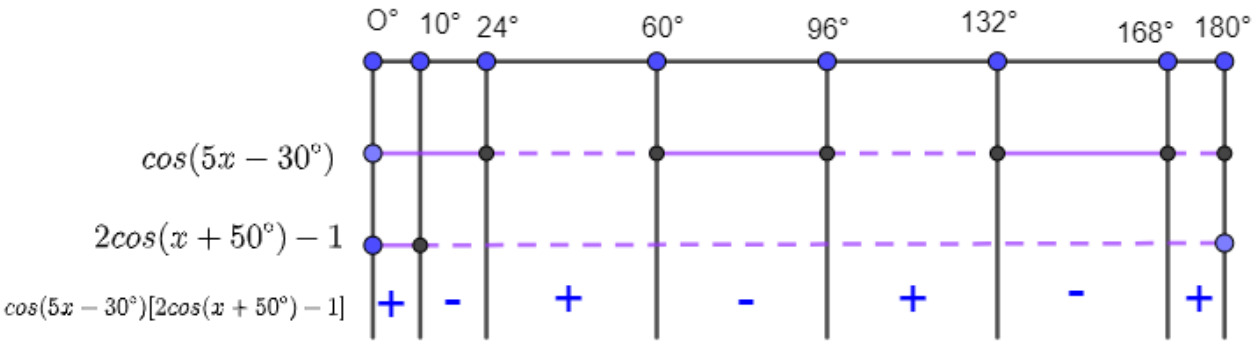
$2sin(3x)cos(x – 15°) – sin(3x) = 0 \Rightarrow sin(3x)[2cos(x – 15°) – 1] = 0 \Rightarrow sin(3x) = 0 \ \vee\ cos(x – 15°) = ½ \Rightarrow 3x = k180° \vee x – 15° = 60° + k180° \vee x – 15° = 300° + k180° \Rightarrow x = k60° \vee x = 75° + k180° \vee x = 315° + k180° \Rightarrow$ Soluzioni: $x = 0° \vee 60° \vee 75° \vee 120° \vee 180°$

42. ***sin*(3*x* – 20°) – *sin*(5*x* + 10°) + *sin*(*x* + 15°) = 0**

$–2sin(x + 15°)cos(4x – 5°) + sin(x + 15°) = 0 \Rightarrow sin(x + 15°) = 0 \ \vee\ cos(4x – 5°) = ½ \Rightarrow x + 15° = k180° \vee 4x – 5° = 60° + k360° \vee 4x – 5° = 300° + k360° \Rightarrow x = –15° + k180° \vee x = 16°15' + k90° \vee x = 76°15' + k90° \Rightarrow$ Soluzioni: $x = 16°15' \vee 76°15' \vee 106°15' \vee 165° \vee 166°15'$

43. ***cos*(6*x* + 20°) + *cos*(4*x* – 80°) – *cos*(5*x* – 30°) < 0**

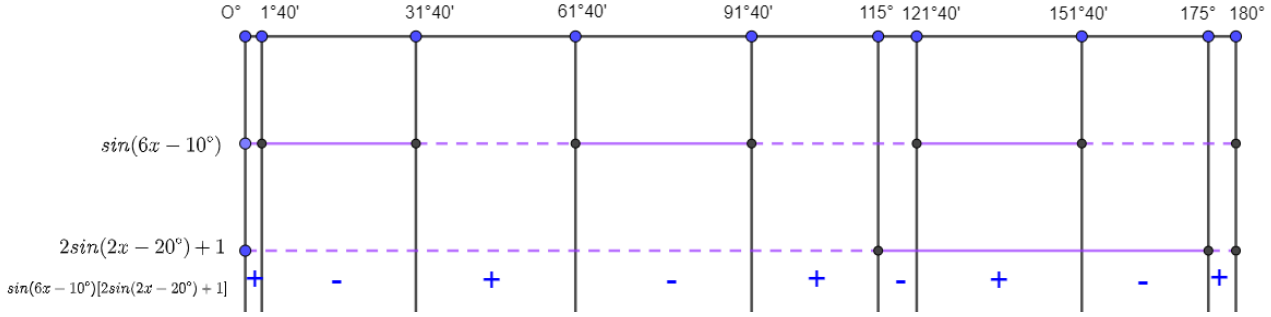
$2cos(5x – 30°)cos(x + 50°) – cos(5x – 30°) < 0 \Rightarrow cos(5x – 30°) \cdot [2cos(x + 50°) – 1] < 0 \Rightarrow cos(5x – 30°) > 0 \Rightarrow –90° + k360° < 5x – 30° < 90° + k360° \Rightarrow –12° + k72° \le x \le 24° + k72°$. $cos(x + 50°) > ½ \Rightarrow –60° + k360° \le x + 50° \le 60° + k360° \Rightarrow –110° + k360° \le x \le 10° + k360°$



Soluzioni: $10° < x < 24° \vee 60° < x < 96° \vee 132° < x < 168°$

44. ***cos*(4*x* + 10°) – *cos*(30° – 8*x*) + *sin*(6*x* – 10°) > 0**

$2sin(2x - 20°)sin(6x - 10°) + sin(6x - 10°) > 0 \Rightarrow sin(6x - 10°) \cdot [2sin(2x - 20°) + 1] > 0 \Rightarrow sin(6x - 10°) > 0 \Rightarrow k360° < 6x - 10° < 180° + k360° \Rightarrow 1°40' + k60° < x < 31°40' + k60°$. $sin(2x - 20°) > -½ \Rightarrow 210° + k360° < 2x - 20° < 330° + k360° \Rightarrow 115° + k180° < x < 175° + k180°$.



Soluzioni; $1°40' < x < 31°40' \vee 61°40' < x < 91°40' \vee 115° < x < 121°40' \vee 151°40' < x < 175°$

45. In un triangolo si ha *a* = 5, α = 45°, β = 60°. Usando il teorema di Nepero determinare *b*. Controlla la differenza dei risultati usando il teorema dei seni.

Si ha: $\frac{5-b}{5+b} = \frac{tan\left(\frac{45°-60°}{2}\right)}{tan\left(\frac{45°+60°}{2}\right)} \Rightarrow \frac{5-b}{5+b} = \frac{tan(-7°30')}{tan(52°30')} \Rightarrow b = \frac{5 \cdot [tan(52°30') - tan(-7°30')]}{tan(52°30') + tan(-7°30')} \approx 6{,}12$

Con il teorema dei seni: $b = \frac{5sin(60°)}{sin(45°)} = \frac{5\sqrt{6}}{2} \approx 6{,}12$

46. In un triangolo si ha *a* = 5, *b* = 4, α = 60°. Usando il teorema di Nepero determinare β. Controlla la differenza dei risultati usando il teorema dei seni.

$$\frac{5-4}{5+4} = \frac{tan\left(\frac{60°-\beta}{2}\right)}{tan\left(\frac{60°+\beta}{2}\right)} \Rightarrow \frac{1}{9} = \frac{tan\left(30°-\frac{\beta}{2}\right)}{tan\left(30°+\frac{\beta}{2}\right)} \Rightarrow \frac{1}{9} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} - tan\left(\frac{\beta}{2}\right)}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}tan\left(\frac{\beta}{2}\right)} \cdot \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}tan\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{3}+tan\left(\frac{\beta}{2}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{9} = \frac{\sqrt{3}tan^2\left(\frac{\beta}{2}\right) - 4tan\left(\frac{\beta}{2}\right) + \sqrt{3}}{\sqrt{3}tan^2\left(\frac{\beta}{2}\right) + 4tan\left(\frac{\beta}{2}\right) + \sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{3}tan^2\left(\frac{\beta}{2}\right) - 4tan\left(\frac{\beta}{2}\right) + \sqrt{3} - 9\sqrt{3}tan^2\left(\frac{\beta}{2}\right) - 36tan\left(\frac{\beta}{2}\right) - 9\sqrt{3} = 0 \Rightarrow$$

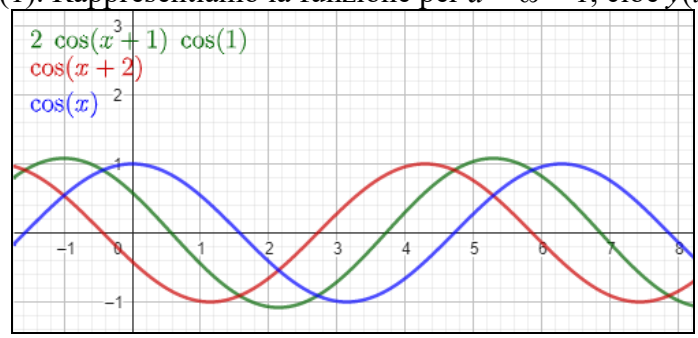
$$\Rightarrow \sqrt{3}tan^2\left(\frac{\beta}{2}\right) - 5tan\left(\frac{\beta}{2}\right) + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \beta \approx 43°51'14'' \vee 136°8'46''$$

La seconda soluzione ovviamente non è accettabile perché deve essere β < α. Con il teorema dei seni:

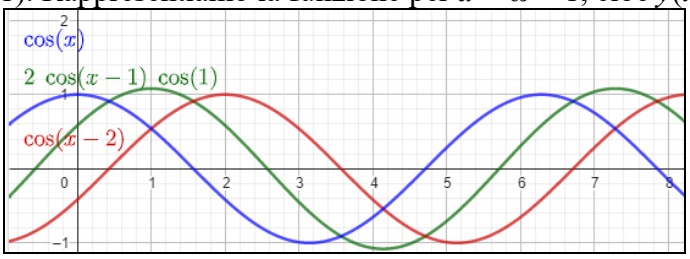
$$\beta = sin^{-1}\left(\frac{4sin(60°)}{5}\right) \approx 43°51'14''$$

L'angolo della MateFisica

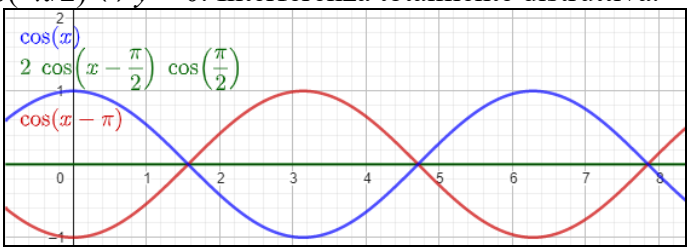
1. **Determina la funzione intereferenza di due onde sfasate di 2, quindi rappresentale.**
   Le funzioni componenti sono: $y_1(t) = a \cdot cos(\omega t)$ e $y_2(t) = a \cdot cos(\omega t + 2)$, la funzione interferenza è: $y(t) = 2a\ cos(\omega t + 1)cos(1)$. Rappresentiamo la funzione per $a = \omega = 1$, cioè $y(t) = 2cos(t + 1)cos(1)$.



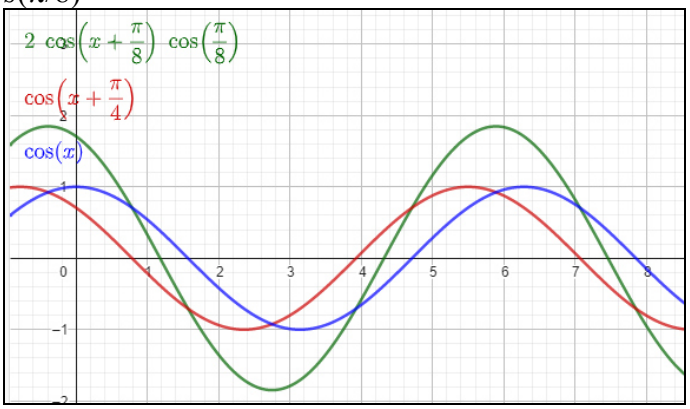
2. **Come nell'esercizio precedente con sfasamento –2.**
   $y(t) = 2a\ cos(\omega t - 1)cos(1)$. Rappresentiamo la funzione per $a = \omega = 1$, cioè $y(t) = 2cos(t - 1)cos(1)$.



3. **Come nell'esercizio precedente con sfasamento –π.**
   $y(t) = 2a\ cos(\omega t - \pi/2)cos(-\pi/2) \Leftrightarrow y = 0$. Interferenza totalmente distruttiva.



4. **Come nell'esercizio precedente con sfasamento π/4.**
   $y(t) = 2a\ cos(\omega t + \pi/8)cos(\pi/8)$

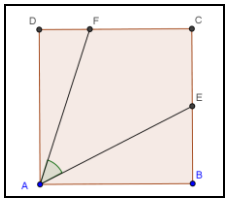


5. **In generale l'ampiezza della funzione interferenza di due onde di ampiezza a, varia fra quali valori? Giustificare la risposta.**
   Se vi è interiferenza totalmente distruttiva è 0; totalmente costruttiva è $2a$.
6. **Determinare l'equazione dell'interferenza di due onde armoniche di uguali ampiezze, *a*, pulsazioni, ω, e di diverse fasi φ_1 e φ_2.**

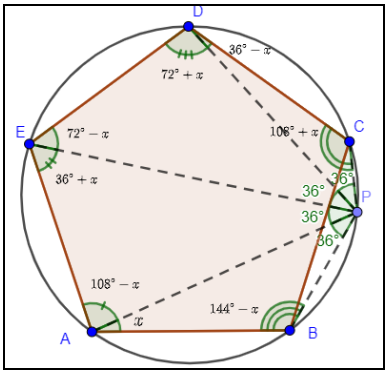
$$a \cdot cos(\omega t + \varphi_1) + a \cdot cos(\omega t + \varphi_2) = 2a \cdot cos\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) cos\left(\omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)$$

La sfida

1. **Determinare il minimo e il massimo di $2^{sin(x)cos(x)}$.**
   Si ha $sin(x)cos(x) = ½\ sin(2x)$, che ha come minimo –½ e come massimo ½, quindi $2^{sin(x)cos(x)}$ è compreso tra $2^{-½}$ e $2^{½}$.
2. **Per quali valori di *a* l'equazione *sin*(*x*) + *cos*(*x*) = *a*, ha soluzioni?**
   Abbiamo: $\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}=a \Rightarrow (a+1)t^2-2t+a-1=0$, che ha soluzioni se $\Delta/4 = 1 - a^2 + 1 \geq 0 \Rightarrow$ $-\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}$. Dobbiamo poi considerare l'eventuale soluzione $x = \pi/2$, che ha soluzioni per $a = 1$.
3. **Provare che in un qualsiasi triangolo si ha: $cos^2(\alpha) + cos^2(\beta) + cos^2(\gamma) + 2cos(\alpha)cos(\beta)cos(\gamma) = 1$**
   $cos^2(\alpha)+ cos^2(\beta) + cos^2(\alpha + \beta) - 2cos(\alpha)cos(\beta)cos(\alpha + \beta) = cos^2(\alpha) + cos^2(\beta) + cos^2(\alpha)cos^2(\beta) + sin^2(\alpha)sin^2(\beta) - 2cos(\alpha)cos(\beta)sin(\alpha)sin(\beta) - 2cos^2(\alpha)cos^2(\beta) + 2cos(\alpha)cos(\beta)sin(\alpha)sin(\beta) = cos^2(\alpha) + cos^2(\beta) - cos^2(\alpha)cos^2(\beta) + sin^2(\alpha)sin^2(\beta) = cos^2(\alpha) + cos^2(\beta) - [1 - sin^2(\alpha)] \cdot [1 - sin^2(\beta)] + sin^2(\alpha)sin^2(\beta) = cos^2(\alpha) + cos^2(\beta) + sin^2(\alpha) + sin^2(\beta) - 1 - sin^2(\alpha)sin^2(\beta) + sin^2(\alpha)sin^2(\beta) = 1$.
4. **Provare che se in un qualsiasi triangolo si ha: $a^2 = b(b + c)$, allora $\alpha = 2\beta$.**
   $a^2 - b^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos(\alpha) - [a^2 + c^2 - 2ac \cdot cos(\beta)] = b^2 - a^2 + 2c \cdot [a\ cos(\beta) - b\ cos(\alpha)] \Rightarrow a^2 - b^2 = c \cdot [a\ cos(\beta) - b\ cos(\alpha)] \Rightarrow a^2 - b^2 - bc = 0 \Leftrightarrow c \cdot [a\ cos(\beta) - b\ cos(\alpha)] - bc = 0 \Leftrightarrow a\ cos(\beta) - b\ cos(\alpha) - b = 0 \Leftrightarrow b\ sin(\alpha)cos(\beta)/sin(\beta) - b\ cos(\alpha) - b = 0 \Leftrightarrow sin(\alpha)cos(\beta) - cos(\alpha)sin(\beta) - sin(\beta) = 0 \Leftrightarrow sin(\alpha - \beta) = sin(\beta) \Rightarrow \alpha - \beta = \beta \Rightarrow \alpha = 2\beta$.
5. **Senza usare la calcolatrice calcolare $tan[tan^{-1}(½) + tan^{-1}(¼) + tan^{-1}(1/5)]$.**
   Si ha : $tan(x + y + z) =$
   $$\frac{tan(x+y)+tan(z)}{1-tan(x+y)tan(z)}=\frac{\frac{tan(x)+tan(y)}{1-tan(x)tan(y)}+tan(z)}{1-\frac{tan(x)+tan(y)}{1-tan(x)tan(y)}tan(z)}=\frac{tan(x)+tan(y)+tan(z)\cdot[1-tan(x)tan(y)]}{1-tan(x)tan(y)-[tan(x)+tan(y)]\cdot tan(z)}$$
   Sostituendo $x = tan^{-1}(½)$, $y = tan^{-1}(¼)$, $z = tan^{-1}(1/5)$ otteniamo il risuiltato richiesto:
   $$\frac{1/2+1/4+1/5\cdot(1-1/8)}{1-1/8-1/5\cdot(1/2+1/4)}=\frac{37}{29}$$
6. **Sia E il punto medio del lato *BC* del quadrato *ABCD*, e sia *F* un punto su *CD* tale che $\frac{\overline{CD}}{\overline{DF}}=3$.**

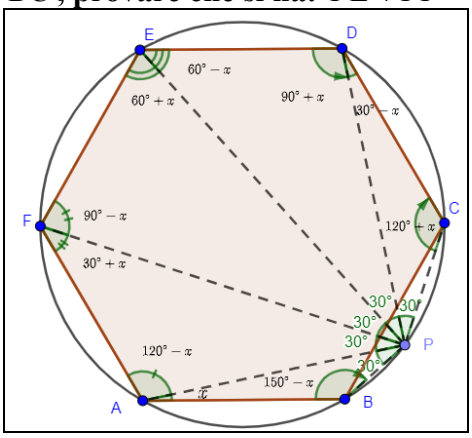


   Calcolare la misura di $E\hat{A}F$.
   $tan(D\hat{A}F + E\hat{A}B) = \frac{1/3+1/2}{1-1/6} = 1 \Rightarrow D\hat{A}F + E\hat{A}B = 45°$, quindi anche l'angolo cercato è di 45°
7. **Studiare il precedente problema quando il rapporto è il numero reale *m* > 0. Per quali valori di *m* il problema ha soluzione?**
   $tan(D\hat{A}F + E\hat{A}B) = \frac{1/m+1/2}{1-\frac{1}{2m}} = \frac{2+m}{2m-1} \Rightarrow tan(E\hat{A}F) = cot(D\hat{A}F + E\hat{A}B) = \frac{2m-1}{2+m}$, quindi il problema ha soluzione se
   $$45° \leq E\hat{A}F < 90° - tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 1 < tan(E\hat{A}F) < cot\left[tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right] = 2 \Rightarrow 1 \leq \frac{2m-1}{2+m} < 2 \Rightarrow m \geq 3$$
8. **Un pentagono regolare *ABCDE* è inscritto in una circonferenza, si scelga un punto *P* sull'arco BC, provare che si ha: $\overline{PA}+\overline{PD}=\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PE}$.**



Gli angoli segnati di vertice *P* sono tutti uguali e misurano 36°, dato che sono angoli alla circonferenza che insistono su corde uguali. Dato che ognuna di queste corde è lato di un pentagono regolare, l'angolo al centro che insiste su essa misura 360°/5 = 72°, quindi l'angolo alla circonferenza è metà. Tenuto conto che gli angoli interni del pentagono misurano 108° e che la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°, si ottengono le misure indicate in funzione di *x*. Pertanto l'identità da provare diventa: $2r\,sin(36° + x) + 2r\,sin(72° - x) = 2r\,sin(x) + 2r\,sin(36° - x) + 2r\,sin(72° + x) \Rightarrow 2sin(54°)cos(18° - x) = sin(x) + 2sin(54°)cos(18° + x) \Rightarrow 2sin(54°)[cos(18°)cos(x) + sin(18°)sin(x)] = sin(x) + 2sin(54°)[cos(18°)cos(x) - sin(18°)sin(x)] \Rightarrow 2sin(54°)sin(18°)sin(x) = sin(x) - 2sin(54°)\,sin(18°)sin(x) \Rightarrow 2sin(54°)sin(18°) = 1 - 2sin(54°)sin(18°) \Rightarrow 4sin(54°)sin(18°) - 1 = 0 \Rightarrow$ $4cos(36°)sin(18°) - 1 = 0 \Rightarrow \dfrac{2cos(36°)sin(36°)}{cos(18°)} - 1 = 0 \Rightarrow \dfrac{sin(72°)}{sin(72°)} - 1 = 0 \Rightarrow 0 = 0$.

9. Un esagono regolare *ABCDEF* è inscritto in una circonferenza, si scelga un punto *P* sull'arco BC, provare che si ha: $\overline{PE} + \overline{PF} = \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}$.



Gli angoli segnati di vertice *P* sono tutti uguali e misurano 30°, dato che sono angoli alla circonferenza che insistono su corde uguali. Dato che ognuna di queste corde è lato di un esagono regolare, l'angolo al centro che insiste su essa misura 360°/6 = 60°, quindi l'angolo alla circonferenza è metà. Tenuto conto che gli angoli interni dell'esagono misurano 120° e che la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°, si ottengono le misure indicate in funzione di *x*. Pertanto dobbiamo provare che: $2r\,sin(90° + x) + 2r\,sin(60° + x) = 2r\,sin(30° + x) + 2r\,sin(x) + 2r\,sin(30° - x) + 2r\,sin(60° - x) \Rightarrow 2sin(75° + x)cos(15°) = 2sin(30°)cos(x) + 2sin(30°)cos(30° - x) \Rightarrow 2sin(75°)cos(x)cos(15°) + 2sin(x)cos(75°)cos(15°) = cos(x) + cos(30°)cos(x) + sin(30°)cos(x) \Rightarrow 2cos(x)cos^2(15°) + 2sin(x)sin(15°)cos(15°) = cos(x)\,[1 + cos(30°)] + sin(30°)cos(x) \Rightarrow 2cos(x)cos^2(15°) + sin(x)sin(30°) = 2cos(x)cos^2(15°) + sin(30°)cos(x) \Rightarrow 0 = 0$.

10. Provare che se in un triangolo si ha: $b + c = 2a$, allora l'area del triangolo è uguale a ¾ $a^2\,tan(\alpha/2)$.

Si ha: $(b + c)^2 = 4a^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 = 4a^2$. Per il teorema di Carnot si ha: $b^2 + c^2 - 2bc\,cos(\alpha) = a^2$, sottraendo termine a termine si ottiene: $2bc \cdot [1 - cos(\alpha)] = 3a^2 \Rightarrow bc = \dfrac{3a^2}{2\cdot[1-cos(\alpha)]} = \dfrac{3a^2}{4cos^2(\alpha/2)}$.

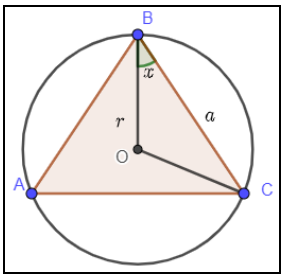
Dato che $S = ½\,bc\,sin(\alpha)$, sostituendo: $S = \dfrac{3a^2 sin(\alpha)}{8cos^2(\alpha/2)} = \dfrac{3a^2 sin(\alpha/2)\,\cancel{cos(\alpha/2)}}{4cos^{\cancel{3}}(\alpha/2)} = \dfrac{3}{4}a^2 tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

11. In generale $sin(x + y) \neq sin(x) + sin(y)$, stabilire quali proprietà devono verificare *x* ed *y* affinché si abbia l'uguaglianza.

$sin(x+y) = sin(x) + sin(y) \Rightarrow \cancel{2sin\left(\frac{x+y}{2}\right)}cos\left(\frac{x+y}{2}\right) = \cancel{2sin\left(\frac{x+y}{2}\right)}cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \Rightarrow x+y = 2k\pi \vee x = 2k\pi \vee y = 2k\pi$.

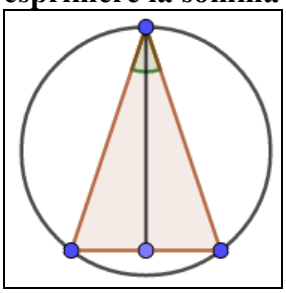
Temi assegnati agli esami di stato

1. **(Liceo scientifico suppletiva 1970/71) Dato un cono circolare retto inscritto in una sfera di raggio *r*, esprimere la sua superficie totale in funzione della semiapertura *x* del cono.**
Consideriamo la sezione ottenuta con un piano per il vertice e perpendicolare alla base del cono.



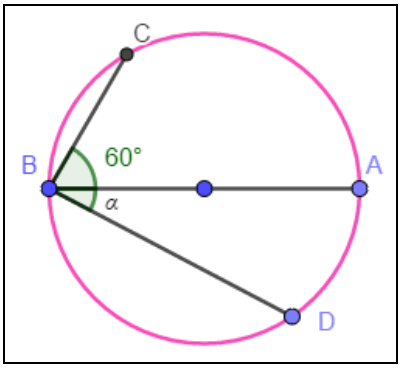
Si ha: $a/sin(2x) = r/sin(x) \Rightarrow a = r \cdot sin(2x)/sin(x) = 2r \cdot cos(x)$, da cui la superficie misura: $\pi r^2 + \pi r \cdot 2r \cdot cos(x) = \pi r^2 \cdot [1 + 2cos(x)]$

2. **(Liceo scientifico 1970/71) Dato un triangolo isoscele inscritto in una circonferenza di raggio *r*, esprimere la somma dell'altezza e del doppio della base mediante l'angolo al vertice.**



Chiamiamo $2x$ la misura dell'angolo, la base la troviamo con il teorema della corda: $2r \cdot sin(2x)$. L'altezza la ricaviamo mediante la semibase: $[r \cdot sin(2x)] \cdot cot(x) = 2rsin(x)cos(x) \cdot cos(x)/sin(x) = 2rcos^2(x)$. Quindi la somma dell'altezza e del doppio della base: $2rcos^2(x) + 2 \cdot 2r \cdot sin(2x) = 2rcos^2(x) + 4r\,sin(2x)$, $0 < x < \pi/2$

3. **(Liceo scientifico 1971/72) Data una circonferenza di diametro *AB* = 2*r*, si prendano su di essa da parte opposta di *AB*, due punti *C* e *D* tali che $A\hat{B}C = \pi/3,\ A\hat{B}D = \alpha$, Si esprima il rapporto $y = \frac{\overline{AD}^2 - \overline{CD}^2}{\overline{BC}^2}$, per mezzo di *x* = *tan*(α).**



Per il teorema della corda: $\overline{CD} = 2r\,sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$, per le proprietà dei triangoli rettangoli: $\overline{AD} = 2r\,sin(\alpha); \overline{BC} = 2r\,cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cancel{2}r \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = r$, oppure per BC, osservando che OBC è isoscele con un angolo di 60°, quindi equilatero. Quindi:

$$y=\frac{4r^2sin^2(\alpha)-4r^2sin^2(\pi/3+\alpha)}{r^2}=4sin(\alpha)^2-4\cdot\left[sin(\pi/3)cos(\alpha)+sin(\alpha)cos(\pi/3)\right]^2=$$

$$=4sin^2(\alpha)-4\cdot\left[\frac{\sqrt{3}}{2}cos(\alpha)+sin(\alpha)\frac{1}{2}\right]^2=4sin^2(\alpha)-3cos^2(\alpha)-sin^2(\alpha)-2\sqrt{3}sin(\alpha)cos(\alpha)=$$

$$=3sin^2(\alpha)-3cos^2(\alpha)-2\sqrt{3}sin(\alpha)cos(\alpha)$$

Per esprimere tutto in $tan(\alpha)$ moltiplichiamo e dividiamo per $cos^2(\alpha)$: $y=\left[3tan^2(\alpha)-3-2\sqrt{3}tan(\alpha)\right]\cdot cos^2(\alpha)$. Osserviamo inoltre che $\frac{1}{cos^2(\alpha)}=\frac{cos^2(\alpha)+sin^2(\alpha)}{cos^2(\alpha)}=1+tan^2(\alpha)$, avremo:

$y=\frac{3tan^2(\alpha)-3-2\sqrt{3}tan(\alpha)}{1+tan^2(\alpha)}=\frac{3tan^2(\alpha)-3-2\sqrt{3}tan(\alpha)}{1+tan^2(\alpha)}$, ponendo $x=tan(\alpha)$: $y=\frac{3x^2-2\sqrt{3}x-3}{1+x^2}$

4. (Liceo scientifico PNI 1989/90) Data la semicirconferenza di centro *O* e raggio *r*, si consideri il triangolo isoscele *ABV* i cui lati obliqui *AV* e *BV* siano tangenti alla semicirconferenza rispettivamente nei punti *F* e *G* e tale che la proiezione di *V* sulla base *AB* coincida con *O*. Detto *P* un punto dell'arco *FG* e, rispettivamente, *L* e *M* le intersezioni della tangente alla semicirconferenza in *P* con i lati *AV* e *BV*, si dimostri che i triangoli *AOL* e *BMO* sono simili. Indicato con *x* uno degli angoli alla base del triangolo *ABV*, si esprima in funzione di esso la somma *s* tra il lato del quadrato equivalente al rettangolo di lati *AL* e *BM* e l'altezza *VO* del triangolo *ABV*, osservando che *s* non dipende dalla posizione di *P*.

$$\left[s=r\cdot\frac{sin(x)+cos(x)}{sin(x)\cdot cos(x)},\quad 0<x<\frac{\pi}{2}\right]$$

5. (Liceo scientifico sperimentale 1991/92) In un piano cartesiano ortogonale si indichino con *x* e *y* le coordinate di un punto *P* e con *X* e *Y* le coordinate di un punto *P'*. Si consideri la trasformazione di equazioni: $\begin{cases}X=ax+by\\Y=a'x+b'y\end{cases}$, tale che al punto *A* di coordinate *x* = 1, *y* = 1 corrisponda il punto *A'* di coordinate *X* = 0, *Y* = 2 e al punto *b* di coordinate *x* = 1, *y* = 0 corrisponda il punto *b'* di coordinate *X* = 1, *Y* = 0. a) Si studi la trasformazione ottenuta determinando in particolare i punti e le rette che si trasformano rispettivamente in se stessi. b) Detto α l'angolo acuto formato dalla retta *r* di equazione *y* = *mx* e dalla sua trasformata *r'* si studi come varia la tangente trigonometrica di α al variare della retta *r*.

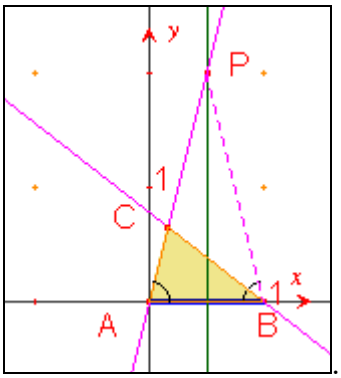
a) Tenuto conto dei dati: $\begin{cases}0=a+b\\2=a'+b'\\1=a\\0=a'\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\a'=0\\b=-1\\b'=2\end{cases}$, quindi la trasformazione è $\begin{cases}X=x-y\\Y=2y\end{cases}$ i punti uniti sono: $\begin{cases}x=x-y\\y=2y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=x\\y=0\end{cases}$, quindi i punti $(x; 0)$. Le rette unite: $aX+bY+c=0\Rightarrow a(x-y)+2by+c=0\Rightarrow ax+(2b-a)y+c=0$. Per essere unita deve essere: $\begin{cases}a=a\\b=2b-a\\c=c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=a\\b=a\\c=c\end{cases}$, quindi sono unite le rette di equazione $ax+ay+c=0$. r: $y=mx\Rightarrow r'$: $2y=m(x-y)\Rightarrow y=\frac{m}{2+m}x$.

b) Per il teorema 3 si ha: $tan(\alpha)=\dfrac{m-\dfrac{m}{2+m}}{1+m\cdot\dfrac{m}{2+m}}=\dfrac{2m+m^2-m}{2+m+m^2}=\dfrac{m^2+m}{m^2+m+2}=1-\dfrac{2}{m^2+m+2}$. Dato che la tangente è sempre minore di 1, dato che è sempre $m^2 + m + 2 > 0$, l'angolo è sempre compreso tra 0° e 45°.

6. (Liceo scientifico 1992/93) Sia $\begin{cases} x=sin(t) \\ y=sin(2t) \end{cases}$. Esprimere *y* in funzione di *x*.

$y = 2sin(t)cos(t) = 2sin(t)\sqrt{1-sin^2(t)} = 2|x|\sqrt{1-x^2}$

7. (Liceo scientifico 2006/07) Si considerino i triangoli la cui base è *AB* = 1 e il cui vertice *C* varia in modo che l'angolo $C\hat{A}B$ si mantenga doppio dell'angolo $A\hat{B}C$. Riferito il piano ad un conveniente sistema di coordinate, si determini l'equazione del luogo geometrico γ descritto da *C*.

Dobbiamo costruire un triangolo di base assegnata con un angolo doppio dell'altro. In figura è illustrata una procedura. 

. Dato il segmento *AB*, i cui estremi hanno coordinate $A \equiv (0; 0)$, $B \equiv (1; 0)$, abbiamo costruito l'asse di AB, in modo da avere un triangolo isoscele di base *AB*. Per *A* tracciamo una generica retta che incontra l'asse precedente in *P*. *ABP* è perciò isoscele e i suoi angoli di vertici *A* e *B* sono isometrici. Se adesso costruiamo la bisettrice dell'angolo di vertice *B*, l'intersezione *C* con la retta *AP* è il punto cercato, dato che ovviamente il triangolo *ABC* ha l'angolo di vertice *A* doppio di quello di vertice *B*. Determiniamo l'equazione del luogo con metodi analitici. Indichiamo con α e 2α le misure dei due angoli. La retta *AC* ha equazione $y = mx$, in cui ovviamente $m = tan(2\alpha)$, quindi è $y = tan(2\alpha)\,x$. La retta *BC* invece ha equazione $y = (1 - x)\,tan(\alpha)$. *C* è l'intersezione delle due rette, pertanto le sue coordinate saranno le soluzioni del sistema: $\begin{cases} y=tan(2\alpha) \\ y=(1-x)tan(\alpha) \end{cases}$, che sono le equazioni parametriche del luogo. Tenendo conto della formula di duplicazione della tangente, possiamo scrivere meglio le predette equazioni:

$$\begin{cases} y=\dfrac{2tan(\alpha)}{1-tan^2(\alpha)}x \\ y=(1-x)tan(\alpha) \end{cases} \Rightarrow tan(\alpha)=\frac{y}{1-x} \Rightarrow y=\frac{2\dfrac{y}{1-x}}{1-\left(\dfrac{y}{1-x}\right)^2}x \Rightarrow 3x^2-y^2-4x+1=0.$$

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

1. (S1947) Provare la validità delle seguenti identità fra gli angoli di un triangolo.
a) $sin(\alpha) + sin(\beta) + sin(\gamma) = 4\,cos(\alpha/2)\,cos(\beta/2)\,cos(\gamma/2)$;

b) $\boldsymbol{sin(2\alpha) + sin(2\beta) + sin(2\gamma) = 4\, sin(\alpha)\, sin(\beta)\, sin(\gamma)}$**;**

c) $\boldsymbol{sin(4\alpha) + sin(4\beta) + sin(4\gamma) = -4 sin(2\alpha)\, sin(2\beta)\, sin(2\gamma)}$**.**

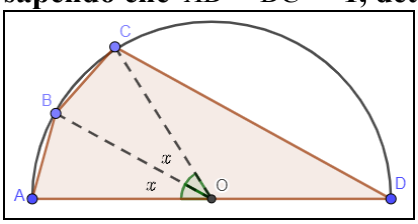
a)
$$2sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+2sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=2sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\left[cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right]=$$
$$=2sin\left(\frac{\pi-\gamma}{2}\right)\cdot 2cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)cos\left(\frac{\beta}{2}\right)=4cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)cos\left(\frac{\beta}{2}\right)cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

Abbiamo usato le formule di di prostaferesi per la prima somma e poi quelle di duplicazione

b) $2sin(\alpha + \beta)cos(\alpha - \beta) + 2sin(\gamma)cos(\gamma) = 2sin(\alpha + \beta)cos(\alpha - \beta) - 2sin(\alpha + \beta)cos(\alpha + \beta) = 2sin(\alpha + \beta)[cos(\alpha - \beta) - cos(\alpha + \beta)] = -2sin(\gamma)2sin(\alpha)sin(-\beta) = 4\, sin(\alpha)\, sin(\beta)\, sin(\gamma)$

c) $2sin(2\alpha + 2\beta)cos(2\alpha - 2\beta) + 2sin(2\gamma)cos(2\gamma) = 2sin(2\alpha + 2\beta)cos(2\alpha - 2\beta) - 2sin(2\alpha + 2\beta)cos(2\alpha + 2\beta) = 2sin(2\alpha + 2\beta)[cos(2\alpha - 2\beta) - cos(2\alpha + 2\beta)] = 4sin(2\gamma)sin(2\alpha)sin(-2\beta) = -4sin(2\alpha)\, sin(2\beta)\, sin(2\gamma)$.

2. (AHSME 1971) Il quadrilatero *ABCD* è inscritto in una semicirconferenza di diametro $\overline{AD}=4$, sapendo che $\overline{AB} = \overline{BC}$ = 1, determinare la misura di *CD*.



Per il teorema della corda $\overline{CD} = 4sin(90° - x) = 4cos(x)$. Per lo stesso teorema $\overline{AD}=4sin\left(\frac{x}{2}\right)=4\sqrt{\frac{1-cos(x)}{2}}\Rightarrow\frac{1-cos(x)}{2}=\frac{1}{16}\Rightarrow cos(x)=\frac{7}{8}\Rightarrow\overline{CD}=4\cdot\frac{7}{8}=\frac{7}{2}=3{,}5$.

3. (AHSME 1976) Se $\boldsymbol{sin(2x) = a}$, determinare $\boldsymbol{sin(x) + cos(x)}$.

$[sin(x) + cos(x)]^2 = 1 + sin(2x) = 1 + a \Rightarrow sin(x) + cos(x) = \sqrt{1+a}$.

4. (AHSME 1979) Sapendo che $\boldsymbol{a = ½}$ e $\boldsymbol{(a + 1) \cdot (b + 1) = 2}$, determinare il valore espresso in radianti di $\boldsymbol{tan^{-1}(a) + tan^{-1}(b)}$.

$a = ½$ e $b = -1/3$, $\{tan[tan^{-1}(½)] + 1\}\{tan[tan^{-1}(-1/3)] + 1\} = 2 \Rightarrow tan[tan^{-1}(½)] + tan[tan^{-1}(-1/3)] = 1 - tan[tan^{-1}(½)] \cdot tan[tan^{-1}(-1/3)] \Rightarrow \frac{tan\left[tan^{-1}(1/2)\right]+tan\left[tan^{-1}(-1/3)\right]}{1-tan\left[tan^{-1}(1/2)\right]tan\left[tan^{-1}(-1/3)\right]}=1 \Rightarrow tan[tan^{-1}(½) + tan^{-1}(-1/3)] = 1 \Rightarrow tan^{-1}(a) + tan^{-1}(b) = \pi/4$. Osserviamo che l'informazione sul valore di *a* è ininfluente, è la seconda informazione a determinare il risultato.

5. **(AHSME 1982) I lati di un triangolo sono misurati da numeri interi consecutivi, l'angolo maggiore è doppio del minore, determinare la misura del coseno dell'angolo minore.**

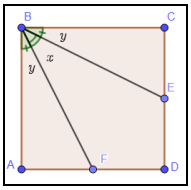
Siano $(x - 1)$, x, $(x + 1)$ le misure dei lati. Si ha:

$$cos(\gamma)=\frac{(x-1)^2+x^2-(x+1)^2}{2x\cdot(x-1)}=\frac{x-4}{2(x-1)};cos(\alpha)=\frac{(x+1)^2+x^2-(x-1)^2}{2x\cdot(x+1)}=\frac{x+4}{2(x+1)}$$

$cos(\gamma) = cos(2\alpha) = 2cos^2(\alpha) - 1 \Rightarrow$

$\frac{x-4}{2(x-1)}=\frac{(x+4)^2}{(x+1)^2}-1\Rightarrow 4x^3 + 7x^2 - x - 22 = 0 \Rightarrow (x - ½) \cdot (x - 2) \cdot (x - 5) = 0$. L'unica soluzione accettabile è quella positiva: $x = ½ \Rightarrow cos(\alpha)=\frac{9/2}{2\cdot 3/2}=\frac{3}{4}=0{,}75$.

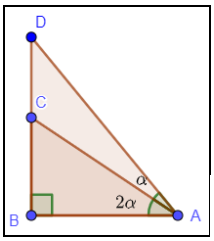
6. (AHSME 1987) Determinare il seno dell'angolo formato congiungendo un vertice di un quadrato con i punti medi dei due lati non adiacenti.



$sin(x) = sin(90° – 2y) = cos(2y) = 2cos^2(y) – 1 = 2\left(\frac{\ell}{\sqrt{\ell^2+\ell^2/4}}\right)^2 - 1 = 2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - 1 = \frac{3}{5}$

7. **(AHSME 1989) Nel triangolo *ABC* si ha: $\overline{AB}=5, \overline{BC}=7, \overline{AC}=9$. Scegliamo un punto *D* su *AC* in modo tale che sia $\overline{BD}=5$. Quanto vale il rapporto in cui viene diviso il segmento *AC* da *D*?**
$\overline{AD}=\sqrt{50-50cos(180°-2\alpha)}=5\sqrt{2}\sqrt{1+cos(2\alpha)}=5\sqrt{2}\sqrt{2cos^2(\alpha)}=10cos(\alpha)$, d'altro canto si ha: $cos(\alpha)=\frac{25+81-49}{90}=\frac{19}{30}\Rightarrow \overline{AD}=10\cdot\frac{19}{30}=\frac{19}{3}\Rightarrow \overline{DC}=9-\frac{19}{3}=\frac{8}{3}\Rightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}=\frac{19}{8}$.

8. **(AHSME 1998) Nel triangolo *ABD*, l'angolo *B* è retto e *BD* > *BA*. Il punto *C* appartiene a *BD* in modo che sia $\angle C\hat{A}B = 2\cdot\angle D\hat{A}C$. Se $\overline{AB}/\overline{BC}=2/3$, allora $\overline{BC}/\overline{CD}=m/n$, con *m* e *n* numeri interi relativamente primi. Determinare *m* + *n*.**



$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=cos(2\alpha)=\frac{2}{3}; \frac{\overline{CD}}{sin(\alpha)}=\frac{\overline{AC}}{sin(90°-3\alpha)}\Rightarrow \overline{CD}=\frac{\overline{AC}\cdot sin(\alpha)}{cos(3\alpha)}; \overline{BC}=\overline{AC}\cdot sin(2\alpha)$

$\frac{\overline{CB}}{\overline{CD}}=\frac{sin(2\alpha)\cdot cos(3\alpha)}{sin(\alpha)}=2cos(\alpha)\ cos(3\alpha) = 2cos(\alpha)\cdot[cos(2\alpha)\ cos(\alpha) – sin(2\alpha)\ sin(\alpha)] = 2cos^2(\alpha)\cdot cos(\alpha) – 2sin(2\alpha)\ sin(\alpha)cos(\alpha) = [1 + cos(2\alpha)]\cdot cos(2\alpha) – sin^2(2\alpha) = (1 + 2/3)\cdot 2/3 – (1 – 4/9) = 5/9 = m/n$. Dato che *m* e d *n*sono numeri interi primi tra loro: $m + n = 5 + 9 = 14$.

9. **(AHSME 1999) Nel triangolo *ABC* si ha $3sin(\alpha) + 4cos(\beta) = 6$, $4sin(\beta) + 3cos(\alpha) = 1$. Determinare la misura di $\hat{C}$.**
$[3sin(\alpha) + 4cos(\beta)]^2 + [4sin(\beta) + 3cos(\alpha)]^2 = 36 + 1 \Rightarrow 9sin^2(\alpha) + 16cos^2(\beta) + 24\ sin(\alpha)\ cos(\beta) + 16sin^2(\beta) + 9cos^2(\alpha) + 24\ sin(\beta)\ cos(\alpha) = 37 \Rightarrow 24\ [sin(\alpha)\ cos(\beta) + sin(\beta)\ cos(\alpha)] = 37 – 25 \Rightarrow 24\ sin(\alpha + \beta) = 12 \Rightarrow sin(\alpha + \beta) = ½ \Rightarrow \alpha + \beta = 30° \vee 150°$. $\gamma = 180 – (\alpha + \beta) = 150° \vee 30°$. Ma la prima soluzione implica che $\alpha < 30° \Rightarrow 3sin(\alpha) + 4cos(\beta) < 3/2 + 4 < 6$.

10. **(HSMC2006) Calcolare $sin^8(75°) – cos^8(75°)$.**
$[sin^4(75°) – cos^4(75°)]\cdot[sin^4(75°) + cos^4(75°)] = [sin^2(75°) – cos^2(75°)]\cdot[sin^2(75°) + cos^2(75°)]\cdot\{[sin^2(75°) + cos^2(75°)]^2 – 2sin^2(75°)cos^2(75°)\} = –cos(150°)\cdot 1\cdot[1^2 – ½\ sin^2(150°)] = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{8}\right)=\frac{7\sqrt{3}}{16}$

11. **(V 2007) Sia θ un angolo acuto per cui $tan(2\theta) + cot(2\theta) = 10$. Esprimere $sin(4\theta)$ come numero razionale.**
$\frac{sin(2\theta)}{cos(2\theta)}+\frac{cos(2\theta)}{sin(2\theta)}=\frac{1}{sin(2\theta)cos(2\theta)}=\frac{2}{sin(4\theta)}=10\Rightarrow sin(4\theta)=\frac{1}{5}$

12. **(B 2010) In un triangolo rettangolo il prodotto delle lunghezze dei tre lati è il doppio del prodotto delle tre altezze. Qual è la misura (in gradi) di uno dei due angoli acuti di questo triangolo rettangolo?**
$abc = 2bc\cdot bc/a \Rightarrow a^2 = 2bc \Rightarrow a^2 = 2a\ sin(\beta)\cdot a\ cos(\beta) \Rightarrow 1 = sin(2\beta) \Rightarrow 2\beta = 90° \Rightarrow \beta = 45°$.

13. **(V 2010) Senza calcolatrice semplificare $sin(15°)cos^3(15°) – sin^3(15°)cos(15°)$.**
$sin(15°)\ cos(15°)[cos^2(15°) – sin^2(15°)] = ½\ sin(30°)\cdot cos(30°) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{8}$.

14. (HSMC 2011) Calcola $\theta = tan^{-1}\left[\frac{sin(\pi/18)+sin(2\pi/18)}{cos(\pi/18)+cos(2\pi/18)}\right]$**, in gradi sessagesimali.**

$$\theta = tan^{-1}\left[\frac{\cancel{2cos(\pi/36)}sin(\pi/12)}{\cancel{2cos(\pi/36)}cos(\pi/12)}\right] = tan^{-1}\left[tan\left(\frac{\pi}{12}\right)\right] = \frac{\pi}{12} = 15°$$

15. (S 1960) Prove the identity $cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)cos\left(\frac{\alpha}{4}\right)cos\left(\frac{\alpha}{8}\right) = \frac{sin(\alpha)}{8sin(\alpha/8)}$ **and generalize.**

$$\frac{cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{\alpha}{4}\right)\cdot sin\left(\frac{\alpha}{4}\right)\cdot cos\left(\frac{\alpha}{8}\right)\cdot sin\left(\frac{\alpha}{8}\right)}{sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot sin\left(\frac{\alpha}{4}\right)\cdot sin\left(\frac{\alpha}{8}\right)} = \frac{sin(\alpha)\cdot \cancel{sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)sin\left(\frac{\alpha}{4}\right)}}{8\cancel{sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)sin\left(\frac{\alpha}{4}\right)}\cdot sin\left(\frac{\alpha}{8}\right)} = \frac{sin(\alpha)}{8sin\left(\frac{\alpha}{8}\right)}.$$

Più in generale:

$$cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{\alpha}{4}\right)\cdot\ldots\cdot cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) = \frac{cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{\alpha}{4}\right)\cdot sin\left(\frac{\alpha}{4}\right)\cdot\ldots\cdot cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)\cdot sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}{sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot sin\left(\frac{\alpha}{4}\right)\cdot\ldots\cdot sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)} =$$

$$= \frac{sin(\alpha)\cdot \cancel{sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\ldots\cdot sin\left(\frac{\alpha}{2^{n-1}}\right)}}{2^n\cancel{sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\ldots\cdot sin\left(\frac{\alpha}{2^{n-1}}\right)}\cdot sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)} \Rightarrow \prod_{h=1}^{n} cos\left(\frac{\alpha}{2^h}\right) = \frac{sin(\alpha)}{2^n sin(\alpha 2^n)}$$

16. (HSMC 2004) If *sin*(*x*) – *cos*(*x*) = 1/5, π/4 ≤ *x* ≤ π/2, find *cos*(2*x*).

$[sin(x) - cos(x)]^2 = 1/25 \Rightarrow 1 - sin(2x) = 1/25 \Rightarrow sin(2x) = 24/25 \Rightarrow cos(2x) = -\sqrt{1-\left(\frac{24}{25}\right)^2} = -7/5.$

Abbiamo scelto il segno meno perché $\pi/4 \le x \le \pi/2 \Rightarrow \pi/2 \le 2x \le \pi$.

17. (V 2006) Suppose that *x* and *y* are real numbers such that *tan*(*x*) + *tan*(*y*) = 42 and *cot*(*x*) + *cot*(*y*) = 49. What is the value of *tan*(*x* + *y*)?

$$\begin{cases} tan(x)+tan(y)=42 \\ \frac{1}{tan(x)}+\frac{1}{tan(y)}=49 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} tan(x)+tan(y)=42 \\ tan(x)+tan(y)=49tan(x)tan(y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} tan(x)+tan(y)=42 \\ tan(x)tan(y)=42/49 \end{cases},$$ quindi:

$$tan(x+y) = \frac{tan(x)+tan(y)}{1-tan(x)tan(y)} = \frac{42}{1-42/49} = \frac{\cancel{42}^{6}\cdot 49}{\cancel{7}} = 294$$

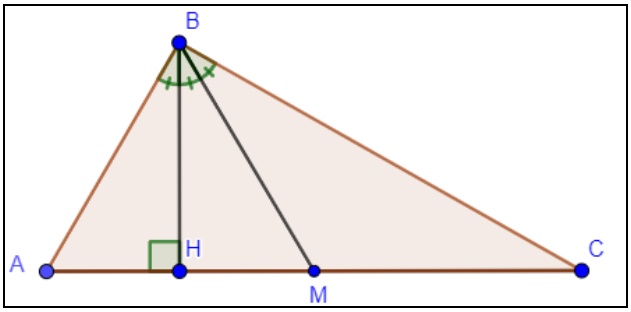
18. (V 2007) Suppose that $sin(2x) = \frac{1}{\sqrt{7}}$**. Express *sin*⁴(*x*) + *cos*⁴(*x*) as a rational number in lowest terms.**

Supponi che $sin(2x) = \frac{1}{\sqrt{7}}$. *Esprimi* $sin^4(x) + cos^4(x)$ *come frazione ridotta ai minimi termini*

$sin^4(x) + cos^4(x) + 2sin^2(x)cos^2(x) - 2sin^2(x)cos^2(x) = [sin^2(x) + cos^2(x)]^2 - 2sin^2(x)cos^2(x) = 1 - ½\, sin^2(2x) = 1 - 1/14 = 13/14.$

19. (V 2007) In triangle *ABC*, *AC* = 12. If one of the trisectors of angle *B* is the median to *AC* and the other trisector of angle *B* is the altitude to *AC*, find the area of triangle *ABC*.

Nel triangolo ABC, AC = 12. Se uno dei trisettori dell'angolo B è la mediana di AC e l'altro trisettore dell'angolo B è l'altezza di AC, trovare l'area del triangolo ABC.



L'area del triangolo è $\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BH}=6\overline{BH}$. I triangoli rettangoli *ABH* e *MHB* sono ovviamente uguali, quindi *H* è punto medio di *AM*. Da cui: $\overline{BH}$ = 3*cot*(*x*) = 9*cot*(2*x*) ⇒ $cot(x)=3\frac{cot^2(x)-1}{2cot(x)}$ ⇒ 2*cot*²(*x*) – 3*cot*²(*x*) + 3 = 0 ⇒ *cot*²(*x*) = 3 ⇒ *cot*(*x*) = $\sqrt{3}$.

Quindi: $S=18\sqrt{3}$.

20. (HSMC2008) Without any electronic device calculate [½ – *sin*²(π/16)]².

Senza strumenti elettronici calcolare [½ – *sin*²(π/16)]².

½ – *sin*²(π/16) = ½ – ½ [1 – *cos*(π/8)] = ½ *cos*(π/8) ⇒ [½ – *sin*²(π/16)]² = ¼ *cos*²(π/8) = 1/8 · [1 + *cos*(π/4)] = $\frac{1}{8}\cdot\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

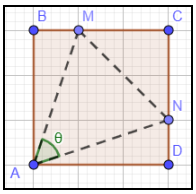
21. (V 2009) Find the value of *sin*²(15°) · *cos*²(15°). Express your answer as a rational number in lowest terms.

*Trovare il valore di sin*²(15°) · *cos*²(15°). *Esprimere la risposta come frazione ridotta ai minimi termini*

¼ [2*sin*(15°) · *cos*(15°)]⁴ = ¼ · *sin*²(30°) = ¼ · ¼ = 1/16.

22. **(V 2011) Each side of square *ABCD* has length 3. Let *M* and *N* be points on sides *BC* and *CD* respectively such that *BM* = *ND* = 1 and let $\angle M\hat{A}N=\theta$. Find *sin*(θ).**

Ogni lato di un quadrato ABCD è lungo 3. *Siano M ed N punti sui lati BC e CD rispettivamente tali che sia BM = ND = 1 e sia* $\angle M\hat{A}N=\theta$. *Determinare sin*(θ).



Il triangolo *AMN* è isoscele, si ha: $\overline{AM}=\overline{AN}=\sqrt{10},\overline{MN}=2\sqrt{2}$, applicando il Teorema dei seni al triangolo :

$$\frac{2\sqrt{2}}{sin(\theta)}=\frac{\sqrt{10}}{sin(90°-\theta/2)}\Rightarrow 2\cdot cos\left(\frac{\theta}{2}\right)=\sqrt{5}\cdot sin(\theta)\Rightarrow \cancel{2\cdot cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}=\cancel{2}\sqrt{5}\cdot sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cancel{cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}\Rightarrow$$

$$sin\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}},cos\left(\frac{\theta}{2}\right)=\sqrt{1-\frac{1}{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}\Rightarrow sin(\theta)=2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$$

Test di Verifica

1. Seleziona le uguaglianze false

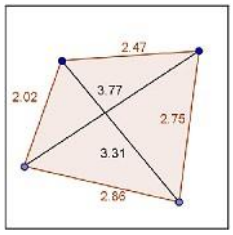
A ***sin*(3*x* – 2*y*) = *sin*(2*y*)*cos*(3*x*) – *sin*(3*x*)*cos*(2*y*)** **B** ***cos*(4*x*) – *cos*(6*y*) = –2*sin*(2*x* + 3*y*)*sin*(2*x* – 3*y*)**

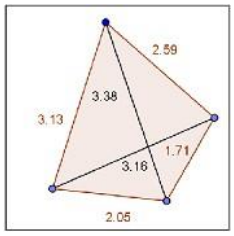
C ***cos*(8*x*) = 2*sin*²(4*x*) – 1** **D** ***tan*²(6*x*) = [1 + *cos*(3*x*)]/[1 – *cos*(3*x*)]**

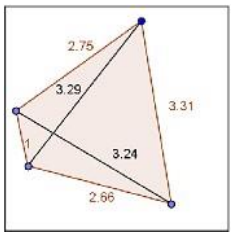
E ***cot*(4*x*) = [*cot*²(2*x*) – 1]/[2*cot*(2*x*)]**

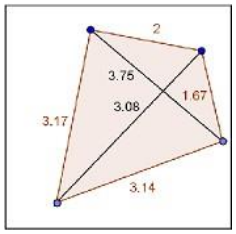
Sono false: A – C – D

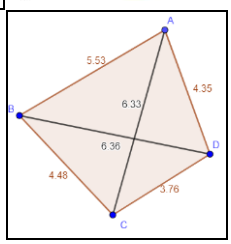
2. Seleziona i quadrilateri a cui NON si può applicare il teorema di Tolomeo (con una precisione al primo decimale)

A 

B 

C 

D 

E 

Nel caso A: 2.47 · 2.86 + 2.02 · 2.75 – 3.77 · 3.31 = 0,1405; B: 2.59 · 2.05 + 3.13 · 1.71 – 3.38 · 3.18 = –0,0866; C: 2.75 · 2.66 + 3.31 · 1 – 3.29 · 3.24 = 0,5154; D: 2 · 3.14 + 3.17 · 1.67 – 3.75 · 3.08 = 0,0239; E: 5.53 · 3.76 + 4.35 · 4.48 – 6.33 · 6.36 = 0,022. Quindi noin vanno bene A e C.

3. **Seleziona le uguaglianze corrette**

A $\sin(2x + y) = \sin(2x)\cos(y) + \sin(2y)\cos(x)$ **B** $\sin(2x) + \sin(4y) = 2\sin(x + 2y)\cos(x - 2y)$
C $\cos(8x)=\cos^2(4x) - 1$ **D** $\tan^2(4x) = [1 - \cos(2x)]/[1 + \cos(2x)]$ **E** $\cot(6x) = [\cot^2(2x) - 1]/[2\cot(2x)]$

Sono corrette B – D

4. **Seleziona i quadrilateri a cui si può applicare il teorema di Tolomeo**

A Trapezio isoscele B Rettangolo C Rombo D Trapezio rettangolo E Aquilone

Nono sono ciclici i quadrilateri C, D ed E

5. **Quali fra le seguenti espressioni equivalgono a $\sin(2x) + \cos(4x)$?**

A $1 - \sin^2(2x)$ **B** $2\sin(45° - x)\cos(3x - 45°)$ **C** $\sin(2x)[1 + 2\cos(2x)]$
D $-2\sin(45° - x)\sin(45° - 3x)$ **E** $1 - 8\sin^2(x)\cos^2(x) + 2\sin(x)\cos(x)$

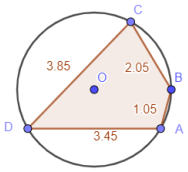
$\sin(2x) + \cos(4x) = \sin(2x) + 1 - 2\sin^2(2x) = 2\sin(x)\cos(x) + 1 - 8\sin^2(x)\cos^2(x)$ che rappresenta la E. Oppure $2\sin(45° - x)\cos(3x - 45°) = \sin(90° - 4x) + \sin(2x) = \cos(4x) + \sin(2x)$, che è la B

6. **Quale fra le seguenti è una corretta espressione di $\sin(14/5)$?**

A $2\sin(28/5)\cos(28/5)$ **B** $\frac{\sqrt{1-\cos(28/5)}}{2}$ **C** $2\sin(7/5)\cos(7/5)$

D $\sqrt{\frac{1-\cos(7/5)}{2}}$ **E Nessuna delle precedenti**

Risposta corretta: C, basta applicare la formula di duplicazione.



7. **Un valore approssimato dell'area del quadrilatero in figura è?**

A 5,6 B 6,2 C 4,3 D Non si può determinare dai dati E Nessuna delle precedenti

Risposta corretta: A, basta applicare il tgeorema di Brahmagupta.

8. **Data la disequazione $\sin(x - 20°) > \sin(x + 40°)$, quali fra i seguenti intervalli sono formati solo da sue soluzioni?**

A [75°; 250°] B [82°; 300°] C [0°; 70°] D [90°; 200°] E Nessuna delle precedenti

$\sin(80° - 20°) = \sin(80° + 40°)$, quindi A non va bene; $\sin(260° - 20°) = \sin(260° + 40°)$, B non va bene; $\sin(20° - 20°) < \sin(20° + 40°)$, non va bene neanche C. Risposta corretta: D

9. **Quale fra le seguenti espressioni equivale a $\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x)$?**

A $\sin(2x)[1 + 2\cos(x)]$ **B** $\cos(2x)[1 - 2\cos(x)]$ **C** $\cos(2x)[1 + \cos(x)]$
D $\cos(x)[1 + 2\cos(2x)]$ **E Nessuna delle precedenti**

$\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = \cos(x) + 2\cos^2(x) - 1 + 4\cos^3(x) - 3\cos(x) = 4\cos^3(x) + 2\cos^2(x) - 2\cos(x) - 1$. Quindi risposta corretta: E

10. Quale fra le seguenti è una soluzione dell'equazione $2sin(x) - cos(x) = 1$?
A $tan^{-1}(½)$ **B** $2tan^{-1}(½)$ **C** $2tan^{-1}(2)$
D L'equazione non ha soluzioni **E Nessuna delle precedenti**
Usando le formule parmetriche l'equazione divine: $4t - 1 + t^2 = 1 + t^2 \Rightarrow 4t - 2 = 0 \Rightarrow t = ½ \Rightarrow x = 2tan^{-1}(½)$. Risposta corretta: B

11. Semplifica $sin(10x) + sin(4x)$
Basta usare le formule di prostaferesi: $2sin(7x)cos(3x)$

12. Sviluppa $cos(3x + 2y)$
$cos(3x)cos(2y) - sin(3x)sin(2y)$

13. Calcola l'area del triangolo di lati che misurano $2a$, $a + 1$, $a + 3$, $a > 1$.
Applichiamo Erone : $p = 2a + 2 \Rightarrow S = \sqrt{(2a+2)\cdot 2\cdot(a+1)\cdot(a-1)} = 2(a+1)\sqrt{a-1}$

14. L'area di un triangolo di lati a, b, c e semiperimetro p si trova con la formula $S = \sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$. L'area di un quadrilatero di lati a, b, c, d inscrivibile in una circonferenza, ossia *ciclico*, si trova con la formula $S = \sqrt{(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)\cdot(p-d)}$

15. In un quadrilatero *inscritto* in una circonferenza il prodotto delle misure delle *diagonali* è uguale alla *somma* dei prodotti dei lati opposti.

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. (Accademia navale) Verificare che, dati tre numeri reali $\alpha, \beta, \gamma \neq \pi/2 + k\pi$, $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ si ha: $tan(\alpha) + tan(\beta) + tan(\gamma) = tan(\alpha) \cdot tan(\beta) \cdot tan(\gamma)$.
$tan(\alpha) + tan(\beta) + tan(\gamma) = tan(\alpha + \beta)\cdot[1 - tan(\alpha)tan(\beta)] + tan(\gamma) = -tan(\gamma) + tan(\alpha)tan(\beta)tan(\gamma) + tan(\gamma) = tan(\alpha) \cdot tan(\beta) \cdot tan(\gamma)$.

2. (Accademia navale) Risolvere le seguenti equazioni: a) $4sin^2(x) - 3 = 0$; b) $4sin^2(2x) - 1 = 0$; c) $sin(2x)/tan(x) = 0$.
a) $sin(x) = \pm\sqrt{3}/2 \Rightarrow x = \pi/3 + k\pi \vee x = 2\pi/3 + k\pi$;
b) $sin(2x) = \pm ½ \Rightarrow 2x = \pi/6 + k\pi \vee 2x = 5\pi/6 + k\pi \Rightarrow x = \pi/12 + k\pi/2 \vee x = 5\pi/12 + k\pi$;
c) $\dfrac{2\cancel{sin(x)}cos(x)}{\cancel{sin(x)}/cos(x)} = 0 \Rightarrow 2cos^2(x) = 0$; $x = \pi/2 + k\pi$ non accettabile.

3. (Accademia navale) Risolvere l'equazione $sin(5x) - sin(3x) = sin(x)$.
$2sin(x)cos(4x) = sin(x) \Rightarrow sin(x) = 0 \vee cos(4x) = ½ \Rightarrow x = k\pi \vee 4x = \pm\pi/3 + 2k\pi \Rightarrow$
$x = k\pi \vee x = \pm\pi/12 + k\pi/2$

4. (Accademia navale) Risolvere il seguente sistema di disequazioni $\begin{cases} sin\,x + cos\,x < 1 \\ sin\,x - cos\,x < 0 \end{cases}$.

$$\begin{cases} \dfrac{2t+1-t^2}{1+t^2} < 1 \\ \dfrac{2t-1+t^2}{1+t^2} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t^2 - t < 0 \\ t^2 + 2t - 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < t < 1 \\ -1-\sqrt{2} < t < -1+\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow 0 < tan\left(\frac{x}{2}\right) < -1+\sqrt{2} \Rightarrow k\pi < x/2 < \pi/8$$
$+ k\pi \Rightarrow 2k\pi < x < \pi/4 + 2k\pi$

5. (Accademia navale) Determinare i valori di k per i quali la disuguaglianza $k \cdot cos(x) - sin(x) + 1 \geq 0$ è vera per ogni x.
$k \cdot (1 - t^2) - 2t + 1 + t^2 \geq 0 \Rightarrow (1 - k)t^2 - 2t + k + 1 \geq 0$. L'equazione associata ha soluzioni $t = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-1+k^2}}{1-k} = \begin{cases} \dfrac{1+k}{1-k} \\ 1 \end{cases}$. La disequazione ha quindi sempre soluzioni solo se $\dfrac{1+k}{1-k} = 1 \Rightarrow k = 0$.

6. (Odontoiatria 2002) La funzione $y = cos(x) \cdot sin(x)$

A) è periodica di periodo π B) non è periodica C) è periodica di periodo 3π/2
D) è periodica di periodo π/2 E) è periodica di periodo 2π/3
$y = ½\ sin(2x)$, che ha periodo π. Risposta corretta: A

7. **(Medicina 2004) L'espressione goniometrica $sin(9x) – sin(3x)$ equivale a**
A) $6sin(x)$ B) $sin(9x) \cdot cos(3x) – sin(3x) \cdot cos(9x)$ C) $3\ [sin(3x) – sin(x)]$
D) $1/2 \cdot [cos(6x) – cos(12x)]$ E) $2cos(6x)\ sin(3x)$
Risposta corretta: E, basta applicare prostaferesi.

8. **(Corso di laurea in Informatica, Udine 2009) Due angoli di un triangolo hanno ampiezza α e il terzo angolo ha ampiezza β. Si sa che $sin(\alpha) = 0,8$. Allora $sin(\beta)$ è uguale a:**
A) 0,48 B) 0,64 C) 0,72 D) 0,96
$sin(\beta) = sin(180° – 2\alpha) = sin(2\alpha) = 2\ sin(\alpha)\ cos(2\alpha) = 2 \cdot 0,8 \cdot \sqrt{1-0,8^2} = 2 \cdot 0,8 \cdot 0,6 = 0,96.$
Risposta corretta: D