8.2 Combinatoria

Raggruppamenti semplici e con ripetizione e principio dei cassetti

Quali fra i seguenti raggruppamenti sono semplici e quali ripetuti?

1. **a) PIN formato con 5 cifre; b) Targhe automobilistiche italiane**
a) Ripetuti es: 11123; b) Ripetuti es: AA123BX
2. **Numeri interi minori di 100 le cui cifre sono in ordine crescente (pe 123, 369, ma non 452)**
Semplici perché sono ordinate
3. **Anagrammi della parola CARTE Anagrammi della parola CARTA**
a) Semplici perché tutte le lettere sono diverse; b) Ripetuti, la A si ripete
4. **Anagrammi della parola CARTA che iniziano per A**
Semplici perché in CART non ci sono lettere ripetute
5. **Anagrammi della parola CARTA che iniziano per C**
Ripetuti perché in ARTA si ripete la A
6. **Numeri usciti al gioco della roulette in tre turni successivi**
Ripetuti perché può uscire la terna 12-12-13
7. **Combinazioni di una cassaforte che usa 5 lettere scelte fra 5 vocali**
Ripetuti perché può essere per esempio aauui
8. **Possibili menu completi (primo, secondo, dolce)**
Semplici perché le portate sono diverse fra loro
9. **Estrazione del primo numero sulla ruota di Roma**
Semplici perché è un solo numero
10. **Partite di una giornata di un campionato di calcio a 10 squadre**
Semplici perché sono tutte partite diverse
11. **Estrazione di due carte da un mazzo da Ramino, senza considerare il seme, ma solo il valore**
Ripetuti perché possono uscire due carte dello stesso valore
12. **Estrazione di due carte da un mazzo da Ramino, considerando il seme, ma non il valore**
Ripetuti perché possono uscire due carte dello stesso seme
13. **Estrazione di due carte da un mazzo da Ramino, considerando il seme e il valore**
Semplici perché non ci sono due carte di uguale seme e valore in un solo mazzo
14. **Esiti dei lanci di una moneta per 10 volte**
Ripetuti perché possono uscire solo 2 risultati e quindi uno almeno si deve ripetere
15. **Esiti dell'estrazione di una pallina da un'urna che ne contiene 10 di colori tutti diversi**
Semplici perché è solo una pallina
16. **Esiti dell'estrazione di una pallina da un'urna che ne contiene 10 di colori non tutti diversi**
Semplici perché è solo una pallina
17. **Esiti dell'estrazione di due palline da un'urna che ne contiene 10 di colori tutti diversi**
Semplici perché i colori sono tutti diversi
18. **Esiti dell'estrazione di due palline da un'urna che ne contiene 10 di colori non tutti diversi**
Ripetuti perché può uscire sempre lo stesso colore, e anche se non è la stessa pallina l'evento si ripete

19. **In un cassetto ci sono 4 calzini rossi, 5 verdi e 6 blu. Quanti calzini si devono prendere, come minimo, per essere sicuri che almeno due di essi siano dello stesso colore?**
Non conta quante calze vi sono, ma quanti diversi colori, che sono 3. Quindi ne dobbiamo prendere almeno 4, perché prendendone 3 potrebbero essere dei 3 diversi colori.

20. **Con riferimento all'esercizio precedente, quanti calzini dobbiamo prendere, come minimo, per essere sicuri di prendere almeno due calzini rossi?**
In questo caso è importante il numero dei calzini. Per sfortuna potremmo prendere tutti quelli non rossi che sono 11, a questo punto rimangono solo rossi, quindi con altri due siamo sicuri di ottenere quanto richiesto. Risposta 11 + 2 = 13

21. Ci sono 80 palle in un cestino. 35 sono rosse, 25 verdi, 15 gialle e 5 nere. Prendendo le palle senza guardare, quante se ne devono prendere, come minimo, per essere sicuri che ve ne sia almeno a) una rossa; b) una rossa o una nera; c) una rossa e una nera; d) due di diverso colore; e) tre dello stesso colore.

a) Le non rosse sono 25 + 15 + 5 = 45, prendendone una in più siamo sicuri che ve ne sia una rossa. Risposta 45 + 1 = 46 ; b) Le non rosse o nere sono 25 + 15 = 40, quindi almeno 40 + 1 = 41; c) Alle 40 di prima dobbiamo sommare tutte le rosse (che sono di più) e una in più, quindi 40 + 35 + 1 = 76; d) Possiamo prendere tutte le rosse e una di qualsiasi altro colore: 35 + 1 = 36; e) Dato che i colori sono 4, possiamo prenderne 2 di ogni colore, la nona pallina avrà il colore di una delle precedenti coppie.

22. In una scatola ci sono alcune palle rosse ed alcune verdi. Sappiamo che dobbiamo estrarre almeno 10 palle per avere la sicurezza di estrarre, senza guardare, una palla rossa. Quante palle verdi ci sono nella scatola?

Se siamo sicuri che con 10 c'è n'è una rossa, vuol dire che l'ultima sicuramente lo è, mentre le precedenti 9 potrebbero essere verdi.

23. Scegliamo a caso 3 numeri interi consecutivi, possiamo essere sicuri che a) almeno uno di essi è multiplo di 3? b) almeno due multipli di 3?

a) Sì perché in 3 numeri consecutivi esattamente uno è multiplo di 3; b) no perché ve n'è appunto solo uno.

24. Scegliamo a caso 5 numeri interi consecutivi, possiamo essere sicuri che almeno uno di essi è multiplo di 5?

Sì perché in 5 numeri consecutivi esattamente uno è multiplo di 5

25. Quante persone dobbiamo prendere per essere certi che almeno due di esse siano nate a) lo stesso mese; b) lo stesso giorno non per forza lo stesso mese; c) lo stesso giorno e mese?

12 + 1 = 13, dato che le prime 12 potrebbero nascere tutte in mesi diversi; b) 31 + 1 = 32, dato che le prime 31 potrebbero nascere tutte in giorni diversi; 366 + 1 = 367, dato che le prime 366 potrebbero nascere tutte in giorni diversi, consideriamo anche il 29 febbraio.

26. In un mazzo di carte da poker quante carte dobbiamo prendere, minimo, per essere sicuri che due di esse a) abbiano lo stesso seme; b) abbiano lo stesso colore; c) siano dello stesso valore numerico?

a) I semi sono 4, quindi 4 + 1 = 5; b) i colori sono 2, quindi 2 + 1 = 3; c) i valori numerici sono 13, quindi 13 + 1 = 14

27. Apriamo il vocabolario a caso e scegliamo una parola. Quante parole dobbiamo scegliere, minimo, per essere sicuri che inizino con la stessa lettera a) almeno due parole; b) almeno tre?

a) Le iniziali possono essere 26, perciò 26 + 1 = 27; b) Se le parole sono 3, possiamo avere 26 con iniziali diverse, e altre 26 anch'esse tutte con diverse iniziali, quindi 26 + 26 + 1 = 53

28. A una festa intervengono 10 mamme con i loro rispettivi primogeniti. Sapendo che ogni mamma stringe la mano a tutti gli intervenuti tranne il proprio figlio e non vi sono strette di mano tra i bambini, quante strette di mano vengono complessivamente scambiate?

Le mamme stringono le mani a 18 persone, ma di queste, 9 si contano per metà, perché vengono conteggiate per le altre mamme, mentre le altre 9 no: $\frac{10\cdot 9}{2}+10\cdot 9=45+90=135$

29. Quanti numeri interi di quattro cifre *abcd* verificano le seguenti proprietà: *a* è pari; *b* è divisibile per 5; *c* è primo; *d* è dispari? (0 è divisibile di ogni numero intero)

$4\cdot 2\cdot 4\cdot 5=160$

30. Scegliamo a caso *n* numeri naturali diversi, quanto deve essere minimo *n*, per essere sicuri che almeno due dei numeri scelti abbiano somma pari?

La somma di 2 pari o di due dispari è pari, solo la somma di dispari e pari è pari, quindi la somma di due numeri non è detto che sia pari, prendendo un terzo numero questo ha la stessa parità di uno degli altri 2, quindi minimo 3.

31. Scegliamo a caso *n* numeri naturali diversi, quanto deve essere minimo *n*, per essere sicuri che almeno due dei numeri scelti abbiano somma dispari?

Il problema non ha soluzione, potremmo scegliere solo numeri pari o solo dispari e la somma è sempre pari.

32. Scegliamo a caso *n* numeri naturali diversi, quanto deve essere minimo *n*, per essere sicuri che la loro somma sia a) pari; b) dispari

Entrambi senza soluzione perché potremmo scegliere numeri tutti pari e la somma è pari, o tutti pari e un dispari e la somma è dispari.

33. Quanti numeri naturali minori di 20, dobbiamo scegliere a caso, al minimo, per essere sicuri che ce ne siano almeno due che sommati diano un risultato dispari?

Dobbiamo scegliere in modo che vi siano almeno un pari e un dispari, da 1 a 19 vi sono 9 pari e 10 dispari, quindi potremmo scegliere tutti i dispari e con un pari otteniamo quanto voluto. Totale 10 + 1 = 11.

34. Scegliamo a caso 5 numeri dispari minori di 15, ed effettuiamo tutte le somme a due a due di questi numeri. Per esempio, se scegliamo i primi 5 numeri dispari: {1, 3, 5, 7, 9} otterremo: {1 + 3, 1 + 5, …, 1 + 9, 3 + 5, 3 + 7, 3 + 9, …, 7 + 9}. Tutte le somme ottenute sono diverse tra loro, comunque scegliamo i 5 numeri?

Avendo 5 numeri possiamo accoppiarli in 5 · 4 = 20 modi, ma di questi solo 10 sono diversi perché vale la proprietà commutativa della somma. Le somme che possiamo ottenere vanno da 1 + 3 = 4 = 2 · 2 a 13 + 15 = 28 = 2 · 14 e sono solo numeri pari quindi un massimo di 14 – 4 + 1 = 9 numeri, perciò per forza almeno due dovranno ripetersi.

35. In un sacchetto immettiamo dei biglietti con tutte le parole distinte formate da due lettere scelte da un alfabeto di 26. Quanti biglietti dobbiamo scegliere, minimo, per essere sicuri che almeno due di essi contengano una parola che abbia le stesse lettere?

I biglietti sono un totale di 26 · 25 = 650, dato che in questo caso la "parola" ab è diversa da ba. Quindi possiamo dividerle in due gruppi di 650/2 = 325 parole che non hanno ripetizioni. Pertanto per avere sicuramente almeno una ripetizione dobbiamo scegliere 325 + 1 = 326 parole.

36. Consideriamo i numeri interi da 1 a 8, ne prendiamo *n* a caso e siamo sicuri che almeno due dei numeri scelti hanno somma divisibile per 9, qual è il minimo valore di *n*?

Tutte le somme a due a due sono un totale di 8 · 7/2 = 28. Di questi danno numeri divisibili per 9: 1 + 8, 2 + 7, 3 + 6, 4 + 5. Non consideriamo le somme scambiando gli addendi. Quindi dobbiamo essere sicuri che fra i numeri scelti vi sia una almeno di queste coppie. Perciò dobbiamo prendere almeno 5 numeri, perché se fossero 4, potremmo scegliere per esempio 1, 2, 3, 4 le cui somme sono tutte inferiori a 9.

37. Dal sacchettino dei 90 numeri della tombola ne scegliamo a caso *n*, per essere sicuri che la somma di almeno due di essi sia divisibile per 3, quanto deve essere *n*?

Per capirci supponiamo di avere scelto 1, non possiamo scegliere tutti i numeri dell'insieme {2, 5, 8, ..., 89}, che sono un totale di 30. Possiamo scegliere 3 e 4, ma a questo punto non possiamo più scegliere un multiplo di 3, quindi non possiamo scegliere 6, 9, ..., 90 perché abbiamo scelto 3, possiamo scegliere 7, 10, 13, ..., 88, che sono in totale 28. Perciò scegliendo questi 31 numeri certamente non vi sono somme multiple di 3. Il 32° numero invece non posso più sceglierlo. Questo discorso si può fare per qualsiasi numero scelto per primo.

38. Provare che fra i sottoinsiemi di {1, 2, …, *n*}, ce ne sono almeno due disgiunti che hanno la stessa somma.

I sottoinsiemi di {1, 2, …, *n*} sono un totale di 2^n. Due insiemi disgiunti significa che sono formati da numeri tutti diversi, per esempio {a, b} e {a – 1, b + 1}, con a > 1, che però hanno ovviamente la stessa somma.

39. Quanti numeri naturali minori di 2*n*, dobbiamo scegliere a caso, al minimo, per essere sicuri che ce ne siano almeno due che sommati diano un risultato dispari?

Abbiamo già detto che per avere somma dispari dobbiamo avere addendi uno pari e l'altro dispari, quindi dobbiamo avere almeno *n* + 1 numeri che al massimo possono essere *n* tutti pari o tutti dispari e l'altro di diversa parità.

40. Scegliamo 5 numeri dispari minori di *n*, ed effettuiamo tutte le somme a due a due. Se scegliessimo *n* = 26, potremmo ottenere tutte le somme distinte, per esempio scegliendo i numeri {1, 5, 11, 17, 25} otterremmo le somme {6, 12, 18, 26, 16, 22, 30, 28, 36, 42}, tutte diverse tra loro. Qual è il minimo *n* per il quale possiamo ottenere, con una opportuna scelta, tutte somme diverse tra loro?

I numeri da considerare sono {a, b, c, d, e}. Vediamo di definirli tutti mediante il più piccolo di essi, a, ottenendo l'insieme {a, a + 2h, a + 2k, a + 2m, a + 2p}, in cui ovviamente 0 < h < k < m < p, a è dispari. Le somme ottenute sono: 2a + 2h, 2a + 2k, 2a + 2m, 2a + 2p, 2a + 2h + 2k, 2a + 2h + 2m, 2a + 2h +

2p, 2a + 2k + 2m, 2a + 2k + 2p, 2a + 2m + 2p. In cui ovviamente devono essere tutti diversi {h, k, m, p, h + k, h + m, h + p, k + m, k + p, m + p}. Deve essere quindi h + k ≠ m + p, h + m ≠ k + p, h + p ≠ k + m. Certamente non possiamo avere più di due coppie di dispari consecutivi perché per esempio (a + 2) + (a + h) = a + (a + h + 2)e più in generale con differenza uguale, come a + 4, a + 10 e a + 20, a + 24. Così minore sarà *n*, quanto minore sarà p. Tenuto conto della differenza diversa, avremo minimo {a, a + 2, a + 6, a + 10, a + 18}con le diverse somme 2a + 2, 2a + 6, 2a + 10, 2a + 18, 2a + 8, 2a + 12, 2a + 20, 2a + 16, 2a + 24, 2a + 28. Così minimo {1, 3, 7, 11, 19} e $n = 20$.

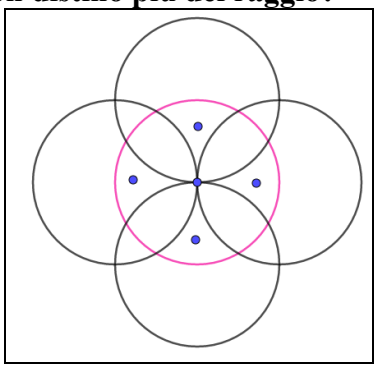
41. Il sistema RGB (Red Green Blue) è usato nei monitor per visualizzare le diverse tonalità di colori. Ogni colore è formato da una terna di numeri compresi tra 0 e 255, che rappresenta la "quantità" di ciascuno dei tre colori principali. Così per esempio il rosso "puro" ha la terna (255, 0, 0). Si dice che si usano 16,7 milioni di diversi colori. È corretto? Quanti sono precisamente?

Ogni terna si sceglie fra $256 \cdot 256 \cdot 256 = 2^{24} = 16777216$.

42. Con riferimento al precedente esercizio, se volessimo ottenere almeno un miliardo di diverse tonalità, quante diverse tonalità del singolo colore principale dovremmo usare?

Se usiamo n diverse tonalità dobbiamo stabilire il minimo n per cui $n^3 \geq 10^9$, si vede facilmente che è $n = 10^3 = 1000$.

43. Abbiamo un bersaglio circolare, quante freccette dobbiamo lanciare, con la certezza che colpiranno il bersaglio, in modo che almeno due di esse non distino più del raggio?

Consideriamo la figura, in cui in rosso vi è il bersaglio  Se 4 freccete cadono nelle zone in cui abbiamo segnato i punti stanno a più di un raggio fra loro, ma a questo punto non ci sono altre zone disponibili, quindi dovunque cadranno staranno a distanza almeno uguale al raggio da una delle 4 freccette.

44. Provare che, scelte sei persone a caso almeno tre di esse o sono mutuamente amiche o sono del tutto sconosciute. *Suggerimento*: ragionare per assurdo.

Supponiamo che ciò non sia vero, ossia che comunque scegliamo tre di queste persone non sono tutte amiche né tutte sconosciute. Sia A una di queste persone, delle rimanenti 5 ne conosce o non ne conosce almeno 3, ovviamente. Se A conosce per esempio B, C e D, allora o B, C e D non si conoscono fra loro e quindi abbiamo trovato 3 che non si conoscono; oppure per esempio B e C si conoscono ma D no. Ma allora si conoscono A, B e C, quindi ci sono 3 che si conoscono.

Disposizioni semplici e ripetute

1. In un campionato di calcio a diciotto squadre, ciascuna squadra incontra le altre due volte. Quante partite si sono svolte in totale?

Abbiamo a che fare con disposizioni semplici, dato che non conta l'ordine (c'è andata e ritorno). Abbiamo 18 elementi e li dobbiamo prendere a 2 a 2. Quindi $D_{18,2} = 18 \cdot 17 = 306$

2. A una finale olimpica dei 100 metri partecipano 8 atleti. Vengono premiati i primi tre. Quante sono le possibili classifiche dei premiati?

Abbiamo a che fare con disposizioni semplici, dato che non conta l'ordine (la classifica ABC è diversa da ACB). Abbiamo 8 elementi e li dobbiamo prendere a 3 a 3. Quindi $D_{8,3} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$

3. Quanti numeri di 5 cifre tutte diverse esistono?

Abbiamo a che fare con disposizioni semplici, dato che le cifre sono diverse. Abbiamo 10 elementi e li dobbiamo prendere a 5 a 5, ma la prima cifra non può essere 0, quindi dobbiamo eliminare tutti i numeri del tipo 0abcd, che sono tanti quante le disposizioni di 9 elementi a 4 a 4. Quindi $D_{10,5} - D_{9,4} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 - 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot (10 - 1) = 27216$

4. Quanti numeri di 3 cifre tutte dispari esistono?

Stavolta le disposizioni sono con ripetizione perché le cifre possono anche ripetersi. A disposizioni ne abbiamo 5 e le prendiamo a 3 a 3. Perciò $D'_{5,3} = [60]$

5. Quanti numeri con 3 cifre pari (0 è considerato pari, ma non può stare al primo posto) e 1 dispari, tutte diverse, esistono?

Disposizioni semplici perché cifre diverse. I numeri sono del tipo $DP_1P_2P_3$, in cui D, così come gli altri possono cambiare di posto. Consideriamo i casi D al primo posto: $5 \cdot D_{5,3} = 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$, e D in uno degli altri posti, ciascuno dei quali ha un totale di $5 \cdot (D_{5,3} – D_{4,2}) = 5 \cdot (5 \cdot 4 \cdot 3 – 4 \cdot 2) = 240$ casi. Quindi totale $300 + 3 \cdot 240 = 1020$

6. Quanti numeri di 3 cifre hanno almeno una cifra uguale a 7?

Sono i numeri del tipo 7xy, x7y, xy7, 77x, 7x7, x77, 777, in cui x e y non sono uguali a 7. Le disposizioni, quando abbiamo x e y, sono con ripetizione. Sommiamo i diversi casi, ricordando sempre che la cifra delle centinaia non può essere 0 e $x \neq y$. Quindi: $D'_{9,2} + 2 \cdot (D'_{9,2} – 9) + 2 \cdot 9 + 8 + 1 = 252$. Potevamo anche considerare tutti i numeri che non hanno cifre uguali a 7, che sono $D'_{9,3} – D'_{9,2} = 648$ e toglierli da tutti i numeri di tre cifre che sono in totale 900, ottenendo più facilmente il risultato: $900 – 648 = 252$

7. Marco scrive il numero di telefono di Daria in un foglio, ma dopo avere scritto 3471585 finisce l'inchiostro e riporta a mente gli altri tre. Nel tempo che cerca una nuova penna però dimentica le cifre mancanti. Quante telefonate deve fare Marco per essere sicuro di contattare Daria?

Disposizioni con ripetizione di 3 cifre: $D'_{10,3} = 1000$

8. Con riferimento al problema precedente, quante sono le telefonate se ricorda che le cifre mancanti sono diverse tra loro?

Stavolta disposizioni semplici: $D_{10,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$

9. Con riferimento al problema 7, quante sono le telefonate se ricorda che le cifre mancanti a) sono diverse tra loro e formate da due pari e un dispari, e senza zeri? b) come a) ma le cifre possono essere uguali?

a) sequenze del tipo P_1P_2D, P_1 D P_2 e D P_1P_2, che hanno lo stesso numero di casi, quindi $3 \cdot D_{4,2} \cdot 5 = 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 180$; b) Stavolta $3 \cdot D'_{4,2} \cdot 5 = 240$

10. Una targa italiana è formata da due lettere, tre numeri e due lettere. Quante diverse targhe possiamo formare a) scegliendo le lettere fra 26? B) non usiamo le lettere O e I?

a) $D'_{10,3} \cdot D'_{26,4} = 10^3 \cdot 26^4 = 456976000$; b) $D'_{10,3} \cdot D'_{24,4} = 10^3 \cdot 24^4 = 331776000$

11. Un'urna contiene 5 palline numerate da 1 a 5. Estraiamo 3 palline rimettendo, dopo ogni estrazione, la pallina nell'urna. a) Quante diverse terne di estrazioni possiamo ottenere? b) Quante di queste non contengono il numero 5?

a) $D'_{5,3} = 5^3 = 125$; b) $D'_{4,3} = 4^3 = 64$

12. Come cambiano i risultati dell'esercizio precedente se invece a ogni estrazione non rimettiamo nell'urna la pallina estratta?

a) $D_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$; b) $D_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

13. Un test è composto da 10 domande Vero-Falso, quante sono tutte le diverse sequenze di risposte possibili?

E' una sequenza di 10 simboli che si possono scegliere fra 2 e possono ripetersi da 0 a 10 volte, quindi: $D'_{2,10} = 2^{10} = 1024$

14. Con riferimento al problema 2, se tre dei finalisti sono italiani, quante sono le possibili classifiche dei premiati che contengono almeno un italiano?

Conviene considerare la situazione complementare, ossia quante terne non contengono italiani, che sono $D_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$, e dato che il totale erano 336, la richiesta ha soluzione $336 – 60 = 276$

15. Quanti sono i numeri di 4 cifre formati utilizzando tutte quelle che compaiono in 2012?

Sono numeri del tipo 1yzt o 2yzt, nel primo caso le altre cifre possono essere 0, 2, 2 quindi vi sono solo 3 casi: 1022, 1202, 1220; nel secondo caso invece le altre cifre possono essere 0, 1, 2, quindi vi sono altri 6 casi: 2012, 2021, 2102, 2120, 2201, 2210. Totale 9

16. Quanti numeri di 4 cifre hanno almeno due cifre uguali? *Suggerimento*: sottrarre dai numeri a 4 cifre quelli con le cifre diverse.

Con 4 cifre diverse costruiamo $D_{10,4} – D_{9,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 – 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$. Tutti i numeri di 4 cifre invece sono 9000 (da 1000 a 9999), quindi $9000 – 4536 = 4464$

17. Quanti numeri di 4 cifre hanno esattamente due cifre uguali?

I numeri sono del tipo xxyz, xyxz, xyzx, yxxz, yxzx, yzxx, con simboli diversi che rappresentano cifre diverse. Senza contare lo 0 avremo $6 \cdot D_{9,3} = 3024$. Adesso consideriamo il caso in cui le cifre, a parte la prima, possono essere 0: xx0z, xxy0, x0xz, xyx0, x0zx, xy0x, y00z, yxx0, y0z0, yx0x, y0xx, yz00 che sono in totale: $12 \cdot D_{9,2} = 864$. Quindi $3024 + 864 = 3888$

18. In un campionato di calcio ciascuna squadra incontra le altre due volte. Se in totale si sono svolte 182 partite, quante squadre vi sono?

Le partite, al variare n delle squadre, sono $D_{n,2} = n \cdot (n - 1)$. Dobbiamo quindi risolvere l'equazione $n \cdot (n - 1) = 182$. Piuttosto che risolverla cerchiamo di scrivere 182 come prodotto di due numeri interi consecutivi. Dato che $182 = 2 \cdot 7 \cdot 13 = 14 \cdot 13$, quindi $n = 14$

19. A una finale olimpica vengono premiati i primi tre concorrenti. Se le possibili classifiche dei premiati sono 990, quanti sono i partecipanti?

Si ha: $D_{n,3} = 990 \Rightarrow n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2)$. Dato che $990 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 = 11 \cdot 10 \cdot 9$, e $n = 11$

20. A una finale olimpica partecipano 18 concorrenti. Se le possibili classifiche dei premiati sono 73440, quanti sono i premiati?

Si ha: $D_{18,n} = 73440 \Rightarrow 18 \cdot 17 \cdot ... \cdot (18 - n + 1)$. Dato che $73440 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 17 = 2^4 \cdot (2 \cdot 3^2) \cdot (3 \cdot 5) \cdot 17 = 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15$ e $n = 4$

21. In un pannello elettrico vi sono 4 interruttori adiacenti. In quanti modi diversi il pannello può trovarsi in modo che non vi siano mai due interruttori adiacenti entrambi spenti?

Indichiamo con 1 acceso e 0 spento. Dobbiamo togliere il caso in cui sono tutti spenti, 0000, e i casi in cui vi sono 3 spenti, che sono 4: 1000, 0100, 0010, 0001. Di quelli con 2 spenti dobbiamo considerare solo: 0011, 1100 1001. Quindi 8 da eliminare, in totale sono $D'_{2,4} = 16$. Quindi la risposta è 8.

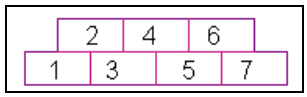
22. Risolvere il problema precedente con 5 interruttori.

Tenuto conto del problema precedente, il quinto interruttore può avere due possibilità se il quarto è acceso e una se spento, dato che avevamo 0101 0110 0111 1010 1011 1101 1110 1111. Quindi in totale abbiamo $2 \cdot 5 + 3 = 13$ casi.

23. Consideriamo tutte le tabelle di verità degli enunciati composti da *n* proposizioni logiche, quante sono quelle diverse tra loro?

$D'_{2,n} = 2^n$

24. In figura è mostrato lo schema di un gioco in cui si deve andare dalla cella 1 alla cella 7, con le seguenti regole: da una cella si può andare ad una confinante solo se quest'ultima ha un numero superiore. In quanti diversi modi si può completare il percorso?



I percorsi possono essere lunghi minimo 4 (1357) e massimo 7 (1234567) e di queste lunghezze vi è un solo caso. Di lunghezza 5 abbiamo 12457, 12467, 12357, 13457, 13467, 13567; di lunghezza 6: 124567, 134567, 123567, 123467, 123457. Totale 13.

25. Quanti sono i numeri naturali di quattro cifre in cui compare una e una sola volta la cifra 5 ed essa è la cifra più grande presente nel numero?

Sono i numeri i cui 4 cifre possono essere scelte da {0, 1, 2, 3, 4}. Consideriamo i due casi in cui 5 è la cifra delle migliaia, che sono in numero di $D'_{5,3} = 5^3 = 125$; e quando 5 non è la cifra delle migliaia, che sono $3 \cdot 4 \cdot D'_{5,2} = 12 \cdot 25 = 300$. Totale $125 + 300 = 425$

26. Quanti numeri fra 1 e 2013 hanno almeno una cifra uguale a 4?

Calcoliamo i numeri senza nessuna cifra 4, numeri quindi che formiamo con solo 9 cifre. Sono 8 con 1 cifra, $D'_{9,2} - 9 = 9^2 - 9 = 72$ con 2 cifre (togliamo i numeri che iniziano per 0 e quindi non hanno 2 cifre ma 1), $D'_{9,3} - D'_{9,2} = 9^3 - 9^2 = 648$ con 3 cifre. Da 1000 a 1999 sono sempre = 648, infine da 2000 a 2013 sono $14 - 1 = 13$. Quindi $8 + 72 + 648 + 72 + 13 = 1317$ non hanno nessun 4, su un totale di 2013. Perciò hanno almeno un 4: $2013 - 1317 = 696$.

27. Nella città di Fantasia non vi sono due cittadini che abbiano gli stessi denti mancanti, cioè ci possono essere due a cui mancano due denti, ma se a uno mancano il sesto e il settimo dell'arcata inferiore, all'altro se manca il sesto non può mancare il settimo. Qual è al massimo la popolazione di questo paese, se ognuno ha un massimo di 32 denti e solo il presidente ne ha esattamente 32?

Ogni abitante si può identificare con una sigla ordinata di 32 bit (0, 1) dove 0 indica dente mancante e 1 dente presente. Perciò abbiamo $D'_{2,32} = 2^{32} = 4294967296$ cittadini

28. In una gara di matematica vi sono tre categorie di età: junior, standard e senior. I partecipanti

per ciascuna categoria sono rispettivamente 10, 12 e 15. Se in ogni categoria vengono premiati i primi tre quante sono le diverse classifiche finali dei premiati?

$D_{10,3} \cdot D_{12,3} \cdot D_{15,3} = 4770$

29. Le diverse sequenze di risposte possibili a un test di *n* domande Vero-Falso sono 32768. a) Quante sono tutte le domande? b) E se le risposte fossero 393216?

a) Tenuto conto del quesito 27 dobbiamo risolvere l'equazione $2^n = 32768$, per tentativi troviamo $n = 15$, oppure usiamo i logaritmi: $n = log_2(32768) = log(32768)/log(2)$. b) I dati sono incoerenti poiché non esiste alcuna potenza di 2 uguale a 393216.

30. Ad una gara mondiale di matematica con 10 domande, in cui ogni domanda ha 3 diverse opzioni, hanno partecipato un milione di studenti. È possibile che fra le diverse sequenze di risposte fornite ci siano tutte le sequenze possibili, considerando il fatto che alle domande si può anche non rispondere?

Tutte le sequenze possibili sono $D'_{4,10} = 1048576$, dato che essendoci anche la possibilità nessuna risposta le opzioni divengono 4. Quindi la risposta è no

31. Nel totocalcio si può giocare un risultato fisso (1, X, 2), oppure una doppia (p.e. 1 X, che significa che si indovina purché si verifichi uno dei due risultati), o un tripla (certezza di indovinare: 1 X 2). Da quante colonne è costituito un sistema del totocalcio a 14 partite a) con 5 doppie; b) con 5 triple; c) con 2 triple e 4 doppie?

a) Dobbiamo contare solo quante colonne corrispondono a 5 doppie, che sono ovviamente $D'_{2,5} = 2^5 = 32$; b) $D'_{3,5} = 3^5 = 243$; c) $D'_{3,2} \cdot D'_{2,4} = 3^2 \cdot 2^4 = 144$

Risolvere le seguenti equazioni

32. a) $D_{n,4} = 8D_{n,3}$; b) $D_{n,7} = 11D_{n,6}$; c) $D_{n,15} = 3D_{n,14}$; d) $D_{n,5} = 3D_{n,3}$

a) Abbiamo: $D_{n,4} = (n-3) \cdot D_{n,3}$, quindi $D_{n,4} = 8D_{n,3} \Rightarrow (n-3) \cdot D_{n,3} = 8\, D_{n,3} \Rightarrow n - 3 = 8 \Rightarrow n = 11$; b) $D_{n,7} = 11D_{n,6} \Rightarrow (n-6) \cdot D_{n,6} = 11D_{n,6} \Rightarrow n - 6 = 11 \Rightarrow n = 17$; c) $D_{n,15} = 3D_{n,14} \Rightarrow (n-14) \cdot D_{n,14} = 3\, D_{n,14} \Rightarrow n - 14 = 3 \Rightarrow n = 17$ d) $D_{n,5} = 3D_{n,3} \Rightarrow (n-4) \cdot (n-3) \cdot D_{n,3} = 3\, D_{n,3} \Rightarrow (n-4) \cdot (n-3) = 3$. Si vede subito che non vi sono soluzioni perché 3 non può scriversi come prodotto di due interi consecutivi.

33. a) $D_{n,5} = 72 \cdot D_{n,3}$; b) $D_{n,8} = 72 \cdot D_{n,6}$; c) $D_{n,5} = 60D_{n,2}$; d) $D_{n,9} = 24D_{n,6}$

a) $D_{n,5} = 72D_{n,3} \Rightarrow (n-4) \cdot (n-3) \cdot D_{n,3} = 72\, D_{n,3} \Rightarrow (n-4) \cdot (n-3) = 72$. Dato che $72 = 8 \cdot 9$, avremo $n - 4 = 8 \Rightarrow n = 12$; b) $D_{n,8} = 72D_{n,6} \Rightarrow (n-7) \cdot (n-6) \cdot D_{n,6} = 72D_{n,6} \Rightarrow (n-7) \cdot (n-6) = 72$. ragionando come prima avremo: $n - 7 = 8 \Rightarrow n = 15$ c) $D_{n,5} = 60D_{n,2} \Rightarrow (n-4) \cdot (n-3) \cdot (n-2)\, D_{n,2} = 60\, D_{n,2} \Rightarrow (n-4) \cdot (n-3) \cdot (n-2) = 60$. Dato che $60 = 3 \cdot 4 \cdot 5$, avremo $n - 4 = 3 \Rightarrow n = 7$; d) $D_{n,9} = 24D_{n,6} \Rightarrow (n-8) \cdot (n-7) \cdot (n-6)\, D_{n,6} = 24\, D_{n,6} \Rightarrow (n-8) \cdot (n-7) \cdot (n-6) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \Rightarrow n - 8 = 2 \Rightarrow n = 10$.

34. a) $D_{n,10} = 120D_{n,7}$; b) $D_{n,4} + 8D_{n,3} = 60D_{n,2}$; c) $D_{n,5} - 4D_{n,4} = 24D_{n,3}$

a) $D_{n,10} = 120D_{n,7} \Rightarrow (n-9) \cdot (n-8) \cdot (n-7) \cdot D_{n,7} = 120D_{n,7} \Rightarrow (n-9) \cdot (n-8) \cdot (n-7) = 120 = 4 \cdot 5 \cdot 6 \Rightarrow n - 9 = 4 \Rightarrow n = 13$; b) $D_{n,4} + 8D_{n,3} = 60D_{n,2} \Rightarrow (n-3) \cdot (n-2) \cdot D_{n,2} + 8(n-2) \cdot D_{n,2} = 60D_{n,2} \Rightarrow (n-3) \cdot (n-2) + 8n - 16 = 60 \Rightarrow n^2 - 5n + 6 + 8n - 76 = 0 \Rightarrow n^2 + 3n - 70 = 0 \Rightarrow (n-7) \cdot (n+10) = 0$. Ovviamente si accetta solo la soluzione positiva: $n = 7$; d) $D_{n,5} - 4D_{n,4} = 24D_{n,3} \Rightarrow (n-4) \cdot (n-3) \cdot D_{n,3} - 4(n-3)\, D_{n,3} = 24\, D_{n,3} \Rightarrow (n-4) \cdot (n-3) - 4(n-3) = 24 \Rightarrow n^2 - 7n + 12 - 4n + 12 - 24 = 0 \Rightarrow n^2 - 11n = 0 \Rightarrow n = 11$

35. a) $D_{n,5} - 2D_{n,4} = 3D_{n,3}$; b) $D_{n,5} + 3D_{n,4} = 35 \cdot D_{n,3}$

a) $D_{n,5} - 2D_{n,4} = 3D_{n,3} \Rightarrow (n-4) \cdot (n-3) \cdot D_{n,3} - 2 \cdot (n-3) \cdot D_{n,3} = 3D_{n,3} \Rightarrow n^2 - 7n + 12 - 2n + 6 - 3 = 0 \Rightarrow n^2 - 9n + 15 = 0 \Rightarrow$ non ha soluzioni perché non esistono due interi la cui somma sia 9 e il prodotto 15; b) $D_{n,5} + 3D_{n,4} = 35 \cdot D_{n,3} \Rightarrow (n-4) \cdot (n-3) \cdot D_{n,3} + 3(n-3) \cdot D_{n,3} = 35D_{n,3} \Rightarrow n^2 - 7n + 12 + 3n - 9 - 35 = 0 \Rightarrow n^2 - 4n - 32 = 0 \Rightarrow (n-8) \cdot (n+4) = 0 \Rightarrow n = 8$;

36. a) $D_{n,5} = D_{n+1,4}$; b) $D_{n,4} = 2 \cdot D_{n-1,3}$; c) $D_{n,10} = D_{n+1,11}$

a) $D_{n,5} = D_{n+1,4} \Rightarrow n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) = (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$. Eliminiamo tutti i fattori comuni, dato che le soluzioni accettabili devono essere maggiori di 4, poiché $D_{n,5}$ ha senso solo se $n \geq 5$. Otteniamo così $(n-3) \cdot (n-4) = n + 1 \Rightarrow n^2 - 7n + 12 - n - 1 = 0 \Rightarrow n^2 - 8n + 11 = 0 \Rightarrow n = 3 \vee n = 5$. L'unica soluzione accettabile è 5 b) $D_{n,4} = 2 \cdot D_{n-1,3} \Rightarrow n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) = 2 \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)$. Stavolta le soluzioni accettabili devono essere maggiori di 3. Otteniamo così $n = 2$, che non è accettabile. c) $D_{n,10} = D_{n+1,11}$, osserviamo che le due scritture si equivalgono, poiché n –

$10 = n + 1 - 11$, pertanto abbiamo a che fare con un'identità, che ha però senso solo se $n \geq 10$.

37. a) $D_{n,4} = 7 \cdot D_{n-1,3}$; b) $13 \cdot D_{n,7} = 42 \cdot D_{n+1,6}$

a) $D_{n,4} = 7 \cdot D_{n-1,3} \Rightarrow n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) = 7 \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \Rightarrow n = 7$ b) $13 \cdot D_{n,7} = 42 \cdot D_{n+1,6} \Rightarrow 13n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot (n-5) \cdot (n-6) = 42\,(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) \Rightarrow 13(n-5) \cdot (n-6) = 42\,(n+1) \Rightarrow 13n^2 - 143n + 390 - 42n - 42 = 0 \Rightarrow 13n^2 - 185n + 348 = 0 \Rightarrow n = 12 \vee n = 29/13$. L'unica soluzione accettabile è 12

38. a) $D_{n,k} = h \cdot D_{n,k-1}$; b) $D_{n,k} = h \cdot D_{n,k-2}$

a) $(n-k+1) \cdot D_{n,k-1} = h \cdot D_{n,k-1} \Rightarrow n - k + 1 = h \Rightarrow n = h + k - 1$;

b) $(n-k+1) \cdot (n-k) \cdot D_{n,k-2} = h \cdot D_{n,k-2} \Rightarrow (n-k+1) \cdot (n-k) = h \Rightarrow n^2 - (2k-1) + k^2 - k - h = 0 \Rightarrow n = \dfrac{2k-1+\sqrt{4h+1}}{2}$. Prendiamo ovviamente solo la soluzione positive che non sempre è accettabile, ma solo se rappresenta un numero intero.

Permutazioni semplici e ripetute

Quando si parla di anagrammi questi possono essere anche privi di senso nella lingua italiana

1. a) Quanti sono gli anagrammi della parola AMORE? b) Quanti di essi iniziano per A? c) Quanti iniziano per A e finiscono per E?

a) Abbiamo a che fare con una permutazione semplice di 5 lettere, quindi 5! = 120; b) Fissata la lettera A permutiamo le rimanenti 4, ottenendo 4! = 24; c) Stavolta fissiamo due lettere, quindi permutiamo le rimanenti 3, da cui 3! = 6

2. a) Quanti sono gli anagrammi di MATEMATICA? b) Quanti iniziano per M? c) Quanti iniziano e finiscono per M? d) Quanti iniziano per M e non finiscono per M?

a) Stavolta abbiamo ripetizioni di lettere, tutte sono 10, ma la A si ripete 3 volte, la M e la T 2 volte, quindi: $\dfrac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 151200$; b) Fissata la prima lettera permutiamo le rimanenti 9, in cui adesso la M non si ripete più, quindi: $\dfrac{9!}{3! \cdot 2!} = 30240$; c) Fissiamo 2 lettere e permutiamo le rimanenti 8: $\dfrac{8!}{3! \cdot 2!} = 3360$; d) Sappiamo già che quelle che iniziano per M sono 30240, di queste quelle che finiscono con M sono 3360, quindi quelle che non finiscono per M sono 30240 – 3360 = 26880

3. Quanti numeri di 5 cifre dispari tutte diverse possiamo costruire?

Abbiamo semplicemente 5! = 120

4. Quanti numeri di 5 cifre pari tutte diverse (0 lo consideriamo pari) possiamo costruire?

Stavolta dobbiamo eliminare le sequenze che hanno lo 0 come prima cifra, quindi: 5! – 4! = 96

5. a) In quanti modi 6 persone possono sedersi in fila su sei posti? b) E se si siedono attorno a un tavolo, la risposta cambia? Si tenga conto che quello che conta non è la sedia in cui si è seduti, ma la successione delle persone sedute.

a) 6! = 720; b) In questo caso non vi è una fine e un inizio ben delimitati, come nel caso in cui le sedie sono in linea retta, quindi la risposta è sì. Per calcolarli teniamo conto che fissata una sedia, basta permutare le rimanenti, quindi 5! = 120

6. 7 interruttori attivano macchine diverse, in quanti modi possono esservene 3 accese e 4 spente?

Dobbiamo calcolare le permutazioni della parola AAASSSS, che sono $\dfrac{7!}{3! \cdot 4!} = 35$

7. Il codice ASCII viene utilizzato per codificare lettere, numeri e simboli, usando il codice binario che prevede solo i simboli 0 e 1. Ogni elemento del codice è una sequenza di 8 cifre scelte fra 0 e 1. Quanti diversi simboli possiamo codificare?

Abbiamo a che fare con disposizioni con ripetizione: $D'_{2,8} = 256$

8. Se avessimo bisogno di codificare 1000 simboli da quante cifre 0 o 1, minimo, dovrebbe essere

formato ogni simbolo?

Dobbiamo trovare un esponente n in modo che $2^n > 1000$, e questo è 10: $2^9 = 512$, $2^{10} = 1024$

9. **7 sedie sono poste in riga per essere occupate da 2 professori e 5 studenti. In quanti modi possono sistemarsi le 7 persone in modo che gli insegnanti siano seduti agli estremi?**

Dobbiamo permutare solo gli studenti, ma possiamo anche scambiare di posto i professori, pertanto: $2 \cdot 5! = 240$

10. **Un codice segreto è formato da 8 simboli, a 2 a 2 uguali rispettivamente a ♣♦♥♠. a) Quanti codici presentano i simboli nell'ordine mostrato? b) Quanti hanno i simboli uguali uno accanto all'altro?**

a) Ovviamente è una sola la sequenza: ♣♦♥♠♣♦♥♠; b) Dobbiamo considerare le coppie di simboli uguali come un solo simbolo, pertanto il quesito equivale a stabilire le permutazioni di 4 elementi diversi, che sono $4! = 24$.

11. **Anna, Bice, Carla, Dario, Elio e Franco vanno in vacanza ed affittano 3 stanze doppie. In quanti modi possiamo sistemarli nelle stanze in modo che Anna stia con Dario e Carla non stia con Elio?**

Accoppiati Anna e Dario, le altre coppie possono essere: (Carla-Bice; Elio-Franco), (Carla- Franco; Elio-Bice). Quindi 2 possibili sistemazioni delle camere che poi però possono essere ruotate fra le tre coppie, pertanto: $2 \cdot 3! = 12$

12. **Marzia ha saputo che il suo professore assegna sempre dei test con 12 domande con 4 risposte possibili, indicate con A, B, C, D in modo che le risposte esatte siano suddivise esattamente fra le 4 opzioni. Quante sono le possibili sequenze di 12 risposte che soddisfano questi requisiti?**

Quindi la sequenza corretta è una permutazione della "parola" AAABBBCCCDDD, queste sono in numero di $\frac{12!}{(3!)^4} = 369600$

13. **Con riferimento al quesito precedente a) quante diventano le sequenze se sappiamo solo che la prima risposta è uguale all'ultima? b) E se invece prima e ultima sono diverse?**

a) In questo caso dobbiamo considerare che la sequenza è il quadruplo (perché 4 sono le diverse lettere) della permutazione di una parola di 10 lettere che possono essere anche tutte uguali, quindi non sono più permutazioni, ma disposizioni con ripetizione: $4 \cdot D'_{4,10} = 4194304$; b) In questo caso invece togliamo da tutte le possibili sequenze le precedenti: $D'_{4,12} - 4194304 = 12582912$.

14. **9 sedie sono poste in riga per essere occupate da 3 professori e 6 studenti. In quanti modi possono sedersi i 9 in modo che gli studenti siano seduti tutti uno accanto all'altro?**

Gli studenti possono occupare i posti da 1 a 6, 2 a 7, 3 a 8, 4 a 9. Ovviamente ognuno di questi raggruppamenti si ripete lo stesso numero di volte. Quindi: $4 \cdot 3! \cdot 6! = 17280$

15. **a) In quanti modi 3 maschi e 4 femmine possono sedersi in una fila da 7 in modo che agli estremi della file siano sedute persone dello stesso sesso? b) Quante di sesso diverso?**

a) Se sediamo i maschi possiamo sceglierne 2 di essi, e lo facciamo in $D_{3,2} = 6$ modi. I rimanenti 5 li permutiamo, ottenendo quindi $6 \cdot 5! = 720$; Se invece mettiamo le femmine avremo $D_{4,2} \cdot 5! = 1440$. totale 2160; b) Togliamo le precedenti dal totale, ossia $7! - 2160 = 2880$

16. **Con le cifre 1, 2, 3, 4 e 5, possiamo formare 120 diversi numeri di 5 cifre distinte. Se ordiniamo questi numeri dal più piccolo al più grande, quale sarà il 75°?**

Dividiamo i 120 numeri in 5 gruppi da 24, che sono quelli che iniziano per 1, 2, 3, 4, 5. Quindi il 75° numero appartiene al gruppo che inizia per 4. In particolare 41235 è il 73° numero, quindi il 75° sarà 41325.

17. **Quanti numeri di 4 cifre hanno la somma delle cifre pari a 5?**

Avendo a disposizione 4 cifre per ottenere 5 possiamo prendere (0, 0, 0, 5), (0, 0, 1, 4), (0, 0, 2, 3), (0, 1, 1, 3), (0, 1, 2, 2), (1, 1, 1, 2). Con la prima quaterna abbiamo solo 5000, con la seconda invece abbiamo 1004, 1040, 1400, 4001, 4010, 4100 ossia 6 numeri (ossia $4!/2! - 3!$); ovviamente altrettanto ne otteniamo con (0, 0, 2, 3). Con le successive quaterne otteniamo per ciascuna $4!/(2!) - (3!/2!) = 12 - 3 = 9$ numeri. Infine con l'ultima: $4!/3! = 4$. Totale: $1 + 6 \cdot 2 + 9 \cdot 2 + 4 = 35$

18. **La famosa partita Italia Germania dei mondiali 1970 finì 4 a 3 per l'Italia. Se non sappiamo la sequenza corretta dei gol, quante sono le diverse possibilità?**

Dobbiamo considerare le permutazioni della "parola" GGGIIII, che sono $7!(4!3!) = 35$

19. **Con riferimento al quesito precedente se conosciamo solo il risultato, ma non sappiamo chi ha**

fatto 4 reti e chi 3, quante sono le sequenze?
Ovviamente il doppio, dato che abbiamo anche le permutazioni di GGGGIII

20. Consideriamo la parola MITO, quanti dei suoi anagrammi non contengono nessuna delle lettere scritta nello stesso posto di MITO (cioè IMOT va bene, IMTO no)?
Gli anagrammi sono 4! = 24. Di questi 3! = 6 contengono la M al primo posto. Altrettanti la I al secondo posto, ma di questi 6, 2! (quelli che iniziano per MI) li abbiamo già contati, quindi sono 4. Analogamente dei 3! Che hanno la I al terzo posto dobbiamo eliminare MXTY e XITY che abbiamo già contato e sono 4, ma in questo modo eliminiamo due volte MITO, perciò ne dobbiamo togliere solo 3. In pratica ne contiamo 6 – 4 + 1 = 3. Infine con la O all'ultimo posto dobbiamo eliminare solo ITMO e TMIO perché tutti gli altri li abbiamo già eliminati. In totale perciò avremo 24 – (6 + 4 + 3 + 2) = 9

21. Tre coppie di coniugi vanno a teatro e prenotano un'intera fila di sei posti. In quanti diversi modi possono sedersi se ciascun marito è seduto accanto alla rispettiva moglie?
In pratica indichiamo con C_1C_2 e C_3 le tre coppie e dobbiamo contare le permutazioni di $C_1C_2C_3$, ma dobbiamo moltiplicare per 2 perché marito e moglie possono cambiare posto. Quindi 2 · 3! = 12

22. Con riferimento al precedente quesito, le 6 persone si siedono come vogliono, in modo però che due di essi, Amedeo e Marta, non stiano seduti accanto. Quanti sono i modi possibili?
Sedendosi a caso ci sono 6! = 720 possibilità, di queste quelle che hanno Amedeo e Marta vicini sono 5 · 4! = 5 · 24 = 120. Infatti 4! Sono i modi in cui possiamo far sedere gli altri 4, mentre i due possono occupare le sedie 12, 23, 34, 45, 56. Quindi la risposta è 720 – 120 = 600

23. Sempre con riferimento al precedente quesito, stavolta Amedeo sta seduto alla destra di Marta, non importa se accanto o no ad ella. Quanti sono i modi?
Amedeo non può occupare la sedia 6. Se occupa la sedia 1 vi sono 5! = 120 modi per sistemare Marta e gli altri. Se si mette nella sedia 2, allora Marta può occupare uno fra 4 posti, mentre gli altri si distribuiscono in 4! Modi, quindi 4 · 4! = 96. Ragionando allo stesso modo avremo altri 3 · 4! + 2 · 4! + 4!. Quindi (5 + 4 + 3 + 2 + 1) · 4! = 15 · 24 = 360

24. 8 sedie sono poste in riga per essere occupate da 3 italiani e 5 francesi. In quanti modi possono sistemarsi le 8 persone in modo che almeno uno degli italiani sia seduto agli estremi?
Consideriamo l'evento complementare, ossia nessun italiano agli estremi, abbiamo $D_{5,2}$ = 20 modi per scegliere i due francesi da far sedere agli estremi. I rimanenti 6 si possono sistemare in 6! = 720 modi, per un totale di 20 · 720 = 14400 modi. La risposta è perciò 8! – 14400 = 25920

25. Consideriamo i 720 anagrammi della parola *aiuole* che ordiniamo in ordine alfabetico. a) Quale anagramma occupa la posizione 270? b) Che posto occupa la parola *elouia*?
a) Tutte le lettere sono diverse, quindi possiamo dividere i 6! = 750 anagrammi, in 6 gruppi da 5! = 120, che iniziano rispettivamente per a, e, i, l, o, u. Quindi la posizione 270 si trova nel 3° gruppo, che perciò inizia per *i*. Anche le parole di questo tipo le dividiamo in gruppi da 4! = 24, pertanto la posizione 270 = 240 + 30, si trova nel secondo gruppo, cioè *ie*... Ed è la sesta parola di questo gruppo, 270 = 240 + 24 + 6. Dividiamo stavolta in gruppi di 3! = 6, quindi è l'ultima parola del primo gruppo, cioè *ieaulo*. b) tenendo conto di quanto già detto, *elouia* appartiene al gruppo che va dalla posizione 121 alla 240. *el*... vanno da 120 + 3 · 24 + 1 = 193 a 120 + 4 · 24 = 216. *elo*... da 192 + 3 · 6 + 1 = 211 a 192 + 4 · 6 = 216; infine *elouia* occupa la posizione 216.

26. Abbiamo un codice formato da una permutazione di aaabbbcccddd. Quanti dei codici sono scritti in modo che a) dividendo in tre sottodici con 4 simboli questi siano tutti diversi (esempio acbd badc dbca? b) non hanno tre simboli consecutivi uguali?
a) Basta permutare le diverse sequenze e moltiplicare i numeri fra loro: $(4!)^3$ = 13824; b) Contiamo quante hanno tre simboli consecutivi uguali. I tre simboli uguali li consideriamo come uno solo, che può occupare 10 posizioni (da 123 a 101112). Quindi abbiamo da considerare le sequenze con solo 3 simboli che si ripetono; solo 2 terne, solo 3 terne e tutte e 4. Partiamo dall'ultimo caso che è il più semplice, in pratica è la permutazione di ABCD (la lettera maiuscola simbolizza la terna), quindi 4! = 24. Con 3 terne abbiamo ABCddd, ABDccc, ACDbbb, BCDaaa, in cui le minuscole non si susseguono, quindi sono 4 · 6!/3! – 4! = 456 (da tutte le permutazioni abbiamo tolte quelle di ABCD). Ragionando in modo analogo, con due sole terne di simboli uguali abbiamo ABcccddd, ACbbbddd, ADbbbddd, BCaaaddd, BDaaaccc, CDaaabbb, che sono 6 · 8!/(3! · 3!) – (24 + 456) = 6240. Con una sola terna di simboli uguali Abbbcccddd, Baaaccddd, Cbbbaaaddd, Dbbbcccaaa abbiamo: 4 · $10!/(3!)^3$ – (24 + 456 + 6240) = 60480. Totale: 24 + 456 + 6240 + 60840 = 67200, questi dobbiamo toglierli dal

numero totale di permutazioni: $12!/(3!)^4 - 67200 = 302400$.

27. Consideriamo tutte le permutazioni del numero 12345678. quante di esse non contengono la sequenza 12?

Tutte le permutazioni sono 8!, quelle che contengono la sequenza 12 si ottengono considerando le permutazioni del numero 345678, che sono 6!, e posizionando 12 nelle varie posizioni possibili che sono quelle in cui 1 occupa le posizioni da 1 a 7 e quindi sono in totale $6! \cdot 7 = 7!$. Pertanto la risposta è $8! - 7! = 35280$

28. Scriviamo tutti gli anagrammi della parola Matematica nell'ordine dei vocabolari. a) Quale parola occupa il 2014° posto? b) Quale posto occupa la parola Cemaatimat?

a) Ordiniamo le permutazioni. Quelle che iniziano per A sono quante le permutazioni di Matematic, cioè $\frac{9!}{2!2!2!} = 45360$, quindi la prima cifra è A. Quelle che iniziano per Aa sono $\frac{8!}{2!2!} = 10080$, abbiamo trovato le prime 2 cifre. Quelle che iniziano per Aaa sono $\frac{7!}{2!2!} = 1260$, non abbiamo trovato la terza lettera. Quelle che iniziano per Aac vanno dal posto 1261 al posto $1260 + \frac{7!}{2!2!} = 2520$. Abbiamo la terza lettera. Aaca... vanno da 1261 a $1260 + \frac{6!}{2!2!} = 1440$; Aace... da 1441 a $1440 + \frac{6!}{2!2!} = 1620$; Aaci... da 1621 a $1620 + \frac{6!}{2!2!} = 1800$; Aacm... da 1801 a $1800 + \frac{6!}{2!} = 2160$. Abbiamo trovato la quarta lettera. Aacma... da 1801 a $1800 + \frac{5!}{2!} = 1860$; Aacme... da 1861 a $1860 + \frac{5!}{2!} = 1920$; Aacmi... da 1921 a $1920 + \frac{5!}{2!} = 1980$; Aacmm... da 1981 a $1980 + \frac{5!}{2!} = 2040$. Abbiamo trovato la quinta cifra. Aacmma... da 1981 a $1980 + \frac{4!}{2!} = 1992$; Aacmme... da 1993 a $1992 + \frac{4!}{2!} = 2004$; Aacmmi... da 2005 a $2004 + \frac{4!}{2!} = 2016$. A questo punto conviene andare al contrario, trovando che la parola 2016 è Aacmmittea, pertanto la 2014 è Aacmmiteta. b) Avevamo già visto che A... arriva fino a 45360, quindi senza bisogno di fare calcoli la prima cifra della permutazione cercata è certamente C. Ora Ca... va da 45361 a $45360 + \frac{8!}{2!2!2!} = 50400$; Ce... da 50401 a $50400 + \frac{8!}{2!2!3!} = 52080$; Cea... da 52081 a $52080 + \frac{7!}{2!2!2!} = 52710$; Cei... da 52711 a $52710 + \frac{7!}{2!2!3!} = 52920$; Cem... da 52921 a $52920 + \frac{7!}{2!3!} = 53340$; Cema... da 53341 a $53340 + \frac{6!}{2!2!} = 53520$; Cemaa... da 53521 a $53520 + \frac{5!}{2!} = 53580$; Cemaaa... da 53581 a $53580 + \frac{4!}{2!} = 53592$; Cemaai... da 53593 a $53592 + \frac{4!}{2!} = 53604$; Cemaam... da 53605 a $53604 + \frac{4!}{2!} = 53616$; Cemaat... da 53617 a $53616 + 4! = 53640$; Cemaata... da 53641 a $53640 + 3! = 53646$; Cemaati... da 53647 a $53646 + 3! = 53652$; Cemaatia... da 53653 a $53652 + 2! = 53654$; Cemaatim... da 53655 a 53657; Cemaatimaa ha la posizione 53658 a 53657 e quindi Cemaatimat ha il posto 53658

29. Un quesito di Henry Dudeney. Consideriamo il seguente triangolo di lettere, in quanti modi diversi possiamo leggere la parola ABRACADABRA?

[1024]

A
B B
R R R
A A A A

C C C C C
A A A A A A
D D D D D D D
A A A A A A A A
B B B B B B B B B
R R R R R R R R R R
A A A A A A A A A A A

Dobbiamo per forza partire dalla prima riga, alla seconda riga abbiamo 2 opzioni, alla terza altre 2 per ognuna delle due precedenti, ossia in totale 4; alla quarta riga quindi avremo 16 opzioni e ragionando allo stesso modo all'undicesima riga avremo $2^{10} = 1024$ modi diversi di leggere ABRACADABRA.

Determinare con quanti zeri finiscono i seguenti fattoriali

30. a) 15!; b) 20!; c) 25!; d) 125!; e) 1235!; f) 2013!
Basta contare quanti il minimo numero di fattori fra 2 e 5 che ha il numero. Quindi possiamo dire che fino a 4! non ci sono 0 finali, da 5! a 9! Ce n'è 1; da 10! a 14!, 2; da 15! a 19!, 3; da 20! a 24!, 4; da 25! a 29!, 6. Abbiamo uno zero in più perché 25 contiene 5 2 volte. E così via. a) 3; b) 4; c) 6; d) $125 = 5 \cdot 25$, quindi abbiamo già 25 zeri, inoltre abbiamo uno zero in più per $25 = 5^2$, per $50 = 2 \cdot 25$, $75 = 3 \cdot 25$; $100 = 4 \cdot 25$, infine altri 3 zeri da $125 = 5^3$. totale $25 + 4 + 2 = 31$; e) $1235 = 5 \cdot 247$; $1225 = 49 \cdot 25$; $1125 = 9 \cdot 125$; $625 = 5^4$. Quindi: $247 + 49 + 9 + 1 = 306$; f) $2010 = 5 \cdot 402$; $2000 = 80 \cdot 25$; $2000 = 16 \cdot 125$; $1875 = 3 \cdot 625$. Quindi: $402 + 80 + 16 + 3 = 501$

31. a) Per quanti valori di n, n! finisce con 5 zeri? b) E con 6 zeri?
a) Nessuno, come abbiamo già detto nell'esercizio precedente; b) 5, sempre dai ragionamenti precedenti

32. Determinare la cifra delle unità del numero 1! + 2! + 3! +…+ 2017!
La cifra delle unità si trova come somma delle cifre delle unità di tutti i 2017 numeri, ma di questi solo i primi 4 non sono 0, quindi basta sommare $1 + 2 + 6 + 24 = 33$, perciò la risposta è 3

33. Determinare la cifra delle unità del numero 1! – 2! + 3! – 4! + … – 10!
Stesso discorso di prima: $1 – 2 + 6 – 24 = –19$, quindi 9

34. 2001 divide 2002! poiché 2002! = 2000! × 2001 × 2002. Qual è il più grande numero intero *k*, tale che 2001^k divide 2002!?
Dobbiamo contare quanti fattori 2001 vi sono in 2002! $2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29$, quindi dobbiamo stabilire quanti fattori 29 (che è il numero più grande) ci sono in 2002!. $2002 = 69 \cdot 29 + 1$. Inoltre $29^2 = 841$ e $2002 = 2 \cdot 841 + 320$. Quindi ci sono un totale di $69 + 2 = 71$ fattori 29. 71 è la risposta.

35. *n*! finisce con 100 zeri, qual è il minimo valore che può assumere *n*?
Dobbiamo stabilire quando *n*! ha almeno 100 fattori 5. Osserviamo che ovviamente 500! Ha più di 100 zeri finali perché 100 sono gli zeri che dipendono solo dal 5, poi ci sono quelli che dipendono dalle altre potenze di 5, gli zeri sono: $100 + 20 + 3 = 123$. La più grande potenza di 5 è 125 e il suo più grande multiplo è 375. Ma $375 = 5 \cdot 72$, quindi gli zeri di 375! sono $72 + 15 + 3 = 90$. Ci servono altri 10 fattori 5. Il successivo multiplo di 25 è 400, quindi 400! Ha $80 + 16 + 3 = 99$ zeri finali, pertanto 405 è la risposta corretta.

36. Qual è la cifra delle decine del numero 1! + 2! + 3! +…+ 2017!
Stavolta dobbiamo sommare fino a 9! che finisce con un solo 0, poi tutti hanno almeno 2 zeri finali. $1 + 2 + 6 + 24 + 120 + 720 + 5040 + 40320 + 362880$. Ma alla fine ci interessa solo sommare le cifre delle unità e delle decine: $1 + 2 + 6 + 24 + 20 + 20 + 40 + 20 + 80 = 213$, quindi la risposta è 1

37. Con quanti zeri finisce (5^n)!?
Tenuto conto di quello che abbiamo già visto la somma è $5^n + 5^{n-1} + 5^{n-2} + ... + 5 + 1 = \frac{5^{n+1}-1}{5-1} = \frac{5^{n+1}-1}{4}$. Abbiamo usato la somma di una progressione geometrica di ragione 5.

38. Provare che la cifra delle unità del numero 1! + 2! + 3! +…+ *n*! è 3 per ogni *n* > 4.
Vedi esercizio 31

39. Provare che la cifra delle unità del numero 1! – 2! + 3! – 4! + … + $(-1)^n \cdot n$! è 9 per *n* > 4.
Vedi esercizio 32

40. Semplificare la seguente somma: $\frac{2}{2!}+\frac{4}{3!}+\frac{6}{4!}+...+\frac{998}{500!}$.

Osserviamo che l'addendo generico è $\frac{2n}{(n+1)!}$ che si può anche scrivere: $\frac{2\cdot[(n+1)-1]}{(n+1)!}=2\cdot\left[\frac{n+1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+1)!}\right]=2\cdot\left[\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right]$, pertanto avremo:

$$2\cdot\left[\frac{1}{1!}-\cancel{\frac{1}{2!}}+\cancel{\frac{1}{2!}}-\cancel{\frac{1}{3!}}+\cancel{\frac{1}{3!}}-\cancel{\frac{1}{4!}}+\ldots+\cancel{\frac{1}{499!}}-\frac{1}{500!}\right]=2-\frac{2}{500!}$$

41. Semplificare il seguente prodotto: $\frac{1}{2!}\cdot\frac{2}{3!}\cdot\frac{3}{4!}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100!}$.

Basta osservare che il prodotto dei numeratori è 99!, per ottenere il risultato: $\frac{1}{2!\cdot 3!\cdot 4!\cdot\ldots\cdot 98!\cdot 100!}$

42. Dimostrare che *n*! + 1 e (*n* + 1)! + 1, non hanno divisori comuni, per ogni *n* naturale.

Abbiamo: $(n+1)!+1=[1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)]+1=n!\cdot(n+1)+1=(n!+1)+n!\cdot n=(n!+1)+(n!+1-1)\cdot n=(n!+1)\cdot(1+n)-n$. Pertanto la divisione fra $(n+1)!+1$ e $n!+1$, ha per resto $-n$, che è diverso da zero per ogni n. Esempio: $8!+1=(7!+1)\cdot(1+7)-7 \Leftrightarrow 40321=5041\cdot 8-7$.

43. Stirling ha stimato che $n!\approx\sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n$, stimare la differenza percentuale fra il valore esatto di 20! e quello ottenuto mediante la formula di Stirling.

Usando una calcolatrice otteniamo $\frac{20!-\sqrt{40\pi}\cdot\left(\frac{20}{e}\right)^{20}}{20!}\cdot 100\approx 0,4$

Combinazioni semplici e ripetute

1. Durante un party furono scambiate un totale di 105 strette di mano. Se ognuno dei partecipanti ha stretto la mano a tutti gli altri una volta sola, quanti erano i partecipanti?

Detti n i partecipanti, ognuno ha stretto $n-1$ mani, ma ovviamente la stretta fra A e B equivale a quella fra B e A, quindi abbiamo a che fare con combinazioni di n oggetti a 2 a 2. cioè

$$\binom{n}{2}=105\Rightarrow\frac{n\cdot(n-1)}{2}=105\Rightarrow n\cdot(n-1)=210\Rightarrow n\cdot(n-1)=15\cdot 14\Rightarrow n=15$$

2. Quante terne diverse si possono giocare al lotto?

Dato che non conta l'ordine abbiamo a che fare con combinazioni semplici: $\binom{90}{3}=\frac{90\cdot 89\cdot 88}{3!}=117480$

3. Quante rette passano per 5 punti di un piano a tre a tre non allineati?

$\binom{5}{3}=\frac{5\cdot 4\cdot 3}{3!}=10$

4. Quante rette distinte passano per dodici punti posti nel piano in modo che non ve siano tre allineati?

$\binom{12}{2}=\frac{12\cdot 11}{2!}=66$

5. In quanti diversi modi possiamo dare le prime 3 carte a uno dei giocatori nel gioco della briscola, usando quindi 40 carte?

$\binom{40}{3}=\frac{40\cdot 39\cdot 38}{3!}=9880$

6. In quanti diversi modi possiamo dare le prime 5 carte a uno dei giocatori nel gioco del poker, usando 32 carte?

$$\binom{32}{5}=\frac{32\cdot 31\cdot 30\cdot 29\cdot 28}{5!}=201376$$

7. **In quanti diversi modi possiamo dare le prime 13 carte a uno dei giocatori nel gioco del ramino, usando 52 carte?**

$$\binom{52}{13}=\frac{52\cdot 51\cdot 50\cdot \ldots \cdot 40}{13!}=635013559600$$

8. **Sei persone hanno un palco a teatro con solo quattro sedie: in quanti modi diversi possono sistemarsi le persone, 4 sedute e due in piedi? Ovviamente non è importante in quale sedia si siede ciascuna delle persone, ma solo se è seduta o rimane in piedi.**

Scegliamo le 4 che si devono sedere o le 2 che devono stare in piedi, in ogni caso: $\binom{6}{4}=\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{4!}=15;\binom{6}{2}=\frac{6\cdot 5\cdot}{2!}=15$

9. **Con riferimento al precedente quesito, sempre con 4 sole sedie, se i possibili modi sono 70, quante sono le persone?**

Deve aversi

$$\binom{n}{4}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{4!}=70\Rightarrow n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)=1680=8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\Rightarrow n=8$$

10. **Con riferimento al precedente quesito, quante sedie dovremmo avere a disposizione, se vogliamo che i possibili modi per sistemare un totale di 10 persone siano 210?**

$\binom{10}{n}=\frac{10\cdot 9\cdot \ldots \cdot(10-n+1)}{n!}=210$, che è di difficile soluzione, andiamo per tentativi: $\binom{10}{5}=\frac{10\cdot 9\cdot \ldots \cdot 5}{5!}=252;\binom{10}{6}=\frac{10\cdot 9\cdot \ldots \cdot 4}{6!}=210$

11. **In un'urna sono contenute 10 palle bianche, 12 rosse e 15 verdi. Le palle sono tutte indistinguibili fra di loro. In quanti diversi modi possiamo estrarre 6 palline, a due a due di ciascuno dei tre colori, nel caso in cui le palline estratte non siano reinserite nell'urna?**

$$\binom{10}{2}\cdot\binom{12}{2}\cdot\binom{15}{2}=311850$$

12. **Avendo a disposizione 5 tipi di salumi, 4 di formaggi, 6 di verdure determinare quanti diversi tramezzini possono crearsi contenenti ciascuno 1 salume, 2 formaggi e 3 verdure.**

$$\binom{5}{1}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{6}{3}=600$$

13. **Per laurearsi in una certa disciplina si devono fare 20 esami, 10 obbligatori, 2 a scelta fra 5 materie di tipo matematico, 3 a scelta fra 6 di tipo giuridico, 4 a scelta fra 8 di tipo economico e 1 lingua scelta fra 5. Determinare quanti sono i diversi piani di studio.**

$$\binom{5}{2}\cdot\binom{6}{3}\cdot\binom{8}{4}\cdot\binom{5}{1}=70000$$

14. **In quante estrazioni di due numeri della tombola, la somma degli estratti è 60?**

Le somme vanno da 1 + 59 a 29 + 31; non contiamo ovviamente la somma commutata. Quindi sono 29

15. **Da un mazzo di 40 carte ne scegliamo 4, quante scelte sono formate solo da figure?**

$\binom{12}{4}=\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{4!}=495$, il dato delle 40 carte è ininfluente contano solo quante sono le figure.

16. **Lanciamo una moneta regolare per 10 volte di seguito in quanti diversi modi possiamo ottenere esattamente 3 volte testa?**

Dobbiamo contare in quanti modi possiamo scegliere 3 oggetti (T) da 10 (i lanci), quindi $\binom{10}{3}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3!}=120$

17. In quanti modi possiamo mettere 10 biglie in 3 scatole, in modo che ogni scatola possa contenere da 0 a 10 biglie?

Equivale a trovare in quanti diversi modi possiamo scrivere 10 come somma di tre addendi, perciò abbiamo a che fare con combinazioni di 3 oggetti (le scatole) ognuno di quali può ripetersi fino a 10 volte (quanti oggetti contiene): $\binom{3+10-1}{10}=\binom{12}{10}=\binom{12}{2}=\frac{12\cdot 11}{2!}=66$

18. Quante sono le soluzioni intere non negative dell'equazione $x + y + z + t = 10$?

Come il precedente, 4 oggetti che si ripetono fino a 10 volte: $\binom{4+10-1}{10}=\binom{13}{10}=\binom{13}{3}=\frac{13\cdot 12\cdot 11}{3!}=286$

19. Da un mazzo di carte napoletane da 40 scegliamo a caso 3 carte, quante sono le diverse scelte che a) non contengono neanche un asso? b) Solo un asso? c) Almeno un asso?

a) E' come se scegliessimo 3 carte da 36, quindi $\binom{36}{3}=\frac{36\cdot 35\cdot 34}{3!}=7140$; b) Dobbiamo scegliere una carta fra 4 (gli assi) e le rimanenti fra 36: $\binom{4}{1}\cdot\binom{36}{2}=4\cdot\frac{36\cdot 35}{2!}=2520$ c) Dal totale di tutte le terne togliamo quelle che non assi, che abbiamo già calcolato in a): $\binom{40}{3}-7140=\frac{40\cdot 39\cdot 38}{3!}=2740$

20. Dati n punti nel piano a tre a tre non allineati, quante rette passano per i dati punti?

Il problema equivale a scegliere 3 elementi fra n, senza che l'ordine conti, quindi: $\binom{n}{3}$

21. A è un insieme di 5 elementi ed ha $2^5 = 32$ sottoinsiemi. Quanti di questi sottoinsiemi hanno 3 elementi?

Il problema equivale a scegliere 3 elementi fra 5, senza che l'ordine conti, quindi: $\binom{5}{3}=10$

22. Una pizzeria dichiara di fare più di 1000 pizze diverse, usando 10 ingredienti diversi. Ogni pizza è diversa dalle altre se contiene almeno un ingrediente diverso. Ogni pizza contiene almeno un ingrediente. La dichiarazione è corretta? Giustificare la risposta.

Da 10 oggetti, dobbiamo sceglierne rispettivamente: 1, 2, 3, ..., 10, quindi: $\binom{10}{1}+\binom{10}{2}+\ldots+\binom{10}{10}=2^{10}-1=1023$. Abbiamo usato la proprietà del triangolo di Tartaglia che afferma che la somma della riga relativa all'esponente n è 2^n, ma manca il primo addendo,1, quindi lo abbiamo tolto.

23. Lanciamo una moneta regolare per 10 volte di seguito in quanti diversi modi possiamo ottenere almeno 3 volte testa? (Conviene considerare l'evento complementare: ottenere meno di 3 teste)

Sfruttiamo il suggerimento: $D'_{2,10}-(1+D'_{2,10}-\left[1+\binom{10}{0}+\binom{10}{1}+\binom{10}{2}\right]=2^{10}-(1+10+45)=968$

24. $xy + x^2 + xz$ è un polinomio omogeneo di secondo grado in tre variabili. Quanti termini ha un polinomio omogeneo di secondo grado in 3 variabili completo?

Abbiamo a che fare con combinazioni con ripetizione di 3 elementi (x, y, z) ognuno dei quali si può ripetere massimo 2 volte, quindi: $\binom{3+2-1}{2}=\binom{4}{2}=6$. Infatti, considerando tutti i coefficienti uguali a 1 abbiamo: $x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz$.

25. Da un mazzo di 40 carte ne scegliamo 4, quante scelte a) hanno lo stesso seme? b) Tutti i 4 semi?

a) Dobbiamo scegliere il seme e poi fra le 10 del seme le 4: $\binom{4}{1}\cdot\binom{10}{4}=4\cdot\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4!}=840$; b) Stavolta scegliamo la prima carta da un seme in 10 modi e lo stesso le altre tre, quindi $10^4 = 10000$

26. Quanti monomi compongono lo sviluppo della quinta potenza di un quadrinomio?

Abbiamo 4 simboli che possono ripetersi da 0 a 5 volte, quindi: $\binom{4+5-1}{5}=\binom{8}{5}=\binom{8}{3}=\frac{8\cdot 7\cdot \cancel{6}}{\cancel{3!}}=56$

27. Un gioco è detto equo se la vincita è inversamente proporzionale al rischio che si corre. Così nella testa e croce, poiché si ha un evento vincente su due, il gioco è equo se si punta 1 e si incassa 2, cioè si vince 1. Nel gioco dei dadi su un singolo lancio, se si punta 1 si deve incassare 6, e così via. Nel lotto, puntando sull'ambo, ossia giocando due numeri, se si vince si incassa 250 volte la posta. Il gioco è equo? E se non lo è, quanto dovrebbe incassarsi?

Il gioco non è equo perché vi sono $\binom{90}{2}=\frac{90\cdot 89}{2}=4005$ diversi ambi, quindi si dovrebbe incassare 4005

28. Con riferimento al precedente quesito, quante volte la posta dovrebbe incassarsi al lotto per una quaterna, se il gioco fosse equo?

$\binom{90}{4}=\frac{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87}{4!}=2555190$

29. Per laurearsi in una disciplina scientifica si devono fare 20 esami, 12 obbligatori, almeno 2 a scelta fra 4 materie di tipo matematico, esattamente 2 a scelta fra 5 di tipo fisico, le rimanenti a scelta fra 10 altre materie. Determinare quanti sono i diversi piani di studio.

Almeno 2 significa da 2 a 4. Abbiamo quindi le seguenti possibilità, scrivendo il numero di esami non obbligatori nell'ordine: (2; 2; 4), (3; 2; 3); (4; 2; 2) e quindi un totale di $\binom{4}{2}\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{10}{4}+\binom{4}{3}\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{10}{3}+\binom{4}{4}\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{10}{2}=17850$

30. Avendo a disposizione 6 tipi di salumi, 3 di formaggi, 4 di verdure determinare quanti diversi tramezzini possono crearsi contenenti ciascuno al massimo 2 salumi, esattamente 2 formaggi e al minimo 2 verdure.

Come nel precedente esercizio, la distribuzione dei condimenti è: (0; 2; 2), (1; 2; 2); (2; 2; 2) + (0; 2; 3), (1; 2; 3); (2; 2; 3) + (0; 2; 4), (1; 2; 4); (2; 2; 4), cioè:

$$\binom{6}{0}\cdot\binom{3}{2}\cdot\left[\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}\right]+\binom{6}{1}\cdot\binom{3}{2}\cdot\left[\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}\right]+\binom{6}{2}\cdot\binom{3}{2}\cdot\left[\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}\right]=$$

$$=\left[\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}\right]\cdot\left[\binom{6}{0}+\binom{6}{1}+\binom{6}{2}\right]\cdot\binom{3}{2}=726 \qquad [726]$$

31. Quanti dei numeri naturali di 3 cifre hanno le cifre disposte in ordine a) crescente? b) decrescente?

Se le cifre sono in un certo ordine, ovviamente sono tutte distinte e soprattutto per ogni terna ammissibile c'è un solo caso. Quindi si tratta di considerare tutte le terne distinte senza considerarne l'ordine.

a) Nel caso dell'ordine crescente non dobbiamo prendere lo 0, quindi $\binom{9}{3}=\frac{9\cdot 8\cdot 7}{3!}=84$. Nel caso delle cifre decrescenti possiamo considerare anche lo 0, pertanto: $\binom{10}{3}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3!}=120$

32. Un codice segreto è formato da 8 simboli diversi scelti fra le 5 vocali dell'alfabeto italiano e le 10 cifre. Quanti codici possiamo formare imponendo che vi siano massimo 4 vocali e le altre cifre?

Con la coppia (v, c) indichiamo quante vocali e quante cifre ci sono. Dobbiamo perciò calcolare 8! · [(0, 8) + (1, 7) + (2, 6) + (3, 5) + (4, 4)], infatti dopo avere scelto le vocali e le cifre possiamo permutarle come vogliamo. Calcoliamo in generale (v, c) = $C_{5,v}\cdot C_{10,c}$. Pertanto: $8!\cdot[C_{5,0}\cdot C_{10,8}+C_{5,1}\cdot C_{10,7}+C_{5,2}\cdot C_{10,6}+C_{5,3}\cdot C_{10,5}+C_{5,4}\cdot C_{10,6}=254620800$

33. Con riferimento al precedente quesito cambia qualcosa se invece che vocali scegliamo massimo 4 lettere fra 21? Giustificare la risposta.

Sì, stavolta scegliamo fra 21 lettere, quindi i $C_{5,v}$ diventano $C_{21,c}$, il risultato sarà: 66071376000

34. Quanto vale la somma di tutti i coefficienti numerici di $(a + b)^6$?

Sappiamo che il risultato è $2^6 = 64$

35. Quanto vale la somma di tutti i coefficienti numerici di $(x - 2y)^{18}$?

Dobbiamo calcolare $\sum_0^{18}\binom{18}{k}\cdot(-2)^k$, sappiamo che $(x-2y)^{18}=\sum_0^{18}\binom{18}{k}x^k\cdot(-2y)^k$, pertanto otteniamo quanto richiesto ponendo $x = y = 1$, da cui:

$$(1-2)^{18}=\sum_0^{18}\binom{18}{k}(-2)^k \Rightarrow (-1)^{18}=\sum_0^{18}\binom{18}{k}(-2)^k \Rightarrow 1=\sum_0^{18}\binom{18}{k}(-2)^k$$

36. Costruiamo il triangolo di Tartaglia-Pascal, fermandoci alla decima riga, a) quanti 1 abbiamo scritto? b) E quanti numeri diversi da 1?

a) Gli uno si ottengono agli estremi, quindi sono $1 + 2 \cdot 9 = 19$. dato che nella prima riga c'è un solo 1.
b) In totale scriviamo $1 + 2 + 3 + ... + 9 = 9 \cdot 10/2 = 45$ numeri, quindi in non 1 sono $45 – 19 = 26$

37. Costruiamo il triangolo di Tartaglia-Pascal, fermandoci alla *n* -esima riga, a) quanti 1 abbiamo scritto? b) E quanti numeri diversi da 1?

Tenuto conto del risultato precedente avremo: a) $1 + 2 \cdot (n – 1) = 2n – 1$;

b) $\left[1+2+3+...+(n-1)\right]-(2n-1)=\frac{(n-1)\cdot n}{2}-2n+1=\frac{n^2-n-4n+2}{2}=\frac{n^2-5n+2}{2}$

38. Giorgia ha un orologio, un bracciale, una collana e un anello che conserva in modo casuale in due scatoline di diverso colore. In quanti modi può farlo?

Intanto calcoliamo in quanti modo possiamo mettere gli oggetti (senza stabilire quali) nelle due scatoline, che equivale a stabilire in quanti modi si può scrivere 4 come somma di due addendi. Stavolta conta anche l'ordine perché le scatoline sono diverse, così $0 + 4$ è diverso da $4 + 0$. Pertanto i modi sono 5. Per ognuno di questi modi dobbiamo contare in quanti modi possiamo scegliere gli oggetti da mettere in una delle due scatoline (per esclusione sistemiamo le rimanenti nell'altra). Essi sono: $\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}=2^4=16$

39. Provare che 11^n, $1 \le n \le 4$, si ottiene scrivendo uno appresso all'altro i numeri della riga *n* del triangolo di Tartaglia.

Abbiamo $11^n = (10 + 1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}10^k\cdot 1^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}10^k$, che non è altri che l'espressione polinomiale di un numero in base 10, finché i coefficienti non superano 9, il che accade appunto fino a $n = 4$. Per valori maggiori di n, possiamo comunque usare il triangolo per calcolare velocemente la potenza.

40. Calcolare 11^6 usando il Triangolo di Tartaglia.

$11^6 = 1 \cdot 10^6 + 6 \cdot 10^5 + 15 \cdot 10^4 + 20 \cdot 10^3 + 15 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 1 = 1 \cdot 10^6 + 6 \cdot 10^5 + (1 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4) + 2 \cdot 10^4 + (1 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2) + 6 \cdot 10 + 1 = 1 \cdot 10^6 + 7 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 1 = 1771561$.

41. Sviluppare $(a + b + c)^4$.

Si ha: $(a+b+c)^4=\sum_{m_1+m_2+m_3=4}\binom{m_1+m_2+m_3}{m_1m_2m_3}\cdot a^{m_1}\cdot b^{m_2}\cdot c^{m_3}=a^4+b^4+c^4+4a^3b+4a^3c+4b^3c+4b^3c+$
$+6a^2b^2+6a^2c^2+6b^2c^2+12a^2bc+12ab^2c+12abc^2$

42. Nello sviluppo di $(a + b + c + d)^6$, determinare il coefficiente di a) a^3b^2c; b) a^2bcd; c) a^2bc^2d

a) Sarà: $\binom{3+2+1+0}{3210}=\frac{(3+2+1)!}{3!2!1!}=\frac{6!}{12}=60$; b) Impossibile perché la somma degli esponenti è diversa da 6; c) $\binom{2+1+2+1}{21\ 21}=\frac{(2+1+2+1)!}{2!1!2!1!}=\frac{6!}{4}=180$

43. Nel gioco del bridge si distribuiscono 13 carte a ciascuno dei 4 giocatori. Quanti sono i diversi modi in cui un mazzo di carte può essere distribuito fra i 4 giocatori?

Il primo giocatore riceve 13 carte scelte fra $\binom{52}{13}$, il secondo fra $\binom{39}{13}$, il terzo fra $\binom{26}{13}$ e l'ultimo le rimanenti 13 carte. Quindi la risposta è il prodotto di questi numeri, che è dell'ordine di $5 \cdot 10^{28}$.

44. Nell'espressione $(a + b + c + x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^6$, tutti gli x_i rappresentano monomi diversi a coeffi-

ciente unitario. Il coefficiente di a^3b^2c dipende dagli x_i? Giustificare la risposta.

La risposta è negativa, basta considerare lo svolgimento degli esercizi 39 e 40.

Provare la validità delle seguenti identità

45. **a)** $\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\cdot\binom{n-1}{k-1}, k\neq 0$; **b)** $\binom{n}{k}=\frac{n}{n-k}\cdot\binom{n-1}{k}, n\neq k$

a) $\frac{n}{k}\cdot\binom{n-1}{k-1}=\frac{n}{k}\frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-k)!}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}=\binom{n}{k}$;

b) $\frac{n}{n-k}\cdot\binom{n-1}{k}=\frac{n}{n-k}\cdot\frac{(n-1)!}{k!\cdot(n-k-1)!}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}=\binom{n}{k}$

Calcolare il valore delle seguenti somme

46. **a)** $\binom{7}{0}+\binom{7}{1}+\ldots+\binom{7}{6}+\binom{7}{7}$; **b)** $\binom{12}{0}-\binom{12}{1}+\ldots-\binom{12}{11}+\binom{12}{12}$

a) Basta usare lo sviluppo del binomio di Newton, con $a = b = 1$: $\sum_0^7\binom{7}{k}=(1+1)^7=2^7=128$; b) Stavolta $a = 1$, $b = -1$: $\sum_0^{12}\binom{12}{k}(-1)^k=(1-1)^{12}=0$

47. **a)** $\binom{15}{3}+\binom{15}{4}+\ldots+\binom{15}{14}+\binom{15}{15}$; **b)** $\binom{11}{4}-\binom{11}{5}+\ldots+\binom{11}{10}-\binom{11}{11}$

a) Basta usare lo sviluppo del binomio di Newton, con $a = b = 1$, ma sottraendo i primi 3 termini: $\sum_0^{15}\binom{15}{k}-\sum_0^{2}\binom{15}{k}=(1+1)^{15}-\binom{15}{0}-\binom{15}{1}-\binom{15}{2}=2^{15}-1-15-105=32647$; b) come in a) m eliminando i primi 4 addendi:

$$\sum_0^{11}(-1)^k\binom{11}{k}-\sum_0^{3}(-1)^k\binom{11}{k}=(1-1)^{11}-\binom{11}{0}+\binom{11}{1}-\binom{11}{2}+\binom{11}{3}=0-1+11-55+165=120$$

48. **a)** $\binom{11}{0}-\binom{10}{0}+\binom{11}{1}-\binom{10}{1}+\ldots+\binom{11}{10}-\binom{10}{10}$; **b)** $\binom{7}{0}+\binom{5}{0}+\binom{7}{1}+\binom{5}{1}+\ldots+\binom{7}{4}+\binom{5}{4}$

a) Sottraiamo due binomi: $\sum_0^{10}\binom{11}{k}-\sum_0^{10}\binom{10}{k}=\left[(1+1)^{11}-1\right]-(1+1)^{10}=2048-1-1024=1023$; b) $\sum_0^{4}\binom{7}{k}+\sum_0^{4}\binom{5}{k}=\left[(1+1)^7-1-7-21-35\right]+\left[(1+1)^5-1\right]=130$

49. **a)** $\binom{5}{0}+2\cdot\binom{5}{1}+4\cdot\binom{5}{2}+8\cdot\binom{5}{3}+16\cdot\binom{5}{4}+32\cdot\binom{5}{5}$; **b)** $\binom{4}{0}+3\cdot\binom{4}{1}+9\cdot\binom{4}{2}+27\cdot\binom{4}{3}+81\cdot\binom{4}{4}$

***Suggerimento*: considerarli come sviluppo di un particolare binomio di Newton**

a) In questo caso il binomio di Newton è con $a = 1$, $b = 2$: $\sum_0^5\binom{5}{k}\cdot 2^k=(1+2)^5=3^5=243$; b) Stavolta $a = 1$, $b = 3$: $\sum_0^4\binom{4}{k}\cdot 3^k=(1+3)^4=4^4=256$

50. **a)** $\binom{6}{0}^2+\binom{6}{1}^2+\binom{6}{2}^2+\binom{6}{3}^2+\binom{6}{4}^2+\binom{6}{5}^2+\binom{6}{6}^2$; **b)** $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}$

a) Basta usare lo sviluppo del binomio di Newton, con a = b = 1: $\sum_0^7\binom{7}{k}=(1+1)^7=2^7=128$; b) teniamo conto della formula di Stiefel: $2\cdot\left[\binom{6}{0}^2+\binom{6}{1}^2+\binom{6}{2}^2\right]+\binom{6}{3}^2=2\cdot(1+6^2+15^2)+20^2=924$

51. **a)** $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\binom{n}{n-1}+(-1)^{n}\cdot\binom{n}{n}$**; b)** $\binom{n}{0}+m\cdot\binom{n}{1}+m^2\cdot\binom{n}{2}+m^3\cdot\binom{n}{3}+\ldots+m^n\cdot\binom{n}{n}$

a) $\sum_0^n\binom{n}{k}(-1)^k=(1-1)^n=0$; b) Stavolta $a=1$, $b=-1$: $\sum_0^n\binom{n}{k}m^k=(1+m)^n$

52. ***A* è un insieme di *n* elementi che ha 2^n sottoinsiemi. Quanti di essi hanno $k<n$ elementi?**

È la generalizzazione dell'esercizio 21, quindi: $\binom{n}{k}$

53. **I numeri di Fibonacci si ottengono con la regola, $F_1=F_2=1$; $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$, $n\geq 2$. Verificare che si ottengono anche mediante i coefficienti binomiali, come mostrato di seguito.**

$$F_1=\binom{0}{0},F_2=\binom{1}{0},F_3=\binom{2}{0}+\binom{1}{1},F_4=\binom{3}{0}+\binom{2}{1},F_5=\binom{4}{0}+\binom{3}{1}+\binom{2}{2},$$

$$F_6=\binom{5}{0}+\binom{4}{1}+\binom{3}{2},F_6=\binom{6}{0}+\binom{5}{1}+\binom{4}{2}+\binom{3}{3},\ldots$$

Basta effettuare i calcoli.

54. **Quanti termini ha un polinomio omogeneo di grado *n* in *k* variabili completo, ossia con tutti i monomi possibili?**

È la generalizzazione dell'esercizio 21, quindi: $\binom{n+k-1}{n}$

55. **Calcolare** $\binom{2n}{0}+\binom{2n}{2}+\binom{2n}{4}+\ldots+\binom{2n}{2n}$

Abbiamo: $\sum_0^{2n}\binom{2n}{k}=2^{2n}$, usiamo la formula di Stiefel: $\binom{2n}{2k}=\binom{2n-1}{2k-1}+\binom{2n-1}{2k}$, per tutti gli addendi tranne il primo e l'ultimo e teniamo conto che $\binom{2n}{0}=\binom{2n-1}{0},\binom{2n}{2n}=\binom{2n-1}{2n-1}$, quindi:

$$\binom{2n}{0}+\binom{2n}{2}+\binom{2n}{4}+\ldots+\binom{2n}{2n}=\binom{2n-1}{0}+\binom{2n-1}{1}+\binom{2n-1}{2}+\binom{2n-1}{3}+\binom{2n-1}{4}+\ldots+\binom{2n-1}{2n-1}=2^{2n-1}$$

56. **Calcolare** $\binom{2n}{1}+\binom{2n}{3}+\binom{2n}{5}+\ldots+\binom{2n}{2n-1}$

Segue dal precedente e dal fatto che $\sum_0^{2n}\binom{2n}{k}=2^{2n}$, la somma è ancora 2^{2n-1}

57. **Verificare la seguente identità** $\frac{n-2k-1}{k+1}\cdot\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}-2\cdot\binom{n}{k}$**, $n>k$.**

Il primo membro lo scriviamo: $\frac{n-2k-1}{k+1}\cdot\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}=\frac{(n-2k-1)\cdot n!}{(k+1)!\cdot(n-k)!}$; il secondo:

$$\frac{(n+1)!}{(k+1)!\cdot(n-k)!}-2\cdot\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}=\frac{(n+1)!-2\cdot n!\cdot(k+1)}{(k+1)!\cdot(n-k)!}=\frac{n!\cdot(n+1-2k-2)}{(k+1)!\cdot(n-k)!}=\frac{n!\cdot(n-2k-1)}{(k+1)!\cdot(n-k)!}$$

58. **Provare per induzione che** $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$**.**

Per $n=1$: $\binom{1}{0}+\binom{1}{1}=2^1$ è vera. Hp: $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$, Ts:

$\binom{n+1}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}+\ldots+\binom{n+1}{n+1}=2^{n+1}$. Usiamo la formula di Stiefel:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}+\binom{n}{n}=2\cdot\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}\right]=2\cdot 2^n=2^{n+1}$$

59. Provare per induzione la validità degli esercizi 51a e 51b.

48 a. Per n = 1: $\binom{0}{0}-\binom{1}{0}=1-1=0$ è vera. Hp: $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\binom{n}{n-1}+(-1)^n\cdot\binom{n}{n}$; Ts: $\binom{n+1}{0}-\binom{n+1}{1}+\ldots+(-1)^n\cdot\binom{n+1}{n}+(-1)^{n+1}\cdot\binom{n+1}{n+1}=0$. Usiamo la formula di Stiefel:

$$\binom{n}{0}-\left[\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\ldots+(-1)^n\cdot\binom{n}{n-1}+(-1)^n\cdot\binom{n}{n}\right]+(-1)^{n+1}\cdot\binom{n+1}{n+1}=1-0-1=0$$

48b). Per n = 1: $\binom{1}{0}+m\cdot\binom{1}{1}=1+m$ è vera. Hp: $\binom{n}{0}+m\cdot\binom{n}{1}+m^2\cdot\binom{n}{2}+m^3\cdot\binom{n}{3}+\ldots+m^n\cdot\binom{n}{n}=(1+m)^n$; Ts: $\binom{n+1}{0}+m\cdot\binom{n+1}{1}+m^2\cdot\binom{n+1}{2}+\ldots+m^n\cdot\binom{n+1}{n}+m^{n+1}\cdot\binom{n+1}{n+1}=(1+m)^{n+1}$. Usiamo la formula di Stiefel:

$$\binom{n}{0}+m\cdot\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\right]+m^2\cdot\left[\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\right]+\ldots+m^n\cdot\left[\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}\right]+m^{n+1}=$$

$$=\left[\binom{n}{0}+m\cdot\binom{n}{1}+m^2\cdot\binom{n}{2}+m^3\cdot\binom{n}{3}+\ldots+m^n\cdot\binom{n}{n}\right]+\left[m\cdot\binom{n}{0}+m^2\cdot\binom{n}{1}+m^3\cdot\binom{n}{2}+\ldots+m^n\cdot\binom{n}{n-1}+m^{n+1}\right]=$$

$$=(1+m)^n+m\cdot\left[\binom{n}{0}+m\cdot\binom{n}{1}+m^2\cdot\binom{n}{2}+\ldots+m^{n-1}\cdot\binom{n}{n-1}+m^n\cdot\binom{n}{n}\right]=$$

$$=(1+m)^n+m\cdot(1+m)^n=(1+m)^n\cdot(1+m)=(1+m)^{n+1}$$

60. Considerare il problema di scrivere il numero 15 come somma di 4 numeri naturali (ossia interi positivi), in quanti modi può farsi?

Equivale a trovare le combinazioni di 15 – 4 = 11 elementi ognuno dei quali si può ripetere fino a 4 volte, dato che non consideriamo le quaterne che contengono almeno un addendo nullo. Perciò sono. $C'_{11,4}=\binom{11+4-1}{4-1}=\binom{14}{3}=364$

61. Generalizzare il caso precedente al numero *n* come somma di *k* < *n* numeri naturali.

Tenuto conto del precedente esercizio abbiamo: $C'_{n-k,k}=\binom{n+k-k-1}{k-1}=\binom{n-1}{k-1}\left[\binom{n-1}{k-1}\right]$

Risolvere le seguenti equazioni nell'insieme dei numeri naturali

62. a) $\binom{n}{2}=21$; **b)** $\binom{n}{3}=10$; **c)** $\binom{n}{4}=330$; **d)** $\binom{n}{3}=164$; **e)** $\binom{n}{4}=1365$; **f)** $\binom{n}{n-1}=10$; **g)** $\binom{n}{4}+\binom{n}{5}=6$

a) Abbiamo: $\frac{n\cdot(n-1)}{2}=21\Rightarrow n\cdot(n-1)=42\Rightarrow 7\cdot 6=42\Rightarrow n=7$;

b) $\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{6}=10\Rightarrow n\cdot(n-1)\cdot(n-2)=60\Rightarrow 5\cdot4\cdot3=60\Rightarrow n=5$;

c) $\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{24}=330\Rightarrow n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)=7920\Rightarrow 11\cdot10\cdot9\cdot8=7920\Rightarrow n=11$;

d) $\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{6}=164\Rightarrow n\cdot(n-1)\cdot(n-2)=984$, non esistono tre interi consecutivi il cui prodotto sia 984

e)
$\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{24}=1365\Rightarrow n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)=32760\Rightarrow 15\cdot14\cdot13\cdot12=32760\Rightarrow n=15$

f) $\binom{n}{n-1}=\binom{n}{1}=n\Rightarrow n=10$;

g) $\binom{n}{4}+\binom{n}{5}=6\Rightarrow\binom{n+1}{5}=6\Rightarrow\frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{120}=6\Rightarrow$

$\Rightarrow(n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)=720\Rightarrow 6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2=720\Rightarrow n=5$

63. **a)** $\binom{n}{7}+\binom{n}{8}=\binom{10}{2}$; **b)** $\binom{n}{5}+\binom{n}{6}=\binom{8}{5}$; **c)** $\binom{n}{3}+\binom{n}{4}+\binom{n+1}{5}=\binom{18}{5}$; **d)** $\binom{n-1}{8}+\binom{n}{7}+\binom{n-1}{7}=\binom{13}{5}$

a) $\binom{n}{7}+\binom{n}{8}=\binom{10}{2}\Rightarrow\binom{n+1}{8}=\binom{10}{8}\Rightarrow(n+1)=10\Rightarrow n=9$; b) $\binom{n}{5}+\binom{n}{6}=\binom{8}{5}\Rightarrow\binom{n+1}{6}=\binom{8}{5}$, facilmente si vede che non vi sono soluzioni accettabili; c) $\binom{n}{3}+\binom{n}{4}+\binom{n+1}{5}=\binom{18}{5}\Rightarrow\binom{n+1}{4}+\binom{n+1}{5}=\binom{18}{5}\Rightarrow\binom{n+2}{5}=\binom{18}{5}\Rightarrow n+2=18\Rightarrow n=16$; d) $\binom{n-1}{8}+\binom{n}{7}+\binom{n-1}{7}=\binom{13}{5}\Rightarrow\binom{n}{8}+\binom{n}{7}=\binom{13}{5}\Rightarrow\binom{n+1}{8}=\binom{13}{8}\Rightarrow n=12$

64. **a)** $\binom{n-2}{3}+\binom{n-2}{4}+\binom{n-1}{5}+\binom{n}{6}=\binom{31}{6}$; **b)** $\binom{2n+1}{8}+\binom{2n+2}{9}+\binom{2n}{6}+\binom{2n}{7}=\binom{21}{10}$

a) $\binom{n-2}{3}+\binom{n-2}{4}+\binom{n-1}{5}+\binom{n}{6}=\binom{31}{6}\Rightarrow\binom{n-1}{4}+\binom{n-1}{5}+\binom{n}{6}=\binom{31}{6}\Rightarrow\binom{n}{5}+\binom{n}{6}=\binom{31}{6}\Rightarrow$
$\Rightarrow\binom{n+1}{6}=\binom{31}{6}\Rightarrow n=30$;

b) $\binom{2n+1}{8}+\binom{2n+2}{9}+\binom{2n}{6}+\binom{2n}{7}=\binom{21}{10}\Rightarrow\binom{2n+1}{8}+\binom{2n+2}{9}+\binom{2n+1}{7}=\binom{21}{10}\Rightarrow$
$\Rightarrow\binom{2n+2}{8}+\binom{2n+2}{9}=\binom{21}{10}\Rightarrow\binom{2n+3}{9}=\binom{21}{10}$ facilmente si vede che non vi sono soluzioni accettabili.

Nei seguenti esercizi si suggerisce di scomporre in fattori primi il secondo membro

65. **a)** $\binom{7}{n}=35$; **b)** $\binom{11}{n}=165$; **c)** $\binom{8}{n}=56$; **d)** $\binom{12}{n+1}=792$; **e)** $\binom{15}{2n-1}=6435$; **f)** $\binom{23}{2n}=1771$

a) $\binom{7}{n}=35\Rightarrow\binom{7}{n}=\frac{7\cdot6\cdot5}{6}\Rightarrow\binom{7}{n}=\binom{7}{3}\vee\binom{7}{n}=\binom{7}{4}\Rightarrow n=3\vee n=4$;

b) $\binom{11}{n}=165 \Rightarrow \binom{11}{n}=\frac{11\cdot 10\cdot 9}{6} \Rightarrow \binom{11}{n}=\binom{11}{3} \vee \binom{11}{n}=\binom{11}{8} \Rightarrow n=3 \vee n=8$;

c) $\binom{8}{n}=56 \Rightarrow \binom{8}{n}=\frac{8\cdot 7}{1}$, non ci sono soluzioni accettabili: $\varnothing$;

d) $\binom{12}{n+1}=792 \Rightarrow \binom{12}{n+1}=\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{120} \Rightarrow \binom{12}{n+1}=\binom{12}{5} \vee \binom{12}{n+1}=\binom{12}{7} \Rightarrow n=4 \vee n=6$;

e) $\binom{15}{2n-1}=6435 \Rightarrow \binom{15}{2n-1}=\frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}{120} \Rightarrow \binom{15}{2n-1}=\binom{15}{5} \vee \binom{15}{2n-1}=\binom{15}{10} \Rightarrow n=3$, la seconda equazione ovviamente non ha soluzioni accettabili;

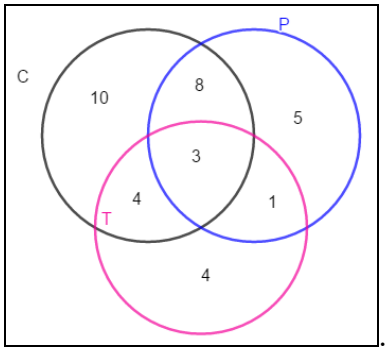
f) $\binom{23}{2n}=1771 \Rightarrow \binom{23}{2n}=\frac{23\cdot 22\cdot 21\cdot 20\cdot 19}{5} \Rightarrow \binom{23}{2n}=\binom{23}{5} \vee \binom{23}{2n}=\binom{23}{18} \Rightarrow n=10$, $\binom{15}{2n-1}=6435 \Rightarrow \binom{15}{2n-1}=\frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}{120} \Rightarrow \binom{15}{2n-1}=\binom{15}{5} \vee \binom{15}{2n-1}=\binom{15}{10} \Rightarrow n=3$, la seconda equazione ovviamente non ha soluzioni accettabili

66. Quanti fra i primi 3000 numeri naturali sono divisibili per 3, 4 o 6?
Usiamo il principio di inclusione-esclusione, indicando con M_n, i multipli di n contenuti nei primi 3000 naturali. Dobbiamo quindi calcolare: $|M_3| + |M_4| + |M_6| - |M_{12}| - |M_6| - |M_{12}| + |M_{12}| = |M_3| + |M_4| - |M_{12}| = 1000 + 750 - 250 = 1500$

67. Quanti fra i primi 5000 numeri naturali sono divisibili per 4, 7 o 8?
Stavolta dobbiamo calcolare: $|M_4| + |M_7| + |M_8| - |M_{28}| - |M_8| - |M_{56}| + |M_{56}| = |M_4| + |M_7| - |M_{28}| = 1250 + 714 - 178 = 1786$

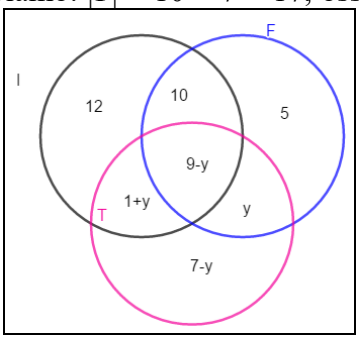
68. Quanti fra i primi 10000 numeri naturali non sono divisibili per 6, 8 o 14?
Stavolta dobbiamo calcolare: $10000 - (|M_6| + |M_8| + |M_{14}| - |M_{24}| - |M_{42}| - |M_{56}| + |M_{168}|) = 1000 - (1666 + 1250 + 714 - 417 - 239 - 179 + 59) = 7146$

69. Quanti fra i primi 10000 numeri naturali sono divisibili per 6 o 8 ma non per 12?
Stavolta dobbiamo calcolare: $|M_4| + |M_7| + |M_8| - |M_{28}| - |M_8| - |M_{56}| + |M_{56}| = |M_4| + |M_7| - |M_{28}| = 1250 + 714 - 178 = 1786$

70. 35 ragazzi iscritti a un club sportivo sono tali che 25 giocano a calcio, 17 a pallavolo, 12 a tennis, 11 a calcio e pallavolo, 7 calcio e tennis, 3 tutti e tre gli sport. Quanti di essi praticano a) pallavolo e tennis; b) solo tennis; c) pallavolo e calcio ma non tennis.
Indichiamo con C, P e T i tre insiemi. Dobbiamo quindi calcolare: a) $|T \cap P|$, b) $|T \setminus P \cup C|$; c) $|P \cap C \setminus T|$. Considerando solo gli insiemi C e P per il principio di inclusione-esclusione abbiamo: $|P \cup C| = |P| + |C| - |P \cap C|$, da cui ricaviamo $|P \cup C| = 17 + 25 - 11 = 31$, quindi possiamo rispondere alla domanda b): $|T \setminus (P \cup C)| = 35 - 31 = 4$. Analogamente determiniamo $|C \cup T| = |C| + |T| - |C \cap T| = 25 + 12 - 7 = 30$, da cui $|P \setminus (C \cup T)| = 35 - 30 = 5$. Adesso conviene fare ricorso ai diagrammi di Eulero – Venn, in cui inseriamo ciò che sappiamo: 

. Quindi le risposte richieste sono: a) 4; b) 4; c) 8

71. In una scuola di lingue i suoi 44 iscritti sono suddivisi in modo che 32 studiano inglese, 24 francese, 10 inglese e tedesco, 5 solo francese, 7 tedesco ma non inglese, 15 francese ma non tedesco. Quanti di essi studiano a) tedesco; b) solo inglese; c) inglese e francese ma non tedesco.

Indichiamo con I, F e T i tre insiemi. Dato che $|I \cap T| = 10$, e $|T \setminus I| = 7$, che sono disgiunti e la loro unione è T abbiamo: $|T| = 10 + 7 = 17$, ossia la risposta alla domanda a). La situazione per il momento è la seguente: 

manca quindi un'informazione, per determinare quanti elementi vi sono in ciascuna delle 7 zone, ma possiamo rispondere alle nostre domande. b) 12; c) 10

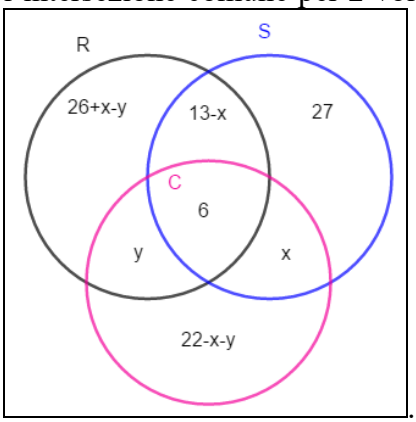
72. Quanti fra i primi 6000 numeri naturali sono divisibili per 6, 8, 10 o 15?

Usiamo il principio di inclusione-esclusione, indicando con M_n l'insieme dei multipli di n. Quanto richiesto è dato da $|M_6| + |M_8| + |M_{10}| + |M_{15}| - |M_{24}| - |M_{30}| - |M_{30}| - |M_{40}| - |M_{120}| - |M_{30}| + |M_{120}| + |M_{120}| + |M_{120}| - |M_{120}| = |M_6| + |M_8| + |M_{10}| + |M_{15}| - |M_{24}| - 3\cdot |M_{30}| - |M_{40}| + |M_{120}| = 1000 + 750 + 600 + 400 - 250 - 3 \cdot 200 - 150 + 50 = 1800$.

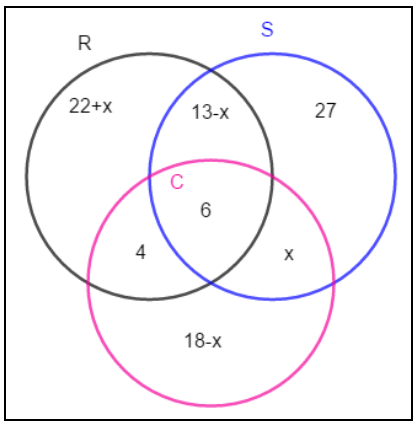
73. Quanti fra i primi 8000 numeri naturali non sono divisibili per 5, 7, 9 o 15?

In questo caso dobbiamo calcolare: $8000 - (|M_5| + |M_7| + |M_9| + |M_{15}| - |M_{35}| - |M_{45}| - |M_{15}| - |M_{63}| - |M_{105}| - |M_{45}| + |M_{315}| + |M_{105}| + |M_{315}| - |M_{315}|) = 8000 - (|M_5| + |M_7| + |M_9| - |M_{35}| - 2\cdot |M_{45}| - |M_{63}| - |M_{45}| + |M_{315}|) = 8000 - (1600 + 1142 + 888 - 228 - 2 \cdot 177 - 126 - 177 + 25) = 5230$

74. Da un indagine statistica è risultato che il 90% non mangia una almeno fra le seguenti verdure: radicchio, spinaci e cicoria. Il 45% non mangia radicchio, il 28% non mangia spinaci e il 46% non mangia cicoria. Il 27% delle tre verdure non mangia solo cicoria e il 6% nessuna delle tre. Che percentuale del campione non mangia a) almeno due delle tre verdure; b) esattamente due delle tre verdure; c) esattamente radicchio e spinaci

, abbiamo: $90 = 45 + 28 + 46 - |R \cap S| - |R \cap C| - |S \cap C| + 6$. Quindi: $|R \cap S| + |R \cap C| + |S \cap C| = 35$, che ci aiuta a rispondere alla domanda a, dato che da questa somma dobbiamo togliere l'intersezione comune per 2 volte, quindi: $35 - 2 \cdot 6 = 23$. Adesso la situazione grafica è la seguente: 

. Da essa vediamo che possiamo anche scrivere: 23 = 13 – x + 6 + y +



x, da cui y = 4, e quindi abbiamo il seguente ulteriore grafico: quindi la risposta b) è 13 – x + 4 + x = 17. Infine la risposta c) è 13 – x, quindi non può determinarsi dai dati.

75. Consideriamo tutte le permutazioni del numero 12345678. quante di esse non contengono nessuna delle sequenze 12, 34, 56, 78?

Dobbiamo applicare il principio di inclusione esclusione per calcolare quelle che contengono almeno una delle sequenze, che toglieremo dal totale delle permutazioni che sono 8!. Dobbiamo quindi calcolare intanto quelle che contengono una sola sequenza, Per esempio la sequenza 12 si trova nelle permutazioni del numero 345678, che sono 6!, e posizionando 12 nelle varie posizioni possibili che sono quelle in cui 1 occupa le posizioni da 1 a 7 e quindi sono in totale 6! · 7 = 7!. Altrettante sono quelle che contengono 34, 56 e 78, quindi ne abbiamo 4 · 7!. Ora dobbiamo calcolare quante contengono 2 sequenze. Per esempio 1234 sono $4!\cdot\binom{6}{2}=4!\cdot\frac{6\cdot 5}{2}=15\cdot 4!$, dato che permutiamo 5678 e poi sistemiamo le due coppie che sono come due numeri che possono occupare 6 posizioni. Poiché le coppie le possiamo scegliere in $\binom{4}{2}=\frac{4\cdot 3}{2}=6$ modi, abbiamo un totale di 90 · 4! sequenze. Adesso abbiamo le terne, che si scelgono in $2!\cdot\binom{5}{3}\cdot\binom{4}{3}=2!\cdot\frac{5\cdot 4\cdot 3}{3!}\cdot 4=40\cdot 2!$ modi. E infine le quaterne che si scelgono in 4! Modi. Per cui il totale è 8! – (4 · 7! – 90 · 4! + 40 · 2! – 4!) = 22264

Quesiti di riepilogo

1. Prendi tutti i numeri di 4 cifre formati solo con le cifre 1 o 2, che possono ripetersi da 0 a 4 volte. a) Se sommi le cifre di ciascuno di questi numeri, quanti diversi totali puoi ottenere? b) Se le cifre possibili sono 0 o 1, il risultato precedente cambia? c) Se le cifre sono 2018, con 1 e 2?

a) Le somme sono: 4· 1; 3 · 1 + 2; 2 · 1 + 2 · 2; 1 + 3 · 2; 4 · 2, che sono fra loto tutte diverse. Quindi la risposta è 5; b) Sì perché non sarà possibile considerare il numero 0000, quindi sono 4; c) Ragionando come in a) la risposta è 2019.

2. Scriviamo tutti i possibili numeri che contengono tutte le cifre 1, 2, 3, 4, una sola volta dal più piccolo al più grande. a) Quale numero occupa la diciannovesima posizione? b) Che posizione occupa il 3142?

a) I numeri sono 24, suddivisi in gruppi di 6 che iniziano rispettivamente per 1, 2, 3, 4; quindi il 19° numero inizia per 4. Ed è l primo di questo genere, quindi è il più piccolo: 4123; b) I numeri che iniziano per 3 occupa posizione dalla 13 alla 18, il 13° è 3124, quindi 3142 è il 14°.

3. Lancio un dado regolare (6 facce con i punteggi da 1 a 6) 10 volte. Il prodotto dei 10 numeri ottenuti è 7776. a) qual è la massima somma possibile dei 10 punteggi? b) E se ottenessi 7540?

a) Abbiamo $7776 = 2^5 \cdot 3^5 = 6^5$, ciò vuol dire che al massimo possiamo ottenere 5 volte 6 e le rimanenti 5 volte 1, con una somma che è 5 · 6 + 5 = 35. Ovviamente non conviene sostituire un 6 con un 2 · 3 perché in questo modo la somma totale diminuisce di 2 unità (2 + 3 = 5 e 2 e 3 sono 2 dadi al posto di

6 che è un dado); b) Impossibile perché $7540 = 2^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19$.

4. **Su un orologio digitale si vedono gli orari da 00:00 a 23:59. Per quanto tempo, in un giorno, si vedranno 3 cifre uguali e una diversa sull'orologio?**
Le tre cifre uguali possono essere solamente 0, 1, 2, 3, 4, 5, dato che la prima cifra va da 0 a 2; la seconda e la quarta da 0 a 9; la terza da 0 a 5. Quindi possiamo avere 00:0X, 00:X0; 0X:00; X0:00 per un totale di (9 + 5 + 9 + 2) = 25 volte. Lo stesso sostituendo lo 0 con 1 e 2. Possiamo avere: X3:33 per 3 volte, lo stesso sostituendo 3 con 4 o 5. In totale quindi: $25 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 84$.

5. **In un campionato di softball, dopo che ogni squadra ha giocato contro ciascuna delle rimanenti per 4 volte, la classifica vede i seguenti punteggi: 22, 19, 14 e 12. Se per ogni vittoria si ottengono 3 punti e 1 punto per ogni pareggio, quante partite sono finite in pareggio?**
Sono state giocate $(12 \cdot 4)/2 = 24$ partite; la somma dei punteggi è 22 + 19 + 14 + 12 = 67. Quindi vi è un massimo di 22 vittorie, ma non va bene perché per ogni pareggio dobbiamo calcolare 2 punti perché ognuna delle due squadre prende 1 punto, e $22 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 68$ non va bene. Potremmo avere $21 \cdot 3 + 2 \cdot 2$, ma non va bene perché ci sarebbero 21 + 2 = 23 partite. Osserviamo che il numero di vittorie è dispari. Proviamo: $19 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 67$ funziona perché 19 + 5 = 24. Quindi la risposta è 5.

6. **Chiamiamo decrescente un numero intero le cui cifre sono tali che ognuna è minore di quelle alla sua sinistra. Per esempio 8540 è un numero decrescente di 4 cifre. Quanti numeri decrescenti ci sono fra 100 e 500?**
La decrescenza fa sì che i gruppi cercati sono combinazioni, dato che non conta l'ordine nella scelta. Quindi sono $\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = 10$

7. **Uno strano dado ha facce con punteggi che valgono 2, 2, 3, 3, 5 e 8. Se lanciamo due dadi come questo, quanti diversi punteggi possiamo ottenere?**
Osserviamo che la somma di due punteggi diversi è sempre diversa (2 + 3, 2 + 5, 2 + 8, 3 + 5, 3 + 8, 5 + 8) E diverse da queste sono le somme di 2 punteggi uguali (2 + 2 e 3 + 3). Totale 8

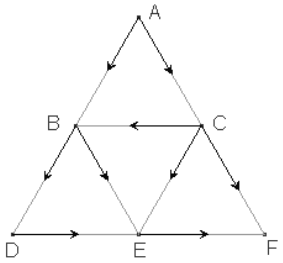
8. **Ad una festa partecipano *n* coppie. Ogni uomo stringe la mano a tutti i partecipanti tranne che alla propria moglie, le donne solo agli uomini. Quante strette di mano vengono scambiate?**
Gli n uomini stringono $n \cdot (2n - 2)$ mani, le donne stringono $n \cdot (n - 1)$ mani. Ovviamente in questo modo contiamo due volte una stessa stretta, così:
$$\frac{n\cdot(2n-2)+n\cdot(n-1)}{2} = \frac{n\cdot(2n-2+n-1)}{2} = \frac{n\cdot(3n-3)}{2} = \frac{3n\cdot(n-1)}{2}$$

9. ***n* > 4 persone fanno un gioco in cui una coppia gioca contro un'altra. Quante partite devono fare affinché ogni possibile coppia giochi contro ciascuna delle altre?**
Le coppie possibili sono $\binom{n}{2}$, ognuna di queste coppie gioca contro una coppia scelta fra le rimanenti $n - 2$ persone, e questa seconda coppia si sceglie in $\binom{n-2}{2}$ modi. Quindi in totale si giocano $\binom{n}{2}\cdot\binom{n-2}{2}$ partite.

10. **Quanti sono i numeri di tre cifre in cui la cifra delle unità vale la metà di quella delle centinaia mentre quella delle decine è diversa sia rispetto alle unità che alle centinaia?**
I numeri sono del tipo 1d2, 2d4, 3d6, 4d8, con d scelto fra i rimanenti 8 numeri diversi dalle altre due cifre, quindi: $4 \cdot 8 = 32$

11. **Gli spigoli di un cubo hanno, in *cm*, misure intere. Il volume è meno di 1 metro cubo e non più piccolo di 1 decimetro cubo. Quante diverse misure potrebbe avere il cubo?**
Se lo spigolo misura x *cm*, il volume misura x^3 cm^3 Deve essere $10^3 \le x^3 < 10^6 \Rightarrow 10 \le x < 10^2$, pertanto abbiamo 100 – 10 = 90 diverse scelte.

12. Usando solo i cammini e le direzioni mostrate in quanti diversi modi possiamo andare da A ad F?



ABDEF; ABEF; ACF; ACBEF; ACBDEF; ACEF. Totale 6

13. Ci sono *n* lampade, ciascuna delle quali può essere accesa o spenta singolarmente. In quanti modi differenti puoi avere almeno una lampada accesa?

Calcoliamo l'evento complementare, ossia tutte le lampade spente, che si può avere ovviamente in un solo modo. Tutti i modi sono una n-upla formata da 0 (spento) o 1 (acceso), quindi sono 2^n casi. Perciò la risposta è $2^n - 1$.

14. Di un numero di telefono di 7 cifre conosciamo le prime 5 cifre. a) Quante telefonate dobbiamo fare per essere sicuri di centrare il numero corretto? b) E se le cifre note sono sempre 5 tutte diverse ma non sappiamo che posto occupano?

a) Dobbiamo scegliere 2 cifre fra 10, con ripetizione, quindi: $D'_{10,2} = 10^2 = 100$; b) Dobbiamo distinguere diversi casi Abbiamo sempre 100 possibilità di scegliere le due cifre incognite, solo che ognuna delle sequenze da 7 cifre può essere permutata a piacere, e ciò si fa in $7! + 7!/2! + 7!/(2! \cdot 2!) + 7!/3! = 9660$ (a seconda che le due cifre siano diverse dalle altre 5, una sola di esse uguale a una delle altre 5, uguali a 2 di esse ma diverse tra loro, uguali fra loro e diverse dalle altre, uguali fra loro e a una delle altre). Quindi il totale diventa: 966000

15. Tre bambini, partecipano ad una gara, in cui sono gli unici concorrenti. Sapendo che nella classifica finale c'è uno e un solo pari merito, quante diverse classifiche possono esservi?

Le classifiche possibili sono: PPS e PSS, in cui P e S si scelgono fra i tre, quindi abbiamo $2 \cdot 3 = 6$ classifiche possibili. In pratica l'informazione del pari merito è inutile le classifiche sono 3! Anche senza pari merito.

16. Un clown sale una scala con 6 scalini, a uno o due per volta. In quanti modi differenti può arrivare al sesto gradino? Un modo è differente non solo per il numero di salti da 1 e da 2, ma anche per l'ordine dei salti.

Il minimo numero di passi è ovviamente 6 ($6 \cdot 2$), il massimo è 12 ($12 \cdot 1$). E questi due casi sono gli unici che si possono fare in un modo solo. Sostituendo un salto da 2 con 2 da 1, dobbiamo scegliere dove inserire questi due salti. Così se il clown fa 5 passi da 2 e 2 da 1, dobbiamo permutare la "parola" 2222211, che si fa in $7!/(5! \cdot 2!) = 21$ modi; Con 4 da 2 e 4 da 1 abbiamo: $8!/(4! \cdot 4!) = 70$ modi. Con 3 da 2 e 6 da 1 abbiamo: $9!/(3! \cdot 2!) = 84$ modi. Con 2 da 2 e 8 da 1 abbiamo: $9!/(2! \cdot 8!) = 45$ modi. Con 1 da 2 e 10 da 1 abbiamo: $11!/9! = 110$ modi. Totale 332

17. In un gioco sono messi tre paletti a terra e si devono lanciare degli anelli su di essi. Centrare ciascuno dei tre anelli consente di ottenere rispettivamente, 1, 3 o 5 punti. Se lanciando tre anelli siamo sicuri che ogni anello si infilerà in uno dei paletti, quanti diversi punteggi possono ottenersi? Ovviamente possiamo centrare uno stesso paletto con più di un anello.

Abbiamo combinazioni con ripetizione di 3 oggetti ognuno dei quali può ripetersi fino a 3 volte: $\binom{3+3-1}{3} = \binom{5}{3} = 10$. Dobbiamo controllare però se tutti i punteggi sono diversi nella somma. E in effetti abbiamo $1 + 1 + 5 = 3 + 3 + 1$; $1 + 3 + 5 = 3 + 3 + 3$; $1 + 5 + 5 = 3 + 3 + 5$. Quindi dobbiamo eliminare 3 punteggi ripetuti: $10 - 3 = 7$.

18. Quanti numeri interi fra 1 e 2016 hanno almeno una cifra uguale a 7?
Al solito conviene considerare l'evento complementare, ossia quanti non hanno alcuna cifra 7. Ne abbiamo 8 con 1 cifra; $8 \cdot 9 = 72$ con 2 cifre; $8 \cdot 9 \cdot 9 = 648$ con 3 cifre; da 1000 a 2016 ve ne sono altri $9^3 + 16 = 745$, quindi la risposta è $2016 - (8 + 72 + 648 + 745) = 543$.

19. Abbiamo 10 palle identiche, 5 rosse, 3 bianche e 2 verdi, vogliamo metterne 4 in una scatola e 6 nell'altra. In quanti modi diversi possiamo farlo?
I colori influiscono sulla risposta, consideriamo quello che succede in una scatola, dato che a quel punto non vi è più scelta per le palle nell'altra scatola. In quella da 4 possiamo mettere 4R, 3R1B, 3R1V, 2R2B, 2R1B1V, 2R2V, 1R3B, 1R2B1V, 1R1B2V, 3B1V, 2B2V. Totale 11 casi.

20. Quanti numeri di 4 cifre hanno almeno una cifra che si ripete?
I numeri di 4 cifre sono 9000, di questi quelli con cifre tutte diverse sono: $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$, quindi: $9000 - 4536 = 4464$

21. A, B, C, D ed E vogliono sedere in 5 posti adiacenti; ma A vuole sedere accanto a B e D accanto a E, mentre C non vuole sedere vicino a E. In quanti diversi modi possono sedersi?
Sono possibili le seguenti configurazioni: ABCDE, ABEDC, BACDE, BAEDC, CABDE, CABED, CBADE, CBAED, CDEAB, CDEBA, DEABC, DEBAC, EDCAB, EDCBA, EDABC, EDBAC. Totale 16.

22. In un torneo di tennis ognuno gioca contro ciascuno degli altri. Dato che le partite sarebbero troppe, gli organizzatori invitano 4 giocatori in meno e così facendo riducono di 50 le partite. Quanti giocatori partecipano al torneo?
Con n giocatori si disputano $C_{n,2} = n \cdot (n-1)/2$ partite; con $(n-4)$ giocatori si disputano $C_{n,-4\,2} = (n-4) \cdot (n-5)/2$ partite. Si ha: $n \cdot (n-1)/2 = (n-4) \cdot (n-5)/2 + 50 \Rightarrow n^2 - n = n^2 - 9n + 20 + 100 \Rightarrow 8n = 120 \Rightarrow n = 15$

23. Un biglietto di autobus è formato da una griglia 3 × 3 contenente nell'ordine i numeri da 1 a 9. La macchina obliteratrice buca 4 dei 9 numeri. Per quanti giorni possono effettuarsi obliterazioni diverse?
Dobbiamo scegliere 4 caselle da 9 in modo che non conti l'ordine, quindi: $C_{9,4} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6/4! = 126$

24. In quanti modi differenti 5 interruttori adiacenti possono essere posizionati, in modo che ve ne siano sempre a) almeno due adiacenti spenti? b) E se sono gli interruttori sono *n*?
a) Se ve ne sono esattamente 2 spenti, li indichiamo con il simbolo 1, gli altri tre ciascuno con uno 0, quindi dobbiamo calcolare le permutazioni di 0001, che sono $4!/3! = 4$. Se ve ne sono esattamente 3 spenti, dobbiamo calcolare le permutazioni di 001, che sono $3!/2! = 3$. Se ve ne sono esattamente 4 spenti, dobbiamo calcolare le permutazioni di 01, che sono $2! = 2$. Infine tutti spenti in un solo modo. Totale: $4 + 3 + 2 + 1 = 10$; b) generalizzando il caso a) avremo: $1 + 2 + \ldots + n = n \cdot (n-1)/2$

25. Cinque ragazze e tre ragazzi giocano a pallavolo. In quanti diversi modi possono farsi due squadre composte da 4 giocatori ciascuna, in modo che in ogni squadra ci sia almeno un maschio?
Scelta una squadra l'altra si forma in un solo modo. Possiamo costruire $C_{8,4} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5/4! = 70$ squadre possibili, che però così contiamo 2 volte, quindi sono 35. Possiamo formare $C_{5,4} = C_{5,1} = 5$ squadre di sole femmine, quindi la risposta è $35 - 5 = 30$

26. 4 bambini devono dividersi fra loro 6 mele. Se qualcuno può anche non riceverne nessuna e qualcuno può prenderle anche tutte, in quanti diversi modi possiamo fare ciò?
Si tratta di scrivere 6 come somma di 4 addendi, quindi abbiamo combinazioni di 4 oggetti, ciascuno dei quali può ripetersi fino a 6 volte: $\binom{6+4-1}{6} = \binom{9}{6} = 84$

27. Ci sono 12 ragazze e 15 ragazzi che partecipano ad una festa. In quanti diversi modi possiamo scegliere 4 coppie di ballerini, maschio e femmina, fra di loro?

La prima coppia si sceglie in 12 · 15 = 180 modi diversi, la seconda in 11 · 14 = 154, la terza in 10 · 13 = 130 modi diversi, la quarta in 9 · 12 = 108. Se moltiplicassimo questi fattori avremmo più di quello che ci interessa, dato che per ogni quaterna calcoleremmo anche le sue permutazioni. Per esempio se abbiamo scelto AB-CD-EF-GH, consideriamo anche AB-CD-GH-EF e le altre 22 permutazioni. Quindi: 180 · 154 · 130 · 108/4! = 16216200

28. 5 coppie devono essere divise in due gruppi in modo che uno contenga 6 persone e fra di loro almeno due delle coppie iniziali. In quanti diversi modi possiamo effettuare tale suddivisione?
Se il primo gruppo contiene solo 2 coppie abbiamo $C_{5,2} = 10$ modi di scegliere le due coppie, mentre i rimanenti due componenti li scegliamo in modo che non vi sia una coppia e ciò si fa in $C_{6,2} - 3 = 12$ modi. Quindi 22 modi. Se invece il gruppo è formato da 3 coppie i casi sono $C_{5,3} = 10$. Totale 32 modi.

29. Quanti degli anagrammi della parola Caramella iniziano per C e finiscono per a?
Sono le permutazioni della parola *aramell*, quindi: 7!/(2! 7 2!) = 1260

30. In quanti modi 6 persone possono sedersi su 6 sedie numerate? La risposta dovrebbe essere 6!, ma facciamo il seguente ragionamento. Scegliamo una persona a caso che può essere scelta da 6 e ha 6 possibilità di scelta per la sedia, quindi ci sono 6^2 scelte. Il secondo avrà perciò 5^2 scelte e così via. Infine i modi sono allora $6^2 \cdot 5^2 \cdot \ldots \cdot 1^2 = (6!)^2$ modi. In quale caso il secondo ragionamento è corretto?
Solo se vale l'ordine in cui scegliamo le persone che a loro volta possano scegliere le sedie, il ragionamento funziona.

31. Quanti fra i primi 1000 numeri naturali sono divisibili per 3, 5 o 10?
Usiamo il principio di inclusione-esclusione, indicando con M_n, i multipli di n contenuti nei primi 1000 naturali. Dobbiamo quindi calcolare: $|M_3| + |M_5| + |M_{10}| - |M_{15}| - |M_{30}| - |M_{10}| + |M_{30}| = |M_3| + |M_5| - |M_{15}| = 333 + 200 - 66 = 466$.

32. Quanti fra i primi 2000 numeri naturali non sono divisibili per 6, 8 o 15?
In questo caso dobbiamo calcolare: $2000 - (|M_6| + |M_8| + |M_{15}| - |M_{24}| - |M_{30}| - |M_{120}| + |M_{120}|) = 2000 - (333 + 250 + 133 - 83 - 66) = 1433$.

33. Calcolare $\binom{n+1}{3} - \binom{n-1}{3}$.

Abbiamo:
$$\frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)}{3!} - \frac{(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{3!} = \frac{(n-1)\cdot\left(n^2+n-n^2+5n-6\right)}{3!} =$$
$$= \frac{(n-1)\cdot\left(\cancel{n^2}+n-\cancel{n^2}+5n-6\right)}{3!} = \frac{6\cdot(n-1)^2}{6} = (n-1)^2$$

34. Calcolare $\binom{n+3}{4} - \binom{n+1}{4}$.

Si ha
$$\frac{(n+3)\cdot(n+2)\cdot(n+1)\cdot n}{4!} - \frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{4!} = \frac{(n+1)\cdot n\cdot\left(\cancel{n^2}+5n+6-\cancel{n^2}+3n-2\right)}{4!} =$$
$$= \frac{(n+1)\cdot n\cdot(8n+4)}{24} = \frac{4(n+1)\cdot n\cdot(2n+1)}{24} = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi.

1. Dimostrare che ciascuno degli insiemi $A_n = \{k \in \mathbb{N}: n! + 1 \le k \le n! + n\}$ non ha numeri primi.
$n! + k$, con $k \le n$ è divisibile per k, dato che n! contiene k come uno dei suoi fattori.

2. Di fattoriali che finiscono con 6 zeri, o con 7 zeri o con 8 zeri, ve ne sono 5. Possiamo dire che di fattoriali che finiscono con *n* zeri ve ne sono sempre esattamente 5? Giustificare la risposta.

Osserviamo che per avere uno zero finale dobbiamo avere un certo numero di 5 come fattori, dato che di fattori 2 ne abbiamo sempre di più rispetto ai 5. Con uno 0 abbiamo tutti i fattoriali da 5! a 9!, che sono appunto in numero di 5; lo stesso succede per quelli con 2 zeri, che vanno da 10! a 14!; 3 zeri, da 15! a 19!; con 4 zeri, da 20! a 24!. A questo punto però abbiamo 25! in cui il numero di 5 aumenta di 2 unità rispetto a prima, quindi non vi sono fattoriali che finiscono con 5 zeri, ma ve ne sono sempre 5 che finiscono con 6 zeri: da 25! a 29!. E questo continua sempre finché non arriviamo alla successiva potenza di 5, ossia a 125!. Quindi in generale per ogni n, di numeri il cui fattoriale ha n zeri ve ne sono 0 oppure 5.

3. **Con riferimento al precedente quesito, per quali valori di *n*, non esistono fattoriali che finiscono con *n* zeri?**

Per quanto detto prima sono i numeri del tipo $\frac{5^n-1}{4}-n+1, n\geq 2$, per esempio 5, 29, 30, 153, 154, 155, …

4. **Quante delle permutazioni della successione di cifre 123…*n*, non hanno punti fissi, cioè cifre che occupano la posizione uguale al loro valore, cioè 1 nella prima, 2 nella seconda, …?**

Dobbiamo applicare il principio di inclusione-esclusione, dato che prima consideriamo quelle con 1 solo punto fisso, che sono ovviamente $(n-1)!$, ma in questo modo abbiamo calcolato due volte quelle come per esempio quelle con 2 elementi fissi, tre volte quelle con tre fissi e così via. Quelle che hanno due elementi fissi sono ovviamente $(n-2)!$, ma dobbiamo moltiplicare per $\binom{n}{2}$, che sono i modi di scegliere i due elementi fissi fra gli n a disposizione, quindi continuando in questo modo la risposta sarà $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{n-k}(n-k)!$

5. **Provare che $\binom{2n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$. Suggerimento usare l'identità: $(1+x)^{2n}=(1+x)^n\cdot(1+x)^n$**

Usando il teorema sul binomio di Newton abbiamo che $(1+x)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}x^k, (1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$, tenendo conto che $(1+x)^{2n}=(1+x)^n\cdot(1+x)^n$ abbiamo perciò che $\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}x^k=\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right]^2$, quindi i due polinomi devono essere identici, in particolare devono avere uguali i termini di x^n. Per il primo polinomio esso è $\binom{2n}{n}$, per il secondo invece si ottiene moltiplicando i coefficienti di x^k e x^{n-k}, sono quindi: $\binom{n}{0}x^0\cdot\binom{n}{n}x^n+\binom{n}{1}x\cdot\binom{n}{n-1}x^{n-1}+\binom{n}{2}x^2\cdot\binom{n}{n-2}x^{n-2}+\ldots+\binom{n}{n}x^n\cdot\binom{n}{0}x^0$, e dato che $\binom{n}{h}=\binom{n}{n-h}$, avremo appunto: $\binom{n}{0}\cdot\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\cdot\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\cdot\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}\binom{n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$.

6. **Determinare in quanti diversi modi 2*n* oggetti possono essere accoppiati.**

Gli oggetti li pensiamo come associati in n coppie, possono essere sistemati in $(2n)!$ in ogni coppia, ma poiché la coppia $(a; b)$ è la stessa della coppia $(b; a)$ diventano $(2n)!/2$. Del resto non conta neanche l'ordine in cui scriviamole coppie, quindi dobbiamo dividere ancora per 2^n e poiché ogni coppia si sistema in $n!$ modi il totale sarà: $\frac{(2n)!}{(2!)^n\cdot n!}$

7. **Generalizzare il precedente, determinando in quanti diversi modi $m\cdot n$ oggetti possono essere divisi in gruppi da *m*.**

Basta ripetere il procedimento precedente con m oggetti invece che 2.

8. Dimostrare che a) $\sum_{k=0}^{h}\binom{n+k}{k}=\binom{n+h+1}{h}$**; b)** $\sum_{k=0}^{h}\binom{k}{n}=\binom{h+1}{n+1}$

a) Proviamo per induzione su h. $h = 0$: $\binom{n}{0}=\binom{n+1}{0}$, ok. Proviamo che da $\sum_{k=0}^{h}\binom{n+k}{k}=\binom{n+h+1}{h}$ segue $\sum_{k=0}^{h+1}\binom{n+k}{k}=\binom{n+h+2}{h+1}$. Infatti, usando l'ipotesi induttiva e la formula di Stiefel:

$$\sum_{k=0}^{h+1}\binom{n+k}{k}=\sum_{k=0}^{h}\binom{n+k}{k}+\binom{n+h+1}{h+1}=\binom{n+h+1}{h}+\binom{n+h+1}{h+1}=\binom{n+h+2}{h+1}.$$

b) Usiamo il precedente risultato. Osserviamo che $k>n\Rightarrow\binom{k}{n}=0$, quindi la sommatoria può essere considerata solo per gli addendi non nulli: $\sum_{k=n}^{h}\binom{k}{n}=\sum_{k=0}^{h-n}\binom{n+k}{n}=\binom{h+1}{n+1}$

9. Usando l'identità b) precedente determinare le seguenti somme: a) $\sum_{k=0}^{n}k$**; b)** $\sum_{k=0}^{n}k^2$ **.**

a) $\sum_{k=0}^{n}k=\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{1}=\binom{n+1}{1+1}=\frac{(n+1)\cdot n}{2}$;

b) $$\sum_{k=0}^{n}k^2=\sum_{k=0}^{n}\left[2\cdot\binom{k}{2}+\binom{k}{1}\right]=2\cdot\binom{n+1}{3}+\binom{n+1}{2}=\cancel{2}\cdot\frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)}{\cancel{6}^{3}}+\frac{(n+1)\cdot n}{2}=$$
$$=\frac{(n+1)\cdot n\cdot(2n-2+3)}{6}=\frac{(n+1)\cdot n\cdot(2n+1)}{6}$$

Temi assegnati agli esami di stato

I seguenti sono adattamenti dei temi assegnati in alcuni esami di stato degli anni scorsi, abbiamo variato solo la richiesta del problema, ma non i dati né lo spirito dei problemi

1. (Liceo scientifico 2002/03) Si consideri una data estrazione in una determinata Ruota del Lotto. Calcolare quante sono le possibili cinquine che contengono i numeri 1 e 90.

Dobbiamo scegliere 3 numeri da 88, dato che 2 devono essere 1 e 90, quindi sono: $\binom{88}{3}=109736$

2. (Liceo scientifico PNI 2002/2003) Quante partite di calcio della serie A vengono disputate complessivamente (andata e ritorno) nel campionato italiano a 18 squadre?

Sono $D_{18,2} = 18 \cdot 17 = 306$

3. (Liceo scientifico 2003/2004) Considerate gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$; quante sono le applicazioni (le funzioni) di A in B?

Un' applicazione a ogni elemento dell'insieme di esistenza associa al massimo un elemento del codominio. Quindi ognuno dei 3 elementi di B possiamo associare da 0 a 4 elementi di A, ossia $D'_{3,4} = 3^4 = 81$

4. (Liceo scientifico 2005/2006) Si dimostri che la somma dei coefficienti dello sviluppo di $(a + b)^n$ è uguale a 2^n per ogni $n\in\mathbb{N}$.

Lo abbiamo già provato nell'esercizio 47b.

5. (Liceo scientifico 2006/2007) Si risolva l'equazione $4\cdot\binom{n}{4}=15\cdot\binom{n-2}{3}$**.**

Abbiamo: $\cancel{4}\cdot\dfrac{n\cdot(n-1)\cdot\cancel{(n-2)\cdot(n-3)}}{\cancel{4}^{3}!}=\cancel{15}^{5}\cdot\dfrac{\cancel{(n-2)\cdot(n-3)}\cdot(n-4)}{\cancel{3}^{2}!}\Rightarrow\dfrac{n^2-n}{3\cdot 2!}=\dfrac{5n-20}{2!}\Rightarrow$

$$\Rightarrow n^2-n=15n-60\Rightarrow n^2-16n+60=0\Rightarrow n=6\vee n=10$$

6. (Liceo scientifico 2007/2008) Se $\binom{n}{1},\binom{n}{2},\binom{n}{3}$ con $n > 3$ sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n?

Se la progressione è aritmetica allora: $\binom{n}{1},\binom{n}{2},\binom{n}{3}\equiv\binom{n}{2}-k,\binom{n}{2},\binom{n}{2}+k$, quindi:

$$\begin{cases}\cancel{n}=\dfrac{\cancel{n}\cdot(n-1)}{2}-k\\ \dfrac{n\cdot\cancel{(n-1)\cdot(n-2)}}{6}=\dfrac{\cancel{n\cdot(n-1)}}{2}+k\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1=\dfrac{n-1}{2}-k\\ \dfrac{n-2}{3}=1+k\end{cases}\Rightarrow\cancel{1}+\dfrac{n-2}{3}=\dfrac{n-1}{2}+\cancel{1}\Rightarrow 2n-4=3n-3\Rightarrow n=7$$

7. (Liceo scientifico 2008/2009) Si dimostri l'identità $\binom{n}{k+1}=\binom{n}{k}\cdot\dfrac{n-k}{k+1};n,k\in\mathbb{N},n>k$.

Sviluppiamo entrambi i membri:

$$\binom{n}{k+1}=\frac{n-k}{k+1}\cdot\binom{n}{k}\Rightarrow\frac{n!}{(k+1)!\cdot(n-k-1)!}=\frac{n-k}{k+1}\cdot\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\Rightarrow\frac{n!}{(k+1)!\cdot(n-k-1)!}=\frac{n!}{k!\cdot(k+1)\cdot(n-k-1)!}$$

8. (Liceo scientifico 2010/2011) Il numero delle combinazioni di n oggetti a 4 a 4 è uguale al numero delle combinazioni degli stessi oggetti a 3 a 3. Si trovi n.

La risposta è immediata, se prendere alcuni oggetti a 4 a 4 è lo stesso che prenderli a 3 a 3, vuol dire che gli oggetti sono 3 + 4 = 7. Del resto sappiamo che $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

9. (Liceo scientifico 2011/2012) Siano dati nello spazio n punti P_1, P_2, P_3, …, P_n . Quanti sono i segmenti che li congiungono a due a due? Quanti i triangoli che hanno per vertici questi punti (supposto che nessuna terna sia allineata)? Quanti i tetraedri (supposto che nessuna quaterna sia complanare)?

Abbiamo a che fare con combinazioni semplici. Quindi: a) $\binom{n}{2}$; b) $\binom{n}{3}$; c) $\binom{n}{4}$

10. (Liceo scientifico 2012/2013) Con le cifre da 1 a 7 è possibile formare 7! = 5040 numeri corrispondenti alle permutazioni delle 7 cifre. Ad esempio i numeri 1234567 e 3546712 corrispondono a due di queste permutazioni. Se i 5040 numeri ottenuti dalle permutazioni si dispongono in ordine crescente qual è il numero che occupa la settima posizione e quale quello che occupa la 721-esima posizione?

I 7! numeri si dividono in 7 gruppi da 6! = 720 numeri a seconda che inizino per 1, 2, …, 7. All'interno di ognuno di questi gruppi vi sono poi 5! = 120 gruppi che hanno uguali le prime due cifre, 4! = 24 che hanno uguali le prime 3 cifre e così via. Nel primo caso basta tenere conto che 7 = 3! + 1, il che significa che le prime 3 cifre del numero sono 123 mentre le successive sono la prima permutazione ordinata delle rimanenti cifre, in cui la prima cifra è 5, quindi 5467. Infine il numero è 1235467. Poiché 721 = 720 + 1, vuol dire che è il primo numero che comincia per 2, cioè il più piccolo numero che ha il 2 come prima cifra, quindi 2134567.

11. (Liceo scientifico PNI 2012/2013) Come il precedente, ma la richiesta è: qual è il numero che occupa la 5036-esima posizione e quale quello che occupa la 1441-esima posizione?

Poiché 5036 = 5040 – 4, il primo numero è il quintultimo, quindi fa parte dei numeri che con 7654321, che è l'ultimo, hanno uguali le prime 4 cifre. Le ultime 3 cifre sono permutazioni di 123, e in ordine di grandezza sono le seconde, cioè sono 132. Quindi il numero è 7654132. Poiché 1441 = 720 · 2 + 1,

vuol dire che è il primo numero che comincia per 3, cioè il più piccolo numero che ha il 3 come prima cifra, quindi 3124567.

12. (Liceo scientifico 2013/2014) Nello sviluppo di $\left(2a^2-3b^3\right)^n$ compare il termine – 1080 a^4b^9. Qual è il valore di n?

Piuttosto che andare per tentativi, si osservi che $1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$, inoltre il termine generale dello sviluppo del binomio è $\binom{n}{k}\left(2a^2\right)^k \cdot \left(-3b^3\right)^{n-k}$, quindi il fattore 5 può venire fuori solo dal coefficiente binomiale e perciò deve essere $n = 5$. Se poi vogliamo stabilire quale degli addendi è abbiamo che ovviamente sarà $5 - k = 3$ e infatti: $\binom{5}{2}\left(2a^2\right)^2 \cdot \left(-3b^3\right)^3 = -1080a^4b^9$.

13. (Liceo scientifico 2013/14) Dei numeri 1,2,3.....6000, quanti non sono divisibili né per 2, né per 3 né per 5?

Applicando il procedimento di inclusione esclusione, eliminiamo dai 6000 numeri i multipli di 2, quelli di 3 e quelli di 5, poi gli sottraiamo quelli di 6, quelli di 10 e quelli di 15 (che avevamo contato due volte) e aggiungiamo i multipli di 30 (che avevamo tolto). Quindi, indicando con M_n i multipli di n minori o uguali a 6000 e con $|M_n|$ il loro numero, la risposta è data da: $6000 - (|M_2| + |M_3| + |M_5| - |M_6| - |M_{10}| - |M_{15}| + |M_{30}|)$ È ovvio che $|M_n|$ si ottiene come quoziente della divisione 6000/n. quindi: $6000 - (3000 + 2000 + 1200 - 1000 - 600 - 400 + 200) = 1600$.

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

1. (AHSME 1959) Un club ha x membri i quali sono suddivisi in 4 comitati in accordo con le seguenti regole: a) Ogni membro appartiene esattamente a due comitati. b) Ogni coppia di comitati ha un solo membro in comune. Relativamente a x quale delle seguenti affermazioni è vera? Giustificare la risposta. A) non può essere determinato B) ha un unico valore compreso tra 8 e 16 C) può assumere due distinti valori compresi tra 8 e 16 D) ha un unico valore compreso tra 4 e 8 E) può assumere due distinti valori compresi tra 4 e 8

La risposta corretta è la D. Intanto le intersezioni possibili sono $\binom{4}{2} = 6$, che contengono ciascuna un solo elemento. Diciamo x_1 l'elemento che sta in $A \cap B$, questo non può stare anche in $A \cap C$, quindi abbiamo x_2, allo stesso modo deve esserci x_3 in $A \cap D$. In $B \cap D$ ci sta x_4. A questo punto possiamo dire che ciascuno dei 4 comitati ha esattamente 3 membri e si ha: $A = \{x_1, x_2, x_3\}$, $B = \{x_1, x_4, x_5\}$, $C = \{x_2, x_4, x_6\}$, $D = \{x_3, x_5, x_6\}$.

2. (AHSME 1961) $695 = a_1 + a_2 \cdot 2! + a_3 \cdot 3! + \ldots + a_n \cdot n!$, $a_k \in \mathbb{N}$, $0 \le a_k \le k$, cioè è scritto in base fattoriale. Determinare a_4.

Teniamo conto che $6! = 720$, quindi $n \le 5$. Ora $1 + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + 4 \cdot 4! = 119$. Quindi $n = 5$, e dato che $695 - 119 = 576 = 4 \cdot 5! + 96$, vuol dire che $a_5 = 5$. Pertanto $a_1 + a_2 \cdot 2! + a_3 \cdot 3! + a_4 \cdot 4! = 95$. Dato che $1 + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! = 23$ e che $4 \cdot 4! = 96$, vuol dire che $a_4 = 3$, e funziona: $1 + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + 3 \cdot 4! = 95$.

3. (AHSME 1961) Espandiamo $\left(\frac{a}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{a^2}\right)^6$, quanto vale il terzo termine?

Tenuto conto dello sviluppo del binomio di Newton si ha: $\binom{6}{2}\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{x}}{a^2}\right)^2 = 15 \cdot \frac{a^4}{x^2} \cdot \frac{x}{a^4} = \frac{15}{x}$

4. (AHSME 1962) Espandiamo $\left(1-\frac{1}{a}\right)^6$, quanto vale la somma degli ultimi tre coefficienti?

Sempre per il binomio di Newton si ha: $\binom{6}{4}-\binom{6}{5}+\binom{6}{6}=15-6+1=10$

5. (AHSME 1963) Espandiamo $\left(a-1/\sqrt{a}\right)^7$, quanto vale il coefficiente di $a^{-1/2}$?

Il termine generico è $\binom{7}{k}a^{7-k}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^k=\binom{7}{k}(-1)^k a^{7-k-k/2}=\binom{7}{k}(-1)^k a^{7-3k/2}$, abbiamo perciò 7 – $3k/2 = -1/2 \Rightarrow 3k/2 = 9/2 \Rightarrow k = 3$. Quindi il coefficiente cercato è $\binom{7}{3}(-1)^3=-21$

6. (AHSME 1965) Quanto vale la somma di tutti i coefficienti numerici dell'espansione $(x^2 - 2xy + y^2)^7$?

Possiamo scrivere $(x-y)^{14}$ e in questo caso sappiamo che la somma dei coefficienti è 0

7. (AHSME 1965) Il numero 15! finisce con *k* zeri se espresso in base 12 e con *h* zeri in base 10. Quanto vale *k* + *h*?

In base 10 gli zeri finali sono determinati dai fattori 10, in pratica dai fattori 5, perciò $h = 3$ ($15! = 2^{16} \cdot 5^3 \cdot N$). Analogamente in base 12 gli zeri finali sono determinati dai fattori 12, in pratica dai fattori 3 (che sono meno dei fattori 4), perciò $k = 5$ ($15! = 4^8 \cdot 3^5 \cdot M$). Quindi $k + h = 8$

8. (AHSME 1978) In un torneo di tennis a due sono iscritti *n* uomini e 2*n* donne. Ogni giocatore gioca esattamente una partita con ogni altro. Sapendo che il rapporto tra il numero di partite vinte dalle donne rispetto a quelle vinte dagli uomini è 7/5, determinare il minimo valore di *n*.

Il numero totale dipartite è $3n \cdot (3n - 1)/2$. Le donne ne hanno vinte 7/12, dato che ne hanno vinte $7m$ e gli uomini $5m$. Quindi ne hanno vinte $21n \cdot (3n - 1)/24 = 7n \cdot (3n - 1)/8$, che deve essere un numero intero, quindi $n \cdot (3n - 1)$ deve essere un multiplo di 8. Se $n = 3$, funziona.

9. (AHSME 1985) Consideriamo la parola CONTEST, quanti dei suoi anagrammi hanno le prime due lettere formate da vocali?

Dobbiamo scegliere le prime due lettere fra le due uniche vocali e possiamo farlo in due soli modi: OE, EO, quindi permutiamo le rimanenti 5 lettere in 5!/2! = 60 modi. Totale: 2 · 60 = 120.

10. (AHSME 1988) Un bambino ha 96 costruzioni, per ciascuna costruzione distinguiamo il materiale di cui è fatta, la dimensione, il colore e la forma. Sappiamo che vi sono 2 materiali: plastica, legno; 3 misure: piccola, media, grande; 4 colori: blu, rosso, verde, giallo; 4 forme: cerchio, esagono, quadrato, triangolo. Quante delle costruzioni hanno esattamente due caratteristiche diverse dalla costruzione "plastica, media, rossa, circolare"?

Abbiamo $\binom{4}{2}=6$ modi di scegliere le due caratteristiche diverse. Abbiamo i seguenti casi, indicando le caratteristiche diverse. M_TM_i: 1 · 2 = 2; M_TC: 1 · 3 = 3; M_TF: 1 · 3 = 3; M_iC: 2 · 3 = 6; M_iF: 2 · 3 = 6; CF: 3 · 3 = 9. totale: 2 + 3 + 3 + 6 + 6 + 9 = 29.

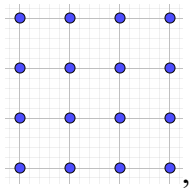
11. (AHSME 1989) Calcolare $\sum_{k=0}^{49}(-1)^k\cdot\binom{99}{2k}$. Sugg: considerare lo sviluppo di $(1 + i)^{99}$ e la forma goniometrica di un numero complesso

Seguendo il suggerimento abbiamo: $(i+i)^{99}=\sum_{k=0}^{99}\binom{99}{k}i^{99-k}$, d'altro canto sappiamo che le potenze di i hanno solo 4 possibili risultati che, a rotazione sono: 1, i, –1, –i possiamo scrivere:

$$\sum_{k=0}^{25}\left[\binom{99}{4k}+\binom{99}{4k+1}i-\binom{99}{4k+2}-\binom{99}{4k+3}i\right]=\sum_{k=0}^{25}\left\{\left[\binom{99}{4k}-\binom{99}{4k+2}\right]+\left[\binom{99}{4k+1}-\binom{99}{4k+3}\right]i\right\},$$

quello che a noi interessa è solo la parte reale. D'altro canto $i+i=\sqrt{2}\left[cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+sin\left(\frac{\pi}{4}\right)i\right]$ e per la formula di De Moivre: $(i+i)^{99}=\left(\sqrt{2}\right)^{99}\left[cos\left(\frac{99\pi}{4}\right)+sin\left(\frac{99\pi}{4}\right)i\right]$, la cui parte reale è $2^{99/2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-2^{49}$.

12. (AHSME 1993) Nel piano cartesiano ortogonale consideriamo tutti i triangoli i cui vertici hanno entrambe le coordinate intere e comprese tra 1 e 4. Quanti sono tali triangoli? Sugg: eliminare da tutte le possibili terne quelle che giacciono sulla stessa retta.



I punti che possono essere vertici di un triangolo sono in totale i 16 mostrati in figura, possiamo sceglierli quindi in $\binom{16}{3}=560$ modi diversi. Dobbiamo eliminare quelli allineati. Possono stare in orizzontale e ci sono $4\cdot\binom{4}{3}=16$ e altrettanti se i punti stanno in verticale. Poi ci sono quelli sulle diagonali che sono altri $4\cdot\binom{3}{3}+2\cdot\binom{4}{3}=12$. Quindi in totale abbiamo 560 – 2 · 16 – 12 = 516 triangoli.

13. (AHSME 1995) Quanti numeri di 4 cifre, in base 10, N = *abcd*, soddisfano tutte le seguenti condizioni? i) 4000 ≤ N < 6000; ii) N è multiplo di 5; iii) 3 ≤ *b* < *c* ≤ 6. A) 10 B) 18 C) 24 D) 36 E) 48
Verificano la condizioni i) 2001 numeri; verificano anche la ii) in 401 (da 5 · 800 a 5 · 1200). I multipli di 5 finiscono per 0 o per 5, quindi verificano la iii) i numeri del tipo 4*bc*0, 4*bc*5, 5*bc*0, 5*bc*5, con *b* e *c* compresi tra 3 e 6 e *b* < *c*, quindi sono: 4 · 6 = 24, infatti *b* deve essere 3 e in questo caso per *c* ci sono 3 scelte, se *b* = 4, *c* ha 2 scelte e se *b* = 5, *c* = 6. Risposta C.

14. (AHSME 1995) Per quanti insiemi di 3 numeri naturali {*a*, *b*, *c*}, si ha: *a* · *b* · *c* = 2310?
Si ha: 2310 = 2 · 3 · 5 · 7 · 11. I tre fattori si possono ottenere moltiplicando fra di loro 1, 1 e 3 fattori (esempio: 2 · 3 · 385), e questo si fa in $\binom{5}{2}=10$ modi; oppure moltiplicando 1, 2 e 2 fattori e si fa in $\binom{5}{2}\cdot\binom{3}{2}=30$ modi. Non vi sono altre possibilità. Totale 40

15. (AHSME 1996) Quanti segmenti hanno entrambi gli estremi sui vertici di un dato cubo?
I vertici sono 8. Ne scegliamo uno, che può unirsi con uno qualsiasi dei rimanenti 7. Quindi le possibilità sono $\binom{8}{2}=28$

16. (AHSME 1997) Un numero crescente, come 34689, è un intero positivo le cui cifre sono disposte in ordine crescente. Ci sono $\binom{9}{5}$ = 126 numeri crescenti di 5 cifre. Ordinandoli dal più piccolo al

più grande, il 97° numero non contiene quale delle seguenti cifre? A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

I numeri del tipo 1xyzt sono i primi $\binom{8}{4}=70$, i successivi 70 sono del tipo 2xyzt. I numeri del tipo 23yzt sono $\binom{6}{3}=20$, quindi vanno dal 71° al 90° numero. I numeri del tipo 24yzt sono sempre 20 e vanno dal 91° al 110° numero. 245zt sono $\binom{4}{2}=6$ e vanno dal 91° al 96° numero. Quindi il 97° numero è 24678 che delle cifre dette non contiene il 5, risposta B

17. (A1998) In una scatola ci sono alcune palle rosse ed alcune verdi. Sappiamo che dobbiamo estrarre almeno 7 palle per avere la sicurezza di estrarre, senza guardare, una palla rossa, mentre ne dobbiamo estrarre almeno 13 per avere la sicurezza di estrarre due palle di colori diversi. Quante palle rosse e quante verdi ci sono nella scatola?

Usando il principio dei cassetti abbiamo 7 – 1 = 6 palle rosse e 13 – 1 = 12 palle verdi

18. (AHSME 1998) Un numero telefonico di 7 cifre $d_1d_2d_3d_4d_5d_6d_7$ lo diciamo memorabile se la sequenza $d_1d_2d_3$ è esattamente la stessa di una almeno delle due sequenze $d_4d_5d_6$ o $d_5d_6d_7$. Supposto che ogni cifra possa assumere i valori interi da 0 a 9, determinare il numero di diversi numeri telefonici memorabili.

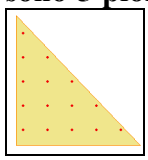
La sequenza $d_1d_2d_3$ si sceglie in $D'_{10,3} = 10^3 = 1000$ modi diversi. Sequenze che hanno uguale la sequenza $d_4d_5d_6$ ve ne sono 10 (i valori che può assumere d_7), e altre 10 che hanno uguale la sequenza $d_5d_6d_7$. Quindi abbiamo 1000 · 20 = 20000 sequenze, però in questo modo abbiamo contato due volte le sequenze che hanno $d_4d_5d_6$ e $d_5d_6d_7$ uguali, che sono altre 10. Quindi il totale è 19990.

19. (AHSME 1998) Calcolare $\frac{1}{log_2(100!)}+\frac{1}{log_3(100!)}+\ldots+\frac{1}{log_{100}(100!)}$.

Portiamo tutto alla base 2:

$$\frac{1}{log_2(100!)}+\frac{log_2(3)}{log_2(100!)}+\ldots+\frac{log_2(100)}{log_2(100!)}=\frac{1+log_2(3)+\ldots+log_2(100)}{log_2(100!)}=$$

$$=\frac{log_2(2)+log_2(3)+\ldots+log_2(100)}{log_2(100!)}=\frac{log_2(100!)}{log_2(100!)}=1$$

20. (AMC 2000) Ci sono 5 pioli gialli, 4 rossi, 3 verdi, 2 blu e 1 arancione su una tavola triangolare, come in figura.  **In quanti modi possiamo sistemare i pioli, in modi che nessuna riga (orizzontale) o colonna (verticale) contenga due pioli dello stesso colore?**

Per evitare ripetizioni i 5 pioli gialli devono stare sull'ipotenusa e si possono mettere in 5! diversi modi. Con lo stesso ragionamento i pioli rossi stanno nell'ipotenusa da 4, e lo fanno in 4! modi. Lo stesso per gli altri, quindi la risposta è 5!· 4!· 3! · 2! · 1!

21. (AMC 2000) 8 triangoli equilateri isometrici, ciascuno di un diverso colore vengono usati per costruire un ottaedro regolare. In quanti modi diversi possiamo costruire l'ottaedro? (Due ottaedri colorati sono diversi se uno di essi non può essere ruotato in modo da essere uguale all'altro.)

L'ottaedro ha 8 facce triangolari che formano 4 coppie di facce parallele. Scegliamo un colore per la faccia inferiore. Ci sono 7 scelte per il colore sulla faccia superiore. Tre delle facce rimanenti hanno uno spigolo in comune con la faccia inferiore. E ci sono $\binom{6}{3}=20$ modi di scegliere i colori e 2 modi per sistemarli sulle facce (senso orario e antiorario).Infine vi sono 3! = 6 modi di sistemare gli ultimi 3 colori. Perciò la risposta è 7 · 20 · 2 · 6 = 1680.

22. (AMC 2001) Dato l'ennagono regolare di vertici $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9$, quanti distinti triangoli equilateri possiamo costruire scegliendo almeno due dei 9 vertici?

Possiamo scegliere due vertici fra i 9 in $\binom{9}{2}=36$, solo che in questo modo i triangoli $A_1A_4A_7$, $A_2A_5A_8$, e $A_3A_6A_9$ [vengono contati ciascuno 3 volte, quindi dobbiamo togliere 6, ottenendo 66.

23. (AMC 2001) Un ragno ha un calzino e una scarpa per ciascuna delle sue otto zampe. In quanti diversi ordini il ragno può mettere calzini e scarpe supposto che su ogni zampa il calzino deve sempre essere messo prima della scarpa?

Abbiamo 16! modi di sistemare scarpa e calzino. Metà di queste hanno il primo calzino prima della prima scarpa. Allo stesso modo 1/4 di queste hanno il secondo calzino prima della seconda scarpa e così via, alla fine $16!/2^8$ hanno anche l'ottavo calzino prima dell'ottava scarpa.

24. (K2001) Venti caramelle sono distribuite tra alcuni kangourou in modo che ogni kangourou riceva almeno una caramella e che mai due kangourou abbiano un numero uguale di caramelle. Quanti kangourou al massimo sono presenti alla distribuzione delle caramelle?

Se ciascuno ricevesse una caramella in più di quello che la precede, in modo che il primo ne prenda uno avremmo che 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 e non va bene. Allora eliminiamo il sesto e distribuiamo le 5 caramelle eccedenti agli altri, avendo così 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20. Risposta 5.

25. (B2003) Nel frigorifero dei gelati ci sono 60 ghiaccioli di 5 gusti diversi, una dozzina per ogni gusto. Qual è il numero minimo di ghiaccioli che si devono prendere (senza guardare …) per essere sicuri di averne presi due dello stesso gusto?

Contano solo il numero di gusti, non quello dei gelati, per il principio dei cassetti dobbiamo prenderne uno in più, quindi 5 + 1 = 6.

26. (A2004) 5 persone vogliono giocare a bridge, un gioco in cui una coppia gioca contro un'altra. Quante partite devono fare affinché ogni possibile coppia giochi contro ciascuna delle altre?

Le coppie possibili sono: $\binom{5}{2}=10$. Scegliamone una, per esempio a_1a_2, questa deve giocare con le rimanenti coppie che sono $\binom{3}{2}=3$. Quindi le possibili partite saranno 10 · 3 /2 = 15. Dividiamo per 2 perché la partita a_1a_2 contro a_3a_4 è la stessa di a_3a_4 contro a_1a_2.

27. (HSMC 2004) Determinare il valore di *n* per cui si ha: $n!=\sum_{k=1}^{15}k$.

Dobbiamo risolvere l'equazione $n!=\frac{15\cdot 16}{2}\Rightarrow n!=120$, facilmente si risolve: $n = 5$.

28. (HSMC 2004) Mary digita un numero di 6 cifre ma la tastiera non funziona bene e non scrive i due 1, così il numero scritto è 2002. Quanti diversi numeri di 6 cifre ha potuto digitare?

Dobbiamo scegliere in quale ordine abbiamo digitato i due 1, che equivale a scegliere 2 oggetti da 6: $\binom{6}{2}=15$

29. (C2005) In un sacchetto ci sono 8 palline gialle, 7 rosse e 5 nere. Senza guardare, Igor toglie N palline dal sacchetto ed è sicuro che comunque ha preso le palline nel sacchetto, sono rimaste almeno 4 palline di un colore e 3 palline di un altro colore. Qual è il massimo valore che può avere N?

Non ha la sicurezza che dichiara se lascia massimo 2 palline per due colori, che può accadere se prende 8 palline (5 rosse e 3 nere). Se invece ne prende 7 allora in ogni caso ottiene quel che vuole.

30. (A2006) Quanti numeri interi di 3 cifre hanno per somma delle cifre un numero dispari?
Affinché la somma sia dispari le cifre devono essere tutte dispari ($5^3 = 125$ casi), oppure 2 pari e 1 dispari ($5^3 + 2 \cdot 4 \cdot 5^2 = 375$ casi). Totale 450. Nel caso due pari e 1 dispari abbiamo distinto la prima cifra dispari dalla prima cifra pari, in questo caso 0 non può essere prima cifra.

31. (HSMC 2006) Qual è il più piccolo intero positivo *n* per cui *n*! finisce con 4 zeri?
Per quanto già detto $n!$ deve contenere 4 fattori 5, il che succede la prima volta per $n = 20$

32. (HSMC2006) Una successione è definita da $a_n = sin\left(\frac{n! \cdot \pi}{2006}\right)$, qual è il massimo valore di *n* per cui si hanno valori non nulli.
Noi sappiamo che $sin(2k\pi) = 0$, quindi $n!$ deve contenere almeno un fattore diverso da quelli di 2006. Dato che $2006 = 2 \cdot 17 \cdot 59$, ciò succede al massimo per $n = 58$.

33. (Rice 2006) Ordinare in forma crescente i numeri $\left(10^{100}\right)^{10}, 10^{\left(10^{10}\right)}, 10^6!, (100!)^{10}$.
Abbiamo $\left(10^{100}\right)^{10} = 10^{1000}$ è certamente il più piccolo. Infatti $10^{10} > 1000$; $10^6!$ contiene 10^6 fattori, e molti più di 1000 sono maggiori di 10. Analogamente $(100!)^{10}$ ha 1000 fattori 9 solo dei quali minori di 10, ma la differenza è ampiamente compensata dagli altri fattori. Questo ragionamento ci convince che il secondo in ordine di grandezza è proprio $(100!)^{10}$ che è minore di $10^6!$ Per lo stesso motivo già detto nei confronti di 10^{1000}. Infine si vede che il più grande, con ragionamenti analoghi, è $10^{\left(10^{10}\right)}$

34. (A2007) Heidi lancia tre dadi (dello stesso colore, indistinguibili) e ne somma i punteggi. Se registra solo i punteggi pari e maggiori di 8, quanti diversi casi può registrare?
I punteggi del lancio di 3 dadi arrivano fino a 18. Dobbiamo quindi considerare le somme 8 (5 casi: 1 + 1 + 6, 1 + 2 + 5, 1 + 3 + 4, 2 + 2 + 4, 2 + 3 + 3), 10 (5 casi: 1 + 3 + 6, 1 + 4 + 5, 2 + 2 + 6, 2 + 3 + 5, 2 + 4 + 4, 3 + 3 + 4), 12 (4 casi: 1 + 5 + 6, 2 + 4 + 6, 2 + 5 + 5, 3 + 4 + 5), 14 (4 casi: 2 + 6 + 6, 3 + 5 + 6, 4 + 4 + 6, 4 + 5 + 5), 16 (2 casi: 4 + 6 + 6, 5 + 5 + 6), 18 (1 caso: 6 + 6 + 6) Totale 21

35. (Rice 2007) Quante parole di 5 lettere si possono formare con le lettere S, I e T, se per parola si intende una qualsiasi sequenza di lettere che non contiene tre consonanti consecutive?
I casi possibili (indicando con C le consonanti e con V la vocale) sono: CCCVC, CVCCC, CCCCV, V CCCC (16 parole ciascuna); CCCVV, VCCCV, VVCCC (8 casi ciascuno); CCCCC (32 parole). Così abbiamo 120 non-parole. In totale le possibilità sono $3^5 = 243$, pertanto abbiamo $243 - 120 = 123$ parole.

36. (Rice 2007) Daniel conta il numero di modi di formare un numero naturale usando le cifre 1, 2, 2, 3 e 4 (ogni cifra al più una volta). Edward conta il numero di modi per formare con le lettere della parola "BANANAS" una parola, anche priva di senso, di 6 lettere. Fernando conta il numero di modi per distribuire nove caramelle identiche a 3 bambini. Determinare la somma dei numeri così ottenuti.
Per Daniel. Ci sono 5!/2! Interi usando tutte le cifre. Trascurandone una, in 3 casi (come 1,2,2,3) ci sono 4!/2! interi e tralasciando un 2, ce ne sono 4!. Trascurando il 2 ci sono 3! Interi in 4 casi (come 1,2,3) and 3!/2! in tre casi (come 1,2,2). Trascurando il 3, ci sono 2! Interi in 4 casi (come 1,2) and anche il 22. Infine ci sono 4 numeri a una cifra, la cui somma è 170. Per Edward, ci sono 6!/(2!3!) parole se tralascia B o S, 6!/3! Trascurando una N, e 6!/(2!2!) se tralascia una A, per un torale di 420. Fernando puà distribuire caramelle mettendo le nove in fila e tracciando due righe per dividerle in 3 gruppi. CI sono $\binom{10}{2} = 45$ modi di farlo senza tracciare le righe nello stesso posto e altri 10 con due righe nello stesso posto. Il totale richiesto è quindi: 170 + 420 + 55 = 645.

37. (Rice 2008) Quanto fa la somma dei fattori primi di 20!?
Si ha: 2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 = 77.

38. (Rice 2008) Sia N il numero di anagrammi della parola di 34 lettere SUPERCALIFRAGILISTICEXPIALIDOCIOUS. Quanti divisori ha N?
La parola contiene 34 lettere. La I si ripete 7 volte, S, C, A, L, 3 volte, U, P, E, R, O, 2 volte, e le rimanenti una volta.. Così $N = 34!/((2!)^5(3!)^4 7!) = 2^{19} \cdot 3^9 \cdot 5^6 \cdot 7^3 \cdot 11^3 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31$. Sappiamo che il numero dei divisori è il prodotto degli esponenti aumentati di 1, ossia: $(19 + 1) \cdot (9 + 1) \cdot (6 + 1) \cdot (3 + 1) \cdot (3 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 3225600$.

39. (Rice 2008) Un'espressione è creata scrivendo a caso 5 simboli scelti fra le 9 cifre non nulle e i quattro simboli delle operazioni aritmetiche elementari. Quante espressioni matematicamente valide possono così ottenersi, senza usare la moltiplicazione implicita?
Il simbolo * indica le 4 operazioni. L'espressione deve essere del tipo (n) * m o n * (m), ottenendo $2 \cdot 4 \cdot 9^2$ possibilità. Se usiamo due operazioni l'espressione è del tipo l * m * n, con $9^3 \cdot 4^2$ possibilità. Se usiamo un'operazione, la forma è: k * lmn, kl * mn, o klm * n, con $3 \cdot 9^4 \cdot 4$ possibilità. Infine abbiamo 9^5 numeri a 5 cifre. La somma è150093.

Questions in English

40. (MT1994) In how many ways can two dice be rolled to yield a sum divisible by 3?
Le somme accettabili sono 3, 6, 9, 12. Le otteniamo in 1 + 3 + 2 + 1 = 7 modi, considerando indistinguibili i dadi e quindi 1 + 2 e 2 +1 vengono contati una sola volta.

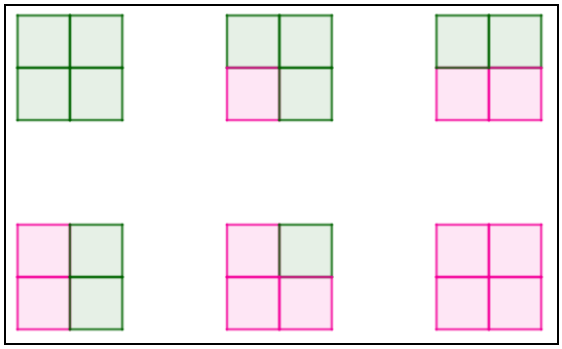
41. (MT1996) In a special football game, a touchdown is worth 7 points and a field goal is worth 5 points. No other types of scoring is possible. In how many different ways can a team score 199 points?
Dobbiamo determinare tutte le soluzioni intere dell'equazione $7x + 5y = 199$. Possiamo andare per tentativi. Abbiamo intanto $0 \le x \le 28$, $0 \le y \le 40$. I multipli di 5 finiscono per 0 o 5, quindi gli unici valori accettabili per x sono: $2 + 5h$, con $0 \le h \le 5$, quindi in totale 6 soluzioni.

42. (MT1996) Maria opened her bank to find only dimes and quarters[1], in the ratio of two dimes to five quarters. The total value of the money is between \$ 3.00 to \$ 10.00. How many totals are possible for the amount of money in her bank?
Dire che il rapporto è di 2 dimes ogni 5 quarters, equivale a dire che possiamo formare gruppi di 7 monete dal valore totale di 2 · \$ 0.10 + 5 · \$ 0.25 = \$ 1.45. Quindi deve essere $300 \le 145x \le 1000 \Rightarrow 3 \le y \le 6$. Le soluzioni intere sono ovviamente 6 – 3 + 1 = 4.

43. (MT1996) For how many three-digit whole[2] numbers does the sum of the digits equal 25?
Dato che 25 – 9 = 16, una soluzione è data dalle permutazioni di 889 e 799, che sono 3 + 3 = 6. Non ci sono altre soluzioni poiché 25 – 8 = 17 fornisce di nuovo la soluzione 889, così come 25 – 7 = 18 le permutazioni di 799. E poi non vi sono altre possibilità perché 25 – 6 = 19 che non può essere somma di due cifre.

44. (MT1996) A 2 by 2 square is divided into four 1 by 1 squares. Each small square is to be painted either green or red. In how many different ways can the painting be accomplished so that no green square shares its top or right side with any red square? Use as few as zero or as many as four small green squares.

[1] Decini e quartini, cioè 10 e 25 cents
[2] Intero

Abbiamo i 6 casi mostrati in figura 

45. (HSMC 2000) The final race in a swimming event involves 8 swimmers. Three of the swimmers are from one country and the other five are from different countries. Each is to be given a lane assignment between 1 and 8 for the race. Aside from the obvious rule that no two swimmers can be assigned to the same lane, there are two other restrictions. The first is that no two swimmers from the same country can be in adjacent lanes. The second is that the two outside lanes cannot be occupied by swimmers from the same country. With these rules, how many different lane assignments are possible for this race?

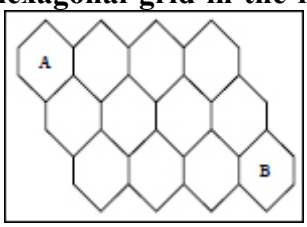
Indichiamo con C i nuotatori di una stessa nazione, con A quelli delle altre. Le configurazioni accettabili sono: CACACAAA, CACAACAA, CACAAACA, CAACACAA, CAACAACA, CAAACACA, ACACACAA, ACACAACA, ACACAAAC, ACAACACA, ACAACAAC, ACAAACAC, AACACACA, AACACAAC, AACAACAC, AAACACAC. Un totale di 16 casi che accadono uno stesso numero di volte, ossia 3! · 5! (il modo di scambiare fra loro i C e gli A). Quindi 16 · 3! · 5! = 11520

46. (HSMC 2001) Hasse wants to buy four donuts from a dealer with an ample supply of three types of donuts: glazed, chocolate and powdered. How many different selections are possible?

Il problema equivale a risolvere l'equazione $g + c + p = 4$, con soluzioni intere. Quindi dobbiamo calcolare le combinazioni con ripetizione di 3 oggetti, ognuno dei quali può ripetersi fino a 4 volte: $\binom{4+3-1}{4} = \binom{6}{4} = 15$

47. (HSMC 2001) A palindrome is a number whose value is unchanged when its digits are reversed. How many palindromes are there which are greater than 10 and less than 800?

I palindromi accettabili sono del tipo aa (sono in 9), aba (sono in 7 · 10 = 70), per un totale di 79.

48. (HSMC 2002) In the hexagonal grid in the figure, you may step from your current hexagon to any adjacent hexagon. 

How many 5-step paths are there from A to B?

Per andare da A a B dobbiamo fare in ogni caso 3 passi a destra e 2 verso il basso, quindi dobbiamo considerare le permutazioni della "parola" DDDBB, che sono 5!/(3! · 2!) = 10.

49. (HSMC 2002) The number $\frac{1001!-998!}{999!}$ can be written in the form *a/b*, where *a* and *b* are positive integers that are relatively prime. What is the units digit of *a*?

Abbiamo: $\frac{1001!-998!}{999!} = \frac{\cancel{998!}\cdot(999\cdot1000\cdot1001-1)}{\cancel{998!}\cdot999} = \frac{999\cdot1000\cdot1001-1}{999}$, ovviamente la frazione è ridotta ai minimi termini. Il numeratore ha come cifra delle unità 9, dato che il sottraendo ovviamente finisce per 0.

50. (HSMC 2004) The 120 permutations of AHSME are arranged in dictionary order, as if each

were an ordinary five-letter word. Find the 85-th word in the list.

Essendo le lettere tutte diverse le permutazioni in totale sono 5! = 120. Queste le suddividiamo in gruppi di 4! = 24 gruppi a seconda dell'iniziale. La 86-esima parola si trova nel gruppo che inizia per M. Le 24 lettere di questo gruppo, che inizia con la 73-esima parola, le dividiamo in gruppi di 3! = 6 parole, ordinati in base alla seconda lettera. Andiamo nel gruppo che ha per seconda lettera la H, che contiene le parole dalla 85ª in poi, che è MHAES.

51. (HSMC 2007) Each car of a five-car train must be painted a solid colour. The only colour choices are red, blue and yellow. If each of these colours must be used for at least one car, in how many ways can this train be painted?

Tre carrozze devono essere colorate con i 3 colori, le rimanenti due possiamo colorarle o con uno dei tre colori usati o con 2 dei tre. Quindi abbiamo $3 \cdot 5!/3! + 3 \cdot 5!/(2! \cdot 2!) = 150$. Infatti dobbiamo considerare le permutazioni delle "parole" AAABC, AABBC e di quelle che si ottengono sostituendo i colori ripetuti con uno degli altri due simboli.

52. (HSMC 2007) Determine the remainder when $(0! + 1! + ... + 64!)^2$ is divided by 5.

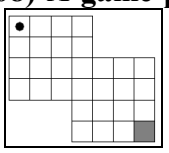
Il resto dipende solo dall'ultima cifra che si ottiene come somma delle ultime cifre solo dei primi 5 addendi, dato che a partire da 5! Tutti i numeri finiscono per 0. Tale cifra è perciò la cifra delle unità di $(1 + 1 + 2 + 6 + 24) = (34)^2 = 1156$, ossia 6 e 6 = 5 + 1, quindi la risposta è 1.

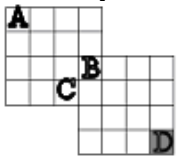
53. (HSMC 2008) Two subsets of the set S = {*a*, *b*, *c*, *d*, *e*} are to be chosen so that their union is S and their intersection contains exactly two elements. In how many ways can this be done, assuming that the order in which the subsets are chosen is irrelevant?

Ci sono $\binom{5}{2} = 10$ modi di scegliere gli elementi comuni a due sottoinsiemi. Poi ci sono $2^3 = 8$ modi di assegnare i rimanenti 3 elementi ad A o B, quindi ci sono 80 coppie ordinate (A,B) che soddisfano i requisiti. Ma ovviamente (A,B) e (B,A) rappresentano gli stessi sottoinsiemi {A,B} e quindi la risposta è 80/2 = 40

54. (HSMC 2008) So that ZIP codes may be machine readable, the Postal Service encodes them as a group of five bars, some tall, some short, in groups of five. In how many distinct ways can two tall and three short bars be arranged?

Dobbiamo scegliere 2 oggetti da 5: $\binom{5}{2} = 10$.

55. (SC 2008) A game piece is placed on the upper left square of a game board with 30 squares as shown.  **By a sequence of 11 moves, each from a given square to an adjoining square either to the right or down, the piece is to go from the upper left square to the bottom right shaded square. How many 11-move sequences are possible?**

Consideriamo la seguente figura 

in cui abbiamo evidenziato 4 quadratini, dato che per andare da A a B in 11 mosse dobbiamo passare o per B o per C. Abbiamo $5!/(3! \cdot 2!) = 10$ percorsi per andare da A a B e $6!/(3! \cdot 3!) = 20$ percorsi per andare da B a D, quindi $10 \cdot 20 = 200$ per andare da A a D passando per B. Passando invece per C i percorsi sono: $5!/(2! \cdot 3!) \cdot 5!/(3! \cdot 2!) = 100$. Totale 300. Osserviamo che arrivati a C siamo costretti ad andare nella casella adiacente destra e quindi i percorsi si contano a partire da questa casella e sono lunghi quindi 5 caselle.

56. (Rice 2009) In the game Pokeymawn, players pick a team of 6 different Pokeymawn creatures.

There are 25 distinct Pokeymawn creatures, and each one belongs to exactly one of four categories: 7 Pokeymawn are plant-type, 6 Pokeymawn are bug-type, 4 Pokeymawn are rock-type, and 8 Pokeymawn are bovine-type. However, some Pokeymawn do not get along with each other when placed on the same team: bug-type Pokeymawn will eat plant-type Pokeymawn, plant-type Pokeymawn will eat rock-type Pokeymawn, and bovine-type Pokeymawn will eat anything except other Bovines. How many ways are there to form a team of 6 different Pokeymawn such that none of the Pokeymawn on the team want to eat any of the other Pokeymawn?

Possiamo prendere le carte tutte dello stesso tipo in $\binom{7}{6}+\binom{6}{6}+\binom{8}{6}=36$ modi. Oppure possiamo prenderne alcune di tipo rock e altre di tipo bug in $\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{4}+\binom{6}{3}\cdot\binom{4}{3}+\binom{6}{4}\cdot\binom{4}{2}+\binom{6}{5}\cdot\binom{4}{1}=209$ modi. Non vi sono altre possibilità. Totale 245.

57. (Rice 2009) Four cards are drawn from a standard deck (52 cards) with suits indistinguishable (for example, A♠ is the same as A♣). How many distinct hands can one obtain?

Se le carte hanno tutte lo stesso valore ci sono 13 casi. Se le prendiamo di due tipi A e B abbiamo $3\cdot\binom{13}{2}=234$ possibilità (a seconda che prendiamo le carte nelle proporzioni 3-1, 2-2, 1-3). Se scegliamo le carte fra tre tipi abbiamo $3\cdot\binom{13}{3}=858$ possibilità. E infine se le prendiamo di 4 tipi diversi sono $\binom{13}{4}=715$. In totale abbiamo 1820 possibilità.

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

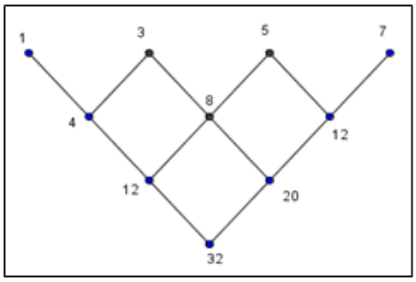
1. (Accademia militare) Sia n un numero naturale e si indichi con il simbolo *n*! il prodotto dei numeri naturali minori o al più uguali a *n*. Quale delle relazioni elencate è vera per ogni *n*?
A) $2(n!) = (2n)!$ B) $n! = (n \cdot (n-1))!$ C) $n! = n \cdot (n+1)$ D) $n! = (n^2 - n) \cdot (n-2)!$
La D è la risposta corretta perché possiamo scrivere: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!$ Per verificare che le altre non funzionano basta sostituire valori a caso. Per esempio A) $2(4!) = 48 < (2 \cdot 4)!$ B) $5! < (5 \cdot 4)! = 20!$ C) $3! < 3 \cdot 4$

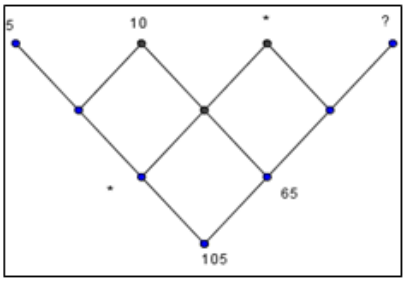
2. (Odontoiatria 1997) Disponendo di 7 lettere dell'alfabeto, tutte diverse, il numero di parole con 4 lettere che si possono formare potendo ripetere 2 o 3 o 4 volte la stessa lettera è:
A) 4^4 B) 4^7 C) 7^4 D) 7^7 E) 49
Abbiamo a che fare con disposizioni di 7 lettere che possono ripetersi fino a 4 volte, quindi la risposta è C

3. (Ingegneria 1999) Una scatola contiene 10 cubi. Ogni faccia di ciascun cubo è colorata di verde oppure di bianco oppure di rosso. In totale, 6 cubi hanno almeno una faccia verde, 7 hanno almeno una faccia bianca e 9 hanno almeno una faccia rossa; inoltre, nessuno dei 10 cubi ha tutte le facce dello stesso colore. Quanti cubi nella scatola hanno facce di tutti e tre i colori?
A) 8 B) 9 C) 2 D) 0 E) 1
Poiché 6 + 7 = 13 vuol dire che almeno 3 cubi hanno almeno una faccia verde e almeno una bianca. Analogamente, dato che 6 + 9 = 15, 5 cubi hanno almeno una faccia verde e una rossa. Infine, almeno 6 cubi hanno almeno una faccia bianca e almeno una rossa. Ora 3 + 5 < 10 (cubi con almeno una faccia VB e cubi VR), 3 + 6 < 10 (cubi con almeno una faccia VB e cubi BR) e 5 + 6 = 11 > 10 (cubi con almeno una faccia VR e cubi BR). Ciò significa che almeno un cubo ha una faccia di ognuno dei tre colori. Risposta E

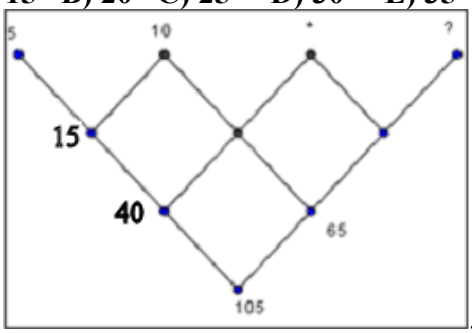
4. (Architettura 2007) Gianni ha trovato un vecchio giornale enigmistico che riportava uno schema

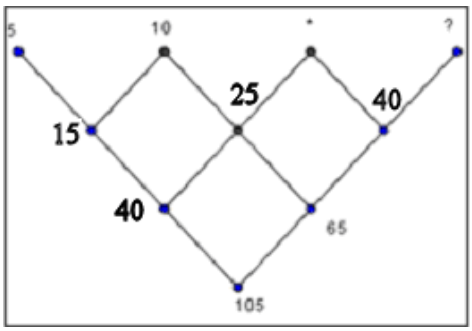
triangolare in cui ogni numero, dalla seconda riga in giù, era uguale alla somma dei due numeri situati sopra al numero stesso, esattamente come succede nella prima figura. Lo schema di Gianni era in gran parte illeggibile, si sono potuti riconoscere solo i 4 numeri indicati nella seconda figura.

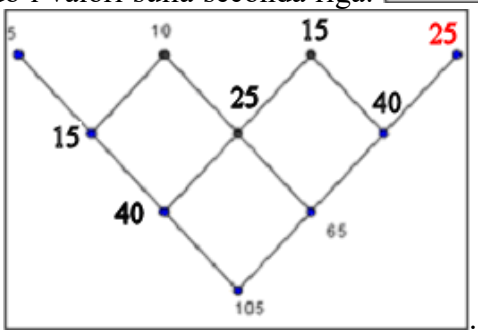




Sapreste aiutare Gianni a ricostruire lo schema originario? Indicate in particolare quale numero deve stare nella casella indicata con " ? ". **A) 15 B) 20 C) 25 D) 30 E) 35**

Cominciamo a completare la diagonale di sinistra: 

. Continuiamo sistemando i valori sulla seconda riga: 

E infine otteniamo quanto richiesto: 

. Risposta C

5. **(Economia Varie Università) In un vaso ci sono 60 palline di tre diversi colori: rosse, gialle e blu. Qual è il numero minimo di palline che occorre estrarre per essere sicuri di averne 3 di uno stesso colore? A) 6 B) 7 C) 9 D) 12**

Contano solo i color e non le quantità di palline, quindi ne dobbiamo prendere almeno $2 \cdot 3 + 1 = 7$. Risposta B

6. **(Facoltà scientifiche, Roma La Sapienza) Il codice per aprire un lucchetto è costituito da una sequenza di quattro cifre (da 0 a 9). Ho dimenticato il codice, ma mi ricordo che le cifre sono tutte distinte e che tra le prime tre cifre ci sono sicuramente i numeri 6 e 9. Quante sequenze di quattro numeri dovrei provare per essere certo di aprire il lucchetto? A) 100 B) 118 C) 336 D) 600**

Per le prime 3 cifre ci sono $6 \cdot 8 = 48$ possibilità (69X, 6X9, X69, 96X, 9X6, X96). Per la quarta cifra 7 possibilità. Totale $7 \cdot 48 = 336$. Risposta C

7. (Corso di laurea in Informatica, Udine 2009) Si considerino tutti gli anagrammi della parola 'FUNGHI', ovvero tutte le parole che si ottengono permutando le sei lettere. Tra esse, quante sono le parole che non cominciano per 'F'? A) 360 B) 600 C) 720 D) 120

Tutti gli anagrammi sono 6!, quelli che cominciano per F sono 5!, quindi quelli che non cominciano per F sono 6! – 5! = 600. Risposta B

8. (Corso di laurea in Informatica, Udine 2009) Durante una vacanza, sette amici prendono in affitto due automobili. Una di esse ha due posti, l'altra ne ha cinque. In quanti modi differenti possono distribuirsi i sette amici sulle due automobili? A) 21 B) 14 C) 28 D) 35

Basta scegliere chi va in una delle due automobili, per esclusione gli altri andranno nella seconda. Quindi $\binom{7}{2}=\binom{7}{5}=21$. Risposta A

9. (Ingegneria, 2009) Il circolo canottieri Santerno è formato da sei rematori, tutti ugualmente bravi ed affiatati tra loro. Deve mandare una rappresentanza di quattro atleti al campionato regionale. In quanti diversi modi può essere formata una tale rappresentanza? A) 720 B) 5 C) 15 D) 4 E) 6

$\binom{6}{4}=\binom{6}{2}=15$. Risposta C

10. (Medicina 2013) I coniugi Bianchi hanno un figlio e una figlia e sono bisnonni. Ciascuno dei loro discendenti maschi ha due figli maschi e nessuna figlia femmina. Ciascuna delle loro discendenti femmine ha un figlio maschio e una figlia femmina (tutti i loro discendenti sono attualmente vivi). Quanti pronipoti maschi hanno i coniugi Bianchi? A) 7 B) 8 C) 10 D) 11 E) 14

Contiamo le diverse generazioni. I generazione: 1M, 1F. II generazione: (2 + 1)M = 3M, 1F. II generazione: (2 · 3 + 1)M = 7M, 1F. Risposta A

11. (Scuola superiore di Catania 2002) Mario vuole telefonare a Giorgio, ma non ricorda il suo numero di telefono. Ricorda però che è un numero di sette cifre, tutte diverse, e in ordine crescente. Decide di provare tutti i numeri possibili, fino a quando risponde la famiglia di Giorgio, quanti numeri deve provare nel caso più sfortunato?

Essendo le cifre in ordine crescente non conta l'ordine, pertanto sono combinazioni semplici: $\binom{10}{7}=\binom{10}{3}=120$

12. (Scuola superiore di Catania 2007) Sia *n* un numero maggiore di 3000. Dimostrare o confutare le seguenti asserzioni.

A) (n – 1)! è divisibile per n B) (n – 2)! è divisibile per n C) (n – 3)! è divisibile per n
D) (n/2 + 1)! è divisibile per n (n pari) E) (n/2)! – 1 è divisibile per n (n pari)
F) (n/2 – 1)! è divisibile per n (n pari) G) (n/2 – 2)! è divisibile per n (n pari)
H) (n/2 – 3)! è divisibile per n (n pari)

Sia n un numero pari maggiore di 5. Allora, ogni numero N > (n/2)! e divisibile per n: infatti n/2 e 2 sono due fattori distinti di (n/2)!. Quindi le prime 5 asserzioni sono tutte giuste. D'altra parte, se n = 2p, con p primo, n non divide alcun numero del tipo m! con $m < p$; difatti, tra i fattori primi di m! non può esserci p. Quindi le ultime 3 asserzioni sono false.