8. I numeri naturali e l'infinito

8.3 Progressioni numeriche

Progressioni aritmetiche

Dopo avere determinato quali fra le seguenti successioni sono progressioni aritmetiche, per quelle che lo sono calcolarne la ragione. La variabile è sempre indicata con n.

1. **a) $\{3n + 2\}$; b) $\{7n - 1\}$; c) $\{n^2 + 2\}$; d) $\{1 - 5n\}$; e) $\{n^3 - 1\}$; f) $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$**

   a) $3(n + 1) + 2 - (3n + 2) = 3$. Progressione aritmetica di ragione 3;
   b) $7(n + 1) - 1 - (7n - 1) = 7$. Progressione aritmetica di ragione 7;
   c) $(n + 1)^2 + 2 - (n^2 + 2) = 2n + 1$. Non è progressione aritmetica;
   d) $1 - 5(n + 1) - (1 - 5n) = -5$. Progressione aritmetica di ragione –5;
   e) $(n + 1)^3 - 1 - (n^3 - 1) = 3n^2 + 3n + 1$. Non è progressione aritmetica;
   f) $\frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} = \frac{n^2+2n-n^2-2n-1}{n(n+1)} = -\frac{1}{n(n+1)}$. Non è progressione aritmetica.

2. **a) $\{sin(n)\}$; b) $\{sin(n\cdot\pi)\}$; c) $\{n + sin(n\pi)\}$; d) $\{kn + m\}$; e) $\{cos(n\pi)\}$; f) $\{2n + (-1)^n \cdot cos(n\pi)\}$**

   a) $sin(n + 1) - sin(n)$ non è costante, quindi non è progressione aritmetica;
   b) $\{sin(n\pi)\} = \{0,0,0, \ldots, 0, \ldots\}$ è la progressione aritmetica nulla, che ha ragione 0.
   c) $\{n + sin(n\pi)\} = \{n\}$ che è una progressione aritmetica di ragione 1;
   d) $k(n + 1) + m - (kn + m) = k$. Progressione aritmetica di ragione k;
   e) $\{cos(n\pi)\} = \{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$, quindi le differenze non sono tutte uguali, la loro successione è: $\{2, -2, 2, -2, \ldots\}$. Non è progressione aritmetica;
   f) $\{2n + (-1)^n \cdot cos(n\pi)\} = \{2n + 1\} \Rightarrow 2(n + 1) + 1 - (2n + 1) = 2$. Progressione aritmetica di ragione 2.

3. **Provare che quale che sia il numero reale a, la successione $n + a\ _{n\in\mathbb{N}}$ è una progressione aritmetica. Qual è la sua ragione?**

   $(n + 1) + a - (n + a) = 1$.

4. **Provare che quali che siano i numeri reali a, b e c, con $a \neq 0$, la successione $an^2 + bn + c\ _{n\in\mathbb{N}}$ non è una progressione aritmetica.**

   $a(n + 1)^2 + b(n + 1) + c - (an^2 + bn + c) = 2an + a + b$, che è costante solo se $a = 0$.

5. **Provare che tutte le progressioni aritmetiche infinite si esprimono con la legge $an + b\ _{n\in\mathbb{N}}$.**

   Se si ha: $a_{n+1} - a_n = k$, allora abbiamo $a_{n+1} = a_n + k$. Pertanto avremo anche: $a_n = a_{n-1} + k = a_{n-2} + 2k = a_{n-3} + 3k = \ldots = a_1 + (n - 1)k = nk + a_1 - k$. Se indichiamo $k = a$ e $a_1 - k = b$, abbiamo ottenuto la tesi.

6. **Giada firma un contratto con il suo datore di lavoro nel quale si stabilisce che il suo stipendio iniziale è di 1200 euro mensili e ogni anno riceverà un aumento pari al 3% dello stipendio iniziale. Quanto sarà il suo stipendio mensile dopo 20 anni, cioè il ventunesimo anno?**

   La successione degli stipendi è una progressione aritmetica di ragione $1200 \cdot 0{,}03 = 36$: $a_n = 1200 + 36(n - 1)$. Ovviamente deve essere $a_1 = 1200$, ecco perché abbiamo messo $(n - 1)$ e non n. Avremo: $a_{21} = 1200 + 36 \cdot 20 = 1920$.

Delle seguenti progressioni aritmetiche, sulla base dei dati, determinare quanto richiesto

7. **a) $a_1 = 1$, $d = 4$, $a_{40} = ?$; b) $a_{27} = ¾$, $d = 2/3$, $a_{38} = ?$; c) $a_6 = 4$, $a_{18} = 15$, $d = ?$; d) $a_1 = 15$, $a_{10} = 27$, $d = ?$**

   a) $a_{40} = 1 + 39 \cdot 4 = 157$; b) $a_{27} = ¾ + 26 \cdot 2/3 = 97/12$; c) $15 = 4 + 12d \Rightarrow d = 11/12$; d) $27 = 15 + 9d \Rightarrow d = 4/3$.

8. **a) $a_{17} = 2/3$, $a_4 = -½$, $d = ?$; b) $a_{23} = -¾$, $d = 5/6$, $a_{47} = ?$; c) $a_1 = 10$, $a_n = 21$, $d = 3$, $n = ?$**

   a) $2/3 = -½ + 13d \Rightarrow d = 7/78$; b) $a_{47} = -¾ + 24 \cdot 5/6 = 77/4$; c) $21 = 10 + 3(n - 1) \Rightarrow n = 14/3$, ovviamente non accettabile perché non naturale.

9. **a) $a_1 = 37$, $a_n = 13$, $d = -24/11$, $n = ?$; b) $a_3 = 7$, $a_n = 24$, $d = 17/16$, $n = ?$; c) $a_n = 14$, $a_{27} = 31$, $d =$**

17/12, n = ?

a) $13 = 37 - 24/11(n-1) \Rightarrow n = 12$; b) $24 = 7 + 17/16(n-3) \Rightarrow n = 19$; c) $14 = 31 + 17/12(n-27) \Rightarrow n = 15$

10. a) $a_{13} = 10$, $a_n = 26$, $d = 1/3$, n = ?; b) $a_{10} = 21$, $a_n = 40$, $d = 2/3$, n = ?

a) $26 = 10 + 1/3(n-13) \Rightarrow n = 61$; b) $40 = 21 + 2/3(n-10) \Rightarrow n = 77/2$. Non accettabile.

11. Con riferimento al quesito 6. a) Dopo quanti anni lo stipendio raggiungerebbe o supererebbe i 2000 euro la prima volta? b) Se raggiunge i 2000 euro dopo 15 anni, quanta percentuale di aumento si ha rispetto allo stipendio iniziale?

a) $1200 + 36(n-1) > 2000 \Rightarrow n > 209/9 \Rightarrow n \geq 24$. Al 24° anno, quindi dopo 23 anni;

b) $(1200 + 36 \cdot 23 - 1200)/1200 = 69\%$

12. I numeri $\{x-1, x+1, 2x+3\}$ sono in progressione aritmetica determinare x.

$x + 1 - (x-1) = 2x + 3 - (x+1) \Rightarrow 2 = x + 2 \Rightarrow x = 0$.

13. I numeri $\{2x-1, 3x+1, 4x\}$ sono in progressione aritmetica determinare x.

$3x + 1 - (2x-1) = 4x - (3x+1) \Rightarrow x = x - 1$. Impossibile.

14. Devo partire da A per arrivare a B, che distano 186 *km* e ho un motorino che con un pieno fa 38 *km*. Quanti distributori almeno, devono esserci sulla strada AB ed a che distanza minima devono essere posti l'uno dall'altro, perché io possa essere sicuro di raggiungere B (è meglio avere una tolleranza di 1 *km*)?

Abbiamo a che fare con la progressione aritmetica 0, 38, 76, …, $38n$. Deve essere $38n \geq 186 \Rightarrow n \geq 93/19 \Rightarrow n \geq 4$. Infatti dopo aver fatto rifornimento al quarto rifornimento, che si trova al *km* 152, restano da percorrere *km* 34. Se vogliamo essere sicuri consideriamo la progressione $37n$, il quarto rifornimento è a *km* 148 e restano da percorrere *km* 38, quindi per maggiore sicurezza mettiamo un quinto distributore.

15. Un cerchio la cui area misura x è interno ad un altro cerchio di area $x + y$. Se il raggio del cerchio più grande misura 3 *cm*, e se $(x, y, x + y)$ formano una progressione aritmetica, quanto misura il raggio del cerchio più piccolo?

Si ha: $y - x = x + y - y \Rightarrow y = 2x$. Dato che $x + y = 9\pi \Rightarrow 3x = 9\pi \Rightarrow x = 3\pi$, quindi li suo raggio misura $\sqrt{3}\,cm$.

Calcolare la somma di tutti i numeri naturali compresi fra h e k e divisibili per n

16. a) (h =15, k = 684, n = 5); b) (h = 35, k = 843, n = 3)

I numeri divisibili per n formano una progressione di ragione $(a + 1)n - an = n$. Quindi le somme da determinare sono $an + (a+1)n + (a+2)n + \ldots + + (a+m)n$, in cui $an = a_1$ è il primo multiplo di n maggiore o uguale ad h e $(a+m)n = a_n$ è l'ultimo multiplo di n minore o uguale a k. Tale somma vale $\frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}$

a) $5 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + \ldots + 5 \cdot 136 = \frac{(5+680)\cdot 134}{2} = 46565$; b) $3 \cdot 12 + 3 \cdot 13 + \ldots + 3 \cdot 281 = \frac{(36+843)\cdot 270}{2} = 118665$

17. a) (h = 34, k = 789, n = 7); b) (h = 75, k = 789, n = 11)

a) $7 \cdot 5 + 7 \cdot 6 + \ldots + 7 \cdot 112 = \frac{(35+784)\cdot 108}{2} = 44226$; b) $11 \cdot 7 + 11 \cdot 8 + \ldots + 11 \cdot 71 = \frac{(77+781)\cdot 65}{2} = 27885$.

La somma dei naturali divisibili per h compresi fra n e k è S, determinare n

18. a) (h = 4, k = 541, S = 28656); b) (h = 6, k = 123, S = 2520)

Ricordiamo che i numeri compresi tra an e am, con $m > n$, sono in numero di $(m + 1 - n)$.

a) $4 \cdot m + 4 \cdot (m+1) + \ldots + 4 \cdot 135 = 28656 \Rightarrow \frac{(4n+540)\cdot(136-n)}{2} = 28656 \Rightarrow 4m^2 - 4m - 16128 = 0$

$\Rightarrow m = 64$ ovviamente si accetta solo la soluzione positiva. Quindi $4 \cdot 64 \leq n \leq 4 \cdot 65 - 1 \Rightarrow 256 \leq n \leq 259$;

b) $6 \cdot m + 6 \cdot (m + 1) + \ldots + 6 \cdot 20 = 2520 \Rightarrow \frac{(6n+120)\cdot(21-n)}{2} = 2520 \Rightarrow 6m^2 - 6m + 5040 = 0$, che non ha soluzioni reali.

19. a) ($h = 8$, $k = 201$, $S = 1512$); b) ($h = 11$, $k = 530$, $S = 10153$)

a) $8 \cdot m + 8 \cdot (m + 1) + \ldots + 8 \cdot 25 = 3848 \Rightarrow \frac{(8n+200)\cdot(26-n)}{2} = 1512 \Rightarrow 4m^2 - 4m - 1088 = 0 \Rightarrow m = 17$. Quindi $8 \cdot 17 \le n \le 8 \cdot 18 - 1 \Rightarrow 136 \le n \le 143$;

b) $11 \cdot m + 11 \cdot (m + 1) + \ldots + 11 \cdot 48 = 10153 \Rightarrow \frac{(11n+528)\cdot(49-n)}{2} = 10153 \Rightarrow 11m^2 - 11m - 5566 = 0 \Rightarrow m = 23$. Quindi $11 \cdot 23 \le n \le 11 \cdot 24 - 1 \Rightarrow 253 \le n \le 263$.

Delle seguenti progressioni aritmetiche, sulla base dei dati, determinare quanto richiesto

20. a) ($S_{15} = 41$, $a_1 = 7$, $d = ?$); b) ($S_{23} = 17$, $a_1 = 2$, $d = ?$); c) ($S_{35} = 2140$, $a_1 = ?$, $d = 3$)

a) $\frac{(7+7+14d)\cdot 15}{2} = 41 \Rightarrow d = -64/105$; b) $\frac{(2+2+22d)\cdot 23}{2} = 17 \Rightarrow d = -29/253$;

c) $\frac{(a_1+a_1+34\cdot 3)\cdot 35}{2} = 2140 \Rightarrow a_1 = 71/7$.

21. a) ($S_{18} = 315$, $a_1 = ?$, $d = ½$; b) ($S_n = 100$, $a_1 = 3$, $d = 2$, $n = ?$); c) ($S_n = 1593/5$, $a_1 = 4$, $d = 3/5$, $n = ?$)

a) $\frac{(a_1+a_1+17/2)\cdot 18}{2} = 315 \Rightarrow a_1 = 53/4$; b) $\frac{[3+3+2(n-1)]\cdot n}{2} = 100 \Rightarrow n^2 + 2n - 100 = 0$, non ha soluzioni intere, quindi nessuna soluzione; c) $\frac{[4+4+3/5(n-1)]\cdot n}{2} = \frac{1593}{5} \Rightarrow n = 27$.

22. a) ($S_{20} = 248$, $a_1 = 2$, $a_{20} = ?$); b) ($S_{13} = 157$, $a_{13} = 5$, $a_1 = ?$)

a) $\frac{(2+a_{20})\cdot 20}{2} = 248 \Rightarrow a_{20} = 114/5$; b) $\frac{(a_1+5)\cdot 13}{2} = 157 \Rightarrow a_1 = 249/13$

23. a) ($S_n = 312$, $a_1 = 4$, $a_n = 21$, $n = ?$); b) ($S_n = 503$, $a_1 = 7$, $a_n = 747/37$, $n = ?$)

a) $\frac{(4+21)\cdot n}{2} = 312 \Rightarrow$ non ha soluzioni intere, quindi nessuna soluzione;

b) $\frac{(7+747/37)\cdot n}{2} = 503 \Rightarrow n = 37$.

24. Determinare la somma dei primi n numeri naturali a) pari; b) dispari; c) multipli di 4; d) multipli di h.

a) $\frac{(2+2n)\cdot n}{2} = n^2 + n$; b) $\frac{(1+2n-1)\cdot n}{2} = n^2$; c) $\frac{(4+4n)\cdot n}{2} = 2n^2 + 2n$; d) $\frac{(h+h\cdot n)\cdot n}{2} = \frac{h\cdot n(n+1)}{2}$

25. Consideriamo la somma S dei primi n numeri pari, qual è il minimo n per cui $S > 10^6$?

Tenuto conto del precedente: $n^2 + n > 10^6 \Rightarrow n \ge 1000$.

26. Semplificare $\frac{2+4+6+\ldots+2n}{1+3+5+\ldots+(2n-1)}$.

Tenuto conto dei risultati dell'esercizio 24: $\frac{n(n+1)}{n^2} = \frac{n+1}{n}$.

27. La somma dei primi $3n$ numeri naturali supera di 150 la somma dei primi n naturali. Quanto è n?

$1 + 2 + \ldots + 3n = 1 + 2 + \ldots + n + 150 \Rightarrow \frac{3n(3n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} + 150 \Rightarrow 4n^2 + n - 150 = 0 \Rightarrow n = 6$.

28. a) $\sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{6} a_k = 72, a_1 = 3, d = ?$**; b)**

a) $a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 72 \Rightarrow 3 \cdot 4 + d \cdot (6 + 7 + 8 + 9) = 72 \Rightarrow 30d = 60 \Rightarrow d = 2$;

b) $a_3 + a_4 + a_5 + \cancel{a_6 + a_7 + a_8} + 152 = \cancel{a_6 + a_7 + a_8} + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} \Rightarrow 3a_1 + (10 + 15 + 20) + 152 = 4a_1 + (40 + 45 + 50 + 55) \Rightarrow a_1 = 45 + 152 - 190 = 7$.

Date le due progressioni aritmetiche di cui sono dati il primo elemento e la ragione, determinare, se esiste, un numero naturale n, per cui valgono le date uguaglianze

29. $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} b_k$. **a)** $(a_1 = 2, d = 3)$; $(b_1 = 5, d = 2)$; **b)** $(a_1 = 14, d = ½)$; $(b_1 = 7, d = ¾)$

a) $\frac{(2+2+3n-3)\cdot n}{2} = \frac{(5+5+2n-2)\cdot n}{2} \Rightarrow 1 + 3n = 8 + 2n \Rightarrow n = 7$;

b) $\frac{(14+14+n/2-1/2)\cdot n}{2} = \frac{(7+7+3n/4-3/4)\cdot n}{2} \Rightarrow \frac{55+n}{2} = \frac{53+3n}{4} \Rightarrow 110 + 2n = 53 + 3n \Rightarrow n = 57$.

30. $\sum_{k=1}^{n} a_k = 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k$. **a)** $(a_1 = 8, d = ¼)$; $(b_1 = 2, d = 1/3)$; **b)** $(a_1 = 15, d = ¼)$; $(b_1 = 3, d = ½)$

a) $\frac{(8+8+n/4-1/4)\cdot n}{2} = 2 \cdot \frac{(2+2+n/3-1/3)\cdot n}{2} \Rightarrow \frac{63+n}{4} = \frac{22+2n}{3} \Rightarrow 189 + 3n = 88 + 8n \Rightarrow 5n = 145 \Rightarrow n < 0$. Non accettabile.

b) $\frac{(15+15+n/4-1/4)\cdot n}{2} = 2 \cdot \frac{(3+3+n/2-1/2)\cdot n}{2} \Rightarrow \frac{119+n}{4} = 2 \cdot \frac{11+n}{2} \Rightarrow 119 + n = 44 + 4n \Rightarrow n = 25$.

31. La somma di tre numeri in progressione aritmetica è 30, mentre la somma dei loro quadrati è 372, determinare i tre numeri. Suggerimento: indicare i numeri con $(x – d, x, x + d)$.

$x – d + x + x + d = 3x \Rightarrow 3x = 30 \Rightarrow x = 10$. $(10 – d)^2 + 100 + (10 + d)^2 = 372 \Rightarrow 2d^2 = 72 \Rightarrow d^2 = 36 \Rightarrow d = \pm 6$. In ogni caso i tre numeri, ordinati, sono: 4, 10, 16.

32. La somma di tre termini di una progressione aritmetica è 15/2, mentre la somma dei loro reciproci è 37/30, determinare i termini.

Come prima: $3x = 15/2 \Rightarrow x = 5/2$.

$$\frac{1}{5/2-d} + \frac{2}{5} + \frac{1}{5/2+d} = \frac{37}{30} \Rightarrow \frac{2}{5-2d} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5+2d} = \frac{37}{30} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{60\left(5+\cancel{2d}\right)+12\left(25-4d^2\right)+60\left(5-\cancel{2d}\right)-37\left(25-4d^2\right)}{30\left(25-4d^2\right)} = 0 \Rightarrow$$

$600 – 625 + 100d^2 = 0 \Rightarrow d^2 = ¼ \Rightarrow d = \pm ½$. I numeri sono: 2; 5/2; 3.

33. Di una progressione aritmetica si sa che la somma dei primi 10 termini vale 100, mentre quella dei primi 100 termini vale 10. Quanto vale la somma dei primi 110 termini?

$$\begin{cases} \frac{(a_1 + a_{10})\cdot \cancel{10}}{2} = 10\cancel{0} \\ \frac{(a_1 + a_{100})\cdot 10\cancel{0}}{2} = \cancel{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_1 + 9d = 20 \\ (a_1 + a_1 + 99d)\cdot 5 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 9d = 20 \\ 10a_1 + 495d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10a_1 + 45d = 100 \\ 10a_1 + 495d = 1 \end{cases} \Rightarrow 450d = -99$$

$\Rightarrow d = –11/50$, $a_1 = 1099/100$. Quindi: $\frac{(a_1 + a_{110})\cdot \cancel{110}^{55}}{\cancel{2}} = \left(\frac{1099}{50} - 109 \cdot \frac{11}{50}\right)\cdot 55 = -110$.

34. Provare che se $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{2n}\}$ è una progressione aritmetica decrescente di ragione d, allora si ha: $a_1 + a_2 + \ldots + a_n – (a_{n+1} + \ldots + a_{2n}) = n^2 \cdot d$.

La decrescenza della progressione fa sì che sia $d < 0$.

$$\frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2} - \frac{(a_{n+1} + a_{2n})\cdot n}{2} = \frac{\left[\cancel{a_1} + \cancel{a_1} - \left(n-1\right)d\right]\cdot n - \left[\cancel{a_1} - \cancel{nd} + \cancel{a_1} - (2n-1)d\right]\cdot n}{2} = \frac{(d + 2nd - d)\cdot n}{2} = n^2 d$$

35. Provare che se $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{2n-1}\}$ è una progressione aritmetica decrescente di ragione d, allora si ha: $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n-1} = (2n – 1) \cdot a_n$.

$$\frac{(a_1 + a_{2n-1})\cdot(2n-1)}{2} = \frac{\left[a_1 + a_1 - (2n-2)d\right]\cdot(2n-1)}{2} = [a_1 - (n-1)d](2n-1) = (2n-1)\cdot a_n.$$

36. Provare che se $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{2n}\}$ è una progressione aritmetica decrescente di ragione d,

allora si ha: $n \cdot (a_1 + a_{2n}) = n \cdot (a_2 + a_{2n-1}) = \ldots = n \cdot (a_n + a_{n+1})$.
$n \cdot (a_1 + a_{2n}) = n \cdot (a_1 + a_{2n-1} - d) = n \cdot (a_2 + a_{2n-1}) = n \cdot (a_2 + a_{2n-2} - d) = n \cdot (a_3 + a_{2n-2}) = \ldots = n \cdot (a_n + a_{n+1})$

37. **Provare che una successione $p(n)$ che verifica la seguente proprietà $p(n+1) = \frac{k \cdot p(n) + 1}{k}$, con k numero reale non nullo è una progressione aritmetica. Quanto vale la ragione?**
$p(n+1) - p(n) = \frac{k \cdot p(n) + 1}{k} - p(n) = \frac{\cancel{k \cdot p(n)} + 1 - \cancel{k \cdot p(n)}}{k} = \frac{1}{k}$.

38. **Indichiamo con $p(n)$ una generica progressione aritmetica di 40 termini, con $a_1 = n$ e $d = 2n - 1$. Determinare la somma di tutti i 400 termini delle progressioni da $p(1)$ a $p(10)$.**
$p(1) = \{1, 2, 3, \ldots, 40\}$, $p(2) = \{2, 5, 8, \ldots, 119\}$, $p(3) = \{3, 8, 13, \ldots, 198\}$, …, $p(10) = \{10, 29, 48, \ldots, 751\}$. La somma richiesta vale: $\frac{\left[(1+40)+(2+119)+(3+198)+\ldots+(10+751)\right] \cdot 40}{2}$. Osserviamo che i primi termini sono la somma dei primi 10 numeri naturali: $1 + 2 + 3 + \ldots + 10 = 55$. Il quarantesimo termine è $n + (2n - 1)39 = 79n - 39$. Quindi la somma è $79 \cdot (1 + 2 + \ldots + 10) - 10 \cdot 39 = 79 \cdot 55 - 390 = 3955$. Quindi: $(55 + 3955) \cdot 20 = 80200$.

Progressioni geometriche

1. **Se in una progressione geometrica la ragione è negativa i suoi termini che segno hanno?**
Dato che ogni termine si ottiene moltiplicando il precedente per la ragione, moltiplicare per un numero negativo cambia il segno, quindi otteniamo segni alterni.
2. **Con riferimento al problema del box Lavoriamo insieme, dopo 10 anni quanto varrà il capitale investito?**
€ $1500{,}00 \cdot 1{,}03^{10} =$ € 2015,87, approssimiamo ai centesimi.
3. **Sempre con riferimento al problema del box Lavoriamo insieme, se il tasso di interesse fosse del 3,50%, quale sarebbe la risposta al precedente quesito?**
€ $1500{,}00 \cdot 1{,}035^{10} =$ € 2115,90.
4. **Un capitale di x euro è investito in regime di capitalizzazione composta per 12 anni, al tasso del 2,75%. Se il capitale finale maturato è di € 1661,74, quanto è x?**
€ $x \cdot 1{,}0275^{12} =$ € $1661{,}74 \Rightarrow x =$ € 1200,00.
5. **Un capitale di 2000 euro è investito in regime di capitalizzazione composta per 20 anni, al tasso del x%. Se il capitale finale maturato è di € 4382,25, quanto è x?**
€ $2000{,}00 \cdot x^{20} =$ € $4382{,}25 \Rightarrow x = \sqrt[20]{\frac{4382{,}25}{2000}} = 1{,}04$, quindi il 4%.
6. **Dopo aver provato che i numeri $\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[6]{2}$ sono in progressione geometrica, determinare il quarto termine di tale progressione.**
$\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}} = 2^{1/3-1/2} = 2^{-1/6} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}; \frac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[6]{\frac{2}{4}} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}$, quindi il termine successivo è $\sqrt[6]{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{2}} = 1$.

Delle seguenti progressioni geometriche, sulla base dei dati, determinare quanto richiesto

7. **a) $a_1 = 3$, $q = 1/3$, $a_5 = ?$; b) $a_1 = 12$, $q = -¾$, $a_6 = ?$; c) $a_5 = 3/2$, $q = ½$, $a_{12} = ?$**
a) $a_5 = 3 \cdot (1/3)^4 = 1/27$; b) $a_5 = 12 \cdot (-¾)^6 = -729/256$; c) $a_{12} = 3/2 \cdot (½)^{12-5} = 3/256$
8. **a) $a_3 = 2/5$, $a_7 = 5/8$, $q = ?$; b) $a_3 = 2/5$, $a_7 = -5/8$, $q = ?$; c) $a_1 = 2$, $a_{10} = 120$, $q = ?$**
a) $5/8 = 2/5 \cdot q^4 \Rightarrow q = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$; b) $-5/8 = 2/5 \cdot q^4 \Rightarrow$ Nessuna soluzione; c) $120 = 2 \cdot q^9 \Rightarrow q = \sqrt[9]{60}$.
9. **d) $a_7 = 3/2$, $q = -¼$, $a_2 = ?$ d) $a_1 = 32/27$, $a_n = 81/4$, $q = 3/2$, $n = ?$**
a) $3/2 = a_2 \cdot (-¼)^5 \Rightarrow a_2 = -1536$; b) $81/4 = 32/27 \cdot (3/2)^{n-1} \Rightarrow n = 8$.
10. **Affinché i termini di una progressione geometrica siano ordinati in modo crescente, quanto deve essere la ragione?**
Dato che la ragione è il rapporto di due numeri in cui il numeratore è maggiore del denominatore, essa è

maggiore di 1.

11. Affinché i termini di una progressione geometrica siano ordinati in modo decrescente, quanto deve valere la ragione?

Tenuto conto di quanto detto prima deve essere minore di 1, ma anche positiva, perché diversamente i termini avranno segno alterno e quindi non potremo avere una progressione decrescente.

12. Fra i numeri 8 e 5832 sono inseriti cinque numeri che con i precedenti formano una progressione geometrica, quanto vale il quinto di questi numeri?

Abbiamo 8, $8q$, $8q^2$, $8q^3$, $8q^4$, $8q^6$, 5832 e $8q^6 = 5832 \Rightarrow q^6 = 729 \Rightarrow q = \pm 3$, quindi il quinto numero è $5832/(\pm 3) = \pm 1944$.

13. Dati i numeri 20, 50, 100 aggiungiamo a ciascuno di essi un uguale numero, ottenendo così una progressione geometrica. Quanto vale l'addendo costante? Quanto la ragione?

Deve essere $\frac{50+x}{20+x} = \frac{100+x}{50+x} \Rightarrow 2500 + \cancel{100x + x^2} = 2000 + 20x + \cancel{100x + x^2} \Rightarrow x = 500/20 = 25$; la ragione è $75/45 = 5/3$.

14. Provare che tutte le progressioni geometriche infinite si esprimono con la legge $\left(a \cdot b^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$, $a \cdot b \neq 0$.

Data la successione $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ se è una progressione geometrica si ha: $a_1, a_1q, a_1q^2, \ldots, a_1q^{n-1}, \ldots$ che è quanto richiesto.

15. Dimostrare che se il secondo termine di una progressione geometrica il cui primo termine è 1, è un quadrato o un cubo, allora tutti gli altri termini sono quadrati o cubi. Più in generale se il secondo termine è una potenza di *k*, tutti gli altri sono potenze di *k*.

Abbiamo la progressione $1, x^2, x^2q, x^2q^2, \ldots, x^2q^n, \ldots$ deve essere: $q = x^2/1 = x^2$, quindi la progressione è $1, x^2, x^4, x^6, \ldots, x^{2n}, \ldots$ Analogamente se abbiamo: $1, x^3, x^3q, x^3q^2, \ldots, x^3q^n, \ldots \Rightarrow q = x^3 \Rightarrow 1, x^3, x^6, x^9, \ldots, x^{3n}, \ldots$ in generale: $1, x^k, x^kq, x^kq^2, \ldots, x^kq^n, \ldots \Rightarrow q = x^k \Rightarrow 1, x^k, x^{2k}, x^{3k}, \ldots, x^{nk}, \ldots$

16. Dimostrare che se il secondo termine di una progressione geometrica il cui primo termine è 1, non è un quadrato, allora i soli quadrati della progressione possono essere quelli di posto dispari.

Ragionando come prima, avremo $1, x, xq, xq^2, \ldots, xq^n, \ldots \Rightarrow q = x \Rightarrow 1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots$ e quindi abbiamo come potenze i successivi numeri naturali, i cui pari sono solo quelli che occupano posto dispari.

17. Dimostrare che se il secondo termine di una progressione geometrica il cui primo termine è 1, non è un cubo, allora i soli cubi della progressione possono essere quelli che occupano i posti 4, 7, 10, …

Ragionando come prima, avremo $1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots$ e quindi i multipli di 3 sono solo quelli che occupano posto successivo a uno multiplo di 3, cioè 4, 7, 10, …, $3n + 1$, …

18. Da *I nove capitoli dell'arte matematica*, un antico testo cinese del III secolo a.C. *Due steli d'erba crescono in modi differenti. Il primo giorno il primo cresce di 3 piedi e il secondo di 1 piede. Nei giorni successivi il primo cresce metà di quanto era cresciuto il giorno prima, mentre il secondo cresce il doppio del giorno precedente. Dopo quanti giorni i due steli avranno la stessa altezza*?

Abbiamo le progressioni delle crescite: $\{3, 3/2, ¾, \ldots, 3/2^n\}$ e $\{1, 2, 4 \ldots, 2^n\}$. Quindi la lunghezza del primo dopo n giorni è $3 + 3/2 + \ldots + 3/2^n = 3 \cdot (1 + ½ + ¼ + \ldots + ½^n) = 3 \cdot \frac{(1/2)^{n+1} - 1}{1/2 - 1} = 6 \cdot (1 - ½^n)$. La lunghezza del secondo è $1 + 2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$, quindi deve essere: $6 \cdot (1 - ½^n) = 2^n - 1 \Rightarrow 7 = 2^n + 6 \cdot 2^{-n} \Rightarrow 2^{2n} - 7 \cdot 2^n + 6 = 0 \Rightarrow 2^n = 1 \vee 2^n = 6 \Rightarrow n = 0$ (non accettabile) $\vee\ n = log_2(6) \approx 2{,}6$.

Delle seguenti progressioni geometriche, sulla base dei dati, determinare quanto richiesto

19. a) $a_1 = -½$, $q = 2$, $S_8 = ?$; b) $a_1 = -½$, $q = -2$, $S_8 = ?$; c) $a_5 = 2$, $q = 1/3$, $S_7 = ?$

a) $S_8 = \frac{-1/2 \cdot \left(2^8 - 1\right)}{2 - 1} = -\frac{255}{2}$; b) $S_8 = \frac{-1/2 \cdot \left[(-2)^8 - 1\right]}{-2 - 1} = \frac{85}{2}$; c) $S_7 = \frac{2 \cdot \left[(1/3)^3 - 1\right]}{1/3 - 1} = \frac{26}{9}$.

20. a) $a_4 = 3/2$, $q = -1/3$, $S_{10} = ?$; b) $q = 3$, $S_4 = 80/9$, $a_1 = ?$; c) $q = -½$, $S_7 = 12/5$, $a_1 = ?$

a) $S_{10} = \frac{3/2 \cdot \left[(-1/3)^5 - 1\right]}{-1/3 - 1} = \frac{547}{486}$; b) $\frac{80}{9} = \frac{a_1 \cdot \left(3^4 - 1\right)}{3 - 1} \Rightarrow a_1 = \frac{2}{9}$; c) $\frac{12}{5} = \frac{a_1 \cdot \left(1/2^8 - 1\right)}{-1/2 - 1} \Rightarrow a_1 = \frac{768}{215}$.

21. a) $a_1 = -½$, $q = -½$, $S_n = -171/512$, $n = ?$; b) $a_1 = -2/3$, $q = 3/2$, $S_n = -665/48$, $n = ?$

a) $-\frac{171}{512}=\frac{-1/2\cdot\left[(-1/2)^{n+1}-1\right]}{-1/2-1}\Rightarrow (-½)^{n+1}=(-½)^9\Rightarrow n=9$;

b) $-\frac{665}{48}=\frac{-2/3\cdot\left[(3/2)^{n+1}-1\right]}{3/2-1}\Rightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}=\left(\frac{3}{2}\right)^6\Rightarrow n=6$

22. a) $a_2 = 4$, $q = ½$, $S_n = 127/16$, $n = ?$; b) $a_4 = 4/3$, $q = 1/3$, $S_n = 484/27$, $n = ?$

a) $\frac{127}{16}=\frac{4\cdot\left(1/2^n-1\right)}{1/2-1}\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^7\Rightarrow n=7$; b) $\frac{484}{27}=\frac{4/3\cdot\left(1/3^n-1\right)}{1/3-1}\Rightarrow\frac{1}{3^n}=-\frac{215}{27}$, nessuna soluzione.

23. a) $a_1 = 2$, $q = 2$, $P_{10} = ?$; b) $a_1 = 3$, $P_5 = 1/243$, $a_5 = ?$

a) $P_{10}=\sqrt{\left(2\cdot a_{10}\right)^{10}}=\left(2\cdot 2\cdot 2^9\right)^5=2^{55}$; b) $\frac{1}{243}=\sqrt{\left(3\cdot a_5\right)^5}\Rightarrow 3^{-10}=3^5\cdot a_5^5\Rightarrow a_5^5=3^{-15}\Rightarrow a_5=3^{-3}=\frac{1}{27}$

24. Calcolare a) $\sum_{k=0}^{n}2^k$; b) $\sum_{k=0}^{n}3^k$; c) $\sum_{k=0}^{n}5^k$; d) $\sum_{k=0}^{n}m^k, m\in\mathbb{N}$

a) $\sum_{k=0}^{n}2^k=\frac{2^{n+1}-1}{2-1}=2^{n+1}-1$; b) $\sum_{k=0}^{n}3^k=\frac{3^{n+1}-1}{3-1}=\frac{3^{n+1}-1}{2}$; c) $\sum_{k=0}^{n}5^k=\frac{5^{n+1}-1}{5-1}=\frac{5^{n+1}-1}{4}$;

d) $\sum_{k=0}^{n}m^k=\frac{m^{n+1}-1}{m-1}$.

25. Tenuto conto del precedente quesito dedurre che ciascuna delle somme è multipla di quale numero naturale, diverso da 1?

Dato che ovviamente la somma di numeri interi è un numero intero allora le frazioni sono solo apparenti, quindi in generale $m^{n+1} - 1$ è multiplo del numero naturale $m - 1$. Ovviamente per $m = 2$ è multiplo di 1, quindi di nessun numero naturale maggiore di 1.

26. In una progressione geometrica formata da sei termini la somma fra i termini di posto dispari è 21/2 e quella fra i rimanenti termini è 21/4, determinare tutti i termini.

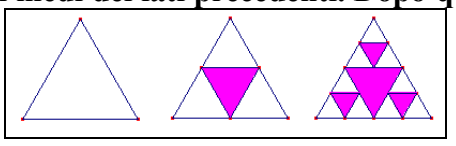
La progressione è: $\{a, aq, aq^2, aq^3, aq^4, aq^5\}$, si ha: $\begin{cases}a+aq^2+aq^4=21/2\\aq+aq^3+aq^5=21/4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\cdot\left(1+q^2+q^4\right)=21/2\\aq\cdot\left(1+q^2+q^4\right)=21/4\end{cases}$,

dividiamo termine a termine la seconda equazione per la prima, ottenendo: $q = ½$, dalla prima abbiamo $(1 + ¼ + 1/16)a = 21/2 \Rightarrow a = 21/2 \cdot 16/21 \Rightarrow a = 8$. Quindi la progressione è: {8, 4, 2, 1, ½, ¼}.

27. In una progressione geometrica la somma dei primi due termini è 7/6, mentre la somma dei primi sei termini è 3367/1536, quanto è la somma dei termini dal terzo al settimo?

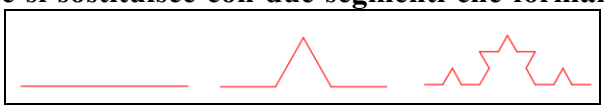
Dobbiamo determinare $aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5 + aq^6 = aq^2 \cdot (1 + q + q^2 + q^3 + q^4) = aq^2\frac{q^5-1}{q-1}$. Noi sappiamo che $a + aq = 7/6$ e $a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5 = a\frac{q^6-1}{q-1}=\frac{3367}{1536}$ (*) $\Rightarrow aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5$ $= 3367/1536 - 7/6 = 525/512$, che equivale a dire: $aq^2\frac{q^4-1}{q-1}=\frac{525}{512}$ (**). Dividendo termine a termine (*) per (**) otteniamo: $\frac{q^6-1}{q^2\left(q^4-1\right)}=\frac{3367}{1536}\cdot\frac{512}{525}=\frac{131}{50}\Rightarrow\frac{\cancel{\left(q^2-1\right)}\left(q^4+q^2+1\right)}{q^2\cancel{\left(q^2-1\right)}\left(q^2+1\right)}=\frac{481}{225}\Rightarrow 256q^4+256q^2-225=0\Rightarrow q=\pm ¾$ da cui $a = 2/3 \vee 14/3$. Infine la somma cercata è $2343/2048 \vee 3801/2048$.

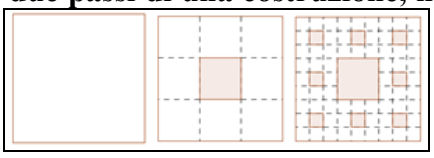
28. In figura ci sono i primi due passi di una costruzione, nota come triangolo di Sierpinski, ottenuta costruendo triangoli equilateri i cui estremi sono punti medi dei lati precedenti. Dopo quattro passi quanta parte del triangolo originale è non colorata?



È facile vedere che nel primo passo il triangolo colorato è ¼ del triangolo di partenza, lo stesso succede

ogni volta che effettuiamo un'operazione del genere. Quindi al secondo passo l'area colorata è ¼ + 3/16 = 7/16; al terzo passo è 7/16 + 9/64 = 37/64 e al quarto passo 37/64 + 27/256 = 175/256. Infine la zona non colorata è 1 – 175/256 = 81/256.

29. **In figura ci sono i primi tre passi di una costruzione, nota come curva fiocco di neve di von Koch, ottenuta a partire da un segmento lungo una unità, che viene diviso in 3 parti uguali, quindi si elimina la parte centrale e si sostituisce con due segmenti che formano con il segmento eliminato un triangolo equilatero.**  **Se continuiamo questa costruzione per altri 7 passi, quanto sarà lunga la spezzata finale?**
Al passo 2 sostituiamo un segmento lungo 1/3 con due segmenti uguali, quindi aumentiamo di 1/3 la lunghezza iniziale, quindi la curva sarà lunga 1 + 1/3 = 4/3; al terzo passo sostituiamo 4 segmenti da 1/9 con 8 da 1/9, quindi 4/3 + 4/9 = 16/9 = $(4/3)^2$. Così proseguendo non è difficile capire che dopo 3 + 7 = 10 passi otteniamo: $(4/3)^9$.

30. **In figura ci sono i primi due passi di una costruzione, nota come tappeto di Sierpinski, ottenuta a partire da un quadrato,**  **che viene diviso in 9 quadrati uguali e poi si elimina il quadrato centrale, e così via. Se continuiamo questa costruzione per un totale di 4 passi, quanta parte del quadrato sarà l'area eliminata?**
Al passo 1, l'area rimasta è 1/9; al passo 2 è 1/9 + 8/81 = 17/81; al passo 3: 17/81 + $8/3^6$ = 161/729; al passo 4: 161/729 + $8/3^8$ = 1457/6561. La parte eliminata quindi è 1 – 1457/6561 = 5104/6561

Risolvere i seguenti problemi presenti in alcuni antichi testi matematici

31. **(Zhang Qiujian Suan Jing) Un cavallo ha percorso 700 miglia in 7 giorni, dimezzando la sua velocità ogni giorno. Quante miglia ha percorso ogni giorno?**
Detta v la sua velocità iniziale abbiamo: $v + v/2 + v/4 + \ldots + v/2^6 = 700 \Rightarrow v \cdot (2 - 2^{-6}) = 700 \Rightarrow v =$ 44800//27 ≈ 352,76.

32. **(Fibonacci, 1202) Un uomo possiede inizialmente 100 denari e spende ogni giorno 1/10 di ciò che ha. Con quanti denari rimane dopo 12 giorni?**
Per la spesa abbiamo a che fare con una progressione geometrica di ragione 0,9: $10\frac{0,9^{12}-1}{0,9-1} \approx 71,76$.
Quindi alla fine del dodicesimo giorno saranno rimasti circa 10 – 71,76 = 28,24 denari.

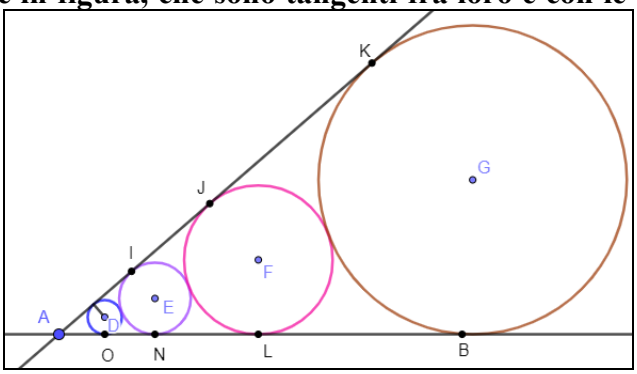
33. **(Chuquet, 1484) Un uomo percorre 1, 3, 9, ... leghe in giorni successivi. Continuando a questo ritmo, quante leghe percorrerà in 5 giorni e mezzo?**
Abbiamo a che fare con una progressione geometrica di ragione 3. Anche se l'esponente finale non è intero possiamo usare la formula per la somma: $\frac{3^{5,5}-1}{3-1} \approx 209,94$.

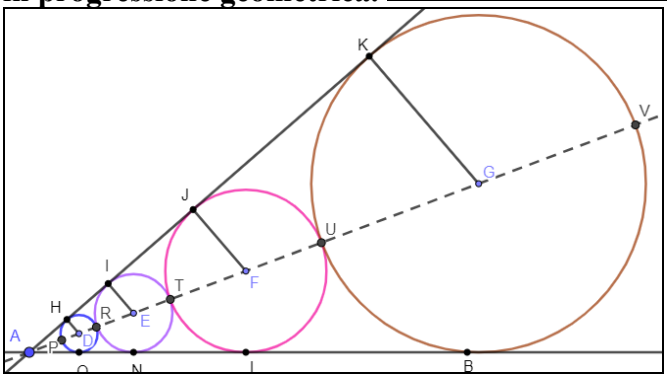
34. **(Chuquet, 1484) Una botte contiene una quantità di vino pari a 9,5 barili. Il suo contenuto viene trasferito nei barili in modo tale che: il primo barile si riempie in 1 ora; il secondo barile si riempie in 2 ore; il terzo barile si riempie in 4 ore; e così via, raddoppiando ogni volta il tempo. Quante ore sono necessarie per svuotare la botte?**
Dobbiamo stabilire in quanto tempo riempiamo 9,5 barili: $2^{9,5} - 1 \approx 723,08$.

35. **(Ozanam, 1778) Un villaggio ha 210 persone; ogni 25 anni, la popolazione triplica. Quante persone ci saranno nel villaggio dopo 225 anni?**
225 = 25 · 9, quindi: 210 · 3^8 = 1377810.

La sfida

1. **Provare che le circonferenze in figura, che sono tangenti fra loro e con le due rette, hanno i raggi in progressione geometrica.**





Indichiamo con x la distanza AP e con r_1, r_2, r_3 e r_4 i raggi delle circonferenze. I triangoli rettangoli AHO, AIE, AJF e AKG sono simili, pertanto hanno tutti un rapporto costante, in particolare si ha: $\frac{r_1}{x+r_1}=\frac{r_2}{x+2r_1+r_2} \Rightarrow x\cdot(r_1-r_2)=\cancel{r_1r_2}-2r_1^2-\cancel{r_1r_2} \Rightarrow$ $x=\frac{2r_1^2}{r_2-r_1}$. Si ha anche: $\frac{r_2}{x+2r_1+r_2}=\frac{r_3}{x+2r_1+2r_2+r_3} \Rightarrow \frac{r_2}{\frac{2r_1^2}{r_2-r_1}+2r_1+r_2}=\frac{r_3}{\frac{2r_1^2}{r_2-r_1}+2r_1+2r_2+r_3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{r_2}{\cancel{2r_1^2}+\cancel{2r_1r_2}-\cancel{2r_1^2}-r_1r_2+r_2^2}=\frac{r_3}{\cancel{2r_1^2}+\cancel{2r_1r_2}-\cancel{2r_1^2}+2r_2^2-\cancel{2r_1r_2}+r_2r_3-r_1r_3} \Rightarrow \frac{\cancel{r_2}}{r_2^{\cancel{2}}-r_1\cancel{r_2}}=\frac{r_3}{2r_2^2+r_2r_3-r_1r_3}$$

$\Rightarrow 2r_2^2+\cancel{r_2r_3}-r_1r_3=r_1r_3+\cancel{r_2r_3} \Rightarrow r_2^2=r_1r_3 \Leftrightarrow r_2/r_1=r_3/r_2$, quindi $\{r_1, r_2, r_3\}$ è una progressione geometrica, allo stesso modo si prova che anche r_4 vi fa parte.

2. **Definiamo differenze finite di ordine k di una successione a_n le seguenti quantità: $\Delta^1(a_n)=a_{n+1}-a_n$, $\Delta^2(a_n)=\Delta^1(a_{n+1})-\Delta^1(a_n)$, ..., $\Delta^k(a_n)=\Delta^{k-1}(a_{n+1})-\Delta^{k-1}(a_n)$. dimostrare che se a_n è un polinomio di grado k, allora tutte le differenze finite di ordine maggiore di k sono nulle.**
3. **Determinare la somma dei primi n numeri naturali, con $n < 100$, sapendo che è un quadrato perfetto.**

Sappiamo che $1+2+\ldots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$. Si ha: $3 \le n\cdot(n+1) \le 4950$. Vogliamo che valga la seguente uguaglianza: $\frac{n\cdot(n+1)}{2}=k^2 \Rightarrow n\cdot(n+1)=2k^2$. Essendo questo prodotto di due numeri di diversa parità, quello pari deve essere multiplo di una potenza dispari di 2, quindi in pratica, tenendo conto delle limitazioni, di 2^{2h-1} con $1 \le h \le 6$. A questo punto il fattore pari deve essere o del tipo $2h^2$, e il termine dispari del tipo k^2, in questo caso effettivamente sarà $n\cdot(n+1)=2h^2k^2$; oppure del tipo $2mh^2$, con m che non contiene potenze pari di primi e il termine dispari del tipo mk^2, infatti in questo caso avremo $n\cdot(n+1)=2m^2h^2k^2$. Tenuto conto che però i due fattori sono consecutivi deve essere: $2h^2k^2=2h^2\cdot(2h^2\pm1)$, quindi basta controllare se vi sono numeri del tipo $(2h^2\pm1)$ che sono quadrati perfetti, con la condizione $3 \le 2h^2\cdot(2h^2\pm1) \le 4950 \Rightarrow 2 \le h^2 \le 35 \Rightarrow 2 \le h \le 5$. Quindi solo i casi: $8\cdot9=72=2\cdot36$ (che va bene), $8\cdot7$, $18\cdot19$, $18\cdot17$, $32\cdot33$, $32\cdot31$, $50\cdot51$, $50\cdot49=2\cdot5^2\cdot7^2$ (che va bene). Gli altri casi alla fine conducono sempre a questi già visti, pertanto vi sono solo 2 valori.

4. **Determinare il minimo n per cui la somma dei primi n numeri pari sia maggiore di k, con k nume-**

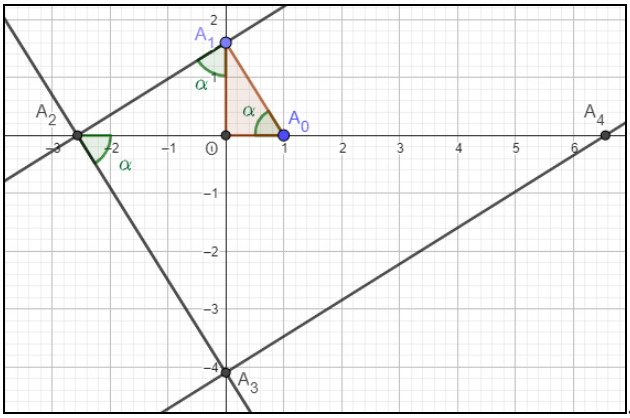
ro intero fissato.

$2 + 4 + \ldots + 2n = n \cdot (n + 1) > k \Rightarrow \quad n > \left\lceil \frac{-1+\sqrt{4k+1}}{2} \right\rceil$, dove il simbolo indica il cosiddetto soffitto o *ceiling*, ossia il massimo numero intero contenuto nel numero. Per esempio $\lceil 7{,}3 \rceil = 7$.

5. **Determinare una regola per determinare quanta parte del triangolo di Sierpinski (vedi esercizio 28) è colorata dopo *n* passi.**
   La successione delle aree dei nuovi triangoli colorati è una progressione geometrica di ragione ¼: {¼, 1/16, …,$1/4^n$}, ma al passo 1 aggiungiamo 1 triangolo, al passo 2 ne aggiungiamo 3, al passo 3 ne aggiungiamo 3^2, quindi al passo n ne aggiungiamo 3^{n-1}. Quindi la parte colorata al passo n è $\frac{1}{4}+\frac{3}{4^2}+\frac{3^2}{4^3}+\ldots+\frac{3^{n-1}}{4^n}=\frac{1}{4}\cdot\left[1+\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\ldots+\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right]=\frac{1}{4}\cdot\frac{(3/4)^n-1}{3/4-1}=1-\left(\frac{3}{4}\right)^n$.
6. **Determinare una regola per calcolare la lunghezza della curva fiocco di neve di von Koch (vedi esercizio 29), dopo *n* passi.**
   Facilmente abbiamo la progressione {1, 4/3, $(4/3)^2$, …, $(4/3)^{n-1}$}, di cui ci interessa solo l'ultimo termine.
7. **Determinare una regola per determinare quanta parte del tappeto di Sierpinski (vedi esercizio 30) è colorata, dopo *n* passi**
   La successione delle aree dei nuovi quadrati colorati è una progressione geometrica di ragione 1/9: {1/9, 1/81, …,$1/9^n$}, ma al passo 1 aggiungiamo 1 quadrato, al passo 2 ne aggiungiamo 8, al passo 3 ne aggiungiamo 8^2, quindi al passo n ne aggiungiamo 8^{n-1}. Quindi la parte colorata al passo n è $\frac{1}{9}+\frac{8}{9^2}+\frac{8^2}{9^3}+\ldots+\frac{8^{n-1}}{9^n}=\frac{1}{9}\cdot\left[1+\frac{8}{9}+\left(\frac{8}{9}\right)^2+\ldots+\left(\frac{8}{9}\right)^{n-1}\right]=\frac{1}{9}\cdot\frac{(8/9)^n-1}{8/9-1}=1-\left(\frac{8}{9}\right)^n$. Al passo 2, l'area rimasta è 1/9; al passo 3 è 1/9 + 8/81 = 17/81; al passo 4: 17/81 + $8/3^6$ = 161/729; al passo 5: 161/729 + $8/3^8$ = 1457/6561. La parte eliminata quindi è 1 – 1457/6561 = 5104/6561 [$(4/3)^{n-1}$]
8. **Dimostrare che un numero del tipo $2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$ è un numero perfetto se $(2^n - 1)$ è un numero primo. Ricordiamo che un numero si dice perfetto se è uguale alla somma di tutti i suoi divisori escluso il numero stesso. Per esempio 6 = 1 + 2 + 3, 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14.**
   I divisori di $2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$ sono: {1, 2, 2^2, …, 2^{n-1}, $2^n - 1$, $2 \cdot (2^n - 1)$, $2^2 \cdot (2^n - 1)$, …, $2^{n-2} \cdot (2^n - 1)$}. Abbiamo escluso il numero stesso e abbiamo supposto che $(2^n - 1)$ sia primo. Sommiamo questi divisori: $(1 + 2 + 2^2, \ldots, 2^{n-1}) + (2^n - 1) \cdot (1 + 2 + 2^2, \ldots, 2^{n-2}) = 2^n - 1 + (2^n - 1) \cdot (2^{n-1} - 1) = (2^n - 1) \cdot (1 + 2^{n-1} - 1) = (2^n - 1) \cdot 2^{n-1}$. Che equivale alla tesi.

Temi assegnati agli esami di stato

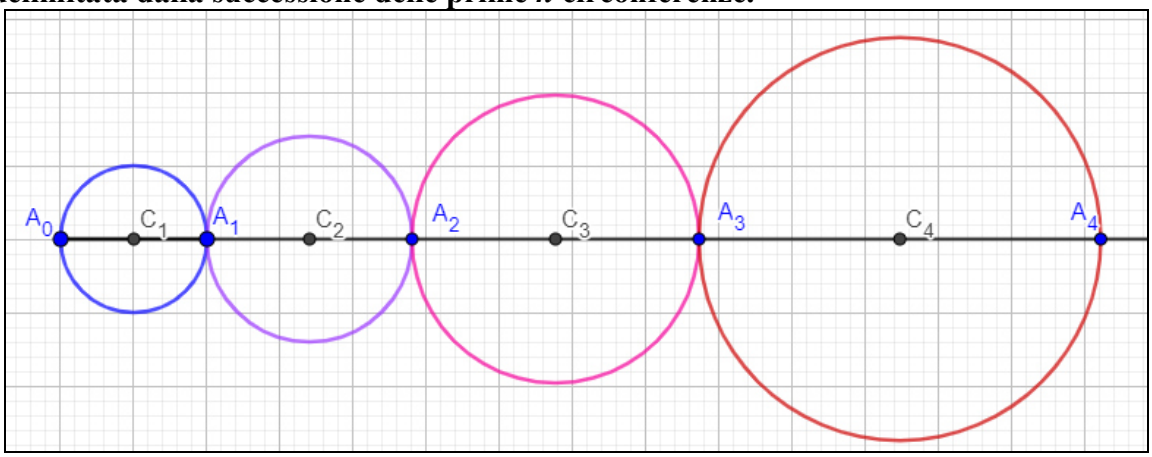
1. **(Liceo scientifico PNI 1994/95) In un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali *Oxy* è dato il punto $A_0 \equiv (1, 0)$. Si costruisca il triangolo rettangolo OA_0A_1 avente il vertice A_1 sull'asse delle ordinate e sia α l'angolo $O\hat{A}_0A_1$. Si conduca per A_1 la perpendicolare alla retta A_0A_1 che incontra l'asse delle ascisse in A_2; si conduca per A_2 la perpendicolare alla retta A_1A_2 che incontra l'asse delle ordinate in A_3 e così via, ottenendo una spezzata $A_0A_1A_2A_3$ ... $A_{n-1}A_n$ i cui vertici di indice dispari appartengono all'asse delle ordinate e quelli di indice pari all'asse delle ascisse. Il candidato dimostri che le lunghezze dei lati della spezzata sono in progressione geometrica e calcoli la lunghezza l_n della spezzata.**



Consideriamo la figura costruita fino al passo 4. Abbiamo: $\overline{A_0A_1} = \frac{1}{cos(\alpha)} = sec(\alpha); \overline{A_1A_2} = \overline{OA_1} \cdot sec(\alpha) = tan(\alpha) \cdot sec(\alpha); \overline{A_2A_3} = \overline{OA_2} \cdot sec(\alpha) = \overline{A_1A_2} \cdot sin(\alpha) \cdot sec(\alpha) = tan(\alpha) \cdot sec(\alpha) \cdot sin(\alpha) \cdot sec(\alpha) = tan^2(\alpha) \cdot sec(\alpha)$. Continuando troveremo quindi una progressione geometrica di ragione $tan(\alpha)$, la cui somma n-esima vale:

$$l_n = sec(\alpha) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} tan^k(\alpha) = sec(\alpha) \cdot \frac{tan^n(\alpha) - 1}{tan(\alpha) - 1} = \frac{tan^n(\alpha) - 1}{sin(\alpha) - cos(\alpha)}$$

2. **(Istituto magistrale PNI 1994/95) Su una semiretta di origine A_0 è dato il segmento A_0A_1 di lunghezza 2. Si considerino i segmenti adiacenti A_1A_2, A_2A_3, …, $A_{n-1}A_n$ tali che il rapporto tra ogni segmento e il precedente sia k. Il candidato dimostri che le aree dei cerchi aventi per diametro i suddetti segmenti sono i termini di una progressione geometrica e calcoli l'area S_n della parte di piano delimitata dalla successione delle prime n circonferenze.**



I raggi misurano: $\{1, k, k^2, k^3, \ldots, k^n, \ldots\}$, quindi le aree: $\{\pi, \pi k^2, \pi k^4, \pi k^6, \ldots, \pi k^{2n}, \ldots\}$, che è una progressione geometrica di ragione k^2. Dobbiamo calcolare $\pi + \pi k^2 + \pi k^4 + \pi k^6 + \ldots + \pi k^{2n} = \pi \cdot (1 + k^2 + k^4 + k^6 + \ldots + k^{2n}) = \pi \cdot \frac{k^{2n+2} - 1}{k^2 - 1}$.

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

1. **(S 1948) Tre numeri sono in progressione aritmetica, altri tre in progressione geometrica. Sommando termine a termine i due valori delle progressioni che occupano la stessa posizione, otteniamo 85, 76 e 84, mentre la somma dei termini della progressione aritmetica è 126. Trovare i termini delle due progressioni.**

Indichiamo con $(x - y, x, x + y)$ la progressione aritmetica e con $(z/t, z, zt)$ quella geometrica. Le condizioni equivalgono alla risoluzione del sistema $\begin{cases} x - y + \frac{z}{t} = 85 \\ x + z = 76 \\ x + y + zt = 84 \\ 3x = 126 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 42 - y + \frac{34}{t} = 85 \\ z = 34 \\ 42 + y + 34t = 84 \\ x = 42 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 84 + 34 \cdot \frac{1 + t^2}{t} = 169 \\ z = 34 \\ y = 42 - 34t \\ x = 42 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}34t^2-85t+34=0\\ z=34\\ y=42-34t\\ x=42\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=\dfrac{85\pm\sqrt{7225-4264}}{68}=\dfrac{85\pm51}{68}\\ z=34\\ y=42-34t\\ x=42\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=2\\ z=34\\ y=-26\\ x=42\end{cases}\vee\begin{cases}t=1/2\\ z=34\\ y=25\\ x=42\end{cases}.$$

E quindi: (16, 42, 68) e (17, 34, 68) oppure (16, 42, 68) e (68, 34, 17)

2. **(S 1953) Bob ha 10 tasche e 44 dollari. Vuole sistemare i dollari nelle tasche in modo che ciascuna ne contenga un numero differente. Riesce a farlo?**
   No perché se lascia una tasca vuota, nelle altre ne deve mettere una in più fino ad arrivare a 9, ma 0 + 1 + 2 + …+ 9 = 45.
3. **(AHSME 1953) In una progressione geometrica di termini positivi, ogni termine è uguale alla somma dei due termini che lo seguono, quanto vale la ragione?**
   Si ha: $a_n = a_{n+1} + a_{n+2} \Leftrightarrow a_n = qa_n + q^2a_n \Leftrightarrow\ q^2 + q - 1 = 0$, la cui unica soluzione positiva è $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.
4. **(AHSME 1955) Dimostrare che se l'equazione $ax^2 + 2bx + c = 0$ ha due soluzioni reali e coincidenti, allora a, b e c sono in progressione geometrica.**
   Deve essere $\Delta/4 = b^2 - ac = 0 \Rightarrow b^2 = ac$. Quindi $b/a = c/b$, che equivale alla tesi.
5. **(AHSME 1955) Consideriamo una progressione geometrica il cui primo termine e la ragione non sono nulli e una progressione aritmetica il cui primo termine è 0. Costruiamo una nuova successione sommando termine a termine gli elementi delle dette progressioni. Quanto vale la somma dei primi dieci termini di questa nuova successione, sapendo che i suoi primi 3 termini sono {1, 1, 2}?**
   Le progressioni sono: $\{x, xq, xq^2, \ldots, xq^9\}$ e $\{0, d, 2d, \ldots, 9d\}$. la nuova successione quindi è $\{x, xq + d, xq^2 + 2d, \ldots, xq^9 + 9d\}$. Si ha: $x = 1$, $xq + d = 1$, $xq^2 + 2d = 2$, da cui $x = 1$, $d = -1$, $q = 2$. Quindi la successione è: {1, 1, 2, 5, 12, 27, 58, 121, 248, 503}, la somma dei suoi elementi è $\dfrac{2^{10}-1}{2-1}-\dfrac{9\cdot10}{2}=978$.
6. **(AHSME 1958) Il primo termine di una successione di numeri naturali consecutivi è $k^2 + 1$, determinare la somma dei primi $2k + 1$ elementi di tale successione.**
   $(k^2 + 1) + (k^2 + 2) + \ldots + (k^2 + 2k + 1) = k^2 \cdot (2k + 1) + [1 + 2 + \ldots + (2k + 1)] = k^2 \cdot (2k + 1) + \dfrac{(2k+1)(2k+2)}{2} = k^2 \cdot (2k + 1) + (k + 1)\cdot (2k + 1) = (k^2 + k + 1) \cdot (2k + 1) = 2k^3 + 3k^2 + 3k + 1.$
7. **(AHSME 1959) Diciamo progressione armonica una successione di numeri i cui reciproci sono in progressione aritmetica, per esempio $\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots\right\}$. I primi tre termini di una progressione armonica sono 3, 4, 6. Determinare la somma dei primi quattro termini di tale progressione.**
   La progressione aritmetica associata è {1/3, ¼, 1/6, x} e si ha: ¼ = 1/3 + d ⇒ d = ¼ – 1/3 = –1/12. E in effetti: ¼ – 1/12 = 1/6. Pertanto: x = 1/6 – 1/12 = 1/12. Infine, i primi quattro termini della progressione armonica sono: {3, 4, 6, 12} e la loro somma è 3 + 4 + 6+ 12 = 25.
8. **(AHSME 1960) Data una progressione aritmetica di primo termine a e ragione d, sommiamo i suoi primi n termini, i suoi primi $2n$ termini e i suoi primi $3n$ termini. Indichiamo con s_1, s_2 e s_3 le tre somme. Quanto vale $s_3 - s_2 - s_1$?**
   $$3n\frac{2a+(3n-1)d}{2}-2n\frac{2a+(2n-1)d}{2}-n\frac{2a+(n-1)d}{2}=n\frac{6a+(9n-3)d-4a-(4n-2)d-2a-(n-1)d}{2}=n\frac{4nd}{2}=2n^2d$$
9. **(AHSME 1961) La somma dei primi 50 termini di una progressione aritmetica è 200, la somma dei successivi 50 termini è 2700. Quanto vale a_1?**
   $$\begin{cases}\cancel{50}\,\dfrac{2a_1+49d}{2}=\cancel{200}^{\,4}\\ \cancel{50}\,\dfrac{2a_{51}+49d}{2}=\cancel{2700}^{\,54}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{2a_1+49d}{2}=4\\ \dfrac{2(a_1+50d)+49d}{2}=54\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{2a_1+49d}{2}=4\\ \dfrac{2a_1+49d}{2}+50d=54\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{2a_1+49d}{2}=4\\ 50d=50\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=-41/2\\ d=1\end{cases}$$
10. **(AHSME 1962) Tutti gli angoli interni di un pentagono sono in progressione aritmetica, quale fra i seguenti valori misura certamente uno degli angoli? A) 108° B) 90° C) 72° D) 54° E) 36°**
    Gli angoli misurano: $x - 2d$, $x - d$, x, $x + d$, $x + 2d$. La loro somma è $5x = 540° \Rightarrow x = 108°$. Risposta

corretta: A.

11. (AHSME 1963) Tre numeri non nulli, {*a*, *b*, *c*} formano una progressione aritmetica. Sapendo che {*a* + 1, *b*, *c*} e {*a*, *b*, *c* + 2} sono progressioni geometriche, determinare *b*.

$$\begin{cases} \dfrac{b}{a+1}=\dfrac{c}{b} \\ \dfrac{b}{a}=\dfrac{c+2}{b} \\ b-a=c-b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=8 \\ b=12 \\ c=16 \end{cases}$$. Abbiamo trawcurato la soluzione banale $a = b = c = 0$.

12. (AHSME 1964) La somma di *n* termini di una progressione aritmetica di ragione 2 è 153, se a_1 è intero e *n* > 1, quali sono i possibili valori che può assumere *n*?

$n\dfrac{2a_1+2(n-1)}{2}=153 \Rightarrow n(a_1+n-1)=153 \Rightarrow n^2+(a_1-1)n-153=0$. Il prodotto delle soluzioni intere è 153, quindi queste possono essere soltanto (1; 153), (3; 51), (9; 17). Tutti questi numeri sono quindi i valori possibili per *n*.

13. (AHSME 1965) Comunque consideriamo *n* termini di una progressione aritmetica, sommano $2n + 3n^2$. Determinare quanto vale il termine di posto *r*.

$a_r = (a_1 + a_2 + \ldots + a_r) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{r-1}) = 2r + 3r^2 - [2(r-1) + 3)r - 1)^2] = 6r - 1$.

14. (AHSME 1966) Date le progressioni {8, 12, 16, ...} e {17, 19, 21, ...}, per quali valori di *n* le loro somme sono uguali?

La prima ha termine generale $4 + 4n$, la seconda $15 + 2n$. Le loro somme fino al termine *n*-esimo valgono: $4n + 2n(n + 1)$ e $15n + n(n + 1)$. Deve aversi: $4n + 2n^2 + 2n = 15n + n^2 + n \Rightarrow n^2 - 10n = 0 \Rightarrow n = 10$

15. (AHSME 1968) Gli angoli interni di un poligono convesso sono in progressione aritmetica di ragione 5°, se l'angolo maggiore è 160°, quanti lati ha il poligono? Suggerimento: si ricordi che in un poligono convesso con *n* lati, la misura della somma degli angoli interni uguaglia quella di *n* – 2 angoli piatti.

L'angolo minore misura, in gradi, *x*, il maggiore $x + 5(n - 1) = 160$. La somma di tutti gli angoli interni misura $nx + 5 \cdot n(n-1)/2 = (n-2)180$. Risolvendo otteniamo $x = 120°$ e $n = 9$,l'altra soluzione non è accettabile perché $n < 0$.

16. (AHSME 1971) Moltiplichiamo i primi *n* elementi della progressione $\left\{10^{\frac{1}{11}}, 10^{\frac{2}{11}}, \ldots\right\}$. Quanti dobbiamo moltiplicarne almeno affinché il prodotto superi 100000?

$10^{1/11} \cdot 10^{2/11} \cdot \ldots \cdot 10^{n/11} = 10^{\frac{n\cdot(n+1)}{22}} > 10^6 \Rightarrow \dfrac{n\cdot(n+1)}{22} > 6 \Rightarrow n > 11$, quindi $n = 12$.

17. (AHSME 1971) Sia *P* il prodotto dei primi *n* termini di una progressione geometrica, *S* la loro somma e *S'* la somma dei loro reciproci. Esprimere *P* in funzione di *S*, *S'* e *n*.

$$P=\sqrt{(a_1\cdot a_n)^n}=\sqrt{\left(a_1^2\cdot q^{n-1}\right)^n}, S=a_1\cdot\frac{q^n-1}{q-1}, S'=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_1q}+\ldots+\frac{1}{a_1q^{n-1}}=\frac{q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+q+1}{a_1q^{n-1}}=\frac{q^n-1}{a_1q^{n-1}(q-1)}$$

Si ha: $\dfrac{S}{S'}=a_1^2q^{n-1} \Rightarrow \sqrt{\left(\dfrac{S}{S'}\right)^n}=P$.

18. (AHSME 1972) Trovare due numeri *a* e *b* in modo tale che {3, *a*, *b*} sia una progressione geometrica, e {*a*, *b*, 9} una progressione aritmetica.

$$\begin{cases} a/3=b/a \\ b-a=9-b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=3 \end{cases} \vee \begin{cases} a=9/2 \\ b=27/4 \end{cases}$$

19. (AHSME 1973) *a*, *b*, *c* sono tre numeri in progressione geometrica, con $1 < a < b < c$, *n* è un numero naturale maggiore di 1. Consideriamo $\log_a(n)$, $\log_b(n)$, $\log_c(n)$, quale delle seguenti affermazioni è corretta? Giustificare le risposte.

A) formano una progressione geometrica B) formano una progressione aritmetica C) i reciproci formano una progressione aritmetica D) il secondo termine è *n*–esima potenza del primo e il terzo è *n*–esima potenza del secondo.

$\{\log_2(32), \log_4(32), \log_8(32)\} = \{5, 5/2, 5/3\}$ non è una progressione geometrica, né una progressione aritmetica; la stessa progressione non verifica D. Invece: $\log_n(b) = \log_n(aq) = \log_n(a) + \log_n(q)$ e analogamente: $\log_n(c) = \log_n(aq^2) = \log_n(a) + 2\log_n(q)$, quindi $\{\log_n(a), \log_n(b), \log_n(c)\}$ rappresenta una progressione aritmetica. Poiché $\{1/\log_a(n), 1/\log_b(n), 1/\log_c(n)\} = \{-\log_n(a), -\log_n(b), -\log_n(c)\}$, anch'essa è una progressione aritmetica.

20. (AHSME 1973) Una progressione aritmetica ha un numero pari di termini, la somma dei termini di posto dispari è 24, quella di quelli di posto pari è 30. Sapendo che la differenza fra l'ultimo e il primo termine è 10,5, determinare quanti sono i termini.

La progressione è: $\{x, x + d, x + 2d, \ldots, x + (2n - 1)d\}$, si ha: $\{(x + d) + (x + 3d) + \ldots + [x + (2n - 1)d]\} - [x + (x + 2d) + \ldots + (x + 2nd)] = d + 3d + \ldots + (2n - 1)d - (2d + 4d + \ldots + 2nd) = d + d + \ldots + d = nd$. Quindi $nd = 30 - 24 = 6$. Inoltre: $x + (2n - 1)d - x = 10{,}5 \Rightarrow (2n - 1)d = 10{,}5 \Rightarrow 2nd - d = 10{,}5 \Rightarrow 12 - d = 10{,}5 \Rightarrow d = 1{,}5 \Rightarrow n = 4 \Rightarrow 2n = 8$.

21. (AHSME 1974) In una progressione geometrica $a_5 - a_4 = 576$ e $a_2 - a_1 = 9$. Quanto vale la somma dei primi cinque termini?

$$\begin{cases} a_1q^4 - a_1q^3 = 576 \\ a_1q - a_1 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1q^3(q-1) = 576 \\ a_1(q-1) = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q^3 = 576/9 \\ a_1(q-1) = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = 4 \\ a_1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \sum_{k=0}^{4} a_1q^k = 3 \cdot \frac{4^5 - 1}{4 - 1} = 1023.$$

22. (AHSME 1976) Le misure degli angoli interni di un poligono convesso sono in progressione aritmetica. Se l'angolo più piccolo misura 100° ed il più grande 140°, quanti lati ha il poligono?

Si ha: $\frac{100 + 140}{2} n = 180(n - 2) \Rightarrow 120n = 180n - 360 \Rightarrow n = 6$.

23. (AHSME 1977) Consideriamo una successione di numeri positivi, $\{a_n\}$ che verificano la seguente proprietà $a_{n+2} = a_n \cdot a_{n+1}$. Quando a_n è una progressione geometrica?

Deve essere $a_{n+2}/a_{n+1} = a_{n+1}/a_n \Leftrightarrow (a_n \cdot a_{n+1})/a_{n+1} = (a_n \cdot a_{n-1})/a_n \Leftrightarrow a_n = a_{n-1}$, in questo caso si ottiene una progressione costante $\{k, k, \ldots\}$ che verifica l'ipotesi iniziale solo se $k = 1$.

24. (AHSME 1978)$\{x, a_1, a_2, y\}$ e $\{x, b_1, b_2, b_3, y\}$ sono due progressioni aritmetiche. Quanto vale $\frac{a_2 - a_1}{b_2 - b_1}$?

Indichiamo con d_i le ragioni delle due progressioni: $\frac{a_2 - a_1}{b_2 - b_1} = \frac{d_1}{d_2}$. Ma si ha: $y - x = 3d_1 = 4d_2 \Rightarrow d_1/d_2 = 4/3$.

25. (AHSME 1981) Un triangolo rettangolo ha i lati in progressione aritmetica, quale dei seguenti numeri può essere la misura di uno dei lati? A) 22 B) 58 C) 81 D) 91 E) 361

I lati misurano $x - d, x, x + d$ e si ha: $(x - d)^2 + x^2 = (x + d)^2 \Rightarrow x = 4d$. Pertanto i lati misurano $3d$, $4d$ e $5d$, ossia sono una terna pitagorica non primitiva (tranne che se $d = 1$). Fra i numeri proposti solo il numero 81 è multiplo di 3, gli altri non sono multipli né di 3, né di 4 o 5.

26. (AHSME 1981) In una progressione geometrica la somma dei primi due termini è 7, mentre la somma dei primi sei termini è 91, quanto vale la somma dei primi quattro termini?

Si ha: $a_1 \cdot \frac{q^2 - 1}{q - 1} = 7, a_1 \cdot \frac{q^6 - 1}{q - 1} = 91 \Rightarrow \frac{q^6 - 1}{q^2 - 1} = 13 \Rightarrow 1 + q^2 + q^4 = 13 \Rightarrow$

$q = \pm\sqrt{3} \Rightarrow a_1 = \frac{7}{1 \pm \sqrt{3}} = \frac{7(\pm\sqrt{3} - 1)}{2}$. Da cui: $a_1 \cdot \frac{q^4 - 1}{q - 1} = \frac{7(\pm\sqrt{3} - 1)}{2} \cdot \frac{9 - 1}{\pm\sqrt{3} - 1} = 28$.

27. (AHSME 1982) $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}$, $n > 3$, sono in progressione aritmetica, determinare n.

Deve essere: $\binom{n}{2} - \binom{n}{1} = \binom{n}{3} - \binom{n}{2} \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow n(n^2 - 9n + 14) = 0 \Rightarrow$ $n = 0, 2, 7$. Ovviamente l'unica soluzione accettabile è 7.

28. (AHSME 1987) a, x, b e $2x$ sono in progressione aritmetica, determinare a/b.

Riscriviamo: $a, a + d, a + 2d, a + 3d$, abbiamo: $\begin{cases} b = a + 2d \\ a + 3d = 2a + 2d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3a \\ a = d \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{3}$.

29. (AHSME 1991) Gli angoli interni di un esagono convesso sono in progressione aritmetica, quale fra i seguenti numeri può rappresentare la misura dell'angolo maggiore?
A) 165° B) 197° C) 170° D) 175° E) 179°
Gli angoli misurano: $x - 2d$, $x - d$, x, $x + d$, $x + 2d$, $x + 3d$. La loro somma è $6x + 3d = 720° \Rightarrow x + 3d = 720° - 5x = 5 \cdot (144° - x)$. Quindi deve essere un multiplo di 5 e deve essere il maggiore fra quelli presentati, quindi 175°.

30. (AHSME 1993) In una progressione aritmetica si ha: $a_4 + a_7 + a_{10} = 17$ e $a_4 + a_5 + ... + a_{14} = 77$, sapendo che $a_k = 13$, determinare k.
$3a_4 + 9d = 17$ e $11a_4 + 55d = 77 \Rightarrow a_4 = 11/3$, $d = 2/3$. Deve essere $a_k = a_4 + (k - 4)d \Rightarrow 13 = 11/3 + 2(k - 4)/3 \Rightarrow k = 18$.

31. (AHSME 1994) x, y, z sono in progressione geometrica di ragione r; x, $2y$, $3z$ sono in progressione aritmetica. Quanto vale r?
$2y - x = 3z - 2y \Rightarrow x = 4y - 3z$, ma è anche $y = rx$ e $z = r^2x$, quindi : $x = 4rx - 3r^2x \Rightarrow 3r^2 - 4r + 1 = 0 \Rightarrow r = 1/3 \vee r = 1$.

32. (AHSME 1997) Quale dei seguenti interi può essere la somma di 100 numeri interi consecutivi?
A) 1627384950 B) 2345678910 C) 3579111300 D) 4692581470 E) 5815937260
Abbiamo: $(x - 49) + (x - 48) + \ldots + x + (x + 1) + \ldots + (x + 50) = 100x + 50 = 50 \cdot (2x + 1)$. Fra i numeri proposti solo A e C sono divisibili per 50, ma 3579111300 è divisibile anche per 100 e quindi non va bene. La risposta corretta è A: $1627384950 = 50 \cdot (32547698 + 1)$.

33. (HSMC 2006) La somma di 49 interi consecutivi è 7^4. Qual è il primo di essi?
$(x - 24) + (x - 23) + \ldots + x + (x + 1) + \ldots + (x + 24) = 49x = 7^4 \Rightarrow x = 49$, quindi il primo numero è $49 - 24 = 25$.

34. (HSMC 2007) Determinare la somma dei primi 19 termini di una progressione aritmetica sapendo che $a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224$.
$4a_4 + 24d = 224 \Rightarrow a_4 + 6d = 56$. Dobbiamo determinare $\frac{a_1 + a_{19}}{2} \cdot 19 = \frac{a_4 - 3d + a_4 + 15d}{2} \cdot 19 = \Rightarrow (a_4 + 6d) \cdot 19 = 56 \cdot 19 = 1064$.

35. (Rice 2006) Il quinto termine di una progressione geometrica è 5!, il sesto è 6!. Qual è il quarto termine?
$q = 6!/5! = 6$, quindi $a_4 = 5!/6 = 20$

Questions in English

36. (S1954) Consider the table: 1 = 1; 3 + 5 = 8; 7 + 9 + 11 = 27; 13 + 15 + 17 + 19 = 64; 21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 125. Guess the general law suggested by these examples, express it in a suitable mathematical notation, and prove it.
Considera la tabella: $1 = 1$; $3 + 5 = 8$; $7 + 9 + 11 = 27$; $13 + 15 + 17 + 19 = 64$; $21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 125$. *Stabilisci la legge generale suggerita dagli esempi, esprimila in una corretta notazione matematica e provala*.
Osserviamo che il membro destro è il cubo di quanti sono gli addendi del membro di sinistra. Questi a loro volta sono numeri dispari consecutivi. Osserviamo che per esempio $(25 - 5 + 1) + (25 - 5 + 3) + (25 - 5 + 5) + (25 - 5 + 7) + (25 - 5 + 9) = 5^3$, quindi la legge generale è $(n^2 - n + 1) + (n^2 - n + 3) + \ldots + (n^2 + n - 1) = n^3$. Per provarla osserviamo che gli addendi sono quelli di una progressione aritmetica di ragione 2, quindi la somma sarà uguale a $\frac{\left(n^2 \cancel{-n+1}\right) + \left(n^2 \cancel{+n-1}\right)}{2} \cdot n = n^3$

37. (HSMC 1999) The sum of n terms in an arithmetic progression is 153, and the common difference is 2. If the first term is an integer, and $n > 1$, then what is the number of all possible values for n?
La somma di n termini in una progressione aritmetica è 153, *e la differenza comune è* 2. *Se il primo termine è intero e* $n > 1$, *qual è il numero di tutti i possibili valori per n*?
Si ha: $n \cdot \frac{2a_1 + (n-1) \cdot 2}{2} = 153 \Rightarrow [a_1 + (n + 1)] \cdot n = 153 = 3^2 \cdot 17$, che ha 6 divisori (1, 3, 9, 17, 51, 153), n può assumere il valore di 5 di essi.

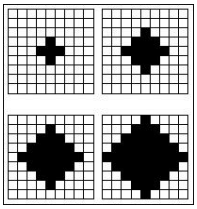
38. (AHSME 1999) Define a sequence of real numbers a_1, a_2, a_3, by $a_1 = 1$ and $a_{n+1}^3 = 99a_n^3$ for all $n \geq 1$. Then a_{100} equals?

Definiamo una successione di numeri reali a_1, a_2, a_3, *con* $a_1 = 1$ *e* $a_{n+1}^3 = 99 \cdot a_n^3$ *per tutti gli* $n \geq 1$. *Allora* a_{100} *vale*?

$a_{100}^3 = 99a_{99}^3 = 99^2 a_{98}^3 = \ldots = 99^{99} a_1^3 = 99^{99} \Rightarrow a_{100} = 99^{33}$.

39. (HSMC 1999) If $3 + 7 + 11 + \ldots + 87 = 15k$, find k.

Abbiamo $3 + (3 + 4) + (3 + 2 \cdot 4) + \ldots + (3 + 21 \cdot 4) = 3 \cdot 22 + 11 \cdot 21 \cdot 4 = 15 \cdot 66 \Rightarrow k = 66$.

40. (HSMC 2001) Consider the sequence in figure.  **If this sequence continues, how many shaded squares will there be at stage 10? Hint: The sum of the first n odd numbers is n^2.**

Consideriamo la successione in figura. Se questa successione continua, quanti dei quadrati saranno colorati al passo 10? *Suggerimento: la somma dei primi n numeri dispari consecutivi è* n^2

Al primo passo sono $2 \cdot 1 + 3 = 5$, al secondo $2 \cdot (1 + 3) + 5$, al terzo $2 \cdot (1 + 3 + 5) + 7$, al quarto $2 \cdot (1 + 3 + 5 + 7) + 9$, quindi al decimo saranno: $2 \cdot [1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2 \cdot 10 - 1)] + 21 = 2 \cdot 10^2 + 21 = 221$.

41. (HSMC 2002) What is the smallest positive integer $n > 1$ such that $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ is divisible by 9?

Qual è il più piccolo intero positivo $n > 1$ *tale che* $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ *sia divisibile per* 9?

Deve essere $n(n + 1)/2 = 9k \Rightarrow n(n + 1) = 18k$, dato che $18 = 2 \cdot 3^2$, il più piccolo n per cui $n(n + 1)$ è multiplo di 18 è 8 ($8 \cdot 9 = 72 = 4 \cdot 18$).

42. (HSMC 2005) The sum of the sixth and the ninth terms of an arithmetic sequence is 20, and their product is 64. Find the tenth term if the first term is negative.

La somma del sesto e nono termine di una progressione aritmetica è 20, *e il loro prodotto è* 64. *Trovare il decimo termine se il primo è negativo*.

$\begin{cases} a_6 + a_9 = 20 \\ a_6 a_9 = 64 \end{cases} \Rightarrow z^2 - 20z + 64 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_6 = 4 \\ a_9 = 16 \end{cases}$, dato che $a_1 < 0$ e I due valori sono positive, vuol dire che la ragione è positive, quindi $a_6 < a_9$. Inoltre $16 = 4 + 3d \Rightarrow d = 4 \Rightarrow a_{10} = 16 + 4 = 20$.

43. (HSMC 2007) Find the sum of the first 19 terms of an arithmetic sequence a_1, a_2, a_3, ... if it is known that $a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224$.

Trova la somma dei primi 19 *termini di una progressione aritmetica* a_1, a_2, a_3, ... *se sappiamo che* $a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224$.

$4a_4 + 4d + 8d + 12d = 224 \Rightarrow a_4 + 6d = 56$. $a_1 + a_2 + \ldots + a_{19} = (a_4 - 3d) + (a_4 - 2d) + (a_4 - d) + a_4 + (a_4 + d) + \ldots + (a_4 + 15d) = 19a_4 + (4 + 5 + \ldots + 15)d = 19a_4 + (15 \cdot 8 - 6)d = 19a_4 + 114d = 19 \cdot (a_4 + 6d) = 19 \cdot 56 = 1064$.

44. (HSMC 2006) Find all possible first terms of the geometric sequence if the sum and the product of its first three terms are equal to 63 and 1728 respectively.

Trova tutti i possibili primi termini della progressione geometrica la cui somma e il cui prodotto dei primi tre termini valgono 63 *e* 1728 *rispettivamente*

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 63 \\ a_1 a_2 a_3 = 1728 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 \cdot (1 + q + q^2) = 63 \\ a_1^3 q^3 = 1728 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 \cdot \dfrac{q^3 - 1}{q - 1} = 63 \\ a_1 q = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12 \cdot \dfrac{q^3 - 1}{q^2 - q} = 63 \\ a_1 = 12/q \end{cases} \Rightarrow 4q^3 - 4 = 21q^2 - 21q$$

$\Rightarrow 4q^3 - 21q^2 + 21q - 4 = 0 \Rightarrow q = ¼ \vee q = 4 \Rightarrow a_1 = 48 \vee 3$. Ovviamente la soluzione $q = 1$ non è accettabile.

45. (HSMC 2006) Three numbers, with the third one being 12, form a geometric sequence. If the third number were 9, the numbers would form an arithmetic sequence. Find the first two numbers. (Find all possible answers.)

Tre numeri, il cui terzo è 12, *formano una progressione geometrica. Se il terzo numero fosse* 9, i *numeri formerebbero una progressione aritmetica. Trovare i primi due numeri.* (*Trova tutte le risposte possibili*.)

Sia $\{x,\ y,\ 12\}$ la progressione geometrica e $\{x,\ y,\ 9\}$ quella aritmetica. Abbiamo $\begin{cases} y/x = 12/y \\ y - x = 9 - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 6 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 27 \\ y = 18 \end{cases}$.

46. (HSMC 2007) If the product of three numbers in geometric progression is 216 and their sum is 19, find the largest of the three numbers.
Se il prodotto di tre numeri in progressione geometrica è 216 *e la loro somma è* 19, *trova il maggiore di questi numeri.*

$$\begin{cases} x^3q^3 = 216 \\ x\left(1+q+q^2\right) = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xq = 6 \\ x\left(1+q+q^2\right) = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6/q \\ 6\left(1+q+q^2\right) = 19q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6/q \\ 6q^2 - 13q + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ q = 2/3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 6 \\ q = 3/2 \end{cases}$$

Quindi il maggiore è $xq^2 = 9 \cdot 4/9 = 9 \vee 6 \cdot 9/4 = 9$.

47. (HSMC2008) The numbers $ln(a^3 \cdot b^7)$, $ln(a^5 \cdot b^{12})$, $ln(a^8 \cdot b^{15})$, are the first three terms of an arithmetic sequence whose 12th term is $ln(b^n)$,. What is n?
I numeri $ln(a^3 \cdot b^7)$, $ln(a^5 \cdot b^{12})$, $ln(a^8 \cdot b^{15})$, *sono i primi tre termini di una progressione aritmetica il cui* 12° *termine è* $ln(b^n)$. *Quanto vale* n?
$ln(a^5 \cdot b^{12}) - ln(a^3 \cdot b^7) = ln(a^8 \cdot b^{15}) - ln(a^5 \cdot b^{12}) \Rightarrow 5ln(a) + 12ln(b) - 3ln(a) - 7\ ln(b) = 8ln(a) + 15ln(b) - 5ln(a) - 12ln(b) \Rightarrow 2ln(b) - ln(a) = 0 \Rightarrow ln(b^2/a) = 0 \Rightarrow b^2/a = 1 \Rightarrow a = b^2$. Quindi la progressione diventa: $ln(b^{13})$, $ln(b^{22})$, $ln(b^{31})$, … $\Rightarrow 13ln(b)$, $22ln(b)$, $31ln(b)$, … che perciò ha ragione $9ln(b)$, perciò il dodicesimo termine è $13ln(b) + 11 \cdot 9ln(b) = 112ln(b) = ln(b^{112})$, infine $n = 112$.

Test di Verifica

1. Quali fra le seguenti successioni rappresentano progressioni aritmetiche?

A $2n+11\ _{n\in\mathbb{N}}$ **B** $2n^2\ _{n\in\mathbb{N}}$ **C** $\left\{\frac{n}{2}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ **D** $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ **E** $n^2-1\ _{n\in\mathbb{N}}$

Risposte corrette: A – C, infatti $2(n + 1) + 111 - 2n - 11 = 2$ e $(n + 1)/2 - n/2 = ½$. Negli altri casi la differenza fra due termini consecutivi non è costante.

2. Quali fra le seguenti successioni rappresentano progressioni geometriche?

A $n^2+1\ _{n\in\mathbb{N}}$ **B** $\left(1+\sqrt{3}\right)^n\ _{n\in\mathbb{N}}$ **C** $2^{n^2}\ _{n\in\mathbb{N}}$ **D** $sin^n\ x\ _{n\in\mathbb{N}, x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}}$ **E** $\left\{\frac{3^n}{2^{n+1}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$

Risposte corrette: B – D – E, infatti $\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^{n+1}}{\left(1+\sqrt{3}\right)^n} = 1+\sqrt{3}; \frac{sin^{n+1}\ x}{sin^n\ x} = sin\ x\ ; \frac{3^{n+1}}{2^{n+2}} \cdot \frac{2^{n+1}}{3^n} = \frac{3}{2}$. Negli altri casi il rapporto fra due termini consecutivi non è costante.

3. Quali fra le seguenti progressioni aritmetiche hanno ragione uguale a 3?

A $3-2n\ _{n\in\mathbb{N}}$ **B** $3n-7\ _{n\in\mathbb{N}}$ **C** $\left\{\frac{1}{2}+3n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ **D** $3-3n\ _{n\in\mathbb{N}}$ **E** $n-3\ _{n\in\mathbb{N}}$

Risposte corrette: B – C, infatti: $3(n + 1) - 7 - 3n + 7 = 3$; $½ + 3(n + 1) - ½ - 3n = 3$. Mentre: $3 - 2(n + 1) - 3 + 2n = 2$; $3 - 3(n + 1) - 3 + 3n = -3$; $(n + 1) - 3 - n + 3 = 1$.

4. Quali fra le seguenti progressioni geometriche hanno ragione uguale a –½?

A $-2^{-n-1}\ _{n\in\mathbb{N}}$ **B** $\left\{-\frac{1}{2^n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ **C** $\left\{3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ **D** $-2^{1-n}\ _{n\in\mathbb{N}}$ **E** $2^{3-n}\ _{n\in\mathbb{N}}$

Risposte corrette: A – D, infatti: $(-2)^{-n}/(-2)^{-n-1}) = -½$; $(-2)^{1-n-1}/(-2)^{1-n} = -½$. Mentre: $-½^{n+1}/(-½^n) = ½$; $3(-½)^{2n+3}/[3(-½)^{2n+1}] = ¼$; $2^{3-n-1}/2^{3-n} = ½$.

5. Sia una progressione geometrica a_n di ragione q. Quali fra le seguenti uguaglianze sono corrette?

A $a_3 + a_4 + \ldots + a_{50} = a_3 \cdot \frac{q^{48}-1}{q-1}$ **B** $a_{12} = a_5 \cdot q^7$ **C** $a_1 \cdot \ldots \cdot a_{25} = \sqrt{(a_1 \cdot a_{25})^{25}}$

D $a_{n+2} = q^3 \cdot a_n$ **E** $q = -1 \Rightarrow a_7 = a_5$

Risposte corrette: B – C – E. Mentre: $a_3 + a_4 + ... + a_{50} = a_3 \cdot \frac{q^{47} - 1}{q - 1}$; $a_{n+2} = q^2 \cdot a_n$

6. **In una progressione geometrica la differenza fra il terzo ed il secondo termine è 4 e la differenza fra il quinto e il quarto termine è 36. Quanto vale il primo termine?**
A 3/2 o 2/3 B 1/3 o 3 C 1/3 o 2/3 D Non si può determinare dai dati E Nessuno dei precedenti
Risposta corretta: C.
$\begin{cases} a_3 - a_2 = 4 \\ a_5 - a_4 = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2(1-q) = 4 \\ a_4(1-q) = 36 \end{cases} \Rightarrow \frac{a_4}{a_2} = 9 \Rightarrow \frac{a_2 q^2}{a_2} = 9 \Rightarrow q = \pm 3 \Rightarrow a_2 = \frac{4}{-2} = -2 \vee a_2 = \frac{4}{4} = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{2}{3} \vee \frac{1}{3}$
7. **La somma di tre numeri in progressione aritmetica è 60, mentre la somma dei loro quadrati è 300, quanto vale il secondo termine?**
A 10 B 20 C 25 D Non si può determinare dai dati E Nessuno dei precedenti
Risposta corretta: B. $x - d + x + x + d = 60 \Rightarrow x = 20$. La seconda informazione è inutile, serve solo a determinare la ragione.
8. **Data una progressione aritmetica $\{a_n\}$, possiamo dire che la media aritmetica dei primi suoi n termini è uguale a?**
A $(a_1 + a_n)/2$ B $(a_1 + a_2)/2$ C $(a_{n-1} + a_n)/2$ D $(a_1 + a_n)/n$ E Nessuno dei precedenti
Risposta corretta: A. Infatti $\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} = \frac{n a_1 + n(n-1)d/2}{n} = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} = \frac{a_1 + a_n}{2}$
9. **Quanto vale $1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \ldots + 2^{20}$?**
A $\frac{2^{21}+1}{3}$ B $\frac{2^{-21}+1}{3}$ C $\frac{2^{21}-1}{3}$ D $\frac{1-2^{21}}{3}$ E Nessuno dei precedenti
Risposta corretta: A. Infatti è una progressione geometrica di ragione (–2), quindi la somma è $\frac{(-2)^{21} - 1}{-3} = \frac{2^{21} + 1}{3}$
10. **Quanto vale la somma di tutti i numeri naturali compresi fra 68 e 657 e divisibili per 4?**
A 855500 B 50976 C 54076 D 53576 E Nessuno dei precedenti
Risposta corretta: D. Dobbiamo sommare alcuni termini consecutivi della progressione aritmetica di ragione 4: $68 + (68 + 4) + (68 + 2 \cdot 4) + \ldots + (68 + 147 \cdot 4) = 68 \cdot 148 + 74 \cdot 147 \cdot 4 = 53576$. Ci fermiamo a $68 + 147 \cdot 4 = 656$.
11. **Calcolare la somma di tutti le potenze di 2 comprese fra 75 e 7898.**
Dobbiamo sommare alcuni termini consecutivi della progressione geometrica di ragione 2: $2^7 + \ldots + 2^{12} = 2^7 (1 + \ldots + 2^5) = 2^7 (2^6 - 1) = 8064$
12. **Date due progressioni aritmetiche $a_1, a_2, ..., a_n$ e $b_1, b_2, ..., b_n$, si costruisca una nuova progressione aritmetica sommando le due progressioni termine a termine, $a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n$. Sapendo che $a_1 = 25$, $b_1 = 75$ e $a_{100} + b_{100} = 100$, determinare la ragione delle due progressioni.**
$(a_{100} + b_{100}) - (a_1 + b_1) = 0 \Rightarrow a_{100} - a_1 = b_1 - b_{100} \Rightarrow a_1 + 99d_1 - a_1 = b_1 + 99d_2 - b_1 \Rightarrow d_1 = d_2$. Poiché la somma fra i termini non cambia, vuol dire che essi sono costanti, quindi $d = 0$ per entrambe.
13. **In una progressione geometrica conosciamo $a_2 = 4$, $q = ½$ e $S_n = 127/8$, determinare n.**
$a_1 = 4/½ = 8 \Rightarrow 8 \cdot \frac{(1/2)^{n+1} - 1}{1/2 - 1} = \frac{127}{8} \Rightarrow 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{127}{128} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{128} \Rightarrow n + 1 = 7$, poiché partiamo da 0, $n = 7$
14. **Una progressione aritmetica è una successione numerica in cui la** differenza **tra due elementi consecutivi è** costante **e si chiama** ragione **della progressione.**
15. **In una progressione geometrica il** rapporto **tra due elementi** consecutivi **è costante. Il quinto termine di una progressione geometrica di ragione 2 e primo elemento 1 vale** 16

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. **(Odontoiatria 1997) In una progressione geometrica il primo elemento è 2 e il sesto è 0,0625. Il quinto valore della progressione è: A) 0,125 B) 0,0125 C) 0,5 D) 0,05 E) nessuno dei precedenti è corretto**

   Risposta corretta: A. $a_1 = 2$, $a_6 = 1/2^4 = 2 \cdot q^5 \Rightarrow q = ½ \Rightarrow a_5 = 1/2^4 \cdot 2 = 1/8 = 0{,}125$

2. **(Odontoiatria 1998) Gli angoli di un triangolo sono in progressione aritmetica, e il maggiore è il doppio del minore; i valori in gradi degli angoli sono:**
   A) 20, 30, 40 B) 40, 50, 80 C) 60, 90, 120 D) 40, 60, 80 E) 45, 70, 95.

   Risposta corretta: D. $x - d + x + x + d = 180° \Rightarrow x = 60°$; posiamo quindi dire che l'unica risposta corretta possibile è la D. Se vogliamo continuare abbiamo: $60° + d = 2(60° - d) \Rightarrow d = 20°$.

3. **(Scuola Superiore di Catania) Dimostrare che se tre numeri reali (diversi tra loro) formano una progressione aritmetica, allora quei tre numeri, nello stesso ordine, non possono formare una progressione geometrica. Trovare poi tre numeri reali relativi (diversi tra loro e da 0) in progressione aritmetica che, in un ordine diverso, formino una progressione geometrica.**

   $\{x - d; x; x + d\}$ sono progressione aritmetica, ma perché sia $\frac{x}{x-d} = \frac{x+d}{x} \Rightarrow x^2 = x^2 - d^2 \Rightarrow d = 0$, che non è possibile per una progressione geometrica.

   Per esempio $\{-2a, a, 4a\}$ sono progressione aritmetica con $d = 3a$; $\{a, -2a, 4a\}$ sono progressione geometrica con $q = -2$.

4. **(Corso di laurea in Informatica, Udine 2009) Fra le seguenti terne di numeri ce n'è una ed una sola formata da numeri in progressione geometrica.**

   A) $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{4}{15}$ **B)** $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{9}{16}$ **C)** $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{3}{25}$ **D)** $\frac{1}{5}, \frac{2}{15}, \frac{3}{20}$

   Risposta corretta: C.

   $\left(\frac{4}{15} : \frac{1}{4} = \frac{16}{15} \neq \frac{15}{12} = \frac{1}{3} : \frac{4}{15}\right); \left(\frac{9}{16} : \frac{1}{2} = \frac{9}{8} \neq \frac{4}{3} = \frac{3}{4} : \frac{9}{16}\right); \left(\frac{1}{5} : \frac{3}{25} = \frac{5}{3} = \frac{5}{3} = \frac{1}{3} : \frac{1}{5}\right); \left(\frac{1}{5} : \frac{2}{15} = \frac{3}{2} \neq \frac{3}{4} = \frac{3}{20} : \frac{1}{5}\right)$