Assiomi dei numeri naturali

1. **Utilizzando la corrispondenza biunivoca fra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ definita nell'esempio 2, determinare il corrispondente naturale associato all'intero 235 e il corrispondente intero associato al naturale 235.**
   Nell'esempio associavamo 0 a 1, ogni intero positivo al suo doppio e ogni intero negativo associamo il successivo del doppio del loro valore assoluto. Quindi all'intero 235 è associato $2 \cdot 235 = 470$. Mentre $235 = 2 \cdot 117 + 1$ è il corrispondente dell'intero negativo –117

2. **Porre in corrispondenza biunivoca $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ con una legge diversa da quella dell'esempio 2.**
   Per esempio agli interi positivi dispari z il naturale $4z$, agli interi positivi pari z associamo $4z + 1$, a 0 associamo 1, agli interi negativi dispari z associamo $4|z| + 2$ e infine a quelli pari $4|z| + 3$.

3. **Porre in corrispondenza biunivoca $\mathbb{Z}$ con i naturali pari.**
   Per esempio agli interi positivi z il naturale $4z$, a 0 associamo 2, agli interi negativi z associamo $4|z| + 2$.

4. **a) Mostrare che è biunivoca la corrispondenza che segue la regola: $0 \to 2, -1 \to 4, -2 \to 6, ..., 1 \to 1, 2 \to 3, 3 \to 5$ ... b) Con quest'ordine qual è il 75° elemento di $\mathbb{Z}$?**
   a) Ovviamente abbiamo a che fare con una corrispondenza biunivoca dato che al generico $-n$ associamo $2 \cdot (n + 1)$, mentre al generico n associamo $2n - 1$. b) Quindi il 75° elemento ha posto dispari, cioè è associato al numero 75, quindi è un numero positivo, in particolare è la soluzione dell'equazione $2n - 1 = 75 \Rightarrow 2n = 76 \Rightarrow n = 38$.

Stabilire quali fra le seguenti coppie di insiemi sono equipotenti (Con M_n indichiamo l'insieme dei multipli del numero naturale n)

5. **a) M_8, {1/3, 3/5, 5/7, ...}; b) M_5 ,{2/3, 4/5, 6/7, ...}; c) $\mathbb{Z}$,{1/2, 3/4, 5/8, ...}; d) M_8 , $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$**
   a) I multipli di 8 sono ovviamente equipotenti a $\mathbb{N}$,{1/3, 3/5, 5/7, ...} è un sottoinsieme infinito di $\mathbb{Q}^+$, quindi a esso equipotente che è a sua volta equipotente a $\mathbb{N}$. Quindi per la proprietà transitiva sono fra loro equipotenti. b) I multipli di 8 sono ovviamente equipotenti a $\mathbb{N}$,{1/3, 3/5, 5/7, ...} è un sottoinsieme infinito di $\mathbb{Q}^+$, quindi a esso equipotente che è a sua volta equipotente a $\mathbb{N}$. Quindi per la proprietà transitiva sono fra loro equipotenti. c) I multipli di 8 sono ovviamente equipotenti a $\mathbb{N}$,{1/3, 3/5, 5/7, ...} è un sottoinsieme infinito di $\mathbb{Q}^+$, quindi a esso equipotente che è a sua volta equipotente a $\mathbb{N}$. Quindi per la proprietà transitiva sono fra loro equipotenti.

6. **a) {1, 4, 9, …, n^2, …}, $\mathbb{R}^+$; b) M_4, $\mathbb{R}^-$; c) $\mathbb{Q}^+$,{–7/8, 14/9; –21/10, ...}; d) $\mathbb{Z}^-$,{2/1, 4/3, 6/5, ...}**
   a) I quadrati dei naturali sono ovviamente equipotenti a $\mathbb{N}$, che però non è equipotente a $\mathbb{R}^+$, quindi non sono equipotenti i due insiemi di partenza. b) I multipli di 4 sono ovviamente equipotenti a $\mathbb{N}$, che però non è equipotente a $\mathbb{R}^-$, quindi non sono equipotenti i due insiemi di partenza. c){–7/8, 14/9; –21/10, ...}è equipotente a $\mathbb{Q}$, quindi anche a $\mathbb{Q}^+$. d) $\mathbb{Z}^-$ è equipotente a $\mathbb{N}$, {2/1, 4/3, 6/5, ...} è equipotente a $\mathbb{N}$,. Quindi per la proprietà transitiva sono fra loro equipotenti.

7. **a) {2, 4, …, $2n$, …}, $\mathbb{R}$; b) {1, 3, …, $2n - 1$, …}, $\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}^+$; c) {1, 8, …, n^3, …},{2/3, 4/9, 6/27, …}**
   a) I multipli di 2 sono ovviamente equipotenti a $\mathbb{N}$ che non è equipotente a $\mathbb{R}$, quindi non sono equipotenti i due insiemi di partenza. b) I dispari sono ovviamente equipotenti a $\mathbb{N}$ che non è equipotente agli irrazionali, quindi non sono equipotenti i due insiemi di partenza. c) I cubi dei

naturali sono equipotenti a $\mathbb{N}$,{2/3, 4/9, 6/27, …}è un sottoinsieme infinito di $\mathbb{Q}^+$, quindi a esso equipotente che è a sua volta equipotente a $\mathbb{N}$. Quindi per la proprietà transitiva sono fra loro equipotenti.

Tenuto conto del primo procedimento diagonale di Cantor rispondere alle seguenti domande

8. **Dimostrare che in ogni riga, a parte le prime due, vi sono sempre un numero pari di termini.**
   Se in una riga vi è *m/n* vuol dire che *m* e *n* non hanno divisori in comune, quindi nella stessa riga c'è anche *n*/*m*.

9. **Quante frazioni vi possono essere al minimo e al massimo nella riga di posto $n > 2$?**
   Minimo 2, per esempio 1/2 e 2/1 nella riga 3. Massimo *n*, poiché di numeri naturali per cui $m + p = n$, ve ne sono $n - 1$

10. **Quante frazioni *m/n* vi sono nella riga a) 8; b)12?**
    a) La riga 8 si riferisce alle frazioni per cui $m + n = 8$, quindi abbiamo solo: 1/7, 3/5, 5/3 e 7/1, perché 2/6, 4/4 e 6/2 non sono ridotte ai minimi termini e le abbiamo già scritte prima. b) La riga 12 si riferisce alle frazioni per cui *m/n* = 12, quindi abbiamo: 1/11; 5/7; 7/5 e 11/1.

11. **Che posizione occupa la frazione a) 7/4; b) 11/5; c) 3/13; d) 1/17?**
    a) 7/4 si trova nella riga 11. Nelle righe da 1 a 10 vi sono rispettivamente 1, 1, 2, 2, 4, 2, 6, 4, 6, 4 elementi (basta scriverli), quindi 32 numeri. 7/4 è il settimo elemento della riga, quindi occupa la posizione 39. b) 11/5 sta nella riga 16. Dalla riga 11 alla 15 ci sono rispettivamente: 10, 4, 12, 6, 8 elementi, quindi in totale vi sono 32 + 40 = 72 numeri. 11/5 è il sesto della sua riga, in cui vi sono 8 numeri, quindi occupa la posizione 78. c) con riferimento a b), 3/13 è il secondo della sua riga, quindi occupa il posto 74. d) Nella riga 17 vi sono 16 numeri, quindi 1/17, che è il primo della riga 18, occupa la posizione 72 + 8 + 16 + 1 = 97.

12. **Quale frazione occupa la posizione a) 17; b) 23; c) 41; d) 50?**
    a) tenuto conto di quanto detto prima, le righe fino alla settima contengono 16 elementi, quindi il 17° è il primo della riga 8, cioè 1/7. b) Il 23° è il primo della riga 9, cioè 1/8; c) Fino alla riga 13 vi sono 44 numeri, quindi il 41° è il quartultimo di questa riga, cioè 9/4. d) Il 50° + ò'ultimo della riga 14, cioè 13.

13. **a) Provare che le righe di posto pari, $2n$, per $n \geq 2$, non possono avere mai il numero massimo di termini. b) Qual è il massimo numero di termini che possono avere?**
    a) Una riga di posto pari. $2n$, inizia per $0/2n$, $1/(2n - 1)$, $2/(2n - 2) = 1/(n - 1)$. Come si vede i termini che hanno numeratore pari devono essere scartati perché anche il denominatore sarà pari. b) La riga di posto $2n$ dovrebbe avere $2n - 1$ frazioni, di queste *n* hanno numeratore dispari e $(n - 1)$ pari e sono da escludere. Se poi *n* è dispari, deve escludersi anche la frazione *n*/*n*, quindi al massimo possono avere *n* termini. Per esempio per $n = 6 = 2 \cdot 3$, abbiamo $3 - 1 = 2$ termini invece di cinque: 1/5 e 5/1, dato che 2/4 e 4/2 sono semplificabili, così come il termine centrale 3/3; invece per $n = 8 = 4 \cdot 2$, abbiamo 4 termini invece di 7: 1/7, 3/5, 5/3 e 7/1.

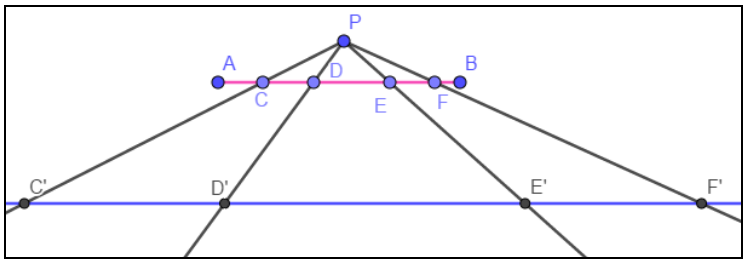
14. **Dimostrare che se $m + p$ è un numero primo, la riga relativa contiene $m + p - 1$ frazioni.**
    Sia $m + p$ primo e per assurdo la frazione $(m + p - h)/h$, sia semplificabile, ossia $m + p - h = k\,z$ e $h = kt$, ma allora sarebbe $m + p - h + h = kz + kt = k/(z + t)$, ossia non sarebbe primo.

15. **Dimostrare che per le frazioni *m/p* e *p/m*, l'ordine stabilito dal primo procedimento diagonale sui razionali, coincide con l'ordine naturale. Cos' per esempio 3/5 < 5/3 e 11/7 > 7/11.**
    Se *m/p* e *p/m* stanno sulla stessa riga scriviamo prima sempre quello che ha numeratore minore. Così per esempio nella terza riga scriviamo 1/2 e 2/1, quindi 1/2 < 2/1.

16. **Provare che l'insieme dei numeri reali negativi non può essere numerabile.**
I reali negativi sono equipotenti ai reali, quindi non ai naturali.

17. **Provare che l'insieme dei numeri irrazionali non può essere numerabile.**
Gli irrazionali sono equipotenti ai reali, quindi non ai naturali.

18. **Provare che un segmento di lunghezza 1 ha "tanti punti" quanto una retta.**
Consideriamo la figura in cui P è un punto esterno a segmento e retta, le semirette da esso condotte collegano ogni punto di AB a un punto della retta, pertanto è una corrispondenza biunivoca.



19. **Provare che l'insieme prodotto cartesiano $A \times B = \{(a; b), a \in A, b \in B\}$ di insiemi numerabili è un insieme numerabile.**
Siano $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...\}$ e $B = \{b_1, b_2, b_3, ..., b_n, ...\}$. Quindi: $A \times B = \{(a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_3, b_1), ..., (a_n, b_1), ..., (a_1, b_2), (a_2, b_2), (a_3, b_2), ..., (a_n, b_2), ..., (a_1, b_3), (a_2, b_3), (a_3, b_3), ..., (a_n, b_3), ..., (a_1, b_n), (a_2, b_n), (a_3, b_n), ..., (a_n, b_n), ...\}$. Questa elencazione è ovviamente un modo per numerare $A \times B$.

20. **Provare che l'unione di una infinità numerabile di insiemi numerabile è numerabile.**
Siano $A_1 = \{a_{11}, a_{21}, a_{31}, ..., a_{n1}, ...\}$, $A_2 = \{a_{12}, a_{22}, a_{32}, ..., a_{n2}, ...\}$, ..., $A_n = \{a_{1n}, a_{2n}, a_{3n}, ..., a_{nn}, ...\}$, ... gli infiniti insiemi numerabili. La loro unione al massimo, se sono tutti a due a due disgiunti sarà: $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{a_{11}, a_{12}, .., a_{1n}, ..., a_{21}, a_{22}, .., a_{2n}, ..., ..., a_{n1}, a_{n2}, ..., a_{nn}, ...\}$. Questa elencazione è ovviamente un modo per numerare l'insieme. Se ci dovessero essere elementi ripetuti possiamo eliminarli senza che ciò alteri né l'infinità né la numerabilità dell'insieme.

Il Principio di induzione

Provare la validità delle seguenti proprietà, usando il metodo di dimostrazione per induzione

1. **a) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$; b)** $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$

a) $n = 1$: $1 = 1^2$; verificato. Hp: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$, Ts: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$. Dim. $[1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1)] = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$.

b) $n = 1$: $1^2 = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2+1)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$; verificato. Hp: $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$, Ts: $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (n+1)^2 = \frac{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (2n+3)}{6}$. Dim.

$$\left[1^2+2^2+3^2+...+n^2\right]+(n+1)^2=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)+6(n+1)^2}{6}=$$

$$=\frac{(n+1)\cdot\left[2n^2+n+6n+6\right]}{6}=\frac{(n+1)\cdot\left[2n^2+7n+6\right]}{6}=\frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(2n+3)}{6}$$

2. a) $1^2+3^2+5^2+...+(2n-1)^2=\frac{n\cdot(4n^2-1)}{3}$ **; b)** $\mathbf{2^2+5^2+8^2+\ldots+(3n-1)^2=}\frac{n\cdot(6n^2+3n-1)}{2}$

a) n = 1: $1^2=\frac{1\cdot(4-1)}{3}=\frac{1\cdot 3}{3}=1$; verificato. Hp: $1^2+3^2+5^2+...+(2n-1)^2=\frac{n\cdot(4n^2-1)}{3}$, Ts:

$$1^2+3^2+5^2+...+(2n-1)^2+(2n+1)^2=\frac{(n+1)\cdot\left[4\cdot(n+1)^2-1\right]}{3}=$$

$$=\frac{(n+1)\cdot\left[4n^2+8n+3\right]}{3}=\frac{(n+1)\cdot(2n+1)\cdot(2n+3)}{3}.$$

Dim.

$$\left[1^2+3^2+5^2+...+(2n-1)^2\right]+(2n+1)^2=\frac{n\cdot(4n^2-1)}{3}+(2n+1)^2=\frac{n\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}{3}+(2n+1)^2=$$

$$=\frac{n\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)+3\cdot(2n+1)^2}{3}=\frac{(2n+1)\cdot(2n^2-n+6n+3)}{3}=\frac{(2n+1)\cdot(2n^2+5n+3)}{3}=$$

$$=\frac{(2n+1)\cdot(n+1)\cdot(2n+3)}{3}$$

b) n = 1: $2^2=\frac{1\cdot(6+3-1)}{2}=\frac{8}{2}=4$; verificato. Hp: $2^2+5^2+8^2+\ldots+(3n-1)^2=\frac{n\cdot(6n^2+3n-1)}{2}$ $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$, Ts: $2^2+5^2+8^2+\ldots+(3n-1)^2+(3n+2)^2=$

$$\frac{(n+1)\cdot\left(6(n+1)^2+3n+3-1\right)}{2}=\frac{(n+1)\cdot(6n^2+12n+6+3n+2)}{2}=$$

$$=\frac{(n+1)\cdot(6n^2+15n+8)}{2}=\frac{(n+1)\cdot(6n^2+15n+8)}{2}.$$

Dim. $[2^2+5^2+8^2+\ldots+(3n-1)^2]+(3n+2)^2=$ $\frac{n\cdot(6n^2+3n-1)}{2}+(3n+2)^2=\frac{n\cdot(6n^2+3n-1)+2\cdot(3n+2)^2}{2}=$

$$=\frac{6n^3+3n^2-n+18n^2+24n+8}{2}=\frac{6n^3+21n^2+23n+8}{2}=\frac{(n+1)\cdot(6n^2+15n+8)}{2}.$$

3. a) $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left[\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right]^2$ **; b)** $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+...+\frac{1}{(4n-3)\cdot(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$

a) n = 1: $1^3=\left[\frac{1\cdot(1+1)}{2}\right]^2=1$; verificato. Hp: $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left[\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right]^2$, Ts:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+(n+1)^3=\left[\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}\right]^2 \quad . \qquad \text{Dim.}$$

$$\left[1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3\right]+(n+1)^3=\left[\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right]^2+(n+1)^3=(n+1)^2\cdot\left(\frac{n^2}{4}+n+1\right)=$$

[.

$$=(n+1)^2\cdot\left(\frac{n^2+4n+4}{4}\right)=\left[\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}\right]^2$$

b) $n = 1$: $\frac{1}{1\cdot 5}=\frac{1}{4+1}$; verificato. Hp: $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)\cdot(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$, Ts:

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)\cdot(4n+1)}+\frac{1}{(4n+1)\cdot(4n+5)}=\frac{n+1}{4n+5} \quad . \qquad \text{Dim.}$$

$$\left[\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)\cdot(4n+1)}\right]+\frac{1}{(4n+1)\cdot(4n+5)}=\frac{n}{4n+1}+\frac{1}{(4n+1)\cdot(4n+5)}=$$

$$=\frac{4n^2+5n+1}{(4n+1)\cdot(4n+5)}=\frac{\cancel{(4n+1)}\cdot(n+1)}{\cancel{(4n+1)}\cdot(4n+5)}=\frac{n+1}{4n+5}$$

4. a) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}$ **; b)** $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$

a) $n = 1$: $\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1+1}$; verificato. Hp: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}$, Ts:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{n+1}{n+2} \quad . \qquad \text{Dim.}$$

$$\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}\right]+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}=$$

.

$$=\frac{n^2+2n+1}{(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{(n+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(n+1)}\cdot(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}$$

b) $n = 1$: $\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{2+1}$; verificato. Hp: $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$, Ts:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}+\frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+3)}=\frac{n+1}{2n+3} \quad . \qquad \text{Dim.}$$

$$\left[\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}\right]+\frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+3)}=\frac{n}{2n+1}+\frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+3)}=$$

$$=\frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)\cdot(2n+3)}=\frac{\cancel{(2n+1)}\cdot(n+1)}{\cancel{(2n+1)}\cdot(2n+3)}=\frac{n+1}{2n+3}$$

5. a) $\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{n\cdot(n+1)}{2\cdot(2n+1)}$ **; b)** $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$

a) $n = 1$: $\frac{1^2}{1\cdot 3}=\frac{1\cdot(1+1)}{2\cdot(2+1)}=\frac{2}{2\cdot 3}$; verificato. Hp: $\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{n\cdot(n+1)}{2\cdot(2n+1)}$,

Ts: $\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)\cdot(2n+1)}+\frac{(n+1)^2}{(2n+1)\cdot(2n+3)}=\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2\cdot(2n+3)}$.

Dim. $\left[\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)\cdot(2n+1)}\right]+\frac{(n+1)^2}{(2n+1)\cdot(2n+3)}=\frac{n\cdot(n+1)}{2\cdot(2n+1)}+\frac{(n+1)^2}{(2n+1)\cdot(2n+3)}=$

$=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+3)+2\cdot(n+1)^2}{2\cdot(2n+1)\cdot(2n+3)}=\frac{(n+1)(2n^2+3n+2n+2)}{2\cdot(2n+1)\cdot(2n+3)}=\frac{(n+1)(2n^2+5n+2)}{2\cdot(2n+1)\cdot(2n+3)}=$.

$=\frac{(n+1)(n+2)\cdot\cancel{(2n+1)}}{2\cdot\cancel{(2n+1)}\cdot(2n+3)}=\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2\cdot(2n+3)}$

b) $n = 1$: $\frac{1}{1\cdot 4}=\frac{1}{3+1}$; verificato. Hp: $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$,

Ts: $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)}+\frac{1}{(3n+1)\cdot(3n+4)}=\frac{n+1}{3n+4}$.

Dim. $\left[\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)}\right]+\frac{1}{(3n+1)\cdot(3n+4)}=\frac{n}{3n+1}+\frac{1}{(3n+1)\cdot(3n+4)}=$

$=\frac{3n^2+4n+1}{(3n+1)\cdot(3n+4)}=\frac{(n+1)\cdot\cancel{(3n+1)}}{\cancel{(3n+1)}\cdot(3n+4)}=\frac{n+1}{3n+4}$

6. a) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n - 1)^3 = n^2 \cdot (2n^2 - 1)$; b) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

a) $n = 1$: $1^3 = 1^2 \cdot (2 - 1)$; verificato. Hp: $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n - 1)^3 = n^2 \cdot (2n^2 - 1)$, Ts: $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n - 1)^3 + (2n + 1)^3 = (n + 1)^2 \cdot (2n^2 + 4n + 1)$. Dim. $[1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n - 1)^3] + (2n + 1)^3 = n^2 \cdot (2n^2 - 1) + (2n + 1)^3 = 2n^4 + 8n^3 + 11n^2 + 6n + 1 = (n + 1)^2 \cdot (2n^2 + 4n + 1)$

b) $n = 0$: $1 = 2^{0+1} - 1 = 1$; verificato. Hp: $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$, Ts: $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 11 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 1$. Dim. $[1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n] + 2^{n+1} = 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1$.

7. $1^5 + 2^5 + 3^5 + \ldots + n^5 = n^2 \cdot (n + 1)^2 \cdot (2n^2 + 2n - 1)/12$

$n = 1$: $1^5 = 1^2 \cdot (1 + 1)^2 \cdot (2 + 2 - 1)/12 = 12/12$; verificato. Hp: $1^5 + 2^5 + 3^5 + \ldots + n^5 = n^2 \cdot (n + 1)^2 \cdot (2n^2 + 2n - 1)/12$, Ts: $1^5 + 2^5 + 3^5 + \ldots + (n + 1)^5 = (n + 1)^2 \cdot (n + 2)^2 \cdot [2(n + 1)^2 + 2(n + 1) - 1)/12 = (n + 1)^2 \cdot (n + 2)^2 \cdot (2n^2 + 6n + 3)/12$. Dim. $[1^5 + 2^5 + 3^5 + \ldots + n^5] + (n + 1)^5 = n^2 \cdot (n + 1)^2 \cdot (2n^2 + 2n - 1)/12 + (n + 1)^5 = (n + 1)^2 \cdot [n^2 \cdot (2n^2 + 2n - 1) + 12 \cdot (n + 1)^3]/12 = (n + 1)^2 \cdot (n + 2)^2 \cdot (2n^2 + 6n + 3)/12$

8. $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+n\cdot(n+1)\cdot(n+2)=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}{4}$

$n = 1$: $1\cdot 2\cdot 3=\frac{1\cdot(1+1)\cdot(1+2)\cdot(1+3)}{4}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cancel{4}}{\cancel{4}}$; verificato.

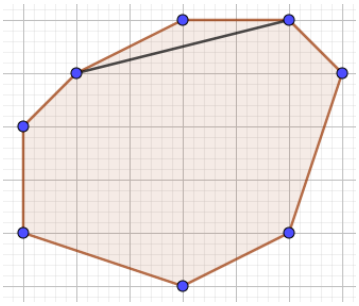
Hp: $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+n\cdot(n+1)\cdot(n+2)=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}{4}$,

Ts: $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+n\cdot(n+1)\cdot(n+2)+(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)=\frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot(n+4)}{4}$.

Dim. $\left[1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\right]+(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)=\dfrac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}{4}+$

$+(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)=(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot\dfrac{n+4}{4}=\dfrac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot(n+4)}{4}$

9. La somma degli angoli interni di un poligono convesso di n lati è $(n-2)\cdot 180°$, $n \geq 3$.

$n = 3$, vera perché nel triangolo si ha: $(3 - 2) \cdot 180°$. Hp: $(n - 2) \cdot 180°$; Ts: $(n - 1) \cdot 180°$. Dim. Tiriamo una diagonale nel poligono di n lati in modo da unire i due vertici non comuni di due lati consecutivi, (in figura consideriamo il caso di $n = 8$), in questo modo abbiamo un poligono di n lati e uno di 3 lati,  la somma degli angoli interni del poligono di $n + 1$ lati è uguale a quella delle somme dei due poligoni cioè $(n - 2) \cdot 180° + 180° = (n - 1) \cdot 180°$.

10. $(1^5 + 2^5 + \ldots + n^5) + (1^7 + 2^7 + \ldots + n^7) = 2 \cdot (1 + 2 + \ldots + n)^4$

$n = 1$: $1^5 + 1^7 = 2 \cdot 1^4$; verificato. Osserviamo che. $1+2+\ldots+n=\dfrac{n\cdot(n+1)}{2};1+2+\ldots+n+(n+1)=\dfrac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$, quindi Hp: $(1^5 + 2^5 + \ldots + n^5) + (1^7 + 2^7 + \ldots + n^7) = 2\cdot\left[\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}\right]^4$, Ts: $[1^5 + 2^5 + \ldots + (n + 1)^5] + [1^7 + 2^7 + \ldots + (n + 1)^7] = 2\cdot\left[\dfrac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}\right]^4$ Dim. $[1^5 + 2^5 + \ldots + n^5 + (n + 1)^5] + [1^7 + 2^7 + \ldots + n^7 + (n + 1)^7] = 2\cdot\left[\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}\right]^4+(n+1)^5+(n+1)^7=(n+1)^4\cdot\left[\dfrac{n^4}{8}+(n+1)+(n+1)^3\right]=$

$(n+1)^4\cdot\dfrac{n^4+8n+8+8n^3+24n^2+24n+8}{8}=(n+1)^4\cdot\dfrac{n^4+8n^3+24n^2+32n+16}{8}=2\cdot\left[\dfrac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}\right]^4$

11. $3 \cdot (1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) - 3 \cdot (1 + 2 + \ldots + n) = n^3 - n$

$n = 1$: $3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 = 1^3 - 1 \Rightarrow 0 = 0$; verificato. Hp: $3 \cdot (1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) - 3 \cdot (1 + 2 + \ldots + n) = n^3 - n$, Ts: $3 \cdot [1^2 + 2^2 + \ldots + (n + 1)^2] - 3 \cdot [1 + 2 + \ldots + (n + 1)] = (n + 1)^3 - (n + 1)$.
Dim. $3 \cdot [1^2 + 2^2 + \ldots + (n + 1)^2] - 3 \cdot [1 + 2 + \ldots + (n + 1)] = n^3 - n + 3 \cdot [(n + 1)^2 - (n + 1)] = n^3 - n + 3 \cdot (n^2 + 2n + \cancel{1} - n - \cancel{1}) = (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - (n + 1) = (n + 1)^3 - (n + 1)$

12. a) $3 \cdot (1^5 + 2^5 + \ldots + n^5) + (1^3 + 2^3 + \ldots + n^3) = 4 \cdot (1 + 2 + \ldots + n)^3$ b) $n^3 + 1 > n^2 + n$, $n \geq 2$

a) $n = 1$: $3 \cdot 1^5 + 1^3 = 4 \cdot (1)^3 \Rightarrow 4 = 4$; verificato. Scriviamo meglio il secondo membro : $4n^3 \cdot (n + 1)^3/8 = n^3 \cdot (n + 1)^3/2$, tenuto conto di quel che sappiamo sulla somma dei primi n naturali. Quindi: Hp: $3 \cdot (1^5 + 2^5 + \ldots + n^5) + (1^3 + 2^3 + \ldots + n^3) = n^3 \cdot (n + 1)^3/2$, Ts: $3 \cdot [1^5 + 2^5 + \ldots + (n + 1)^5] + [1^3 + 2^3 + \ldots + (n + 1)^3] = (n + 1)^3 \cdot (n + 2)^3/2$. Dim. $3 \cdot [1^5 + 2^5 + \ldots + (n + 1)^5] + [1^3$

$+ 2^3 + \ldots + (n + 1)^3] = n^3 \cdot (n + 1)^3/2 + 3 \cdot (n + 1)^5 + (n + 1)^3 = (n + 1)^3 \cdot [n^3 + 6 \cdot (n + 1)^2 + 2]/2 = (n + 1)^3 \cdot (n^3 + 6n^2 + 12n + 6 + 2)/2 = (n + 1)^3 \cdot (n + 2)^3/2$.

b) $n = 2$, $2^3 + 1 > 2^2 + 2 \Rightarrow 9 > 6$; ok. Hp: $n^3 + 1 > n^2 + n$, $n \geq 2$, Ts: $(n + 1)^3 + 1 > (n + 1)^2 + n + 1$, $n \geq 2$. Dim. $(n + 1)^3 + 1 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 1 > n^2 + n + 3n^2 + 3n + 1 = n^2 + 2n + 1 + 3n^2 + n = (n + 1)^2 + 3n^2 + n > (n + 1)^2 + n + 1$

13. Il numero di regioni in cui *n* rette dividono il piano è minore o uguale a 2^n.

$n = 1$. Una retta divide il piano in $p = 2^1$ parti. Hp: $p \leq 2^n$. Ts: $p \leq 2^{n+1}$. Dim. Consideriamo 2 rette, queste possono essere incidenti, nel qual caso raddoppiamo p, o parallele, nel qual caso p aumenta di 1. Quindi nell'ipotesi in cui la $(n + 1)$ – esima retta incontra tutte le precedenti p raddoppia e quindi se prima era $p \leq 2^n$, adesso sarà $p \leq 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$, in tutti gli altri casi sarà minore di questo valore.

14. Usando alcune delle relazioni precedenti risolvere il seguente problema. Trovare $2n + 1$ numeri interi consecutivi che verificano la proprietà seguente: la somma dei quadrati dei primi $(n + 1)$ è uguale alla somma dei quadrati degli altri n.

Dobbiamo risolvere l'equazione $x^2 + (x + 1)^2 + \ldots + (x + n)^2 = (x + n + 1)^2 + (x + n + 2)^2 + \ldots + (x + 2n)^2 \Rightarrow (n + 1)x^2 + 2 \cdot (1 + 2 + \ldots + n)x + (1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) = nx^2 + 2 \cdot [(n + 1) + (n + 2) + \ldots + 2n]x + (n + 1)^2 + (n + 2)^2 + \ldots + 2n^2 \Rightarrow x^2 + 2 \cdot [1 + 2 + \ldots + n - (n + 1) - (n + 2) - \ldots - 2n]x + [1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 - (n + 1)^2 - (n + 2)^2 - \ldots - 2n^2 = 0 \Rightarrow x^2 + 2 \cdot [2 \cdot (1 + 2 + \ldots + n) - (1 + 2 + \ldots + 2n)]x + 2 \cdot (1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) - (1^2 + 2^2 + \ldots + 2n^2) = 0 \Rightarrow$

$$x^2 + 2 \cdot \left[\cancel{2} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{\cancel{2}} - \frac{\cancel{2}n \cdot (2n+1)}{\cancel{2}} \right] x + \cancel{2} \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{\cancel{6}^{3}} - \frac{\cancel{2}n \cdot (2n+1) \cdot (4n+1)}{\cancel{6}^{3}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 2 \cdot \left(n^2 + n - 2n^2 - n\right) x + \frac{n \cdot (2n+1) \cdot (n+1-4n-1)}{3} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 2n^2 x - \frac{\cancel{3}n^2 \cdot (2n+1)}{\cancel{3}} = 0 \Rightarrow x^2 - 2n^2 x - n^2 \cdot (2n+1) = 0 \Rightarrow x = n^2 \pm \sqrt{n^4 + 2n^3 + n^2} =$$

$$= n^2 \pm n^2 \cdot (n+1) = \begin{cases} 2n^2 + n \\ -n \end{cases}$$

La soluzione $-n$ fornisce la soluzione banale $(-n)^2 + (-n + 1)^2 + \ldots + 0^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$. L'altra invece la soluzione $2n^2 + n$, $2n^2 + n + 1$, … $2n^2 + 3n$

Provare la validità delle seguenti proprietà valide per ogni n naturale, usando il metodo di dimostrazione per induzione. Può essere utile ricordare che la somma di numeri divisibili per h è divisibile per h

15. a) $17^n - 12^n$ è divisibile per 5; b) $5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$ è divisibile per 8; c) $7^n + 5^{2n+1}$ è divisibile per 6

a) $n = 1$: $17 - 12 = 5$; verificato. Hp: $17^n - 12^n = 5h$, Ts: $17^{n+1} - 12^{n+1} = 5k$ Dim. $17^{n+1} - 12^{n+1} = 17 \cdot 17^n - 12 \cdot 12^n = (12 + 5) \cdot 17^n - 12 \cdot 12^n = 12 \cdot (17^n - 12^n) + 5 \cdot 17^n = 5h + 5 \cdot 17^n = 5 \cdot (h + 17^n)$.

b) $n = 1$: $5 + 2 \cdot 1 + 1 = 8$; verificato. Hp: $5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1 = 8h$, Ts: $5^{n+1} + 2 \cdot 3^n + 1 = 8k$ Dim. $5^{n+1} + 2 \cdot 3^n + 1 = 5 \cdot 5^n + 2 \cdot 3 \cdot 3^{n-1} + 1 = 5 \cdot 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 4 \cdot 3^{n-1} + 5 - 4 = 5 \cdot (5^n + 3^{n-1} + 1) + 4 \cdot 3^{n-1} - 4 = 5 \cdot 8h + 4 \cdot (3^{n-1} - 1)$. Dobbiamo provare che $3^{n-1} - 1$ è pari per qualsiasi n. Questo è ovvio perché 3^{n-1} è sempre dispari. Quindi abbiamo finito.

c) $n = 1$: $7 + 125 = 132 = 6 \cdot 22$; verificato. Hp: $7^n + 5^{2n+1} = 6h$, Ts: $7^{n+1} + 5^{2n+3} = 6k$ Dim. $7^{n+1} + 5^{2n+3} = 7 \cdot 7^n + 25 \cdot 5^{2n+1} = 7 \cdot 7^n + (7 + 18) \cdot 5^{2n+1} = 7 \cdot (7^n + 5^{2n+1}) + 18 \cdot 5^{2n+1} = 7 \cdot 6h + 6 \cdot 3 \cdot 5^{2n+1} = 6 \cdot (7h + 3 \cdot 5^{2n+1})$.

16. a) $8^n - 3^n$ è divisibile per 5; b) $3^{2n+2} - 8n - 9$ è divisibile per 64; c) $9^n - 8n - 1$ è divisibile

per 64

a) $n = 1$: $8 - 3 = 5$; verificato. Hp: $8^n - 3^n = 5h$, Ts: $8^{n+1} - 3^{n+1} = 5k$ Dim. $8^{n+1} - 3^{n+1} = 8 \cdot 8^n - 3 \cdot 3^n = (3 + 5) \cdot 8^n - 3 \cdot 3^n = 3 \cdot (8^n - 5^n) + 5 \cdot 8^n = 5h + 5 \cdot 8^n = 5 \cdot (h + 8^n)$.

b) $n = 1$: $3^{2+2} - 8 - 9 = 64$; verificato. Hp: $3^{2n+2} - 8n - 9 = 64h$, Ts: $3^{2n+4} - 8n - 17 = 64k$ Dim. $3^{2n+4} - 8n - 17 = 9 \cdot 3^{2n+4} - 9 \cdot 8n - 9 \cdot 9 + (8 \cdot 8n + 64) = 9 \cdot (3^{2n+2} - 8n - 9) + 64 \cdot (n + 1) = 9 \cdot 64h + 64 \cdot (n + 1) = 64 \cdot (9h + n + 1)$

c) $n = 1$: $9 - 8 - 1 = 0 = 64 \cdot 0$; verificato. Hp: $9^n - 8n - 1 = 64h$, Ts: $9^{n+1} - 8n - 9 = 64k$ Dim. $9^{n+1} - 8n - 9 = 9 \cdot 9^n - 9 \cdot 8n - 9 + 8 \cdot 8^n = 9 \cdot (9^n - 8n - 1) + 64 \cdot 8^{n-1} = 9 \cdot 64h + 64 \cdot 8^{n-1} = 64 \cdot (9h + 8^{n-1})$

17. a) $13^{2n} + 6$ è divisibile per 7; b) $3^{2n} + 4^{n+1}$ è divisibile per 5; c) $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ è divisibile per 133

a) $n = 1$: $13^2 + 6 = 169 + 6 = 175 = 7 \cdot 25$; verificato. Hp: $13^{2n} + 6 = 7h$, Ts: $13^{2n+2} + 6 = 7k$ Dim. $13^{2n+2} + 6 = 169 \cdot 13^{2n} + 6 = 168 \cdot 13^{2n} + 13^{2n} + 6 = 168 \cdot 13^{2n} + 7h = 7 \cdot 24 \cdot 13^{2n} + 7h = 7 \cdot (24 \cdot 13^{2n} + h)$.

b) $n = 1$: $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$; verificato. Hp: $3^{2n} + 4^{n+1} = 5h$, Ts: $3^{2n+2} + 4^{n+2} = 5k$ Dim. $3^{2n+2} + 4^{n+2} = 9 \cdot 3^{2n} + 4 \cdot 4^{n+1} = (5 + 4) \cdot 3^{2n} + 4 \cdot 4^{n+1} = 5 \cdot 3^{2n} + 4 \cdot (3^{2n} + 4^{n+1}) = 5 \cdot 3^{2n} + 4 \cdot 5h = 5 \cdot (3^{2n} + 4h)$.

c) $n = 1$: $11^3 + 12^3 = 1331 + 1728 = 3059 = 133 \cdot 23$; verificato. Hp: $11^{n+2} + 12^{2n+1} = 6h$, Ts: $11^{n+3} + 12^{2n+3} = 6k$ Dim. $11^{n+3} + 12^{2n+3} = 11 \cdot 11^{n+2} + 144 \cdot 12^{2n+1} = 11 \cdot 11^{n+2} + (11 + 133) \cdot 12^{2n+1} = 11 \cdot (11^{n+2} + 12^{2n+1}) + 133 \cdot 12^{2n+1} = 11 \cdot 133h + 133 \cdot 12^{2n+1} = 133 \cdot (11h + 12^{2n+1})$.

18. $cos(\alpha) + cos(3\alpha) + ... + cos[(2n - 1)\cdot\alpha] = \dfrac{sin(2n\cdot\alpha)}{2\cdot sin(\alpha)}$

$n = 1$: $cos(\alpha) = \dfrac{sin(2\alpha)}{2\cdot sin(\alpha)} = \dfrac{2\cancel{sin(\alpha)}cos(\alpha)}{2\cancel{sin(\alpha)}} = cos(\alpha)$; verificato. Hp: $cos(\alpha) + cos(3\alpha) + ... + cos[(2n - 1)\cdot\alpha] = \dfrac{sin(2n\cdot\alpha)}{2\cdot sin(\alpha)}$, Ts: $cos(\alpha) + cos(3\alpha) + ... + cos[(2n + 1)\cdot\alpha] = \dfrac{sin[2(n+1)\alpha]}{2\cdot sin(\alpha)} = \dfrac{sin[(2n+2)\alpha]}{2\cdot sin(\alpha)}$ Dim. Osserviamo intanto che $sin[(2n + 2)\cdot\alpha] = sin(2n\alpha + 2\alpha) = sin(2n\alpha)cos(2\alpha) + cos(2n\alpha)sin(2\alpha)$ e $cos[(2n + 1)\cdot\alpha] = cos(2n\alpha)cos(\alpha) - sin(2n\alpha)sin(\alpha)$. Adesso abbiamo: $cos(\alpha) + cos(3\alpha) + ... + cos[(2n - 1)\cdot\alpha] + cos[(2n + 1)\cdot\alpha] =$

$$\frac{sin(2n\alpha)}{2\cdot sin(\alpha)} + cos[(2n+1)\alpha] = \frac{sin(2n\alpha) + 2sin(\alpha)cos[(2n+1)\alpha]}{2\cdot sin(\alpha)} =$$

$$= \frac{sin(2n\alpha) + 2sin(\alpha)[cos(2n\alpha)cos(\alpha) - sin(2n\alpha)sin(\alpha)]}{2\cdot sin(\alpha)} =$$

$$= \frac{sin(2n\alpha) + cos(2n\alpha)sin(2\alpha) - 2sin(2n\alpha)sin^2(\alpha)}{2\cdot sin(\alpha)} = \frac{sin(2n\alpha)\cdot[1 - 2sin^2(\alpha)] + cos(2n\alpha)sin(2\alpha)}{2\cdot sin(\alpha)} =$$

$$= \frac{sin(2n\alpha)\cdot cos(2\alpha) + cos(2n\alpha)sin(2\alpha)}{2\cdot sin(\alpha)}$$

19. $\boldsymbol{sin(\alpha) + sin(3\alpha) + ... + sin[(2n - 1)\cdot\alpha] =} \dfrac{1-cos(2n\cdot\alpha)}{2\cdot sin(\alpha)}$

$n = 1$: $sin(\alpha) = \dfrac{1-cos(2\alpha)}{2\cdot sin(\alpha)} = \dfrac{1-1+2sin^2(\alpha)}{2sin(\alpha)} = \dfrac{\cancel{2}sin^{\cancel{2}}(\alpha)}{\cancel{2sin(\alpha)}} = sin(\alpha)$; verificato. Hp: $sin(\alpha) + sin(3\alpha) + ... + sin[(2n - 1)\cdot\alpha] = \dfrac{1-cos(2n\cdot\alpha)}{2\cdot sin(\alpha)}$, Ts: $sin(\alpha) + sin(3\alpha) + ... + sin[(2n + 1)\cdot\alpha] =$

$$\frac{1-cos(2n\cdot\alpha+2\alpha)}{2\cdot sin(\alpha)} = \frac{1-cos(2n\cdot\alpha)cos(2\alpha)+sin(2n\alpha)sin(2\alpha)}{2\cdot sin(\alpha)}$$

Dim. $sin(\alpha) + sin(3\alpha) + ... + sin[(2n - 1)\cdot\alpha] + sin[(2n + 1)\cdot\alpha] =$

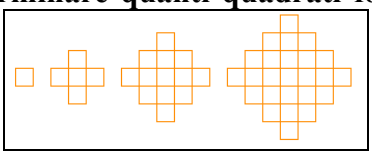
$$\frac{1-cos(2n\cdot\alpha)}{2\cdot sin(\alpha)} + sin\left[(2n+1)\alpha\right] = \frac{1-cos(2n\cdot\alpha)+2sin(\alpha)sin\left[(2n+1)\alpha\right]}{2\cdot sin(\alpha)} =$$

$$= \frac{1-cos(2n\cdot\alpha)+2sin(\alpha)\left[sin(2n\alpha)cos(\alpha)+cos(2n\alpha)sin(\alpha)\right]}{2\cdot sin(\alpha)} =$$

$$= \frac{1-cos(2n\cdot\alpha)+sin(2n\alpha)sin(2\alpha)+2cos(2n\alpha)sin^2(\alpha)}{2\cdot sin(\alpha)} = \frac{1-cos(2n\cdot\alpha)\cdot\left[1-2sin^2(\alpha)\right]+sin(2n\alpha)sin(2\alpha)}{2\cdot sin(\alpha)}$$

$$= \frac{1-cos(2n\cdot\alpha)\cdot cos(2\alpha)+sin(2n\alpha)sin(2\alpha)}{2\cdot sin(\alpha)}$$

20. Le figure seguenti costituiscono una successione di poligoni, che prosegue sempre seguendo la stessa legge. Determinare quanti quadrati formano il poligono al passo *n* e dimostrarla poi per induzione.



Nei primi passi abbiamo 1, 5, 13, 25. Osserviamo che a partire dal secondo passo, $n = 2$, i quadratini sono in numero di $1 + 1 + 3 = 2 \cdot 1 + 3 = 2 \cdot 1 + (2 \cdot 2 - 1) = 5$; $n = 3$: $2 \cdot (1 + 3) + 5 = 2 \cdot (1 + 3) + (2 \cdot 3 - 1) = 13$; $n = 4$: $2 \cdot (1 + 3 + 5) + 7 = 2 \cdot (1 + 3 + 5) + (2 \cdot 4 - 1) = 25$. Quindi in generale al passo n saranno $2 \cdot [1 + 3 + 5 + ... + (2n - 3)] + (2n - 1)$. Abbiamo $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 3) = (n - 1)^2$ (lo proveremo per induzione). Quindi deve essere: $2(n - 1)^2 + 2n - 1 = 2n^2 - 4n + 2 + 2n - 1 = 2n^2 - 2n + 1$. Proviamo che $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$, che equivale a quello che vogliamo provare, ma ha più senso perché in quel caso per $n = 1$ $2n - 3 = -1 : 1 = 1^2$. Hp: $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$; Ts: $1 + 3 + 5 + ... + (2n + 1) = (n + 1)^2$. Infatti $1 + 3 + 5 + ... + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$.

Provare la validità delle seguenti proprietà, valide per ogni n naturale, usando un metodo di dimostrazione diretto

21. a) $n^2 \cdot (n^2 - 1)$ è divisibile per 12; b) $n^5 - n$ è divisibile per 30; c) $n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n$ è divisibile per 8

a) se n è pari, cioè $n = 2h$, avremo: $n^2 \cdot (n^2 - 1) = 4h^2 \cdot (4h^2 - 1)$, che è divisibile per 4, se poi h è multiplo di 3, $h = 3m$, allora è divisibile per 12. Se invece $h = 3m \pm 1$, $4h^2 - 1 = 4 \cdot (3m \pm 1)^2 - 1 = 36m^2 \pm 24m + 4 - 1 = 36m^2 \pm 24m + 3 = 3 \cdot (12m^2 \pm 8m + 1)$, divisibile per 3, quindi va bene.

b) $n^5 - n = n \cdot (n^4 - 1) = n \cdot (n^2 - 1) \cdot (n^2 + 1) = n \cdot (n - 1) \cdot (n + 1) \cdot (n^2 + 1)$. I primi tre fattori sono consecutivi, quindi uno almeno è pari, e uno solo è multiplo di 3. Perciò il prodotto è

multiplo di $2 \cdot 3 = 6$. Se nessuno dei 3 è multiplo di 5, vuol dire che $n = 5m \pm 2$, quindi: $n^2 + 1 = (5m \pm 2)^2 + 1 = 25m^2 \pm 20m + 4 + 1 = 25m^2 \pm 20m + 5$, che è multiplo di 5. In ogni caso il numero è multiplo di $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.
c) $n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n = n \cdot (n^3 + 2n^2 + 3n + 2) = n \cdot (n + 1) \cdot (n^2 + n + 2)$. I primi due fattori sono uno pari e l'altro dispari, quindi il numero è pari. Ora se $n = 2h$, allora $n^2 + n + 2 = 4h^2 + 2h + 2 = 2 \cdot (2h^2 + h + 1)$, quindi abbiamo un altro fattore 2. Il numero è divisibile per 4. Se anche h è pari è divisibile anche per 8. Se $h = 2t + 1$, $2h^2 + h + 1 = 2(2t + 1)^2 + 2t + 1 + 1 = 8t^2 + 8t + 2 + 2t + 2$, che è pari. Quindi il numero è divisibile per 8. Stesso ragionamento se $n = 2h + 1$.

22. a) $n^3 + 11n$ è divisibile per 6; b) $7^n - 5^n$ è divisibile per 2; c) $n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3$ è divisibile per 9
a) $n^3 + 11n = n \cdot (n^2 + 11)$ se n è multiplo di 3, cioè $n = 3h$, avremo: $3h \cdot (9h^2 + 11)$, che è divisibile per 6 dato che se anche h è pari allora $3h$ è multiplo di 6, mentre se h è dispari, il secondo fattore è pari. Se $n = 3h \pm 1$, avremo: $(3h \pm 1) \cdot (9h^2 \pm 6h + 1 + 11) = (3h \pm 1) \cdot (9h^2 \pm 6h + 12) = (3h \pm 1) \cdot 3 \cdot (3h^2 \pm 2h + 6)$. Se h è dispari il primo fattore è pari, quindi ci siamo. Se h è pari lo è il terzo fattore.
b) La potenza di un numero dispari è dispari, quindi la differenza di due numeri dispari è pari.
c) Dato che i simboli sono del tutto arbitrari, basta scrivere la somma dei cubi di tre numeri consecutivi e quindi conviene scrivere: $(n - 1)^3 + n^3 + (n + 1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = 3n^3 + 6n = 3n \cdot (n^2 + 2)$, e ciò semplifica ma non incide sulla dimostrazione. Se n è multiplo di 3 abbiamo finito. Se $n = 3h \pm 1$: $3n \cdot (n^2 + 2) = 3 \cdot (3h \pm 1) \cdot [(3h \pm 1)^2 + 2] = 3 \cdot (3h \pm 1) \cdot (9h^2 \pm 6h + 1 + 2) = 3 \cdot (3h \pm 1) \cdot (9h^2 \pm 6h + 3) = 3 \cdot (3h \pm 1) \cdot 3 \cdot (3h^2 \pm 2h + 1)$. Dimostrato.

Correggere le seguenti errate "dimostrazioni" per induzione

23. Vogliamo provare che tutti gli esseri umani sono biondi. Vi è certamente uno biondo, quindi la proprietà è vera per $n = 1$. Supponiamo che n esseri umani a caso siano biondi. Adesso consideriamo $(n + 1)$ esseri umani, per l'ipotesi induttiva comunque ne prendo n questi sono biondi, quindi eliminando uno qualsiasi dagli $(n + 1)$ i rimanenti sono biondi, poiché possiamo eliminarne uno qualunque e quelli che restano sono biondi, vuol dire che sono tutti biondi.
Non possiamo applicare l'ipotesi induttiva perché essa non può valere per n a caso, ma "per i primi n", e in questo caso non è detto che l'essere di posto $n + 1$ sia biondo.

24. Consideriamo $n \geq 2$ oggetti indistinguibili, in cui $n - 1$ hanno lo stesso peso, p, e uno ha un peso diverso q. Proviamo che bastano due pesate per determinare l'oggetto che ha peso diverso. Se gli oggetti sono due ovviamente con una pesata vediamo chi è più pesante. Supponiamo per induzione che dati n oggetti, con due sole pesate riconosciamo l'elemento più pesante. Adesso abbiamo $(n + 1)$ elementi. Mettiamo da parte un elemento a caso, con 2 sole pesate riusciamo a determinare qual è il più pesante fra gli n rimasti, quindi riusciamo anche con $(n + 1)$ oggetti.
Anche in questa falsa dimostrazione non possiamo considerare n oggetti a caso. È facile provare che non bastano 2 pesate. Supponiamo di avere almeno 8 oggetti, li pesiamo mettendone 4 in ogni piatto della bilancia. In questo modo determiniamo quattro elementi in cui vi è quello diverso. Se li mettiamo 2 per piatto individuiamo 2 elementi in cui vi è quello diverso, ma serve un'altra pesata per stabilire qual è. Se gli oggetti sono meno di 8 invece due pesate bastano.

25. *Tutti i numeri di un insieme con n elementi sono uguali.* Se un insieme ha un solo numero

la proprietà è vera. Supponiamo sia vera per n elementi. Consideriamo l'insieme con $n + 1$ elementi: $\{a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}\}$. Per l'ipotesi induttiva sia l'insieme $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ che $\{a_2, ..., a_n, a_{n+1}\}$ hanno tutti gli elementi uguali, quindi anche $\{a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}\}$ li ha.
Passando da n a $n + 1$ si deve supporre che sia $n \geq 2$

26. ***Se a e b sono due numeri naturali tali che max(a, b) = n, allora a = b.*** **Se $max(a, b) = 1$, ovviamente $a = b = 1$. Supponiamo sia vero che se $max(a, b) = n$, allora $a = b$, supponiamo sia $max(a, b) = n + 1$, consideriamo $max(a - 1, b - 1) = n$, quindi possiamo applicare l'ipotesi induttiva e dire che $a - 1 = b - 1$, quindi è $a = b$.**
Se $max(a, b) = n + 1$ non è detto che $a - 1$ e $b - 1$ siano numeri naturali, per esempio max(7; 1) = 7 ma max (6, 0) non è più un'operazione fra numeri naturali.

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi

1. **Con riferimento al primo procedimento diagonale di Cantor, dimostrare che il massimo numero di frazioni nella riga di posto n, si ha solo se n è un numero primo.**
Sia p un numero primo, tutte le frazioni $1/(p - 1)$, $2/(p - 2)$, $3/(p - 3)$, ..., $n/1$, sono ridotte ai minimi termini. Infatti se h e $p - h$ avessero un fattore comune avremmo $h = kz$ e $p - h = kt$, ma allora $p = h + (p - h) = kz + kt = k \cdot (z + t)$ e quindi p non sarebbe primo.
2. **Si osservi che $1 = 1^3$, $3 + 5 = 2^3$, $7 + 9 + 11 = 3^3$, congetturare una legge generale e provarla per induzione.**
La congettura è: dividiamo i numeri naturali dispari in gruppi di 1, 2, 3, ..., n, ... in ordine: allora la somma di ognuno degli elementi di questi gruppi è uguale al cubo di quanti sono. È difficile trovare la regola generale. Cominciamo a determinare gli elementi minore e maggiore di ogni gruppo riscrivendo le somme date in funzione della base del cubo somma, n: , e quindi anche di quanti addendi sommiamo. $n = 1$: $1 = (2 \cdot 0 + 1)$; $n = 2$: $3 + 5 = (2 \cdot 1 + 1) + (2 \cdot 2 + 1)$; $n = 3$: $7 + 9 + 11 = (2 \cdot (1 + 2) + 1) + (2 \cdot 4 + 1) + (2 \cdot (1 + 2 + 3) - 1)$; $n = 4$: $13 + 15 + 17 + 19 = (2 \cdot (1 + 2 + 3) + 1) + ... + (2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) - 1)$; $n = 5$: $21 + 23 + 25 + 27 + 29 = (2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) + 1) + ... + (2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) - 1)$. Quindi in generale l'ennesima somma ha come primo addendo $[2 \cdot (1 + 2 + .. + (n - 1) + 1] = 2 \cdot n \cdot (n - 1)/2 + 1 = n \cdot (n - 1) + 1 = n^2 - n + 1$ e come n-esimo $\{2 \cdot [1 + 2 + .. + n - 1\} = 2 \cdot n \cdot (n + 1)/2 - 1 = n \cdot (n + 1) - 1 = n^2 + n + 1$. Quindi l'ipotesi induttiva è che $\sum_{k=1}^{n}\left(n^2 - n + 2k - 1\right) = n^3$. Proviamola. $n = 1$: $1^2 - 1 + 2 - 1 = 1^3$; ok. Hp: $\sum_{k=1}^{n}\left(n^2 - n + 2k - 1\right) = n^3$, Ts: $\sum_{k=1}^{n+1}\left[(n+1)^2 - (n+1) + 2k - 1\right] = (n+1)^3$.
Dim.
$$\sum_{k=1}^{n+1}\left[(n+1)^2 - (n+1) + 2k - 1\right] = \sum_{k=1}^{n+1}\left[n^2 + 2n + \cancel{1} - n - \cancel{1} + 2k - 1\right] = \sum_{k=1}^{n+1}\left[n^2 - n + 2k - 1\right] + \sum_{k=1}^{n+1} 2n =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\left[n^2 - n + 2k - 1\right] + \left(n^2 - n + 2n - 1\right) + 2\sum_{k=1}^{n+1} n = n^3 + n^2 + n - 1 + 2n \cdot (n+1) = (n+1)^3$$

3. **Provare che $3n^5 + 5n^3 - 8n$ è divisibile per 120, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.**
$n = 1$: $3 + 5 - 8 = 0 = 120 \cdot 0$; ok. Hp: $3n^5 + 5n^3 - 8n = 120h$; Ts: $3(n + 1)^5 + 5(n + 1)^3 - 8(n + 1) = 120k$. Dim. $3(n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1) + 5(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - 8n - 8 = (3n^5 + 5n^3 - 8n) + 3(5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1) + 5(3n^2 + 3n + 1) - 8 = 120h + 15n^4 + 30n^3 + 45n^2 + 30n = 120h + 15n \cdot (n^3 + 2n^2 + 3n + 2)$. Proviamo $n \cdot (n^3 + 2n^2 + 3n + 2) = 8a$. Se n è pari, dobbiamo provare che $n^3 + 2n^2 + 3n + 2$ è multiplo di 4, cioè $4p^3 + 8p^2 + 6p + 2$, che è multiplo di 2, quindi anche $2p^3 + 4p^2 + 3p + 1$ deve essere pari, che succede solo se p è dispari. Ma se p è pari vuol

dire che $n = 2p = 4t$ e quindi l'espressione di partenza è multipla di 8. Ci rimane da considerare il caso in cui n è dispari: $n = 2p - 1$: $n \cdot (n^3 + 2n^2 + 3n + 2) = (2p - 1) \cdot [(2p - 1)^3 + 2(2p - 1)^2 + 3(2p - 1) + 2] = (2p - 1) \cdot (8p^3 - 12p^2 + 6p - 1 + 8p^2 - 8p + 2 + 6p - 3 + 2) = (2p - 1) \cdot (8p^3 - 4p^2 + 4p) = 4 \cdot (2p - 1) \cdot (2p^3 - p^2 + p)$. L'ultimo fattore è certamente pari perché $-p^2 + p$ in quanto somma di numeri della stessa parità è pari.

4. **Sistemiamo n^2 numeri dispari all'interno di un quadrato come mostrato in figura nel caso in cui $n = 4$. Osservare che la somma degli elementi diagonali è uguale al cubo di n, mentre la somma di tutti i numeri è la quarta potenza di n. Determinare e dimostrare le relative formule.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 9 & 11 & 13 & 15 \\ 17 & 19 & 21 & 23 \\ 25 & 27 & 29 & 31 \end{bmatrix}$.

Per la seconda formula non vi sono problemi: $\sum_{k=1}^{n^2}(2k-1) = n^4$. Dimostriamola per induzione. $\sum_{k=1}^{1^2}(2k-1) = 1 = 1^4$; Adesso: $\sum_{k=1}^{n^2}(2k-1) = n^4 \Rightarrow \sum_{k=1}^{(n+1)^2}(2k-1) = (n+1)^4$. Si ha:

$$\sum_{k=1}^{(n+1)^2}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n^2}(2k-1) + 2(n+1)^2 - 1 = n^4 + 2(n+1)^2 - 1 = n^4 + 2n^2 + 2 - 1 = n^4 + 2n^2 + 1 = (n+1)^4$$

Più complessa è la determinazione della seconda formula. Costruiamo il quadrato di "lato" n

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & \dots & 2n-1 \\ 2n+1 & 2n+3 & 2n+5 & 2n+7 & \dots & 4n-1 \\ 4n+1 & 4n+3 & 4n+5 & 4n+7 & \dots & 6n-1 \\ 6n+1 & 6n+3 & 6n+5 & 6n+7 & \dots & 8n-1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2(n-1)n+1 & 2(n-1)n+3 & 2(n-1)n+5 & 2(n-1)n+7 & \dots & 2n^2-1 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo quindi sommare $1 + (2n + 3) + (4n + 5) + (6n + 7) + \dots + (2n^2 - 1) = 1 + (2n + 2 + 1) + (2 \cdot 2n + 2 \cdot 2 + 1) + (2 \cdot 3n + 2 \cdot 3 + 1) + \dots + [2 \cdot (n - 1) \cdot n + 2 \cdot (n - 1) + 1] = \sum_{k=0}^{n-1}(2kn + 2k + 1) = n^3$

5. **Provare che $a^n - b^n$ è divisibile per $(a - b)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, a e b numeri reali positivi.**

$n = 1$: $a - b$ è divisibile per $a - b$. Se $a^n - b^n$ anche $a^{n+1} - b^{n+1}$ lo è. Infatti: $a^{n+1} - b^{n+1} = a \cdot a^n - b \cdot b^n = a \cdot a^n - (a + b - a) \cdot b^n = a \cdot (a^n - b^n) + (a - b) \cdot b^n$. Per l'ipotesi induttiva il primo addendo è divisibile per $a - b$, mentre il secondo evidentemente lo è. Dimostrato.

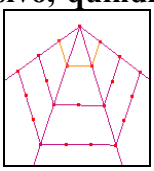
6. **Provare la disuguaglianza di Bernoulli: $(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \geq -1$.**

$n = 1$: $1 + x \geq 1 + x$. Vero. Se $(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x$ anche $(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1) \cdot x$. Infatti: $(1 + x)^{n+1} = (1 + x) \cdot (1 + x)^n \geq (1 + x) \cdot (1 + n \cdot x)$. Ora $1 + (n + 1) \cdot x = 1 + nx + x$. E ovviamente $1 + x \geq x$, quindi $(1 + x) \cdot (1 + n \cdot x) \geq 1 + nx + x$. Dimostrato.

7. **Provare che $n! > 2^{n-1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$. Si ha: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.**

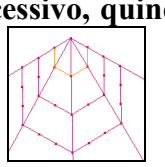
Il primo caso si ha per $n = 3$: $3! > 2^{3-1} \Rightarrow 6 > 4$. Vero. Osserviamo che invece si ha $1! = 2^{1-1}$ e $\Rightarrow 2! = 2^{2-1}$. Se $n! > 2^{n-1}$ anche $(n + 1)! > 2^n$. Infatti: $(n + 1)! = (n + 1) \cdot n! > (n + 1) \cdot 2^{n-1}$. Dato che $n > 2 \Rightarrow n + 1 > 3$, quindi $(n + 1) \cdot 2^{n-1} > 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$. Dimostrato.

8. **In figura abbiamo tracciato i primi 4 numeri pentagonali (1, 5, 12, 22), determinare la legge che permette di passare da un numero pentagonale al successivo, quindi trovare la legge che permette di determinare l'*n*–esimo numero pentagonale.**



Vediamo come si passa da 5 a 12. 12 = 5 + 7 = 5 + (4 + 3); ossia ai 5 punti di partenza aggiungiamo 4 punti che sono i "prolungamenti" dei 4 punti del precedente pentagono escluso il "vertice generatore", e poi 3 punti che sono i punti medi dei 3 lati che non sono prolungamenti dei lati per così dire estremi. A questo punto il passo successivo contiene $12 + (4 + 2 \cdot 3) = 22$, che può anche scriversi: $12 + [(3 + 1) + 2 \cdot 3] = 12 + (3 \cdot 3 + 1)$. Lo stesso accade per il passo successivo: $22 + (3 \cdot 4 + 1) = 35$. Quindi in generale, detto $P(n)$ l'n-esimo pentagonale, avremo $P(n) = P(n - 1) + [3 \cdot (n - 1) + 1]$. Da cui: $P(n) = P(n - 2) + [3 \cdot (n - 2) + 1] + [3 \cdot (n - 1) + 1] = P(n - 2) + 3 \cdot [(n - 2) + (n - 1)] + 2 = P(n - 3) + [3 \cdot (n - 3) + 1] + 3 \cdot [(n - 2) + (n - 1)] + 2 = P(n - 3) + 3 \cdot [(n - 3) + (n - 2) + (n - 1)] + 3 = ...= P(1) + 3 \cdot [1 + ...+ (n - 3) + (n - 2) + (n - 1)] + n = 1 + 3 \cdot n \cdot (n - 1)/2 + (n - 1) = (2 + 3n^2 - 3n + 2n - 2)/2 = (3n^2 - n)/2$.

9. **In figura abbiamo tracciato i primi 4 numeri esagonali (1, 6, 15, 28), determinare la legge che permette di passare da un numero esagonale al successivo, quindi trovare la legge che permette di determinare l'*n*–esimo numero esagonale.**



Basta ripetere quanto visto nel caso precedente per ottenere facilmente la formula: $E(n) = E(n - 1) + [4 \cdot (n - 1) + 1]$ e quindi: $E(n) = E(n - 2) + [4 \cdot (n - 2) + 1] + [4 \cdot (n - 1) + 1] = E(n - 2) + 4 \cdot [(n - 2) + (n - 1)] + 2 = E(n - 3) + [4 \cdot (n - 3) + 1] + 4 \cdot [(n - 2) + (n - 1)] + 2 = E(n - 3) + 4 \cdot [(n - 3) + (n - 2) + (n - 1)] + 3 = ...= E(1) + 4 \cdot [1 + ...+ (n - 3) + (n - 2) + (n - 1)] + n = 1 + 4 \cdot n \cdot (n - 1)/2 + (n - 1) = (2 + 4n^2 - 4n + 2n - 2)/2 = 2n^2 - n$

10. **Determinare una formula che permette di calcolare l'*n*-esimo numero poligonale, indicando con $h > 3$, il numero di lati del poligono**

Sempre sulla falsariga dei casi precedenti, troviamo: $P_h(n) = P_h(n - 1) + [(h - 2) \cdot (n - 1) + 1]$ e quindi: $P_h(n) = P_h(n - 2) + [(h - 2) \cdot (n - 2) + 1] + [(h - 2) \cdot (n - 1) + 1] = P_h(n - 2) + (h - 2) \cdot [(n - 2) + (n - 1)] + 2 = P_h(n - 3) + [(h - 2) \cdot (n - 3) + 1] + (h - 2) \cdot [(n - 2) + (n - 1)] + 2 = P_h(n - 3) + (h - 2) \cdot [(n - 3) + (n - 2) + (n - 1)] + 3 = ...= P_h(1) + (h - 2) \cdot [1 + ...+ (n - 3) + (n - 2) + (n - 1)] + n = 1 + (h - 2) \cdot n \cdot (n - 1)/2 + (n - 1) = (2 + (h - 2)n^2 - (h - 2)n + 2n - 2)/2 = (h - 2)n^2 - (h - 4)n/2$

Data la successione di Fibonacci*: F_n = {1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …} *in cui ogni numero, a parte i primi due, è somma dei due che lo precedono. Sulla base degli esempi proposti enunciare e dimostrare una congettura

11. **$1 + 1 = 3 - 1$; $1 + 1 + 2 = 5 - 1$; $1 + 1 + 2 + 3 = 8 - 1$; $1 + 1 + 2 + 3 + 5 = 13 - 1$.**

Abbiamo che $F(1) + F(2) + \ldots + F(n) = F(n + 2) - 1$. Proviamolo per induzione. Dobbiamo partire da $n = 2$, che è già verificato nel testo. Supponiamo che $F(1) + F(2) + \ldots + F(n) = F(n + 2) - 1$ e proviamo che $F(1) + F(2) + \ldots + F(n + 1) = F(n + 3) - 1$. Si ha: che $F(1) + F(2) + \ldots + F(n + 1) = F(n + 2) - 1 + F(n + 1) = F(n + 3) - 1$. Dato che si ha: $F(n + 3) = F(n + 1) + F(n + 2)$

12. **$1 + 3 = 5 - 1$; $1 + 3 + 8 = 13 - 1$; $1 + 3 + 8 + 21 = 34 - 1$**

La congettura è: $F(2) + F(4) + \ldots + F(2n) = F(2n + 1) - 1$, con questa ipotesi proviamo che si ha: $F(2) + F(4) + \ldots + F(2n) + F(2n + 2) = F(2n + 3) - 1$. Si ha: $F(2n + 1) - 1 + F(2n + 2) =$

$F(2n + 3) - 1$

13. $1 + 2 = 3$; $1 + 2 + 5 = 8$; $1 + 2 + 5 + 13 = 21$.
La congettura è: $F(1) + F(3) + \ldots + F(2n - 1) = F(2n)$, con questa ipotesi proviamo che si ha: $F(1) + F(3) + \ldots + F(2n - 1) + F(2n + 1) = F(2n + 2)$. Si ha: $F(2n) + F(2n + 1) = F(2n + 2)$

14. $1^2 + 1^2 = 1\cdot 2$; $1^2 + 1^2 + 2^2 = 2\cdot 3$; $1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 3\cdot 5$; $1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 = 5\cdot 8$
La congettura è: $F^2(1) + F^2(2) + \ldots + F^2(n) = F(n) \cdot F(n + 1)$, con questa ipotesi proviamo che si ha: $F^2(1) + F^2(2) + \ldots + F^2(n + 1) = F(n + 1) \cdot F(n + 2)$. Si ha: $F(n) \cdot F(n + 1) + F^2(n + 1) = \cdot F(n + 1) \cdot [F(n) + F(n + 1)] = F(n + 1) \cdot F(n + 2)$

15. $2^2 - 1^2 = 1\cdot 3$; $3^2 - 2^2 = 1\cdot 5$; $5^2 - 3^2 = 2\cdot 8$; $8^2 - 5^2 = 3\cdot 13$; $13^2 - 8^2 = 5\cdot 21$
La congettura è: $F^2(k + 1) - F^2(k) = F(k - 1) \cdot F(k + 2)$, con questa ipotesi proviamo che si ha: $F^2(k + 2) - F^2(k + 1) = F(k) \cdot F(k + 3)$. Si ha: $F^2(k + 2) - F^2(k + 1) = [F(k + 2) - F(k + 1)] \cdot [F(k + 2) + F(k + 1)] = F(k) \cdot F(k + 3)$.

16. $2^2 - 1^2 = 1\cdot 3$; $3^2 - 2^2 = 1\cdot 5$; $5^2 - 3^2 = 2\cdot 8$; $8^2 - 5^2 = 3\cdot 13$; $13^2 - 8^2 = 5\cdot 21$
La congettura è: $F^2(k + 1) - F^2(k) = F(k - 1) \cdot F(k + 2)$, dobbiamo provare che in questa ipotesi si ha: $F^2(k + 2) - F^2(k + 1) = F(k) \cdot F(k + 3)$. Abbiamo: $F^2(k + 2) - F^2(k + 1) = [F(k) + F(k + 1)]^2 - F^2(k + 1) = F^2(k) + F^2(k + 1) + 2F(k) \cdot F(k + 1) - F^2(k + 1) = F^2(k) + 2F(k) \cdot F(k + 1) = F(k) \cdot [F(k) + 2F(k + 1)] = F(k) \cdot [F(k) + F(k + 1) + F(k + 1)] = F(k) \cdot [F(k + 2) + F(k + 1)] = F(k) \cdot F(k + 3)$.

17. $1 \cdot 2 = 1^2 + 1$; $1 \cdot 3 = 2^2 - 1$; $2 \cdot 5 = 3^2 + 1$; $3 \cdot 8 = 5^2 - 1$; $5 \cdot 13 = 8^2 + 1$
La congettura è $F(k) \cdot F(k + 2) = F^2(k + 1) + (-1)^k$, dobbiamo provare che si ha: $F(k + 1) \cdot F(k + 3) = F^2(k + 2) + (-1)^{k+1}$. Abbiamo: $F^2(k + 2) = [F(k + 1) + F(k)]^2 = F^2(k + 1) + F^2(k) + 2\, F(k) \cdot F(k + 1)$. Ora: $F(k + 1) \cdot F(k + 3) = F(k + 1) \cdot [F(k + 2) + F(k + 1)] = F(k + 1) \cdot F(k + 2) + F^2(k + 1) = F(k + 1) \cdot [F(k + 1) + F(k)] + F^2(k + 1) = F(k + 1) \cdot [F(k) + F(k - 1) + F(k)] + F^2(k + 1) = 2F(k + 1) \cdot F(k) + F(k + 1) \cdot F(k - 1) + F^2(k + 1) = 2F(k + 1) \cdot F(k) + F^2(k) + (-1)^{k-1} + F^2(k + 1) = [F(k + 1) + F(k)]^2 + (-1)^{k-1}$, abbiamo finito dato che $(-1)^{k-1} = (-1)^{k+1}$.

18. $1^2 - 1 \cdot 2 = -1$; $2^2 - 1 \cdot 3 = 1$; $3^2 - 2 \cdot 5 = -1$; $5^2 - 3 \cdot 8 = -1$
La congettura è $F^2(k) - F(k - 1) \cdot F(k + 1) = (-1)^k$. Dobbiamo provare allora che se vale essa vale anche $F^2(k + 1) - F(k) \cdot F(k + 2) = (-1)^{k+1}$. Abbiamo: $F^2(k + 1) - F(k) \cdot [F(k + 1) + F(k)] = F^2(k + 1) - F(k) \cdot F(k + 1) - F^2(k) = F(k + 1) \cdot [F(k + 1) - F(k)] - F^2(k) = F(k + 1) \cdot [F(k) + F(k - 1) - F(k)] - F^2(k) = F(k + 1) \cdot F(k - 1) - F^2(k) = -(-1)^k = (-1)^{k+1}$.

19. Provare che si ha: $\begin{Vmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}^n$. Per convenzione: $F_0 = 0$.

Abbiamo $\begin{Vmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}^1$. Supponiamo vero: $\begin{Vmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}^n$, vogliamo provare $\begin{Vmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}^{n+1}$. Abbiamo:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}^{n+1} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}^n = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} F_{n+1} + F_n & F_n + F_{n-1} \\ F_{n+1} & F_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{Vmatrix}$$

Temi assegnati agli esami di stato

I seguenti sono adattamenti dei temi assegnati in alcuni esami di stato degli anni scorsi, abbiamo variato solo la richiesta del problema, ma non i dati né lo spirito dei problemi
I temi completi dei Licei Scientifici per gli ultimi anni sono scaricabili, con soluzione, dal sito
http://matdidattica.altervista.org/esamidistato.htm

1. **(Liceo scientifico 2002/03) Considerati i primi *n* numeri naturali a partire da 1: 1, 2, 3, ..., *n* – 1, *n* , moltiplicarli combinandoli due a due in tutti i modi possibili. La somma dei prodotti ottenuti risulta uguale a: A)** $\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}$ **; B)** $\frac{n\cdot(n^2-1)}{3}$ **; C)** $\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(3n+1)}{24}$**; D)** $\frac{n\cdot(n^2-1)\cdot(3n+2)}{24}$**. Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.**
   I prodotti sono: $1\cdot 1, 1\cdot 2, ..., 1\cdot n; 2\cdot 1, 2\cdot 2, ..., 2\cdot n; 3\cdot 1, 3\cdot 2, ..., 3\cdot n; ...; n\cdot 1, n\cdot 2, ..., n\cdot n$. Ora la generica somma di ognuna di queste *n*-uple: $k + k\cdot 2 + ... + k\cdot n = k\cdot(1 + 2 + ... + n)$. Già sappiamo che $1+2+...+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$. Quindi tutte le somme equivalgono alle somme seguenti:
$$\frac{n\cdot(n+1)}{2}+2\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2}+3\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2}+...+n\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2}=$$
$$=(1+2+3+...+n)\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2}=\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2=\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}.$$
   Però in questo modo abbiamo considerato due volte i prodotti *hk* e *kh* che invece sono da considerare una sola volta. Pertanto dobbiamo togliere queste somme. Allora prima eliminiamo i prodotti $hh = h^2$ che si ripetono una sola volta, poi dividiamo per 2 e sommiamo i quadrati tolti prima. Abbiamo già calcolato la somma dei primi *n* quadrati $\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$. Quindi:
$$\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}-\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}\right]=\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{8}-\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{12}=$$
$$\frac{3n^2\cdot(n+1)^2-2n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{24}=\frac{(n+1)\cdot\left[3n^3+3n^2-4n^2-2n\right]}{24}=\frac{(n+1)\cdot(3n^3-n^2-2n)}{24}=$$
$$=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(3n^2-n-2)}{24}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n+1)\cdot(3n+2)}{24}=\frac{n\cdot(n^2-1)\cdot(3n+2)}{24}.$$
   La risposta corretta è D.

2. **(Maturità scientifica PNI 2012/2013) Tre amici discutono animatamente di numeri reali. Anna afferma che sia i numeri razionali che gli irrazionali sono infiniti e dunque i razionali sono tanti quanti gli irrazionali. Paolo sostiene che gli irrazionali costituiscono dei casi eccezionali, ovvero che la maggior parte dei numeri reali sono razionali. Luisa afferma, invece, il contrario: sia i numeri razionali che gli irrazionali sono infiniti, ma esistono più numeri irrazionali che razionali. Chi ha ragione? Si motivi esaurientemente la risposta.**

   Ha ragione Luisa perché gli irrazionali sono equipotenti ai reali che hanno una cardinalità superiore ai razionali.

3. **(Liceo scientifico PNI 2013/14) Le lettere $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R}$ denotano, rispettivamente, gli insiemi dei numeri naturali, interi, razionali e reali mentre il simbolo $\aleph_0$ (*aleph-zero*) indica la**

cardinalità di $\mathbb{N}$. Gli insiemi $\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R}$ hanno anch'essi cardinalità $\aleph_0$? Si motivi la risposta.
Basta considerare la teoria per rispondere: $\mathbb{Z},\mathbb{Q}$ sì; $\mathbb{R}$, no.

1. **(S1950) Osserva che 1 = 1; 1 – 4 = – (1 + 2); 1 – 4 + 9 = 1 + 2 + 3; 1 – 4 + 9 – 16 = – (1 + 2 + 3 + 4). Determinare e dimostrare la legge generale.**
La legge si ricava facilmente. A sinistra abbiamo la somma alterna dei quadrati, a destra il semi prodotto di quanti sono gli addendi per il suo successivo, preceduta dal segno dell'ultimo addendo: $1-4+9-16+\ldots+(-1)^{n-1}n^2=\frac{(-1)^{n-1}n\cdot(n+1)}{2}$ (*)
Proviamola per induzione.
Già verificata per n = 1. Adesso distinguiamo i casi n pari ed n dispari. Nel primo caso: la (*) diventa: $1-4+9-16+\ldots-n^2=\frac{-(n+1)\cdot n}{2}$ e dobbiamo provare che si ha: $1-4+9-16+\ldots-n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$, abbiamo:
$\frac{-(n+1)\cdot n}{2}+(n+1)^2=\frac{(n+1)\cdot[-n+2(n+1)]}{2}=\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$. Se n è dispari invece: $1-4+9-16+\ldots+n^2=\frac{(n+1)\cdot n}{2}$ e $1-4+9-16+\ldots+n^2-(n+1)^2=\frac{-(n+1)\cdot(n+2)}{2}$. Infatti:
$\frac{(n+1)\cdot n}{2}-(n+1)^2=\frac{(n+1)[n-2(n+1)]}{2}=-\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$

2. **(S1953) Osserva che $\frac{1}{2!}=\frac{1}{2};\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}=\frac{5}{6};\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}=\frac{23}{24}$. Determinare e dimostrare la legge generale.**
Osserviamo che le frazioni risultato hanno per denominatore quello dell'ultimo addendo e per numeratore il precedente numero. Quindi la regola è: $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{(n-1)}{n!}=\frac{n!-1}{n!}$. Proviamola per induzione. Già verificata per n = 2. Dobbiamo provare che $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{(n+1)!-1}{(n+1)!}$, il membro sinistro, usando l'ipotesi induttiva diventa:
$\frac{n!-1}{n!}+\frac{n}{(n+1)!}=\frac{(n+1)\cdot(n!-1)+n}{(n+1)!}=\frac{(n+1)!-n-1+n}{(n+1)!}=\frac{(n+1)!-1}{(n+1)!}$

Questions in English

3. **(S1958) Observe that 1!·1 = 1; 1!·1 + 2!·2 = 5; 1!·1 + 2!·2 + 3!·3 = 23; 1!·1 + 2!·2 + 3!·3 + 4!·4 = 119. Guess and prove the general law.**
Anche in questo osserviamo che la soluzione è il precedente del fattoriale del successivo dell'ultimo addendo. Quindi la regola è: 1!·1 + 2!·2 + 3!·3 + … + n!·n = (n + 1)! – 1. Già provata per n = 1. Dobbiamo provare che 1!·1 + 2!·2 + 3!·3 + … + n!·n + (n + 1)!·(n + 1) = (n + 2)! – 1. Il membro sinistro, con l'ipotesi induttiva, si scrive: (n + 1)! – 1 + (n + 1)!·(n + 1) = (n + 1)! · (n + 2) – 1 = (n + 2)! – 1

4. **(S1963) Show that the espression $n^2 \cdot (n^2 - 1) \cdot (n^2 - 4)$ is divisible by 360 for each n natural.**

Scomponendo abbiamo $n \cdot n\ (n - 1) \cdot (n + 1) \cdot (n - 2) \cdot (n + 2)$. Vi sono 5 numeri interi consecutivi (da $n - 2$ a $n + 2$), quindi vi sono almeno 2 numeri pari quindi un multiplo di 8, almeno un multiplo di 3 e almeno uno di 5. Quindi certamente il numero è divisibile per 120. Ora se vi fosse un solo multiplo di 3 questo dovrebbe essere il termine centrale, ossia n che siccome è presente due volte fa sì che il numero sia divisibile anche per 9 e quindi per 360.

Test di Verifica

1. **Quali fra i seguenti insiemi sono numerabili?**

   A $\left\{\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},...,\sqrt{n},...\right\}$ **B** $\left\{\frac{1}{a},a>0\right\}$ **C** $\left\{log_2(3),log_2(9),log_2(27),...,log_2\left(3^n\right),...\right\}$

   D $\left\{\pi,\pi^{\pi},\pi^{2\pi},...,\pi^{n\pi},...\right\}$ **E** $\left\{2^x,0<x<1\right\}$

   Lo sono tutti quelli assimilabili ai numeri naturali, quindi: A – C – D

2. **Considerando il primo procedimento diagonale di Cantor, di seguito indichiamo la somma di numeratore e denominatore. Per quali valori nella relativa riga vi sono esattamente 4 frazioni?**

   A 5 B 7 C 8 D 11 E 12

   A: (1/4, 2/3, 3/2, 4/1); C: (1/7, 3/5, 5/3, 7/1); E: (1/11, 5/7, 7/5, 11/1)
   Mentre B: (1/6, 2/5, ¾, 4/3, 5/2, 6/1) e D: (1/10, 2/9, 3/8, 4/7, 5/6, 6/5, 7/4, 8/3, 9/2, 10/1)

3. **Per provare per induzione che $23^{n+1} - 11^{n+1}$ è multiplo di 12, dobbiamo effettuare quali delle seguenti prove?**

   A $23 - 11 = 12$ B $23^2 - 11^2 = 12 \cdot 34$ C $23^{n+2} - 11^{n+2}$ è multiplo di 12

   D $23^n - 11^n$ è multiplo di 12 E $23^5 - 11^5$ è multiplo di 12

   Dobbiamo verificare il caso $n = 1$, quindi B e poi il caso $n + 1$, cioè C

4. **Quali fra i seguenti insiemi sono equipotenti all'insieme $\{i, 1 + i, 1 - i\}$?**

   A Insieme dei triangoli B Soluzioni complesse di $x^3 + 1 = 0$ C Soluzioni reali di $x^3 - 1 =$

   D Quadrati perfetti compresi tra 65 e 122 E Numeri primi compresi tra 24 e 35

   Dobbiamo cercare gli insiemi con 3 elementi, che sono: B, ogni equazione di III grado ha sempre 3 soluzioni complesse, che in questo caso sono tutte distinte; e D perché sono 9^2, 10^2 e 11^2, mentre $12^2 > 122$. A è infinito; C ha una sola soluzione reale; in E vi sono 2 elementi: {29, 31}

5. **Quali delle seguenti proprietà possono essere provate per induzione?**

   A I numeri primi sono infiniti B $3^n \geq n^2$, $n \in \mathbb{N}$ C $x^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

   D $\sum_{n=1}^{100} q^n = \frac{q^{101}-1}{q-1}$ **E $14^{2n+1} - 11^{2n} - 3$ è multiplo di 5**

   Le proprietà di insiemi infiniti numerabili quindi B ed E

6. **Consideriamo la corrispondenza biunivoca fra $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{N}$: $0 \leftrightarrow 1$, $-1 \leftrightarrow 2$, $-2 \leftrightarrow 3$, $-3 \leftrightarrow 5$, $-4 \leftrightarrow 6$, ..., $1 \leftrightarrow 4$, $2 \leftrightarrow 7$, $3 \leftrightarrow 10$... Se si ha: $-113 \leftrightarrow n$, quanto vale n?**

   A 160 B 164 C 170 D 171 E Nessuno dei precedenti

   La relazione di corrispondenza associa ad ogni intero positivo n il numero $3n + 1$, mentre ai numeri negativi $-(2n - 1)$ e $-2n$ i numeri $3n - 1$ e $3n$. Dato che $113 = 2 \cdot 57 - 1$, gli sarà associato il numero $3 \cdot 57 - 1 = 170$, quindi C

7. **Considerando il primo procedimento diagonale di Cantor, che posto occupa la frazione 3/5?**

   A 20 B 17 C 23 D 31 E Nessuno dei precedenti

   Siamo nella riga relativa alla somma 3 + 5 = 8. Nelle righe precedenti abbiamo (1 + 1 + 2 + 2 + 4 + 2 + 6) = 18, poi nella riga di 3/5 abbiamo 1/7, 3/5. Quindi occupa la posizione 20, cioè A

8. **Considerando il primo procedimento diagonale di Cantor, per quale fra le seguenti somme numeratore più denominatore, nella relativa riga vi sono 3 frazioni?**

   A 15 B 18 C 23 D Non è possibile E Nessuno dei precedenti

   Non è possibile perché abbiamo sicuramente $1/n$ e $n/1$ e poi se abbiamo un'altra frazione a/b dobbiamo avere anche b/a. Quindi D

9. Per provare per induzione che $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}, n>1$**, prima si prova che** $1-\frac{1}{4}=\frac{2+1}{2\cdot 2}$ **e poi?**

A $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2+1}\right)=\frac{n+2}{2n+1}$ **B** $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{n+2}{2n+1}$

C $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{n+2}{2n+2}$ **D** $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+2}{2n}$

E Nessuno dei precedenti

Dobbiamo provare il caso $n + 1$, quindi C

10. Se è vero che $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$**, quale fra le seguenti uguaglianze è corretta?**

A $1^2+2^2+\ldots+70^2=\frac{35\cdot 71\cdot 141}{3}$ **B** $1^2+2^2+\ldots+100^2=\frac{100\cdot 101\cdot 202}{6}$

C $1^2+2^2+\ldots+(n+1)^2=\frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(2n+2)}{6}$

D $1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(2n-1)}{4}$ **E Nessuno dei precedenti**

Solo la A è corretta

11. Dimostrare per induzione che $2^{n+2} + 5^{n+1}$ è multiplo di 3.

$2^{1+2} + 5^{1+1} = 2^3 + 5^2 = 8 + 25 = 33 = 3 \cdot 11$; $2^{n+2} + 5^{n+1} = 3 \cdot h$, $2^{n+3} + 5^{n+2} = 2 \cdot 2^{n+1} + 5 \cdot 5^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} + 2 \cdot 5^{n+1} + 3 \cdot 5^{n+1} = 2 \cdot (2^{n+1} + 5^{n+1}) + 3 \cdot 5^{n+1} = 2 \cdot 3 \cdot h + 3 \cdot 5^{n+1} = 3 \cdot (2h + 5^{n+1})$

12. Provare che l'insieme dei numeri razionali positivi e l'insieme $\left\{-\frac{7}{8},\frac{14}{9},-\frac{21}{10},\ldots\right\}$**, hanno la stessa cardinalità.**

Basta osservare che il secondo è un sottoinsieme infinito dei razionali, quindi è equipotente ai razionali, che a loro volta sono equipotenti ai razionali positivi

13. Scrivi la riga di posto 40 relativa al primo procedimento diagonale di Cantor

1/39, 3/37, 7/33, 9/31, 11/29, 13/27, 17/23, 19/21, 21/19, …, 39/1

14. Un insieme è infinito se può mettersi in corrispondenza biunivoca **con un suo** sottoinsieme proprio. **Ogni insieme equipotente a** $\mathbb{N}$**, si dice che ha la potenza** del numerabile

15. Dato un insieme *A* e una proprietà *P*, tutti gli elementi di *A* verificano *P*, se la verifica il primo **elemento e ogni qualvolta la verifica un certo elemento** diverso dal primo **allora la verifica anche l'elemento** successivo