10. Il calcolo differenziale

10.1 Le Derivate

Concetto di derivata di una funzione

Calcolare le derivate, se esistono, delle seguenti funzioni nei punti accanto indicati

Teniamo conto che finché le espressioni sono algebriche, contano solo i coefficienti di *h*, pertanto è del tutto inutile calcolare gli altri, che spariranno al tendere di *h* a 0. Quindi in tutti gli esercizi in cui i calcoli sono lunghi indichiamo con H tutti i termini che hanno *h* di grado superiore a 1.

1. **a)** $f(x) = x^2 + x, x_0 = -1$; **b)** $f(x) = 2x^2 + 3x - 2, x_0 = 0$; **c)** $f(x) = 3x + 2, x_0 = 1$

a) $$\lim_{h\to 0}\frac{(-1+h)^2+(-1+h)-\left[(-1)^2-1\right]}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2-2h\cancel{+1}\cancel{-1}+h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(h-1)}{\cancel{h}}=-1$$

b) $$\lim_{h\to 0}\frac{2h^2+3h-2-(-2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(2h+3)}{\cancel{h}}=3$$

c) $$\lim_{h\to 0}\frac{3(1+h)+2-(3+2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3+3h+2-5}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3\cancel{h}}{\cancel{h}}=3$$

2. **a)** $f(x) = -x^3 + x^2 - x + 1, x_0 = 1/2$; **b)** $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0 = 1$; **c)** $f(x) = x^4 + x^2$, $x_0=\sqrt{2}$

a) $$\lim_{h\to 0}\frac{-(1/2+h)^3+(1/2+h)^2-(1/2+h)+\cancel{1}-\left[(1/2)^3+(1/2)^2-(1/2)+\cancel{1}\right]}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{H-3/4h}{h}=-\frac{3}{4}$$

b) $$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1+h-1}{h\left(\sqrt{1+h}+1\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}\left(\sqrt{1+h}+1\right)}=\frac{1}{2}$$

c) $$\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{2}+h\right)^4+\left(\sqrt{2}+h\right)^2-(4+2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{H+8\sqrt{2}h+2\sqrt{2}h}{h}=10\sqrt{2}$$

3. **a)** $f(x) = -x^5 + x^3$, $x_0=-\sqrt{2}$; **b)** $f(x) = 2x^3 - 1, x_0 = -1/2$; **c)** $f(x)=\sqrt{x^2+1}$, $x_0 = 0$

a) $$\lim_{h\to 0}\frac{-\left(-\sqrt{2}+h\right)^5+\left(-\sqrt{2}+h\right)^3-\left(4\sqrt{2}-2\sqrt{2}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{H-20h+6h}{h}=-14$$

b) $$\lim_{h\to 0}\frac{2(-1/2+h)^3\cancel{-1}-\left(-1/4\cancel{-1}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{H+\frac{3}{2}h}{h}=\frac{3}{2}$$

c) $$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h^2+1}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^{\cancel{2}}+\cancel{1}\cancel{-1}}{\cancel{h}\left(\sqrt{h^2+1}+1\right)}=0$$

4. **a)** $f(x) = x^2 + 1/x, x_0 = 0$; **b)** $f(x) = x^2 + 1/x, x_0 = 1$; **c)** $f(x) = x^3 + x, x_0 = 2$

a) $$\lim_{h\to 0}\frac{h^2+1/h-(0+1/0)}{h}=?$$ 0 non fa parte del dominio della funzione

b) $$\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2+1/(1+h)-(1+1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^3+1-2(1+h)}{h(1+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{3-2}{1+h}=1$$

c) $$\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^3+\cancel{2}+h-\left(8\cancel{-2}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{H+12h+h}{h}=13$$

5. **a)** $f(x)=\dfrac{3x^2-5x}{7x+1}$, $x_0 = 0$; **b)** $f(x)=\dfrac{5x^2-3}{9x^2+7x}$, $x_0 = 1$; **c)** $f(x) = ln(x), x_0 = 2$; **d)** $f(x) = e^x; x_0 = 1$

a) $\lim_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{3h^{\cancel{2}}-5\cancel{h}}{7h+1}-0}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0}\dfrac{3h-5}{7h+1}=-5$

b) $\lim_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{5(1+h)^2-3}{9(h+1)^2+7(1+h)}-\dfrac{5-3}{9+7}}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{5+5h^2+10h-3}{h\left(9h^2+18h+9+7+7h\right)}-\dfrac{1}{8h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{H+80h-25h}{8h\left(9h^2+25h+16\right)}=\dfrac{55}{128}$

c) $\lim_{h\to 0}\dfrac{ln(2+h)-ln(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{ln\left(\dfrac{2+h}{2}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{ln\left(1+\dfrac{h}{2}\right)}{h/2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

d) $\lim_{h\to 0}\dfrac{e^{1+h}-e}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{e\left(e^h-1\right)}{h}=e\,e$

6. **a)** $f(x)=\dfrac{x+2}{3x-5}$**, $x_0=-1$; b) $f(x)=e^{2x}$, $x_0=0$; c)** $f(x)=\dfrac{x-5}{8x^2-3x+5}$**, $x_0=1/2$**

a) a) $\lim_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{-1+h+2}{3(-1+h)-5}-\dfrac{-1+2}{-3-5}}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{h+1}{h(3h-8)}+\dfrac{1}{8h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{8h+3h}{8h(3h-8)}=-\dfrac{11}{64}$

b) $\lim_{h\to 0}\dfrac{e^{2h}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{e^{2h}-1}{2h}\cdot 2=2$

c) $\lim_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{1/2+h-5}{8(1/2+h)^2-3(1/2+h)+5}-\dfrac{1/2-5}{8/4-3/2+5}}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{2h-9}{h\left(16h^2+10h+11\right)}+\dfrac{9}{11h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{H+22h+90h}{11h\left(16h^2+10h+11\right)}=\dfrac{112}{121}$

7. **a)** $f(x)=\dfrac{x^2+3x-5}{4x^2+1}$**, $x_0=2$; b)** $f(x)=\dfrac{7x^2-5}{5x^2+3x-2}$**, $x_0=2$; c)** $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-1}, x_0=0$

a) $\lim_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{(2+h)^2+3(2+h)-5}{4(2+h)^2+1}-\dfrac{4+6-5}{16+1}}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{h^2+7h+5}{h\left(4h^2+16h+17\right)}-\dfrac{5}{17h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{H+119h-80h}{17h\left(4h^2+16h+17\right)}=\dfrac{39}{289}$

b) $\lim_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{7(2+h)^2-5}{5(2+h)^2+3(2+h)-2}-\dfrac{28-5}{20+6-2}}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{7h^2+28h+23}{h\left(5h^2+23h+24\right)}-\dfrac{23}{24h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{H+672h-529h}{24h\left(5h^2+23h+24\right)}=\dfrac{143}{576}$

c) $\lim_{h\to 0^+}\dfrac{\dfrac{h+\sqrt{h}}{h-1}-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}\dfrac{h+\sqrt{h}}{h(h-1)}=\lim_{h\to 0^+}\dfrac{\cancel{h^2-h}}{\cancel{h(h-1)}\left(h-\sqrt{h}\right)}=\lim_{h\to 0^+}\dfrac{1}{h-\sqrt{h}}=+\infty$

8. **a) $f(x)=sin(x)$, $x_0=0$; b) $f(x)=cos(x)$, $x_0=\pi$; c) $f(x)=sin(2x)$, $x_0=\pi/2$**

a) $\lim_{h\to 0}\dfrac{sin(h)-0}{h}=1$; b) $\lim_{h\to 0}\dfrac{cos(h)-1}{h}=0$;

c) $\lim_{h\to 0}\dfrac{sin(2h+\pi)-sin(\pi)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{-sin(2h)}{h}=\lim_{h\to 0}\left[-2\dfrac{sin(2h)}{2h}\right]=-2$

9. **a) $f(x)=cos(x/2)$, $x_0=\pi$; b) $f(x)=sin^2(x)$, $x_0=1$; c) $f(x)=tan(x)$, $x_0=0$; d) $f(x)=sin(e^x)$, $x_0=0$**

a) $\lim_{h\to 0}\dfrac{cos\left(\dfrac{h+\pi}{2}\right)-cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{-sin\left(\dfrac{h}{2}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{sin\left(\dfrac{h}{2}\right)}{h/2}\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$;

b) $\lim_{h\to 0}\frac{sin^2(1+h)-sin^2(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{[sin(1+h)-sin(1)][sin(1+h)+sin(1)]}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2sin\left(\frac{1+h-1}{2}\right)cos\left(\frac{1+h+1}{2}\right)2sin(1)}{h}=$

$=\lim_{h\to 0}\frac{sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h/2}cos\left(\frac{1+h+1}{2}\right)2sin(1)=2cos(1)sin(1)=sin(2)$

c) $\lim_{h\to 0}\frac{tan(h)-0}{h}=1$

d) $\lim_{h\to 0}\frac{sin(e^h)-sin(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2sin\left(\frac{e^h-1}{2}\right)cos\left(\frac{e^h+1}{2}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{sin\left(\frac{e^h-1}{2}\right)}{\frac{e^h-1}{2}}\frac{e^h-1}{h}cos(1)=cos(1)$

10. **a)** $f(x)=\sqrt[3]{x}-sin(x)$, **x_0 = 0; b) *f*(*x*) = *cos*(*x* + 1) – *ln*(2*x*), x_0 = 1; c)** $f(x)=e^{\sqrt{x}}+sin(x)$, **x_0 = 2**

a) $\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h}-sin(h)-0}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sqrt[3]{h}}{h}-\frac{sin(h)}{h}\right)=\infty$

b) $\lim_{h\to 0}\frac{cos(2+h)-ln(2h+2)-cos(2)-ln(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2sin\left(\frac{2+h-2}{2}\right)sin\left(\frac{2+h+2}{2}\right)-ln\left(\frac{2h+2}{2}\right)}{h}=$

$=\lim_{h\to 0}-\frac{sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h/2}sin(2)-\frac{ln(1+h)}{h}=-sin(2)-1$

c)

$\lim_{h\to 0}\frac{e^{\sqrt{2+h}}+sin(2+h)-e^{\sqrt{2}}-sin(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{e^{\sqrt{2}}\left(e^{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}-1\right)}{h}+\frac{sin(2+h)-sin(2)}{h}\right)=$

$=\lim_{h\to 0}\left(e^{\sqrt{2}}\frac{\left(e^{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}-1\right)}{\left(\sqrt{2+h}-\sqrt{2}\right)}\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}+\frac{2sin\left(\frac{h}{2}\right)cos\left(2+\frac{h}{2}\right)}{h}\right)=\lim_{h\to 0}\left(e^{\sqrt{2}}\frac{h}{h\left(\sqrt{2+h}+\sqrt{2}\right)}+\frac{sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h/2}cos(2)\right)=\frac{e^{\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}+cos(2)$

Scrivere, se esistono, le equazioni delle rette tangenti alle seguenti funzioni nei punti accanto indicati

11. **a) *f*(*x*) = 2*x* + 1, x_0 = 1; b) *f*(*x*) = 1 – *x*, x_0 = 3; c) *f*(*x*) = x^2 + 4*x* – 1, x_0 = 1**

a) La tangente a una retta è ovviamente la stessa retta: $y = 2x + 1$; b) $y = 1 – x$; c) Lasciamo per esercizio il calcolo della derivata: $y – (1 + 4 – 1) = (2 + 4)(x – 1) \Rightarrow 6x – y – 2 = 0$

12. **a) *f*(*x*) = 2x^3 + 3x^2, x_0 = –2; b) *f*(*x*) = 2x^3 + 3x^2 –1, x_0 = –1/2; c) *f*(*x*) = x^4 – 1, x_0 = –2/3; d) *f*(*x*) = e^x, x_0 = 1**

a) $y – (–16 + 12) = (24 – 12)(x + 2) \Rightarrow y = 12x + 20$;

b) $y – (–1/4 + ¾ – 1) = (3/2 – 3)(x + ½) \Rightarrow y = –3/2x – 5/4$;

c) $y – (16/81 – 1) = (32/27)(x + 2/3) \Rightarrow y = –32/27x – 43/27$;

d) $y – e = e(x – 1) \Rightarrow y = ex$

13. **a) *f*(*x*) = x^3 + x^2 + 1, x_0 = –1; b) *f*(*x*) = x^5 + x^3 + *x*, $x_0=\sqrt{2}$; c) *f*(*x*) = *ln*(*x*), x_0 = 1**

a) $y – (–1 + 1 + 1) = (3 – 1)(x + 1) \Rightarrow y = x + 2$;

b) $y – (4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + \sqrt{2}) = (20 + 6 + 1)(x – \sqrt{2}) \Rightarrow y = –27x – 20\sqrt{2}$;

c) $y – 0 = 1/1(x – 1) \Rightarrow y = x – 1$

14. **a)** $f(x)=\sqrt{x+1}$, **x_0 = 1; b)** $f(x)=\sqrt{2x^2+x+1}$, **x_0 = 0**

a) $y – \sqrt{2} = 1/(2\sqrt{2})(x – 1) \Rightarrow 4y-\sqrt{2}\cdot x-3\sqrt{2}=0\Rightarrow 4/\sqrt{2}y-x-3=0\Rightarrow x-2\sqrt{2}y+3=0$;

b) $y – 1 = (4 \cdot 0 + 1)/2x \Rightarrow y = x/2 + 1 \Rightarrow x – 2y + 2 = 0$;

15. **a)** $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$**, x_0 = 0; b)** $f(x)=\frac{2x}{x+2}$**, x_0 = 1; c)** $f(x)=\frac{x+2}{x^2-1}$**, x_0 = 0**

a) $y-(-1/1)=2/1x \Rightarrow y=2x-1$;
b) $y-1=4/9(x-1) \Rightarrow 4x-9y+2=0$;
c) $y-2/(-1)=1/1x \Rightarrow y=x-2$

16. **a)** $f(x)=\frac{x^2+x}{x^2+1}$**, x_0 = 2; b)** $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x-2}, x_0=-\frac{1}{3}$**; c)** $f(x)=\frac{1}{x^2-3x+1}$**, x_0 = 1/2**

a) $y-6/5=1/25(x-2) \Rightarrow x-25y+28=0$;
b) $y+13/21=22/49(x+1/3) \Rightarrow 22x-49y-23=0$;
c) $y+4=32(x-½) \Rightarrow y=32x-20$

17. **a) $f(x)=\cos(x)$, $x_0=\pi/3$; b) $f(x)=\sin(x)$, $x_0=\pi/2$; c) $f(x)=\sin(2x)$, $x_0=\pi/4$**

a) $y-½ = -\sqrt{3}/2(x-\pi/3) \Rightarrow 3x+2\sqrt{3}y-\pi-\sqrt{3}=0$;
b) $y-1=0(x-\pi/2) \Rightarrow y=1$; c) $y-1=0(x-\pi/4) \Rightarrow y=1$

18. **a) $f(x)=\cos(x/2)$, $x_0=2\pi$; b) $f(x)=\sin(2/x)$, $x_0=3/\pi$; c) $f(x)=\cos(4/x^2)$,** $x_0=\sqrt{2/\pi}$

a) $y+1=0(x-2\pi) \Rightarrow y=-1$;

b) $y-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi^2}{9}\left(x-\frac{3}{\pi}\right) \Rightarrow 2\pi^2x-18y-6\pi+9\sqrt{3}=0$;

c) $y-1=0(x-\sqrt{2/\pi}) \Rightarrow y=1$;

19. **In quali punti del proprio dominio, la funzione** $f(x)=\sqrt{x+1}$ **non è derivabile?**

Dom(f): $x \geq -1$; $\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h+1}-\sqrt{x+1}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h+1-x-1}{h\left(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{2h\sqrt{x+1}}=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$, questo limite non è finito solo se $x = 1$, ovviamente all'interno del dominio.

20. **Dimostrare che se la funzione $f(x)$ è derivabile in x_0, allora anche $f(x) + k$, $k \in \mathbb{R}$, lo è e si ha:** $D\left[k+f(x)\right]_{x=x_0}=D\left[f(x)\right]_{x=x_0}$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0);\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+\cancel{k}-f(x_0)-\cancel{k}}{h}=f'(x_0)$$

21. **Dimostrare che se la funzione $f(x)$ è derivabile in x_0, allora anche $k \cdot f(x)$, $k \in \mathbb{R}$, lo è e si ha:** $D\left[k\cdot f(x)\right]_{x=x_0}=k\cdot D\left[f(x)\right]_{x=x_0}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0);\lim_{h\to 0}\frac{k\cdot f(x_0+h)-k\cdot f(x_0)}{h}=k\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=k\cdot f'(x_0)$$

Stabilire quali delle seguenti funzioni non sono derivabili nei punti accanto indicati, per quelle che non lo sono stabilire, se possibile, se il dato punto è angoloso, cuspidale o di flesso

22. **a)** $f(x)=\sqrt{x}$**, x_0 = 0; b) $f(x)=\ln(x^2+1)$, x_0 = 0**

a) $\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{h}-\sqrt{0}}{h}=\lim_{h\to 0^+}\sqrt{\frac{h}{h^2}}=\lim_{h\to 0^+}\sqrt{\frac{1}{h}}=+\infty$, non è derivabile, non possiamo stabilire il tipo di non derivabilità perché la funzione non è definita in un intorno completo di 0;

b) $\lim_{h\to 0}\frac{\ln(h+1)-\ln(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(h+1)}{h}=1$: Derivabile

23. **a)** $f(x)=\frac{|x|}{x-1}$**, x_0 = 0; b) $f(x)=|2x+1|-|2x-1|$, $x_0=\pm 1/2$**

a) $\lim_{h\to 0^-}\frac{\frac{|h|}{h-1}-0}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}(h-1)}=1$; $\lim_{h\to 0^+}\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(h-1)}=-1$: Punto Angoloso;

b) $x_0=\frac{1}{2}\Rightarrow\lim_{h\to0^-}\frac{|1+2h+1|-|\cancel{1}+2h\cancel{-1}|-(|1+1|-|1-1|)}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{2+2h+2h-2}{h}=4;\lim_{h\to0^+}\frac{2+2h-2h-2}{h}=0;$:

$x_0=-\frac{1}{2}\Rightarrow\lim_{h\to0^-}\frac{|\cancel{-1}+2h\cancel{+1}|-|-1+2h-1|-(|-1+1|-|-1-1|)}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{-2h-2+2h+2}{h}=0;\lim_{h\to0^+}\frac{2h-2+2h-2}{h}=4;$

entrambi punti Angolosi

24. **a)** $f(x)=\frac{|x|+|x+1|}{|x|-|x+1|}$**, $x_0 = 0 \vee x_0 = -1$; b) $f(x) = ln(|x| + 1)$, $x_0 = 0$**

$$x_0=0\Rightarrow\lim_{h\to0^-}\frac{\frac{|h|+|h+1|}{|h|-|h+1|}-\frac{|1|}{-|1|}}{h}=\lim_{h\to0^-}\left(\frac{\cancel{-h+h}+1}{-h-h-1}+1\right)\frac{1}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{\cancel{1}-2\cancel{h}-\cancel{1}}{\cancel{h}(-2h-1)}=2;$$

a) $\lim_{h\to0^+}\left(\frac{h+h+1}{\cancel{h-h}-1}+1\right)\frac{1}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{2h+1-1}{-h}=-2;$: Angolosi

$$x_0=-1\Rightarrow\lim_{h\to0^-}\frac{\frac{|h-1|+|h\cancel{-1+1}|}{|h-1|-|h\cancel{-1+1}|}-\frac{|-1|}{|-1|}}{h}=\lim_{h\to0^-}\left(\frac{-h+1-h}{\cancel{-h}+1\cancel{+h}}-1\right)\frac{1}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{-2h\cancel{+1-1}}{h}=-2;$$

$$\lim_{h\to0^+}\left(\frac{\cancel{-h}+1\cancel{+h}}{-h+1-h}-1\right)\frac{1}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{\cancel{1}+2\cancel{h}\cancel{-1}}{\cancel{h}(1-2h)}=2;$$

b) $\lim_{h\to0^-}\frac{ln(|h|+1)-ln(1)}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{ln(-h+1)}{h}=-1;\lim_{h\to0^+}\frac{ln(h+1)}{h}=1$: Angoloso

25. **a) $f(x) = |x - 2|$, $x_0 = 2$; b)** $f(x)=\frac{x}{|x+1|}$**, $x_0 = 0$**

a) $\lim_{h\to0^-}\frac{|2+h-2|-0}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{-h}{h}=-1;\lim_{h\to0^+}\frac{h}{h}=1$: Angoloso;

b) $\lim_{h\to0}\frac{\frac{h}{|h+1|}-0}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(h+1)}=1$: Derivabile

26. **a)** $f(x)=sin\left(\sqrt[3]{x}\right)$**, $x_0 = 0$; b)** $f(x)=\sqrt{|x|}$**, $x_0 = 0$**

a) $\lim_{h\to0}\frac{sin\left(\sqrt[3]{h}\right)-0}{h}=\lim_{h\to0}\frac{sin\left(\sqrt[3]{h}\right)}{\sqrt[3]{h}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{h^2}}=\lim_{h\to0}\frac{1}{\sqrt[3]{h^2}}=+\infty$: punto fi lesso ascendente

b) $\lim_{h\to0^-}\frac{\sqrt{|h|}-\sqrt{0}}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{\sqrt{-h}}{h}=\lim_{h\to0^-}\left(-\sqrt{\frac{-h}{h^2}}\right)=\lim_{h\to0^-}\left(-\sqrt{\frac{-1}{h}}\right)=-\infty;\lim_{h\to0^+}\frac{\sqrt{h}}{h}=\lim_{h\to0^+}\sqrt{\frac{h}{h^2}}=+\infty$: punto cuspidale.

27. **a) $f(x) = sin(|x - \pi|)$, $x_0 = \pi$; b) $f(x) = cos(|x|)$, $x_0 = 0$**

a) $\lim_{h\to0^-}\frac{sin(|h|)-sin(0)}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{sin(-h)}{h}=-1;\lim_{h\to0^+}\frac{sin(h)}{h}=1$: Angoloso;

b) Osserviamo che $cos(|x|) = cos(x)$, quindi: $\lim_{h\to0}\frac{cos(h)-cos(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{cos(h)-1}{h}=0$: Derivabile

28. **a)** $f(x)=sin\left(\sqrt[3]{x^2}\right)$**, $x_0 = 0$; b)** $f(x)=sin\left(\sqrt[3]{x^4}\right)$**, $x_0 = 0$**

a) $\lim_{h\to0^-}\frac{sin\left(\sqrt[3]{h^2}\right)-0}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{sin\left(\sqrt[3]{h^2}\right)}{\sqrt[3]{h^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{h}}=\lim_{h\to0^-}\frac{1}{\sqrt[3]{h}}=-\infty;\lim_{h\to0^+}\frac{1}{\sqrt[3]{h}}=+\infty$: Cuspidale;

b) $\lim_{h\to 0}\frac{sin\left(\sqrt[3]{h^4}\right)}{\sqrt[3]{h^4}}\cdot\sqrt[3]{h}=\lim_{h\to 0}\sqrt[3]{h}=0$: Derivabile

29. **a)** $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geq 0\\ -\sqrt{-x} & x<0\end{cases}$, $x_0=0$; **b)** $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2} & x\geq 0\\ -\sqrt{x^2} & x<0\end{cases}$, $x_0=0$

a) $\lim_{h\to 0^-}\frac{-\sqrt{-h}}{h}=\lim_{h\to 0^-}\sqrt{\frac{-h}{h^2}}=+\infty;\ \lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{h}}{h}=+\infty$: Flesso ascendente;

b) $\lim_{h\to 0^-}\frac{-\sqrt{h^2}}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-|h|}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h}{h}=1;\ \lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{h^2}}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1$: Derivabile

30. **a)** $f(x)=\begin{cases}sin(|x|) & x\geq 0\\ cos\left(\left|x-\frac{\pi}{2}\right|\right) & x<0\end{cases}$, $x_0=0$; **b)** $f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x-1} & x\geq 0\\ \frac{-|x|}{x-1} & x<0\end{cases}$, $x_0=0$

a) $\lim_{h\to 0^-}\frac{cos(|h-\pi/2|)-cos(|-\pi/2|)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{sin(h)}{h}=1;\ \lim_{h\to 0^+}\frac{sin(|h|)-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{sin(h)}{h}=1$: Derivabile

b) $\lim_{h\to 0^-}\frac{\frac{|h|}{h-1}-0}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}(h-1)}=1;\ \lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{-|h|}{h-1}-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}(h-1)}=1$: Derivabile

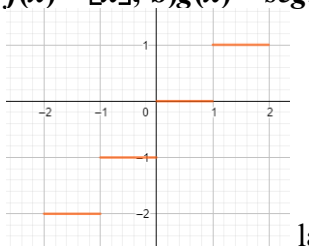
31. **a)** $f(x)=\begin{cases}ln(\sqrt{x}) & x\geq 0\\ -ln(\sqrt{-x}) & x<0\end{cases}$, $x_0=0$; **b)** $f(x)=\begin{cases}\sqrt{|x|} & x\geq 0\\ sin(|x|) & x<0\end{cases}$, $x_0=0$

a) Non continua: $\lim_{x\to 0^+}ln(\sqrt{x})=+\infty$;

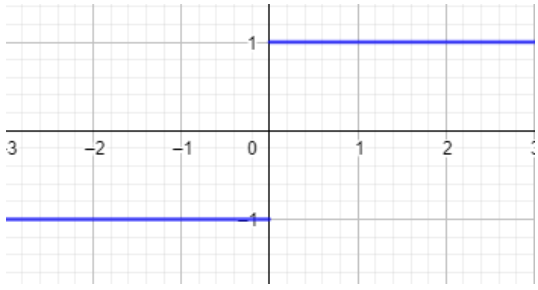
b) $\lim_{h\to 0^-}\frac{sin(|h|)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-sin(h)}{h}=-1;\ \lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{|h|}}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{h}}{h}=+\infty$: Non derivabile a destra

Dopo avere rappresentato le seguenti funzioni stabilire dove sono derivabili e quanto vale detta derivata. Ricordiamo le funzioni: $\lfloor x\rfloor$ è il minimo intero contenuto in x; $\lceil x\rceil$ è il massimo intero che contiene x; $segno(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$, ***round(x) è l'arrotondamento di x***

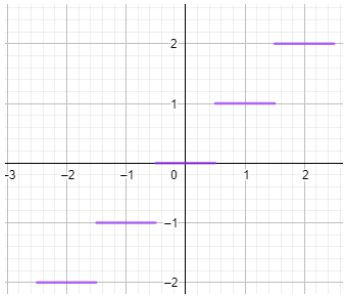
32. **a)** $f(x)=\lfloor x\rfloor$; **b)** $g(x)=segno(x)$; **c)** $h(x)=round(x)$; **d)** $m(x)=\lfloor x\rfloor+\lceil x\rceil$

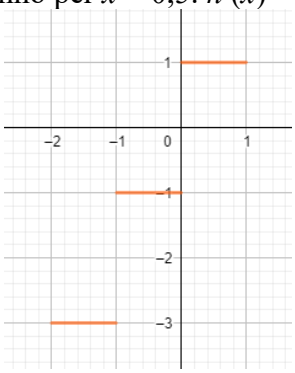
a) 

la funzione non è derivabile per tutti gli x interi, mentre $f'(x)=0,\ x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$;

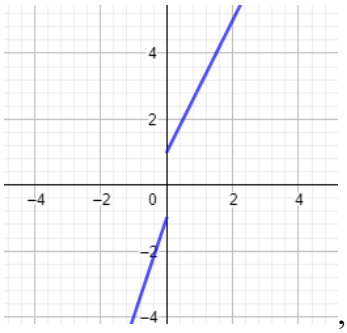
b) 

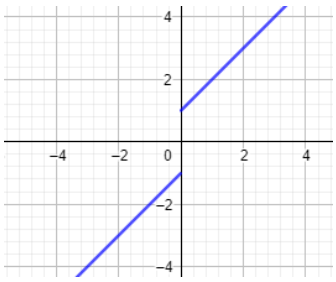
$g'(x)=0,\ x\neq 0$;

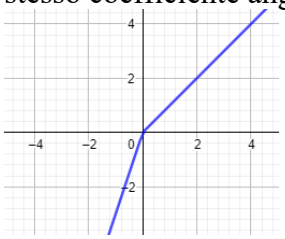
c)  stavolta le discontinuità, e quindi anche I punti di non derivabilità, si hanno per $x = 0{,}5$. $h'(x) = 0$, $x \in \mathbb{R} : x - 0{,}5 \notin \mathbb{Z}$;

d)  varia il salto di discontinuità, ma ai fini della derivabilità si comporta come la a): $m'(x) = 0$, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

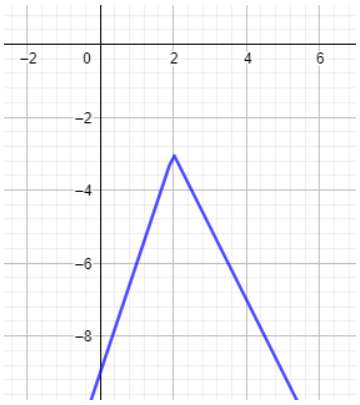
33. **a)** $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & x<0 \\ 2x+1 & x \geq 0 \end{cases}$ **; b)** $g(x) = \begin{cases} x-1 & x<0 \\ x+1 & x \geq 0 \end{cases}$ **; c)** $h(x) = \begin{cases} 3x & x<0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$

a)  , derivabile per $x \neq 0$. Negli altri casi la derivata è il coefficiente angolare della semiretta cui appartiene il punto, quindi: $f'(x) = \begin{cases} 3 & x<0 \\ 2 & x>0 \end{cases}$;

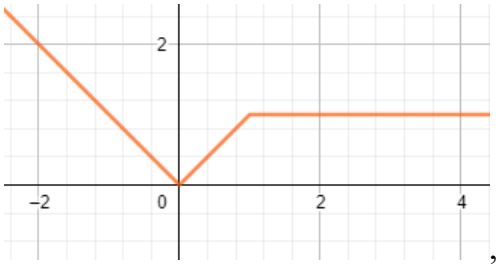
b)  Ragionando come prima, dato che le semirette sono parallele hanno lo stesso coefficiente angolare, quindi $g'(x) = 1$, $x \neq 0$.

c)  a differenza delle precedenti la funzione è continua anche in 0, ugualmente però non è derivabile in tale punto: $h'(x) = \begin{cases} 3 & x<0 \\ 1 & x>0 \end{cases}$.

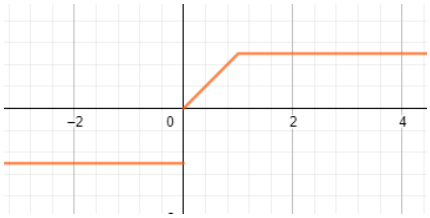
34. **a)** $f(x)=\begin{cases}3x-9 & x<2\\ 1-2x & x\geq 2\end{cases}$ **; b)** $g(x)=\begin{cases}-x & x<0\\ x & 0\leq x<1\\ 1 & x\geq 1\end{cases}$ **; c)** $h(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ x & 0\leq x<1\\ 1 & x\geq 1\end{cases}$

a) 

si nota perfettamente il punto angoloso: $f'(x)=\begin{cases}3 & x<2\\ -2 & x>2\end{cases}$

b) 

, entrambi punti angolosi: $g'(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 1 & 0<x<1\\ 0 & x>1\end{cases}$

c) 

$h'(x)=\begin{cases}0 & x<0\vee x>1\\ 1 & 0<x<1\end{cases}$

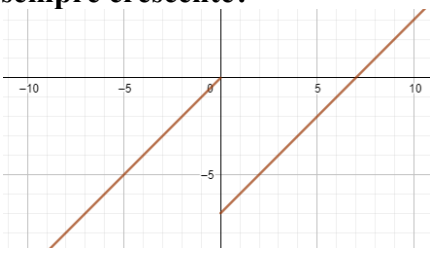
Giustificare le risposte alle seguenti domande

35. **Se una funzione non è derivabile in x_0, possiamo dire che il suo grafico non ha tangente in x_0?**
No, per esempio dove vi è un flesso a tangente verticale

36. **Se il grafico di una funzione non ha tangente in x_0, possiamo dire che non è derivabile in x_0?**
Sì, perché l'esistenza della tangente è necessaria, ma non sufficiente per la derivabilità

37. **La derivabilità di una funzione in un punto è condizione necessaria e/o sufficiente per l'esistenza della tangente nel punto al grafico associata alla funzione?**
Sufficiente ma non necessaria, vedi esercizi precedenti

38. **In quale caso se $f'(x) > 0$, $\forall\, x \in dom(f)$, la funzione è certamente sempre crescente?**



Se $dom(f) = \mathbb{R}$, diversamente potremmo avere funzioni come questa

39. **Possiamo dire che, per una funzione derivabile nel suo dominio, la condizione $f'(x) > 0$, $\forall\, x \in dom(f)$ è necessaria o sufficiente affinché $f(x)$ sia crescente in tutto il suo dominio?**
Necessaria, perché se la funzione è derivabile e la sua derivata è negativa la funzione decresce, se si annulla vi è un cambio di crescenza o una costanza

40. **Trovare l'errore nella seguente procedura di calcolo della derivata della funzione $sin(2x)$**

$$\lim_{h\to 0}\frac{sin(2x+h)-sin(2x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\cdot sin\left(\frac{\cancel{2x}+h-\cancel{2x}}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{2x+h+2x}{2}\right)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{sin\left(\frac{h}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{4x+h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}=\lim_{h\to 0}\frac{sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\cdot\lim_{h\to 0}cos\left(\frac{4x+h}{2}\right)=\lim_{h\to 0}cos\left(\frac{4x+h}{2}\right)=cos(2x)$$

Il primo passaggio è: $\lim_{h\to 0}\frac{sin(2x+2h)-sin(2x)}{h}$, quindi i successivi passaggi diventano:

$$\lim_{h\to 0}\frac{2\cdot sin\left(\frac{\cancel{2x}+2h-\cancel{2x}}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{2x+h+2x}{2}\right)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2sin(h)\cdot cos\left(\frac{4x+h}{2}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{sin(h)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}2cos\left(\frac{4x+h}{2}\right)=\lim_{h\to 0}2cos\left(\frac{4x+h}{2}\right)=2cos(2x)$$

Derivate delle funzioni elementari

***Determinare le derivate delle seguenti funzioni, usando la formula stabilita dal teorema* 8**

1. **a)** x^{72}**; b)** $x^{\sqrt{2}}$ **; c)** x^{e}**; d)** $\sqrt{x^5}$ **; e)** $\sqrt[7]{x^3}$ **; f)** $\sqrt[3]{x^{\sqrt{2}}}$ **; g)** $1/x^4$

a) $D(x^{72}) = 72x^{71}$; b) $D\left(x^{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$; c) $D(x^{e}) = e\,x^{e-1}$; d) $D\left(x^{5/2}\right)=\frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-1}=\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}=\frac{5\sqrt{x^3}}{2}$;

e) $D\left(x^{\frac{3}{7}}\right)=\frac{3}{7}x^{\frac{3}{7}-1}=\frac{3}{7}x^{-\frac{4}{7}}=\frac{3}{7\sqrt[7]{x^4}}$; f) $D\left(x^{\frac{\sqrt{2}}{3}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{3}x^{\frac{\sqrt{2}}{3}-1}=\frac{\sqrt{2}}{3}x^{\frac{\sqrt{2}-3}{3}}$; g) $D(x^{-4}) = -4\,x^{-5} = -\frac{4}{x^5}$

2. **a)** $1/x^{e+1}$**; b)** $1/x^{\pi}$**; c)** $1/\sqrt{x}$ **; d)** $1/\sqrt[6]{x^5}$ **; e)** $1/\sqrt[3]{\sqrt{x}}$

a) $D(x^{-e-1}) = -(e+1)x^{-e-2} = -\frac{1+e}{x^{e+2}}$; b) $D(x^{-\pi}) = -\pi\,x^{-\pi-1} = -\frac{\pi}{x^{\pi+1}}$; c) $D(x^{-1/2}) = -\frac{1}{2}\,x^{-3/2} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$

d) $D(x^{-5/6}) = -5/6\,x^{-11/6} = \frac{-5}{6\cdot\sqrt[6]{x^{11}}}$; e) $D(x^{-1/6}) = -1/6\,x^{-7/6} = \frac{-1}{6\cdot\sqrt[6]{x^7}}$

3. **a)** $\frac{x^{e}}{x^{\sqrt{2}}}$ **; b)** $\frac{x^{\sqrt{2}}}{\sqrt[3]{x}}$ **; c)** $\frac{x^{e+\sqrt{2}}}{\sqrt{x^{1-\pi}}}$

a) $D\left(x^{e-\sqrt{2}}\right)=\left(e-\sqrt{2}\right)x^{e-\sqrt{2}-1}$;

b) $D\left(x^{\sqrt{2}-\frac{1}{3}}\right)=\frac{3\sqrt{2}-1}{3}x^{\frac{3\sqrt{2}-4}{3}}$;

c) $D\left(x^{e+\sqrt{2}-\frac{1-\pi}{2}}\right)=\frac{2e+2\sqrt{2}-1+\pi}{2}x^{\frac{2e+2\sqrt{2}-3+\pi}{2}}$

4. **a)** $\frac{\sqrt[e-1]{x^{e+1}}}{\sqrt{x^{e-1}}}$ **; b)** $\sqrt{x^{n}}$ **; c)** $\sqrt[m]{x^{n}}$ **; d)** $\frac{1}{\sqrt{x^{n}}}$ **; e)** $\frac{1}{\sqrt[m]{x^{n}}}$

a) $D\left(x^{\frac{e+1}{e-1}-\frac{e-1}{2}}\right)=\frac{-e^2+4e+1}{2e-2}x^{\frac{-e^2+2e+3}{2e-2}}$;

b) $D\left(x^{\frac{n}{2}}\right)=\frac{n}{2}x^{\frac{n-2}{2}}=\frac{n}{2}\sqrt{x^{n-2}}$;

c) $D\left(x^{\frac{n}{m}}\right)=\frac{n}{m}x^{\frac{n-m}{m}}=\frac{n}{m}\sqrt[m]{x^{n-m}}$;

d) $D\left(x^{-\frac{n}{2}}\right)=-\frac{n}{2}x^{\frac{-n-2}{2}}=-\frac{n}{2\sqrt{x^{n+2}}}$;

e) $D\left(x^{-\frac{n}{m}}\right)=\frac{-n}{m}x^{\frac{-n-m}{m}}=\frac{-n}{m\sqrt[m]{x^{n+m}}}$

Determinare le derivate delle seguenti funzioni, usando le formule stabilite dai teoremi 9 e 10

5. **a) $4e^x$; b) e^{x+1}; c) e^{x-2}; d) 2^{x-1}; e) $3^{x+\sqrt{2}}$; f) $log_3(1/x^4)$**

a) $D(4e^x) = 4e^x$; b) $D(ee^x) = ee^x = e^{x+1}$; c) $D(e^x/e^2) = e^x/e^2 = e^{x-2}$; d) $D(2^x/2) = 2^x ln(2)/2 = 2^{x-1}\, ln(2)$;

e) $D\left(3^x 3^{\sqrt{2}}\right)=3^{\sqrt{2}}ln(3)3^x=3^{\sqrt{2}+x}ln(3)$; f) $D[log_3(1/x^4)] = D[log_3(x^{-4})] = -4D[log_3(x)] = \frac{-4}{x\cdot ln(3)}$

6. **a) $log_5\left(\sqrt{x}\right)$; b) $ln(1/x^e)$; c) $log_3(x) + log_3(5x)$; d) $log_7(3x) - log_7(x^2)$**

a) $D\left[log_5\left(x^{\frac{1}{2}}\right)\right]=D\left[\frac{1}{2}log_5(x)\right]=\frac{1}{2ln(5)x}=\frac{1}{ln(25)x}$; b) $D[ln(x^{-e})] = D[-e\cdot ln(x)] = -e/x$;

c) $D[log_3(x) + log_3(5x)] = D[log_3(x) + log_3(5) + log_3(x)] = D[2log_3(x) + log_3(5)] = \frac{2}{ln(3)x}$;

d) $D[log_7(3) + log_7(x) - 2log_7(x)] = D[log_7(3) - log_7(x)] = \frac{-1}{ln(7)x}$

7. **a) $2^x/4^{x-1}$; b) $3^x/9^{x-1}$; c) $4^x/8^{x+1}$; d) $25^x/5^{x-2}$**

a) $D(4^x/2^{x-1}) = D(2^{2x}/2^{x-1}) = D(2^{x+1}) = D(2\cdot 2^x) = 2ln(2)\cdot 2^x = ln(4)\cdot 2^x$

b) $D(3^{2x-x+1}) = D(3^{x+1}) = D(3\cdot 3^x) = 3\, ln(3)\cdot 3^x = ln(27)\cdot 3^x$

c) $D(2^{3x-x-1}) = D(2^{2x-1}) = D(1/2\cdot 4^x) = ½\, ln(4)\cdot 4^x = ln(4)\cdot 2^{2x-1}$

d) $D(5^{2x-x+2}) = D(5^{x+2}) = D(25\cdot 5^x) = ln(5)\cdot 5^{2+x}$

8. **a) $log_2(x)\cdot log_x(4)$, $x > 0$, $x \neq 1$; b) $log_2(x)/log_4(x^2)$, $x > 0$; c) $ln^2(x)\cdot log_x(3)$, $x > 0$, $x \neq 1$**

a) Portiamo alla stessa base: $\cancel{log_2(x)}\cdot\frac{log_2(4)}{\cancel{log_2(x)}}=log_2(4)$, che è numero quindi la derivata è 0;

b) $log_2(x):\frac{log_2(x^2)}{log_2(4)}=\cancel{log_2(x)}\frac{2}{\cancel{log_2(x)}}=2$, ancora una volta derivata nulla;

c) $ln^{\cancel{2}}(x)\frac{ln(3)}{\cancel{ln(x)}}=ln(3)\cdot ln(x)\Rightarrow D=\frac{ln(3)}{x}$

9. **a) $log_5^2\left(x^3\right)\cdot log_x(3)$, $x > 0$, $x \neq 1$; b) e^{x+n}; c) a^{x+n}**

a) $9log_5^{\cancel{2}}(x)\cdot\frac{log_5(3)}{\cancel{log_5(x)}}=9log_5(3)\cdot log_5(x)\Longrightarrow D=\frac{9log_5(3)}{ln(5)x}$;

b) $D(e^x e^n) = e^x e^n = e^{x+n}$; c) $D(a^x a^n) = a^n\, ln(a)\, a^x = ln(a)\, a^{x+n}$

10. **a) $f(x) = [sin(x) + cos(x)]^2$; b) $f(x) = sin^2(17x) + cos^2(17x)$; c) $f(x) = sec(25x)\cdot cos(25x)$**

Sono tutte funzioni costanti, quindi la loro derivate è 0

11. **In quali punti la funzione $f(x) = x^2 + 4x$ ha derivata nulla?**

$f'(x) = 2x + 4 \Rightarrow 2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow f(-2) = -4$

12. **In quali punti la funzione $f(x) = x^3 + x^2$ ha derivata nulla?**

$f'(x) = 3x^2 + 2x \Rightarrow 3x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = -2/3 \Rightarrow f(0) = 0 \vee f(-2/3) = 4/27$

13. In quali punti la funzione $f(x) = x^4 + x^2 + 1$ è crescente?
$f'(x) = 4x^3 + 2x \Rightarrow 4x^3 + 2x > 0 \Rightarrow 2x(2x^2 + 1) > 0 \Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow x > 0$

Operazioni aritmetiche elementari con le derivate

Calcolare la derivata delle seguenti funzioni

1. a) $e^x \cdot (x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24)$; b) $e^x \cdot [sin(x) - cos(x)]$; c) $x^3 \cdot [3ln(x) - 1]$
a) $e^x \cdot (x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + e^x \cdot (4x^3 - 12x^2 + 24x - 24) = x^4 \cdot e^x$
b) $e^x \cdot [sin(x) - cos(x)] + e^x \cdot [cos(x) + sin(x)] = 2\, sin(x) \cdot e^x$;
c) $3x^2 \cdot [3ln(x) - 1] + x^3 \cdot 3/x] = 9x^2 \cdot ln(x)$

2. a) $2x \cdot sin(x) - x^2 \cdot cos(x) + 2cos(x)$; b) $sin(x) - x \cdot cos(x)$; c) $x^2/4 \cdot [2ln(x) - 1]$
a) $2sin(x) + 2x \cdot cos(x) - 2x \cdot cos(x) + x^2 \cdot sin(x) - 2sin(x) = x^2 \cdot sin(x)$;
b) $cos(x) - cos(x) + x \cdot sin(x) = x \cdot sin(x)$;
c) $2x/4 \cdot [2ln(x) - 1] + x^2/4 \cdot 2/x = x \cdot ln(x)$

3. a) $7x^3 \cdot [cos(x) - 2ln(x)]$; b) $x - sin(x) \cdot cos(x)$; c) $x^3/9 \cdot [3ln(x) - 1]$
a) $21x^2 \cdot [cos(x) - 2ln(x)] + 7x^3 \cdot [-sin(x) - 2/x] = 21x^2 \cdot [cos(x) - 2ln(x)] - 7x^3 \cdot sin(x) - 14x^2$
b) $1 + sin(x) \cdot sin(x) - cos(x) \cdot cos(x) = 1 + sin^2(x) - cos^2(x) = 2 \cdot sin^2(x)$;
c) $3x^2/9 \cdot [3ln(x) - 1] + x^3/9 \cdot 3/x = x^2 \cdot ln(x)$

4. $sin(x) \cdot (2x^5 - x^3 + 2x^2 - 1)$
$cos(x) \cdot (2x^5 - x^3 + 2x^2 - 1) + sin(x) \cdot (10x^4 - 3x^2 + 4x)$

5. $cos(x) \cdot (2x^3 - x^4 + x^2 - 3x)$
$cos(x) \cdot (6x^2 - 4x^3 + 2x - 3) - sin(x) \cdot (2x^3 - x^4 + x^2 - 3x)$

6. a) $-2x^6 \cdot [4sin(x) + 6ln(x)]$; b) $(2 - x^2) \cdot cos(x) + 2x \cdot sin(x)$
a) $-12x^5 \cdot [4sin(x) + 6ln(x)] - 2x^6 \cdot [4cos(x) + 6/x] = -4x^5 \cdot [12sin(x) + 18ln(x) + 2xcos(x) + 3]$;
b) $-2x \cdot cos(x) - (2 - x^2) \cdot sin(x) + 2sin(x) + 2x \cdot cos(x) = x^2 \cdot sin(x)$

7. a) $3 \cdot (x^2 - 2) \cdot cos(x) + (x^3 - 6x) \cdot sin(x)$; b) $5e^x \cdot 1/x^{23} + 3 \cdot \sqrt{x^7}$

a) $6x \cdot cos(x) - 3 \cdot (x^2 - 2) \cdot sin(x) + (3x^2 - 6) \cdot sin(x) + (x^3 - 6x) \cdot cos(x) = x^3 \cdot cos(x)$;
b) $5e^x \cdot \left(\frac{1}{x^{23}} + 3 \cdot \sqrt{x^7}\right) + 5e^x \cdot \left(\frac{-23}{x^{24}} + \frac{21}{2} \cdot \sqrt{x^5}\right) = 5e^x \cdot \left(3 \cdot \sqrt{x^7} + \frac{1}{x^{23}} + \frac{21}{2}\sqrt{x^5} - \frac{23}{x^{24}}\right)$

8. a) $2cos(x) \cdot 12/x^4 - 5 \cdot \sqrt[4]{3x}$ **; b)** $-cos(x) + 2ln(x) / \sqrt[3]{x}$

a) $-2sin(x) \cdot \left(\frac{12}{x^4} - 5 \cdot \sqrt[4]{3x}\right) + 2cos(x) \cdot \left(-\frac{48}{x^5} - \frac{5\sqrt[4]{3}}{4\sqrt[4]{x^3}}\right)$;

b)
$$-cos(x) + 2ln(x)\ x^{-\frac{1}{3}} = \left[sin\ x + \frac{2}{x}\right] x^{-\frac{1}{3}} - \frac{-cos(x) + 2ln(x)}{3\sqrt[4]{x^3}} =$$
$$= \frac{x \cdot sin\ x + 2}{\sqrt[4]{x^3}} - \frac{-cos(x) + 2ln(x)}{3\sqrt[4]{x^3}} = \frac{3x \cdot sin\ x + 6 + cos(x) - 2ln(x)}{\sqrt[4]{x^3}}$$

9. a) $(x + 1) \cdot [ln(x) + x^2]$; b) $(x^2 - 2x + 1) \cdot (x^3 - x^2 + x - 1)$
a) $ln(x) + x^2 + (x + 1) \cdot [1/x + 2x] = ln(x) + x^2 + 1 + 2x^2 + 1/x + 2x = ln(x) + 3x^2 + 2x + 1 + 1/x$
b) $(2x - 2) \cdot (x^3 - x^2 + x - 1) + (x^2 - 2x + 1) \cdot (3x^2 - 2x^2 + 1) = 5x^4 - 12x^3 + 12x^2 - 8x + 3$

10. a) $(x^3 + x - 1) \cdot [ln(x) + 1/x^2]$; b) $(e^x + 1) \cdot (e^x - 4)$
a) $(3x^2 + 1) \cdot [ln(x) + 1/x^2] + (x^3 + x - 1) \cdot [1/x - 2/x^3] = ln(x) \cdot (3x^2 + 1) + 3 + 1/x^2 + x^2 - 2 + 1 - 2/x^2 - 1/x + 2/x^3 = ln(x) \cdot (3x^2 + 1) + x^2 + 2 - 1/x - 1/x^2 + 2/x^3$
b) $(e^x + 1) \cdot (e^x - 4) + (e^x + 1) \cdot (e^x - 4)$ [a); b) $2e^{2x} - 3e^x$]

11. $3x + \sqrt[5]{x^3} \cdot [sin\ x + ln(x)]$

$$\left(3+\frac{5}{3\sqrt[5]{x^2}}\right)\cdot\left[sin\ x+ln(x)\right]+3x+\sqrt[5]{x^3}\cdot\left[cos\ x+\frac{1}{x}\right]=$$

$$=\frac{9\sqrt[5]{x^2}+5}{3\sqrt[5]{x^2}}\cdot\left[sin\ x+ln(x)\right]+3x+\sqrt[5]{x^3}\cdot\frac{x\cdot cos\ x+1}{x}=$$

$$=\frac{9\sqrt[5]{x^2}+5}{3\sqrt[5]{x^2}}\cdot\left[sin\ x+ln(x)\right]+\left(3+\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\right)\cdot x\cdot cos\ x+1=$$

$$=\frac{9\sqrt[5]{x^2}+5\left[sin\ x+ln(x)\right]+9\sqrt[5]{x^2}+3\left[x\cdot cos\ x+1\right]}{3\sqrt[5]{x^2}}$$

12. **a) $x \cdot sin(x) \cdot e^x$; b) $x^2 \cdot ln(x) \cdot e^x$**

a) $sin(x) \cdot e^x + x \cdot cos(x) \cdot e^x + x \cdot sin(x) \cdot e^x = e^x \cdot [sin(x) + x \cdot cos(x) + sin(x)]$

b) $2x \cdot ln(x) \cdot e^x + x^2 \cdot 1/x \cdot e^x + x^2 \cdot ln(x) \cdot e^x = x \cdot e^x \cdot [(x + 2) \cdot ln(x) + 1)]$

13. **a) $x^2 \cdot cos(x) \cdot ln(x)$; b) $(e^x + 1)^4$**

a) $2x \cdot cos(x) \cdot ln(x) - x^2 \cdot sin(x) \cdot ln(x) + x^2 \cdot cos(x) \cdot 1/x = x \cdot \{[2cos\ (x) - x \cdot sin\ (x)] \cdot ln(x) + cos(x)\}$

b) $(e^x + 1)^4 = e^x \cdot (e^x + 1)^3 + e^x \cdot (e^x + 1)^3 + e^x \cdot (e^x + 1)^3 + e^x \cdot (e^x + 1)^3 = 4e^x \cdot (e^x + 1)^3$

14. **a) $2 \cdot \sqrt[3]{x} \cdot cos\ x \cdot e^x$; b) $(e^x + 1) \cdot (e^x - 2) \cdot e^x$**

a) $\frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}\cdot cos\ x\cdot e^x-2\sqrt[3]{x}\cdot sin\ x\cdot e^x+2\sqrt[3]{x}\cdot cos\ x\cdot e^x=\frac{2cos\ x\cdot e^x-6x\cdot sin\ x\cdot e^x+6x\cdot cos\ x\cdot e^x}{3\sqrt[3]{x^2}}=$;

$=\frac{2e^x\cdot cos\ x\cdot 1+3x-3x\cdot sin\ x}{3\sqrt[3]{x^2}}$

b) $e^x \cdot (e^x - 2) \cdot e^x + (e^x + 1) \cdot e^x \cdot e^x + (e^x + 1) \cdot (e^x - 2) \cdot e^x = e^x \cdot (e^{2x} - 2e^x + e^{2x} + e^x + e^{2x} - 2e^x + e^x - 2) = e^x \cdot (3e^{2x} - 2e^x - 2)$

Calcolare la derivata delle seguenti potenze

15. **a) $sin^5(x)$; b) $cos^7(x)$; c) $ln^6(x)$; d) e^{4x}; e) $\sqrt{cos\ x}$**

a) $5sin^4(x)cos(x)$; b) $-7cos^6(x)sin(x)$; c) $6ln^5(x)/x$; d) $4e^{4x}$; e) $\frac{1}{2}\left[cos\ x\right]^{-\frac{1}{2}}\left[-sin\ x\right]=\frac{-sin\ x}{2\sqrt{cos\ x}}$

16. **a) $ln^\pi(x)$; b) $\sqrt{4x+1}$; c) $\sqrt{9x+1}$; d) $\sqrt[3]{x^2+x-1}$**

a) $\frac{\pi ln^{\pi-1}(x)}{x}$; b) $\frac{4}{2\sqrt{4x+1}}=\frac{2}{\sqrt{4x+1}}$; c) $\frac{9}{2\sqrt{9x+1}}$; d) $\frac{2x+1}{3\sqrt[3]{\left(x^2+x-1\right)^2}}$

17. **a) $\sqrt[5]{cos^4(x)}$; b) $\sqrt[8]{sec^3(x)}$; c) $\sqrt[3]{\left(sin(x)+2\right)^4}$; d) $\sqrt[4]{\left[e^x+ln(x)\right]^3}$**

a) $\frac{-4sin(x)}{5\sqrt[5]{cos(x)}}$; b) $D\left[cos^{-3/8}(x)\right]=\frac{3sin(x)}{8\sqrt[8]{cos^{11}(x)}}$; c) $\frac{4cos(x)\sqrt[3]{sin(x)+2}}{3}$;

d) $\frac{3\left[e^x+1/x\right]}{4\sqrt[4]{e^x+ln(x)}}\ \frac{3\left(xe^x+1\right)}{4x\sqrt[4]{e^x+ln(x)}}$

18. **a) $[x \cdot sin(x)]^8$; b) $\left[\sqrt{x}\cdot ln\ x\right]^{12}$**

a) $8x^7 \cdot sin^7(x)\ [sin(x) + x \cdot cos(x)]$

b) $12\left[\sqrt{x}\cdot ln\ x\right]^{11}\cdot\left[\frac{ln\ x}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{x}\right]=\frac{12\left[\sqrt{x}\cdot ln\ x\right]^{11}\sqrt{x}\left[ln\ x+2\right]}{2x}=\frac{6x^6\cdot ln^{11}\ x\left[ln\ x+2\right]}{x}=6x^5\cdot ln^{11}\ x\left[ln\ x+2\right]$

19. **a) $\left[\sqrt{x}\cdot\cos\ x\right]^5$; b) $[x^{14} \cdot ln(x)]^6$**

a) $5\left[\sqrt{x}\cdot cos\ x\right]^4\cdot\left[\frac{cos\ x}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}sin\ x\right]=5\left[\sqrt{x}\cdot cos\ x\right]^4\cdot\frac{cos\ x-2xsin\ x}{2\sqrt{x}}=\frac{5x\sqrt{x}\cdot cos^4\ x\left[cos\ x-2x\cdot sin\ x\right]}{2}$;

b) $6[x^{14}\cdot ln(x)]^5\,[14x^{13}\cdot ln(x)+x^{14}\cdot 1/x]=6x^{83}\cdot ln^5(x)\,[14ln(x)+1]$

20. **a) $[sin(x)\cdot cos(x)]^5$; b) $[x^7\cdot cos(x)]^9$**

a) $5[sin(x)\cdot cos(x)]^4\,[cos^2(x)-sin^2(x)]=80sin^4(2x)cos(2x)$;

b) $9[x^7\cdot cos(x)]^8[7x^6\cdot cos(x)-x^7\cdot sin(x)]=9x^{62}\cdot cos^8(x)\cdot[7cos(x)-x\cdot sin(x)]$

21. **a) $\sqrt[3]{x^4}\cdot e^x\ ^7$; b) $[sin(x)\cdot e^x]^{13}$**

a) $7\ \sqrt[3]{x^4}\cdot e^x\ ^6\cdot\left(\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}\cdot e^x+\sqrt[3]{x^4}\cdot e^x\right)=7\cdot e^x\cdot\sqrt[3]{x}\ \sqrt[3]{x^4}\cdot e^x\ ^6\cdot\frac{4+3x}{3}=7\cdot e^{7x}\cdot\sqrt[3]{x^{25}}\cdot\frac{4+3x}{3}$;

b) $13[sin(x)\cdot e^x]^{12}\,[cos(x)\cdot e^x+sin(x)\cdot e^x]=13sin^{12}(x)\cdot e^{13x}\,[cos(x)+sin(x)]$

22. **$[cos(x)\cdot e^x]^{14}\cdot[ln(x)\cdot e^x]^4$**

$14[cos(x)\cdot e^x]^{13}\cdot[-sin(x)\cdot e^x+cos(x)\cdot e^x]\cdot[ln(x)\cdot e^x]^4+[cos(x)\cdot e^x]^{14}\cdot 4[ln(x)\cdot e^x]^3\cdot[1/x\cdot e^x+ln(x)\cdot e^x]=2cos^{13}(x)\cdot e^{18x}\cdot ln^3(x)\cdot\{7[-sin(x)+cos(x)]\cdot ln(x)+2cos(x)\cdot[1/x+ln(x)]\}=2cos^{13}(x)\cdot e^{18x}\cdot ln^3(x)\cdot[-7sin(x)+9cos(x)]\cdot ln(x)+2cos(x)/x]$

23. **a) $-cos(x)\cdot[sin^2(x)+2]/3$; b) $e^{4x}\cdot[-cos(x)+4sin(x)]/17$**

a) $sin(x)\cdot[sin^2(x)+2]/3-cos^2(x)\cdot 2sin(x)/3=sin^3(x)/3+2sin(x)/3-2cos^2(x)\cdot sin(x)/3=sin^3(x)/3+2sin(x)/3\,[1-cos^2(x)]=sin^3(x)/3+2sin^3(x)/3=sin^3(x)$;

b) $4e^{4x}\cdot[-cos(x)+4sin(x)]/17+e^{4x}\cdot[sin(x)+4cos(x)]/17=e^{4x}\cdot[-4cos(x)+16sin(x)+sin(x)+4cos(x)]/17=e^{4x}\cdot sin(x)$

24. **a) $x^2\cdot[2ln(x)-1]/4$; b) $-cos(x)\cdot[sin^2(x)+2]/3$**

a) $2x\cdot[2ln(x)-1]/4+x^2\cdot[2/x]/4=x\cdot ln(x)-2x+2x=x\cdot ln(x)$

b) $sin(x)\cdot[sin^2(x)+2]/3-cos(x)\cdot 2sin(x)cos(x)/3=sin(x)\cdot[sin^2(x)+2-2cos^2(x)]/3=sin(x)\cdot[sin^2(x)+2sin^2(x)]/3=sin^3(x)$

25. a) $x\cdot ln^2(x)-2x\cdot ln(x)+2x$; b) $x\cdot ln^3(x)-3x\cdot ln^2(x)+6x\cdot ln(x)-6x$

a) $ln^2(x)+2x\,ln(x)/x-2\cdot ln(x)-2+2=ln^2(x)$;

b) $ln^3(x)+3x\cdot ln^2(x)/x-3ln^2(x)-6x\cdot ln(x)/x+6ln(x)+6x/x-6=ln^3(x)+3ln^2(x)-3ln^2(x)-6ln(x)+6ln(x)+6-6=ln^3(x)$

Calcolare la derivata delle seguenti funzioni usando la regola di derivazione di un quoziente

26. **a) $cot(x)$; b) $sec(x)$; c) $csc(x)$; d) $\frac{x+1}{x^2+1}$; e) $\frac{x^2-1}{x^2}$**

a) $D\left(\frac{cos(x)}{sin(x)}\right)=\frac{-sin(x)sin(x)-cos(x)cos(x)}{sin^2(x)}=-1-cot^2(x)=-\frac{1}{sin^2(x)}=-csc^2(x)$;

b) $D\left(\frac{1}{cos(x)}\right)=\frac{sin(x)}{cos^2(x)}=tan(x)\cdot sec(x)$; c) $D\left(\frac{1}{sin(x)}\right)=\frac{-cos(x)}{sin^2(x)}=-cot(x)\cdot csc(x)$

d) $\frac{x^2+1-2x\cdot(x+1)}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}$;

e) $\frac{2\cancel{x}\cdot x^2-2\cancel{x}\cdot(x^2-1)}{x^{\cancel{4}3}}=\frac{2}{x^3}$ oppure $D\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=D\left(-x^{-2}\right)=2x^{-3}$

27. **a) $\frac{11x+3}{4x^2-1}$; b) $\frac{x^3}{1+x^2}$; c) $\frac{x+sin\ x}{x-sin\ x}$; d) $\frac{x+e^x}{x-e^x}$**

a) $\frac{11\cdot(4x^2-1)-8x(11x+3)}{(4x^2-1)^2}=\frac{-44x^2-24x-11}{(4x^2-1)^2}$; b) $\frac{3x^2\cdot(1+x^2)-2x\cdot x^3}{(1+x^2)^2}=\frac{x^4+3x^2}{(1+x^2)^2}$;

c) $$\frac{[1+\cos x]\cdot[x-\sin x]-[x+\sin x]\cdot[1-\cos x]}{[x-\sin x]^2}=$$

$$=\frac{\cancel{x}-\sin x+x\cdot\cos x-\cancel{\sin x\cdot\cos x}-\cancel{x}-\sin x-x\cdot\cos x+\cancel{\sin x\cdot\cos x}}{[x-\sin x]^2}=\frac{-2\sin x+2x\cdot\cos x}{[x-\sin x]^2};$$

d) $$\frac{1+e^x\cdot x-e^x-1-e^x\cdot x+e^x}{x-e^x{}^2}=\frac{\cancel{x}+xe^x-e^x-\cancel{e^{2x}}-\cancel{x}+xe^x-e^x+\cancel{e^{2x}}}{(x-e^x)^2}=\frac{2e^x(x-1)}{(x-e^x)^2}$$

28. **a)** $\frac{x+\ln x}{x-\ln x}$; **b)** $\frac{2x-1}{4x^2-91}$; **c)** $\frac{x-\cos(x)}{x+\sin(x)}$

a) $$\frac{\left[1+\frac{1}{x}\right][x-\ln x]-[x+\ln x]\left[1-\frac{1}{x}\right]}{[x-\ln x]^2}=\frac{\cancel{x}-\ln x+\cancel{1-\frac{\ln x}{x}}-\cancel{x}-\ln x+\cancel{1+\frac{\ln x}{x}}}{[x-\ln x]^2}=\frac{2-2\ln x}{[x-\ln x]^2};$$

b) $$\frac{2(4x^2-91)-8x(2x-1)}{(4x^2-91)^2}=\frac{-8x^2+8x-182}{(4x^2-91)^2};$$

c) $$\frac{[1+\sin x]\cdot[x+\sin x]-[x-\cos x]\cdot[1+\cos x]}{[x+\sin x]^2}=$$

$$=\frac{\cancel{x}+\sin x+x\cdot\sin x+\sin^2 x-\cancel{x}+\cos x-x\cdot\cos x-\cos^2 x}{[x+\sin x]^2}=$$

$$=\frac{\sin x+x\cdot\sin x-\cos x-x\cdot\cos x+1}{[x+\sin x]^2}$$

29. **a)** $\frac{x^2+x-2}{x^2-x+2}$; **b)** $\frac{e^x+x}{1+x^2}$; **c)** $\frac{\sin(x)+1}{\sin(x)-1}$

a) $$\frac{2x+1\ \ x^2-x+2\ -\ x^2+x-2\ \ 2x-1}{x^2-x+2^{\ 2}}=$$

$$=\frac{\cancel{2x^3}-2x^2+4x+x^2\cancel{-x+2}\cancel{-2x^3}-2x^2+4x+x^2\cancel{+x-2}}{(x^2-x+2)^2}=\frac{-2x^2+8x}{(x^2-x+2)^2};$$

b) $$\frac{e^x+1\ \ 1+x^2\ -\ e^x+x\ \ 2x}{1+x^2{}^{\ 2}}=\frac{e^x+1+x^2e^x+x^2-2xe^x-2x^2}{1+x^2{}^{\ 2}}=\frac{e^x\cdot x^2-2x+1\ +1-x^2}{1+x^2{}^{\ 2}}=$$

$$=\frac{e^x\cdot x-1^{\ 2}+1-x\ \ 1+x}{1+x^2{}^{\ 2}}=\frac{x-1\cdot[e^x\cdot x-1\ -1-x]}{1+x^2{}^{\ 2}};$$

c) $$\frac{\cos x\ [\cancel{\sin(x)}-1]-[\cancel{\sin(x)}+1]\cos x}{[\sin(x)-1]^2}=-\frac{2\cos x}{[\sin(x)-1]^2}$$

30. **a)** $\frac{x^3+1}{x^2-2}$; **b)** $\frac{x^4-x^2}{2x^2-3}$; **c)** $\frac{\sin(x)+\cos x}{\sin(x)-\cos x}$

a) a) $$\frac{3x^2\cdot x^2-2\ -2x\cdot x^3+1}{x^2-2^{\ 2}}=\frac{3x^4-6x^2-2x^4-2x}{x^2-2^{\ 2}}=\frac{x^4-6x^2-2x}{x^2-2^{\ 2}};$$

b) $\dfrac{4x^3-2x\cdot 2x^2-3-4x\cdot x^4-x^2}{2x^2-3^2}=\dfrac{8x^5-12x^3\cancel{-4x^3}+6x-4x^5\cancel{+4x^3}}{(2x^2-3)^2}=\dfrac{4x^5-12x^3+6x}{(2x^2-3)^2}$;

c) $\dfrac{[\cos x-\sin(x)]\cdot[\sin(x)-\cos x]-[\sin(x)+\cos x]\cdot[\cos x+\sin(x)]}{[\sin(x)-\cos x]^2}=$

$=\dfrac{\cancel{2\sin(x)\cos x}-\cos^2(x)-\sin^2(x)-\cancel{2\sin(x)\cos(x)}-\cos^2(x)-\sin^2(x)}{[\sin(x)-\cos(x)]^2}=\dfrac{-2}{[\sin(x)-\cos(x)]^2}$

31. **a)** $\dfrac{e^x}{e^x-2}$; **b)** $\dfrac{1+\ln x}{1-\log_2 x}$; **c)** $\dfrac{e^x+\ln x}{e^x-\ln x}$

a) $\dfrac{e^x(\cancel{e^x}-2)-\cancel{e^x\cdot e^x}}{(e^x-2)^2}=\dfrac{-2e^x}{(e^x-2)^2}=$;

b) $\dfrac{\dfrac{1-\log_2 x}{x}+\dfrac{1+\ln x}{x\ln 2}}{[1-\log_2 x]^2}=\dfrac{\ln 2-\cancel{\ln 2}\cdot\dfrac{\ln(x)}{\cancel{\ln 2}}+1+\ln(x)}{x[1-\log_2(x)]^2}=\dfrac{\ln(2)+1}{x[1-\log_2(x)]^2}$;

c) $\dfrac{\left[e^x+\dfrac{1}{x}\right][e^x-\ln x]-[e^x+\ln x]\left[e^x-\dfrac{1}{x}\right]}{[e^x-\ln x]^2}=\dfrac{\dfrac{xe^x+1}{x}[e^x-\ln x]-[e^x+\ln x]\dfrac{xe^x-1}{x}}{[e^x-\ln x]^2}=$

$=\dfrac{\cancel{xe^{2x}}+e^x-xe^x\ln(x)-\cancel{\ln(x)}-\cancel{xe^{2x}}+e^x-xe^x\ln(x)-\cancel{\ln(x)}}{x[e^x-\ln(x)]^2}=\dfrac{2e^x[1-x\ln(x)]}{x[e^x-\ln(x)]^2}$

$\left[\text{a) } \dfrac{-2\cdot e^x}{e^x-2^2}\text{; b) } \dfrac{\ln 2\cdot[1+\ln 2]}{x\cdot\ln^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}\text{; c) } \dfrac{e^x\cdot\ln 3\cdot[1+\ln 3]\cdot[1-x\cdot\ln x]}{x\cdot[e^x\cdot\ln 3-\ln x]^2}\right]$

32. **a)** $\dfrac{x^2\cdot\ln x}{\ln x-1}$; **b)** $\dfrac{x\cdot\ln x-2}{x}$; **c)** $\dfrac{\sin(x)\cdot\cos x}{\sin^2(x)+1}$

a) $\dfrac{\left[2x\cdot\ln x+x^{\cancel{2}}\cdot\dfrac{1}{\cancel{x}}\right]\cdot[\ln(x)-1]-[x^{\cancel{2}}\cdot\ln(x)]\dfrac{1}{\cancel{x}}}{[\ln(x)-1]^2}=\dfrac{2x\cdot\ln^2(x)-2x\cdot\ln(x)-\cancel{x\cdot\ln(x)}-x-\cancel{x\cdot\ln(x)}}{[\ln(x)-1]^2}=$;

$=\dfrac{x\cdot[2\ln^2(x)-2\ln(x)-1]}{[\ln(x)-1]^2}=\dfrac{x\cdot[2\ln^2(x)-\ln(x^2)-1]}{[\ln(x)-1]^2}$

b) $\dfrac{[\cancel{\ln x}+1]x-[\cancel{x\cdot\ln(x)}-2]}{x^2}=\dfrac{x+2}{x^2}$;

c)
$$\frac{\left[sin^2(x)-cos^2\ x\right]\left[sin^2(x)+1\right]-sin(x)\cdot cos\ x\cdot 2sin\ x\ cos\ x}{\left[sin^2(x)+1\right]^2}=$$
$$=\frac{\left[1-2sin^2(x)\right]\left[sin^2(x)+1\right]-2sin^2(x)\cdot cos^2\ x}{\left[sin^2(x)+1\right]^2}=$$
$$=\frac{sin^2(x)+1-2sin^4(x)-2sin^2(x)-2sin^2(x)\cdot\left[1-sin^2\ x\right]}{\left[sin^2(x)+1\right]^2}=$$
$$=\frac{1\cancel{-2sin^4(x)}-sin^2(x)-2sin^2(x)\cancel{+2sin^4(x)}}{\left[sin^2(x)+1\right]^2}=\frac{1-3sin^2(x)}{\left[sin^2(x)+1\right]^2}$$

33. **a)** $\frac{x\cdot e^x}{x\cdot e^x-1}$; **b)** $\frac{x^2\cdot e^x-1}{x\cdot e^x+1}$; **c)** $\frac{sin^2\ x}{cos^3\ x}$

a)
$$\frac{e^x+x\cdot e^x\ \cdot\ x\cdot e^x-1\ -x\cdot e^x\cdot\ e^x+x\cdot e^x}{x\cdot e^x-1\ ^2}=\frac{e^x\ 1+x\ \cdot\ x\cdot e^x-1\ -x\cdot e^{2x}\cdot\ 1+x}{x\cdot e^x-1\ ^2}=$$
$$=\frac{e^x\ 1+x\ \cdot\ \left(\cancel{x\cdot e^x}-1\cancel{-x\cdot e^x}\right)}{\left(x\cdot e^x-1\ ^2\right)}=\frac{e^x\ \left(-x\right)}{\left(x\cdot e^x-1\ ^2\right)};$$

b)
$$\frac{e^x\ 2x+x^2\ \ x\cdot e^x+1\ -\ x^2\cdot e^x-1\ e^x\ 1+x}{x\cdot e^x+1\ ^2}=\frac{e^x\ \left(2x^2\cdot e^x+\cancel{x^3\cdot e^x}+2x+x^2-x^2\cdot e^x+1\cancel{-x^3e^x}+x\right)}{\left(x\cdot e^x+1\ ^2\right)}=$$
$$=\frac{e^x\ \left(x^2\cdot e^x+x^2+3x+1\right)}{\left(x\cdot e^x+1\ ^2\right)};$$

c)
$$\frac{2sin\ x\ cos\ x\ cos^{\cancel{3}}\ x+3sin^2\ x\ \cancel{cos^2\ x\ sin\ x}}{cos^{\cancel{6}4}\ x}=\frac{sin\ x\left[2cos^2\ x+3sin^2\ x\right]}{cos^4\ x}=$$
$$=\frac{sin\ x\left[2-2sin^2\ x+3sin^2\ x\right]}{cos^4\ x}=\frac{sin\ x\left[2+sin^2\ x\right]}{cos^4\ x}=$$

34. **a)** $\frac{ax+b}{ax-b}$; **b)** $\frac{ax^2+bx+c}{ax^2-bx+c}$; **c)** $\frac{a+sin\ x}{b-cos\ x}$

a)
$$\frac{a\ \left(\cancel{ax}-b\right)-\left(\cancel{ax}+b\ a\right)}{\left(ax-b\ ^2\right)}=\frac{-2ab}{\left(ax-b\ ^2\right)};$$

b)
$$\frac{2ax+b\ \ ax^2-bx+c\ -\ ax^2+bx+c\ \ 2ax-b}{ax^2-bx+c\ ^2}=$$
$$=\frac{\cancel{2a^2x^3}-2abx^2\cancel{+2acx}+abx^2\cancel{-b^2x}+bc\cancel{-2a^2x^3}-2abx^2\cancel{-2acx}+abx^2\cancel{+b^2x}+bc}{\left(ax^2-bx+c\ ^2\right)}=;$$
$$=\frac{2b\ \left(-ax^2+c\right)}{\left(ax^2-bx+c\ ^2\right)}$$

c) $$\frac{\cos x\,[b-\cos x]-[a+\sin x]\sin x}{[b-\cos x]^2}=\frac{b\cdot\cos x-\cos^2 x-a\cdot\sin x-\sin^2 x}{[b-\cos x]^2}=$$
$$=\frac{b\cdot\cos x-a\cdot\sin x-1}{[b-\cos x]^2}$$

35. **a)** $\frac{a\cdot\sin x+b\cdot\cos x}{a\cdot\cos x-b\cdot\sin x}$; **b)** $\frac{a+e^x}{b-e^x}$; **c)** $\frac{a+b\cdot\ln x}{b-a\cdot\ln x}$

a) $$\frac{[a\cdot\cos x-b\cdot\sin x][a\cdot\cos x-b\cdot\sin x]-[a\cdot\sin x+b\cdot\cos x][-a\cdot\sin x-b\cdot\cos x]}{[a\cdot\cos x-b\cdot\sin x]^2}=$$
$$=\frac{[a\cdot\cos x-b\cdot\sin x]^2+[a\cdot\sin x+b\cdot\cos x]^2}{[a\cdot\cos x-b\cdot\sin x]^2}=$$
$$=\frac{a^2\cdot\cos^2+b^2\cdot\sin^2 x\;x\;\cancel{-2ab\cdot\sin x\cos x}+a^2\cdot\sin^2 x+b^2\cdot\cos^2 x\;\cancel{+2ab\cdot\sin x\cos x}}{[a\cdot\cos x-b\cdot\sin x]^2}=$$
$$=\frac{(a^2+b^2)\cdot\sin^2 x+(a^2+b^2)\cdot\cos^2 x}{[a\cdot\cos x-b\cdot\sin x]^2}=\frac{(a^2+b^2)\cdot[\sin^2 x+\cos^2 x]}{[a\cdot\cos x-b\cdot\sin x]^2}=\frac{a^2+b^2}{[a\cdot\cos x-b\cdot\sin x]^2};$$

b) $$\frac{e^x\,b-e^x+a+e^x\,e^x}{b-e^x\;^2}=\frac{e^x\,(\cancel{b-e^x}+\cancel{a+e^x})}{(b-e^x)^2}=\frac{e^x\,(a+b)}{(b-e^x)^2};$$

c) $$\frac{\frac{b}{x}[b-a\cdot\ln x]+[a+b\cdot\ln x]\frac{a}{x}}{[b-a\cdot\ln x]^2}=\frac{b^2\;\cancel{-ab\cdot\ln x}+a^2\;\cancel{+ab\cdot\ln x}}{x\cdot[b-a\cdot\ln x]^2}=\frac{a^2+b^2}{x\cdot[b-a\cdot\ln x]^2}$$

36. **a)** $\frac{a+e^{ax}}{b+e^{bx}}$; **b)** $\frac{x\cdot\ln x}{x+a\cdot\ln x}$

a) $$\frac{ae^{ax}\,b+e^{bx}-a+e^{ax}\,be^{bx}}{b+e^{bx}\;^2}=\frac{abe^{ax}+ae^{a+b\,x}-abe^{bx}-be^{a+b\,x}}{b+e^{bx}\;^2}=\frac{ab\,e^{ax}-e^{bx}+a-b\,e^{a+b\,x}}{b+e^{bx}\;^2};$$

b) $$\frac{[\ln x+1]\cdot[x+a\cdot\ln x]-x\cdot\ln x\cdot\left[1+\frac{a}{x}\right]}{[x+a\cdot\ln x]^2}=\frac{\cancel{x\cdot\ln x}+a\cdot\ln^2 x+x+\cancel{a\cdot\ln x}-\cancel{x\cdot\ln x}-\cancel{a\cdot\ln x}}{[x+a\cdot\ln x]^2}=$$
$$=\frac{a\cdot\ln^2 x+x}{[x+a\cdot\ln x]^2}$$

Utilizzando le regole sulla derivazione del prodotto o del quoziente e opportune identità, calcolare le derivate delle seguenti funzioni. Si ha: sin(3x) = 3sin(x) – 4sin³(x); cos(3x) = 4cos³(x) – 3 cos(x).

37. **a) *sin*(2*x*); b) *sin*(3*x*); c) *sin*(4*x*); d) *cos*(2*x*); e) *cos*(3*x*); f) *cos*(4*x*)**

a) $D[2\sin(x)\cos(x)] = 2\cos^2(x) - 2\sin^2(x) = 2[\cos^2(x) - 2\sin^2(x)] = 2\cos(2x)$;
b) $D[3\sin(x) - 4\sin^3(x)] = 3\cos(x) - 12\sin^2(x)\cos(x) = 3\cos(x)\,[1 - 4 + 4\cos^2(x)] = 3\cos(x)\,[4\cos^3(x) - 3\cos(x)] = 3\cos(3x)$; c) $D[2\sin(2x)\cos(2x)] = D\{4\sin(x)\cos(x)[1 - 2\sin^2(x)]\} = [4\sin^2(x) - 4\cos^2(x)]\cdot[1 - 2\sin^2(x)] - 4\sin(x)\cos(x)4\sin(x)\cos(x) = 4\cos(2x)\cdot\cos(2x) - 4\sin^2(2x) = 4\cos^2(2x) - 4\sin^2(2x) = 4\cos(4x)$; d) $D[1 - 2\sin^2(x)] = -4\sin(x)\cos(x) = -2\sin(2x)$; e) $D[4\cos^3(x) - 3\cos(x)] = -12\cos^2(x)\sin(x) + 3\sin(x) = -3\sin(x)[4\cos^2(x) - 1] = -3\sin(x)[4 - 4\sin^2(x) - 1] = = -9\sin(x) - 12\sin^3(x) = -3\sin(3x)$;
f) $D[1 - 2\sin^2(2x)] = -4\sin(2x)2\cos(2x) = -4\sin(4x)$

38. **a) *tan*(2*x*); b) *tan*(3*x*); c) *tan*(4*x*); d) *ln*(2*x*); e) *ln*(3*x*); f) *ln*(4*x*)**

a) $D\left(\frac{sin(2x)}{cos(2x)}\right)=\frac{2cos^2(2x)+2sin^2(2x)}{cos^2(2x)}=\frac{2}{cos^2(2x)}$;

b) $D\left(\frac{sin(3x)}{cos(3x)}\right)=\frac{3cos^2(3x)+3sin^2(3x)}{cos^2(3x)}=\frac{3}{cos^2(3x)}$;

c) $D\left(\frac{sin(4x)}{cos(4x)}\right)=\frac{4cos^2(4x)+4sin^2(4x)}{cos^2(4x)}=\frac{4}{cos^2(4x)}$;

d) $D[ln(2) + ln(x)] = 1/x$ e) $D[ln(3) + ln(x)] = 1/x$; f) $D[ln(4) + ln(x)] = 1/x$;

Tenuto conto degli esercizi precedenti, congetturare il valore delle seguenti derivate, $n \in \mathbb{N}$

39. a) D[*sin*(*nx*)]; b) D[*cos*(*nx*)]; c) D[*tan*(*nx*)]; d) D[*ln*(*nx*)]

a) $n \cdot cos(nx]$; b) $-n \cdot sin(nx)$; c) $\frac{n}{cos^2(nx)}$; d) $1/x$

Determinare l'equazione della tangente alla seguenti curve di cui è fornita l'equazione, nel punto di ascissa indicata

40. a) $y = x^2 + 4x + 1$, $x_A = -2$; b) $y = 6x^3 + 4x^2 + x$, $x_B = -2$; c) $y = 3x^4 - x + 1$, $x_C = -1$

$y - [(-2)^2 - 2 \cdot 4 + 1] = [2\cdot(-2) + 4]\,(x + 2) \Rightarrow y + 3 = 0$; b) $y - [6\cdot(-2)^3 + 4\cdot(-2)^2 - 2] = [18\cdot(-2)^2 + 8\cdot(-2) +1] \cdot(x + 2) \Rightarrow y + 34 = 57\cdot(x + 2)$; $y = 57x + 80$; c) $y - [3\cdot(-1)^4 + 1 + 1] = [12\cdot(-1)^3 - 1](x + 1) \Rightarrow y - 5 = -13(x + 1) \Rightarrow y = -13x - 8$

41. a) $y = sin(x)$, $x_D = 0$; b) $y = sin(x) + cos(x)$, $x_E = \pi$; c) $y = sin(x) \cdot cos(x) - 3$, $x_F = \pi/2$

a) $y - sin(0) = cos(0)(x - 0) \Rightarrow y = x$; b) $y - [sin(\pi) + cos(\pi)] = [cos(\pi) - sin(\pi)](x - \pi) \Rightarrow y + 1 = -(x - \pi) \Rightarrow y = -x + \pi - 1$; c) $y = sin(2x)/2 - 3 \Rightarrow y - [sin(\pi) - 3] = cos(\pi)(x - \pi/2) \Rightarrow y + 3 = -(x - \pi/2) \Rightarrow y = -x + \pi/2 + 3$

42. a) $y = x \cdot e^x$, $x_G = 0$; b) $y = x \cdot ln(x)$, $x_H = 1$; c) $y = x \cdot sin(x)$, $x_I = \pi$; d) $y = x^2 \cdot sin(x)$, $x_J = \pi/2$

a) $y - 0 = (e^0 + 0)x \Rightarrow y = x$; b) $y - [1 \cdot ln(1)] = [ln(1) + 1](x - 1) \Rightarrow y = x - 1$; c) $y - [\pi \cdot sin(\pi)] = [sin(\pi) + \pi\cdot cos(\pi)]\,(x - \pi) \Rightarrow y = -\pi(x - \pi) \Rightarrow y = -\pi x + \pi^2$; d) $y - [(\pi/2)^2 \cdot sin(\pi/2)] = [2\cdot\pi/2 \cdot sin(\pi/2) + (\pi/2)^2 \cdot cos(\pi/2)](x - \pi/2) \Rightarrow y - \pi^2/4 = \pi(x - \pi/2) \Rightarrow y = \pi x - \pi^2/4$

Nelle seguenti famiglie di curve, determinare gli eventuali valori del parametro reale m, per cui la tangente nel punto di ascissa x_0, risulti parallela alla retta r indicata

43. $y = m \cdot x^3 - 5x^2 + 13$, $x_0 = 3$, $r : x - 5y + 2 = 0$

Deve essere $3m\cdot 3^2 - 10\cdot 3 = 1/5 \Rightarrow 27m = 151/5 \Rightarrow 27m = 151/5 = 151/135$

44. $y = 3x^3 + m \cdot x^2 - 3$, $x_0 = 2$, $r : 7x - 2y + 1=0$

$9(2)^2 + 2m(2) = 7/2 \Rightarrow m = -65/8$

45. $y = m + x^3 \cdot sin(x)$, $x_0 = -1$, $r : 8x + 3y - 1 = 0$

$3(-1)^2 \cdot sin(-1) + (-1)^3 \cdot cos(-1) = -8/3 \Rightarrow 3sin(-1) - cos(-1) = -8/3$ che è una contraddizione

46. $y = x^3 - m \cdot x \cdot e^x$, $x_0 = 4$, $r : 7x - 5y + 2 = 0$

$3(4)^2 - m \cdot e^4\,(1 + 4) = 7/5 \Rightarrow 5e^4 m = 48 - \frac{7}{5} \Rightarrow m = \frac{233}{25e^4}$

47. $y = x + m \cdot x \cdot ln(x)$, $x_0 = -1$, $r : 8x + y + 2 = 0$

Il problema non ha senso, perché –1 non appartiene al dominio della funzione

48. a) $y = \frac{mx+1}{mx-1}$, $x_0 = 2$, $r : 4x - y + 1= 0$; b) $y = \frac{x+m}{x-m}$, $x_0 = 3$, $r : 3x + 5y + 2= 0$

a) $y' = \frac{m\ \ mx-1\ \ -m\ \ mx+1}{mx-1\ ^2} = \frac{-2m}{mx-1\ ^2} \Rightarrow \frac{-2m}{2m-1\ ^2} = 4 \Rightarrow -m = 2\ \ 2m-1\ ^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 8m^2 - 7m + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 49 - 64 < 0$

b) $y' = \frac{x-m-x-m}{x-m\ ^2} = \frac{-2m}{x-m\ ^2} \Rightarrow \frac{-2m}{3-m\ ^2} = -\frac{3}{5} \Rightarrow 10m = 3\ \ 9 - 6m + m^2$

$\Rightarrow 3m^2 - 28m + 27 = 0 \Rightarrow m = \frac{14 \pm \sqrt{196-81}}{3} = \frac{14 \pm \sqrt{115}}{3}$

49. $y=\dfrac{x+\sin x}{mx}$, **$x_0 = 1$, r : $2x - 3y + 2 = 0$**

$$y'=\frac{[1+\cos x]mx-m[x+\sin x]}{m^2x^2}\Rightarrow\frac{1+\cos 1-1+\sin 1}{m}=\frac{2}{3}\Rightarrow m=\frac{3\cdot[\cos 1-\sin 1]}{2}$$

50. $y=\dfrac{e^x+m}{e^x-m}$, **$x_0 = -2$, r : $7x + y + 2 = 0$**

$$y'=\frac{e^x\ e^x-m\ -e^x\ e^x+m}{e^x-m\ ^2}=\frac{-2me^x}{e^x-m\ ^2}\Rightarrow\frac{-2me^{-2}}{e^{-2}-m\ ^2}=-7\Rightarrow 2me^{-2}=7e^{-4}-14me^{-2}+7m^2\Rightarrow$$

$$7m^2e^2-16m+7e^{-2}=0\Rightarrow m=\frac{8\pm\sqrt{64-49}}{7e^2}=\frac{8\pm\sqrt{15}}{7e^2}$$

Studiare al variare del parametro reale k, quante tangenti orizzontali hanno le seguenti curve

51. **a) $y = x^3 + kx^2 + x - 1$; b) $y = x^4 + kx^2 - 1$; c) $y = x^4 - (k + 1) \cdot x^3 + 1$; d)** $y=\dfrac{x^2+k}{x-k}$

a) $y' = 3x^2 + 2kx + 1 \Rightarrow 3x^2 + 2kx + 1 = 0 \Rightarrow \Delta/4 = k^2 - 3$, quindi avremo: $\begin{cases}0 & -\sqrt{3}<k<\sqrt{3}\\ 1 & k=\pm\sqrt{3}\\ 2 & k<-\sqrt{3}\vee k>\sqrt{3}\end{cases}$

b) $y' = 4x^3 + 2kx = 2x(2x^2 + k)$, quindi ha sempre una tangente per qualsiasi k, in $x = 0$. Ha altre due tangenti se $k < 0$.

c) $y' = 4x^3 - 3(k + 1)x^2 = x^2(4x - 3k - 3)$, quindi ha sempre una tangente per qualsiasi k, in $x = 0$, ne ha un'altra se $k + 1 \neq 0 \Rightarrow k \neq -1$;

d) $y'=\dfrac{2x\ x-k\ -\ x^2+k}{x-k\ ^2}=\dfrac{x^2-2kx-k}{x-k\ ^2}\Rightarrow\dfrac{\Delta}{4}=k^2+k:\begin{cases}0 & -1<k<0\\ 1 & k=-1\vee k=0\\ 2 & k<-1\vee k>0\end{cases}$

52. **Date due funzioni non derivabili, il loro prodotto e/o il loro quoziente sono certamente non derivabili? Giustificare la risposta.**

No, p.e. $f(x) = g(x) = |x| \Rightarrow f(x) \cdot g(x) = x^2$. Per il quoziente:

$$f\ x=\begin{cases}x & x<2\\ -x^2 & x\geq 2\end{cases},g\ x=\begin{cases}3-x & x<2\\ 2x & x\geq 2\end{cases}\Rightarrow\frac{f\ x}{g\ x}=\begin{cases}\dfrac{x}{3-x} & x<2\\ -\dfrac{x}{2} & x\geq 2\end{cases}\Rightarrow D\left[\frac{f\ x}{g\ x}\right]=\begin{cases}\dfrac{-2}{3-x\ ^2} & x<2\\ -\dfrac{1}{2} & x>2\end{cases}$$

e $D\left[\dfrac{f\ x}{g\ x}\right]^-_{x=2}=\dfrac{-2}{3-x\ ^2}=-\dfrac{1}{2}=D\left[\dfrac{f\ x}{g\ x}\right]^+_{x=2}$

Le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono derivabili nell'intorno di x_0. $(x_0; f(x_0))$ e $(x_0; g(x_0))$ sono punti di non derivabilità dei tipi di seguito indicati. Stabilire che tipo di punto è

a) $(x_0; f(x_0) \pm g(x_0))$; b) $(x_0; f(x_0) \cdot g(x_0))$; c) $(x_0; f(x_0) / g(x_0))$, con $g(x_0) \neq 0$ e $g'(x_0) \neq 0$.

53. **Entrambi punti angolosi.**

Supponiamo che si abbia: $f'^-(x_0)=a, f'^+(x_0)=b, g'^-(x_0)=c, g'^+(x_0)=d$

a) Si ha: $f'^-(x_0)\pm g'^-(x_0)=a\pm c, f'^+(x_0)\pm g'^+(x_0)=b\pm d$, quindi x_0 è punto angoloso se $a \pm c \neq b \pm d$; diversamente è derivabile;

b) $\begin{matrix}f'^-(x_0)g'^-(x_0)=f'^-(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'^-(x_0)=a\cdot g(x_0)+c\cdot f(x_0)\\ f'^+(x_0)g'^+(x_0)=b\cdot g(x_0)+d\cdot f(x_0)\end{matrix}$, quindi x_0 è punto angoloso se $a\cdot g(x_0)+c\cdot f(x_0)\neq b\cdot g(x_0)+d\cdot f(x_0)$, diversamente è derivabile;

c) $\dfrac{f'^{-}(x_0)}{g'^{-}(x_0)}=\dfrac{f'^{-}(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'^{-}(x_0)}{[g(x_0)]^2}=\dfrac{a\cdot g(x_0)-c\cdot f(x_0)}{[g(x_0)]^2};\dfrac{f'^{+}(x_0)}{g'^{+}(x_0)}=\dfrac{b\cdot g(x_0)-d\cdot f(x_0)}{[g(x_0)]^2}$

quindi x_0 è punto angoloso se $a\cdot g(x_0)-c\cdot f(x_0)\neq b\cdot g(x_0)-d\cdot f(x_0)$, diversamente è derivabile

54. (x_0; $f(x_0)$) punto angoloso, (x_0; $g(x_0)$) punto cuspidale.

Supponiamo che si abbia: $f'^{-}(x_0)=a, f'^{+}(x_0)=b, g'^{-}(x_0)\to\pm\infty, g'^{+}(x_0)\to\mp\infty$

a) Si ha: $f'^{-}(x_0)\pm g'^{-}(x_0)\to\pm\infty, f'^{+}(x_0)\pm g'^{+}(x_0)\to\mp\infty$, quindi x_0 è punto cuspidale;

b) $f'^{-}(x_0)g'^{-}(x_0)\to\begin{cases}\mp\infty & f(x_0)<0\\ F.I. & f(x_0)=0\\ \pm\infty & f(x_0)>0\end{cases}, f'^{+}(x_0)g'^{+}(x_0)\to\begin{cases}\pm\infty & g(x_0)<0\\ F.I. & g(x_0)=0\\ \mp\infty & g(x_0)>0\end{cases}$ quindi x_0 è punto cuspidale se $f(x_0)\,g(x_0)>0$ è punto di flesso se $f(x_0)\,g(x_0)<0$, nulla può dirsi se $f(x_0)\,g(x_0)=0$

c) Se $f(x_0)\neq 0$: $\dfrac{f'^{-}(x_0)}{g'^{-}(x_0)}\to\pm\infty;\dfrac{f'^{+}(x_0)}{g'^{+}(x_0)}\to\mp\infty$ quindi x_0 è un punto cuspidale, se $f(x_0)=0$ nulla può dirsi

55. (x_0; $f(x_0)$) punto angoloso, (x_0; $g(x_0)$) punto di flesso.

Supponiamo che si abbia: $f'^{-}(x_0)=a, f'^{+}(x_0)=b, g'^{-}(x_0)\to\pm\infty, g'^{+}(x_0)\to\pm\infty$

a) Si ha: $f'^{-}(x_0)\pm g'^{-}(x_0)\to\pm\infty, f'^{+}(x_0)\pm g'^{+}(x_0)\to\pm\infty$, quindi x_0 è un punto di flesso;

b) $f'^{-}(x_0)g'^{-}(x_0)\to\pm\infty, f'^{+}(x_0)g'^{+}(x_0)\to\pm\infty$ quindi x_0 è punto flesso se $f(x_0)\neq 0$, se $f(x_0)=0$ nulla può dirsi

c) $\dfrac{f'^{-}(x_0)}{g'^{-}(x_0)}\to\pm\infty;\dfrac{f'^{+}(x_0)}{g'^{+}(x_0)}\to\pm\infty$ quindi x_0 è punto flesso se $f(x_0)\neq 0$, se $f(x_0)=0$ nulla può dirsi

56. Entrambi punti cuspidali o entrambi flessi.

Consideriamo solo il caso punti cuspidali. Distinguiamo i casi:

i) $f'^{-}(x_0)\to\pm\infty, f'^{+}(x_0)\to\mp\infty, g'^{-}(x_0)\to\pm\infty, g'^{+}(x_0)\to\mp\infty$;

ii) $f'^{-}(x_0)\to\pm\infty, f'^{+}(x_0)\to\mp\infty, g'^{-}(x_0)\to\mp\infty, g'^{+}(x_0)\to\pm\infty$

a) Si ha: i)

$f'^{-}(x_0)+g'^{-}(x_0)\to\pm\infty, f'^{+}(x_0)+g'^{+}(x_0)\to\mp\infty; f'^{-}(x_0)-g'^{-}(x_0)\to ?, f'^{+}(x_0)-g'^{+}(x_0)\to ?$

Quindi x_0 è punto cuspidale o non si sa;

Tutti gli altri casi, compreso quando sono entrambi flessi danno risultati simili. Quindi nulla può dirsi poiché i limiti potranno venire di uguale segno infinito oppure di segno infinito opposto o ancora forme indeterminate.

Derivate delle funzioni composte e delle funzioni inverse

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni

1. a) $3x\cdot[2-ln(x^3-2x+1)]$; b) $ln\ \sqrt{x-2}$; c) $log_4\ x+\sqrt{x}$

a) $y'=3\left[2-ln\ x^3-2x+1\right]-3x\cdot\dfrac{3x^2-2}{x^3-2x+1}=-ln\ x^3-2x+1^{\ 3}-\dfrac{3\cdot\ x^3+2x-2}{x^3-2x+1}$;

b) $\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}=\dfrac{1}{2\ x-2}$, ovviamente la derivata è definita solo per $x>2$, dominio della funzione;

c) $\dfrac{1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x+\sqrt{x}\ \ln\ 4}=\dfrac{2\cdot\sqrt{x}+1}{4x\cdot\ \sqrt{x}+1\ \cdot\ln\ 2}$

2. **a)** $\boldsymbol{x\cdot[\cos^2(x^2-1)]}$**; b)** $\ln\left[\ln\left(\sqrt{\sin(x)}\right)\right]$

a) $\cos^2\ x^2-1\ -2x^2\cdot\sin\ 2x^2-2$; b) $\dfrac{1}{\ln\left[\sqrt{\sin\ x}\right]}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\sin\ x}}\cdot\dfrac{\cos\ x}{2\sqrt{\sin\ x}}=\dfrac{\cot\ x}{\ln\left[\sin\ x\right]}$

3. **a)** $\boldsymbol{\ln(\sin(x^2))}$**; b)** $\dfrac{\sin\left(2x^2-2\right)+2x^2}{8}$**; c)** $\boldsymbol{\ln(\ln(x+1))}$

a) $\dfrac{1}{\sin\ x^2}\cdot\cos\ x^2\ \cdot 2x=2x\cdot\cot\ x^2$; b) $\dfrac{4x\cdot\cos\ 2x^2-2\ +4x}{8}=\dfrac{x\cdot\cos\ 2x^2-2\ +x}{2}$;

c) $\dfrac{1}{x+1\ \cdot\ln\ x+1}$

4. **a)** e^{x^2+3x-1}**; b)** $\sin\ \cos\ \sqrt{x}$ **; c)** $\boldsymbol{\sin(\ln(x^2))}$

a) $e^{x^2+3x-1}\cdot\ 2x+3$; b) $\dfrac{-\sin\ \sqrt{x}\ \cdot\cos\left[\cos\ \sqrt{x}\ \right]}{2\cdot\sqrt{x}}$; c) $\dfrac{2x\cdot\cos\left[\ln\ x^2\ \right]}{x^2}=\dfrac{2\cdot\cos\left[\ln\ x^2\ \right]}{x}$

5. **a)** $\dfrac{2x^3-\sin\left(2x^3-2\right)}{12}$**; b)** $2^{x+\ln\ x^2}$ **; c)** $\boldsymbol{e^{\cos(x)}}$

a) $\dfrac{6x^2-\cos\ 2x^3-2\ \cdot 6x^2}{12}=\dfrac{x^2\cdot\left[1-\cos\ 2x^3-2\ \right]}{2}$; b) $2^{x+\ln\ x^2}\ \cdot\left[1+\dfrac{2x}{x^2}\right]=2^{x+\ln\ x^2}\ \cdot\ln\ 2\ \cdot\left(\dfrac{2+x}{x}\right)$;

c) $-e^{\cos\ x}\ \cdot\sin\ x$

6. **a)** $\boldsymbol{\sin(x^3+x^2-x+1)}$**; b)** $\boldsymbol{\ln\{\sin[\cos(x)]\}}$

a) $\cos(x^3+x^2-x+1)\cdot(3x^2+2x-1)$; b) $\dfrac{-\cos\left[\cos\ x\ \right]\cdot\sin\ x}{\sin\left[\cos\ x\ \right]}=-\cot\left[\cos\ x\ \right]\cdot\sin\ x$

7. **a)** $\boldsymbol{\sin\{\ln[\cos(x)]\}}$**; b)** $\boldsymbol{\sin\{\cos[\ln\ (x)]\}}$

a) $\cos\ \ln\left[\cos\ x\ \right]\ \cdot\dfrac{-\sin\ x}{\cos\ x}=-\tan\ x\ \cdot\cos\ \ln\left[\cos\ x\ \right]$; b) $-\dfrac{\sin\left[\ln\ x\ \right]\cdot\cos\ \cos\left[\ln\ x\ \right]}{x}$

8. $\boldsymbol{[\sin(3x)\cdot\cos(4x)]^5}$

$5\sin^4(3x)\cdot\cos^4(4x)\cdot[3\cos(3x)\cdot\cos(4x)-4\sin(3x)\cdot\sin(4x)]$

9. **a)** $\left(e^{x^2}\cdot\sin(x)\right)^6$ **; b)** $\left[\sqrt[4]{x^3}\cdot\ln\left(x^3\right)\right]^4$

a) $6e^{5x^2}\cdot\sin^5(x)\cdot\left[e^{x^2}\cdot 2x\cdot\sin(x)+e^{x^2}\cdot\cos(x)\right]=6e^{6x^2}\cdot\sin^5(x)\cdot\left[2x\cdot\sin(x)+\cos(x)\right]$;

b)

$$4\left[\sqrt[4]{x^3}\cdot\ln\left(x^3\right)\right]^3\cdot\left[\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}\cdot\ln^3\left(x^3\right)+\sqrt[4]{x^3}\cdot\frac{3\cancel{x^2}}{x^{\cancel{3}}}\right]=\cancel{4}\left[\sqrt[4]{x^3}\cdot\ln\left(x^3\right)\right]^3\cdot\frac{3\cancel{x}\cdot\ln^3\left(x^3\right)+12\cancel{x}}{\cancel{4}\cancel{x}\sqrt[4]{x}}=$$

$$=\sqrt[4]{x^{\cancel{9}8}}\cdot\ln^3\left(x^3\right)\cdot\frac{3x\cdot\ln^3\left(x^3\right)+12x}{\cancel{4}x\cancel{\sqrt[4]{x}}}=81x^2\cdot\ln^3(x)\cdot\left[3\ln(x)+4\right]$$

10. **a)** $\boldsymbol{[\ln(x^2)\cdot\sin(x)]^4}$**; b)** $\ln\left(\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}\right)$

a) $4\ln^3 x^2 \cdot \sin^3 x \cdot \left[\frac{2\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}} \cdot \sin(x) + \ln(x^2) \cdot \cos(x)\right] = \frac{32[\sin(x) \cdot \ln(x)]^3 \cdot [2 \cdot \sin(x) + 2x \cdot \cos(x) \cdot \ln(x)]}{x} =$

$= \frac{64[\sin(x) \cdot \ln(x)]^3 \cdot [\sin(x) + x \cdot \cos(x) \cdot \ln(x)]}{x}$

b) $\frac{\cancel{x+1}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\frac{x+1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{(x+1)^{\cancel{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{x+1-2x}{2\sqrt{x}\,(x+1)} = \frac{1-x}{2x \cdot (x+1)}$

11. a) $(x^2 - 1)\cdot[x + \ln(x^2 - 2x)]$; b) $\sqrt{\left(x \cdot e^{2x}\right)^3}$

a) $2x \cdot \left[x + \ln x^2 - 2x\right] + x^2 - 1\left[1 + \frac{2x-2}{x^2-2x}\right] = 2x \cdot \left[x + \ln x^2 - 2x\right] + x^2 - 1\,\frac{x^2 \cancel{-2x+2x} - 2}{x^2 - 2x} =$

$= 2x \cdot \left[x + \ln(x^2 - 2x)\right] + \frac{(x^2-1)\cdot(x^2-2)}{x^2-2x}$;

b) $\frac{3\sqrt{x \cdot e^{2x}} \cdot e^{2x} + 2x \cdot e^{2x}}{2} = \frac{3e^{3x} \cdot \sqrt{x} \cdot 2x+1}{2}$

12. a) $-\cos(4x) \cdot [\sin^2(4x) + 2]/12$; b) $\sin(3x) \cdot [2\cos^2(3x) + 3]$

a) $4\sin(4x) \cdot [\sin^2(4x) + 2]/12 - \cos(4x) \cdot [2\sin(4x) \cdot \cos(4x) \cdot 4]/12 = [\sin^3(4x) + 2\sin(4x)]/3 - 2\sin(4x) \cdot \cos^2(4x)/3 = [\sin^3(4x) + 2\sin(4x) - 2\sin(4x) + 2\sin^3(4x)]/3 = \sin^3(4x)$;

b) $3\cos(3x) \cdot [2\cos^2(3x) + 3] + \sin(3x) \cdot [-4\cos(3x) \cdot 3\sin(3x)] = 6\cos^3(3x) + 9\cos(3x) - 12\sin^2(3x) \cdot \cos(3x) = -6\cos^3(3x) + 10\cos(3x) = 2\cos(3x) \cdot [5 - 3\cos^2(3x)]$

13. a) $\ln\left[\ln\left(\frac{3x}{5x+1}\right)\right]$; b) $\ln\left[\sin\left(\frac{x^2+3}{x+1}\right)\right]$

a) $\frac{1}{\ln\left(\frac{3x}{5x+1}\right)} \cdot \frac{\cancel{5x+1}}{\cancel{3}x} \cdot \frac{\cancel{3} \cdot (5x+1) + \cancel{15}^{5}x}{(5x+1)^{\cancel{2}}} = \frac{1}{(5x^2+x) \cdot \ln\left(\frac{3x}{5x+1}\right)}$

b) $\frac{1}{\sin\left(\frac{x^3+2}{x+1}\right)} \cdot \cos\left(\frac{x^3+2}{x+1}\right) \cdot \frac{2x\ x+1\ -x^2-3}{x+1^{\ 2}} = \frac{x^2+2x-3}{x+1^{\ 2}} \cdot \cot\left(\frac{x^3+2}{x+1}\right)$

14. a) $\ln\left[\tan\left(\frac{3x-1}{x^2+2}\right)\right]$; b) $\tan\left[\ln\left(\frac{x+3}{2x-5}\right)\right]$

a) $\cot\left(\frac{3x-1}{x^2+2}\right) \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{3x-1}{x^2+2}\right)} \cdot \frac{3x^2+6-6x^2+2x}{x^2+2^{\ 2}} = \frac{2}{2\sin\left(\frac{3x-1}{x^2+2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3x-1}{x^2+2}\right)} \cdot \frac{-3x^2+2x+6}{x^2+2^{\ 2}} =$

$= \frac{2}{\sin\left(\frac{6x-2}{x^2+2}\right)} \cdot \frac{-3x^2+2x+6}{x^2+2^{\ 2}} = \frac{6x^2-4x-12}{x^2+2^{\ 2}} \cdot \csc\left(\frac{2-6x}{x^2+2}\right)$

b) $\frac{1}{\cos^2\left[\ln\left(\frac{x+3}{2x-5}\right)\right]} \cdot \frac{\cancel{2x-5}}{x+3} \cdot \frac{\cancel{2x}-5\cancel{-2x}-6}{(2x-5)^{\cancel{2}}} = \frac{11}{(x+3)\cdot(2-2x)\cdot\cos^2\left[\ln\left(\frac{x+3}{2x-5}\right)\right]}$

15. a) $\sqrt{\left[\ln\left(\frac{2x^2+1}{x^2-1}\right)\right]^3}$; b) $\sin\left(e^{\frac{x+1}{x-1}}\right)$

a) $\frac{3}{\cancel{2}}\sqrt{ln\left(\frac{2x^2+1}{x^2-1}\right)}\cdot\frac{\cancel{x^2-1}}{2x^2+1}\cdot\frac{\cancel{4x^3}-\cancel{4}^{2}x\cancel{-4x^3}-\cancel{2}x}{\left(x^2-1\right)^{\cancel{2}}}=\frac{9x}{\left(1-x^2\right)\cdot\left(2x^2+1\right)}\cdot\sqrt{ln\left(\frac{2x^2+1}{x^2-1}\right)}$

b) $cos\left(e^{\frac{x+1}{x-1}}\right)\cdot e^{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{\cancel{x}-1\cancel{-x}-1}{\left(x-1\right)^2}=\frac{-2\cdot e^{\frac{x+1}{x-1}}}{\left(x-1\right)^2}\cdot cos\left(e^{\frac{x+1}{x-1}}\right)$

16. **a)** $\frac{x+e^{nx}}{x-e^{nx}}, n\in\mathbb{N}$ **; b)** $\boldsymbol{sin(x^n)\cdot cos(nx)}, n\in\mathbb{N}$

a) $\frac{1+ne^{nx}\cdot x-e^{nx}-1-ne^{nx}\cdot x+e^{nx}}{x-e^{nx}\ ^2}=\frac{\cancel{x}-e^{nx}+nxe^{nx}\cancel{-ne^{2nx}}\cancel{-x}-e^{nx}+nxe^{nx}\cancel{+ne^{2nx}}}{\left(x-e^{nx}\right)^2}=\frac{2e^{nx}\cdot\cancel{(}x-1\cancel{)}}{\left(e^{nx}-x\right)^2};$

b) $nx^{n-1}\cdot cos\ x^n\cdot cos\ nx-n\cdot sin\ x^n\cdot sin\ nx$

Sia f (x) derivabile per ogni x reale, che verifica le seguenti proprietà, h(x) composta mediante f(x) calcolare quanto richiesto

17. $\boldsymbol{f(0)=1, f'(0)=2, h(x)=1/f(x), h'(0)=?}$

$h(x)$ è derivabile in $x = 0$ perché reciproca di $f(x)$ che è derivabile in $x = 0$ ed è $f(0) \neq 0$. Si ha perciò:

$$h'(x)=-\frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}\Rightarrow h'(0)=-\frac{f'(0)}{\left[f(0)\right]^2}=-\frac{2}{1^2}=-2$$

18. $\boldsymbol{f(x)\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(1)=0, f'(1)=1, h(x)=ln[f(x)], h'(1)=?}$

La richiesta non ha senso perché $h(x)$ non è definita in 1: $h(1) = ln[f(1)] = ln[0]$

19. $\boldsymbol{f(2)=\pi/3, f'(2)=2, h(x)=sin[f(x)], h'(2)=?}$

$h(x)$ è derivabile in $x = 2$ perché composta da funzioni derivabili. Si ha: $h'(x) = cos[f(x)] \cdot f'(x) \Rightarrow h'(2) = cos[f(2)] \cdot f'(2) = cos[\pi/3] \cdot 2 = ½ \cdot 2 = 1$

20. $\boldsymbol{f(0)=2, f'(0)=1, h(x)=e^{f(x)}, h'(0)=?}$

$h(x)$ è derivabile in $x = 0$ perché composta da funzioni derivabili. Si ha: $h'(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x) \Rightarrow h'(0) = e^{f(0)} \cdot f'(0) = e^2 \cdot 1 = e^2$

21. $\boldsymbol{f(x)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}, f(0)=3, f'(0)=1, f''(0)=2,}\ h(x)=\sqrt{f(x)}, \boldsymbol{h''(0)=?}$

$h(x)$ è derivabile in $x = 0$ perché composta da funzioni derivabili e il radicando non è negativo. Si ha:

$$h'(x)=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\Rightarrow h''(x)=\frac{2f''(x)\sqrt{f(x)}-f'(x)\cdot\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}}{4f(x)}=\frac{2f''(x)f(x)-\left[f'(x)\right]^2}{4f(x)\sqrt{f(x)}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow h''(0)=\frac{2\cdot 2\cdot 3-1^2}{4\cdot 3\cdot\sqrt{3}}=\frac{11}{12\sqrt{3}}=\frac{11\sqrt{3}}{36}$$

22. $\boldsymbol{f(1)=\pi/4, f'(1)=1/2, f''(1)=1/4, h(x)=cos[f(x)], h''(1)=?}$

$h(x)$ è derivabile in $x = 0$ perché composta da funzioni derivabili. Si ha: $h'(x) = -sin[f(x)] \cdot f'(x) \Rightarrow h''(x) = -cos[f(x)] \cdot [f'(x)]^2 - sin[f(x)] \cdot f''(x) \Rightarrow h''(1) = -cos[f(1)] \cdot [f'(1)]^2 - sin[f(1)] \cdot f''(1) = -cos(\pi/4) \cdot [1/2]^2 - sin(\pi/4) \cdot ¼ = -\frac{\sqrt{2}}{8}-\frac{\sqrt{2}}{8}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$

23. $\boldsymbol{f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}, f(4)=1, f'(4)=-2, h(x)=sin\{ln[f(x)]\}, h'(4)=?}$

$h(x)$ è derivabile in $x = 0$ perché composta da funzioni derivabili e l'argomento del logaritmo è positivo. Si ha: $h'(x)=cos\left\{ln\left[f(x)\right]\right\}\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}\Rightarrow h'(4)=cos\left\{ln\left[f(4)\right]\right\}\cdot\frac{f'(4)}{f(4)}=cos\left[ln(1)\right]\cdot\frac{-2}{1}=-2$

24. $\boldsymbol{f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}, f(0)=2, f'(0)=1, h(x)=ln[f(x)], g(x)=e^{h(x)+x}, g'(0)=?}$

$h(x)$ è derivabile in $x = 0$ perché composta da funzioni derivabili e l'argomento del logaritmo è positivo, analogamente $g(x)$ è derivabile. Si ha:

$$g(x)=e^{ln[f(x)]+x}\Rightarrow g'(x)=e^{ln[f(x)]+x}\cdot\left[\frac{f'(x)}{f(x)}+1\right]\Rightarrow g'(0)=e^{ln[f(0)]+0}\cdot\left[\frac{f'(0)}{f(0)}+1\right]=$$

$$=e^{ln(2)}\cdot\left(\frac{1}{2}+1\right)=2\cdot\frac{3}{2}=3$$

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni

25. a) $[tan(x)]^{ln(x+1)}$; b) $[ln(x)]^{ln(x)}$

a) $$f\ x=e^{ln\ x+1\cdot ln[tan\ x]}\Rightarrow f'\ x=e^{ln\ x+1\cdot ln[tan\ x]}\cdot\left\{\frac{ln[tan\ x]}{x+1}+ln\ x+1\cdot\frac{1}{tan\ x\cdot cos^2\ x}\right\}=$$

$$=tan(x)^{ln(x+1)}\cdot\left\{\frac{ln[tan\ x]}{x+1}+\frac{ln\ x+1}{sin\ x\cdot cos\ x}\right\}=tan(x)^{ln(x+1)}\cdot\left\{\frac{ln[tan\ x]}{x+1}+\frac{2\cdot ln\ x+1}{sin\ 2x}\right\};$$

b) $$f\ x=e^{ln\ x\cdot ln[ln\ x]}\Rightarrow f'\ x=e^{ln\ x\cdot ln[ln\ x]}\cdot\left\{\frac{ln[ln\ x]}{x}+\frac{\cancel{ln\ x}}{x\cdot\cancel{ln\ x}}\right\}=[ln\ x]^{ln\ x}\cdot\frac{ln[ln\ x]+1}{x}$$

26. a) $[sin(x)]^{cos(x)}$; b) x^{3x+1}

a) $$f\ x=e^{ln\ x\cdot ln[ln\ x]}\Rightarrow f'\ x=e^{ln\ x\cdot ln[ln\ x]}\cdot\left\{\frac{ln[ln\ x]}{x}+\frac{\cancel{ln\ x}}{x\cdot\cancel{ln\ x}}\right\}=[ln\ x]^{ln\ x}\cdot\frac{ln[ln\ x]+1}{x}$$

b) $$f\ x=x^{3x+1}=e^{3x+1\cdot ln\ x}\Rightarrow f'\ x=e^{3x+1\cdot ln\ x}\cdot\left\{3\cdot ln\ x+\frac{3x+1}{x}\right\}=x^{3x+1}\cdot\frac{3x+1+3x\cdot ln\ x}{x}$$

27. $[ln(x)]^{sin(x)}$

$$f\ x=e^{sin\ x\cdot ln[ln\ x]}\Rightarrow f'\ x=e^{sin\ x\cdot ln[ln\ x]}\cdot\left\{cos\ x\cdot ln[ln\ x]+\frac{sin\ x}{x\cdot ln\ x}\right\}=$$

$$=ln(x)^{sin\ x-1}\cdot\frac{x\cdot cos\ x\cdot ln\ x\cdot ln[ln\ x]+sin\ x}{x}$$

28. $[sin(x)]^{ln(x)}$

$$f\ x=e^{ln(x)ln[sin\ x]}\Rightarrow f'\ x=e^{ln(x)ln[sin\ x]}\cdot\left\{\frac{ln[sin\ x]}{x}+\frac{ln\ x\cdot cos\ x}{sin\ x}\right\}=$$

$$=[sin\ x]^{ln(x)-1}\cdot\frac{sin\ x\cdot ln[sin\ x]+x\cdot cos\ x\cdot ln\ x}{x}$$

29. a) $[sin(x)]^{x}$; b) $[ln(x)]^{x}$

a) $$f\ x=e^{ln\ x\cdot ln[sin\ x]}\Rightarrow f'\ x=e^{ln\ x\cdot ln[sin\ x]}\cdot\left\{\frac{ln[sin\ x]}{x}+\frac{ln\ x\cdot cos\ x}{sin\ x}\right\}=$$

$$=[sin\ x]^{x}\cdot\frac{sin\ x\cdot ln[sin\ x]+x\cdot cos\ x\cdot ln\ x}{x}$$

b) $$f\ x=e^{x\cdot ln[ln\ x]}\Rightarrow f'\ x=e^{x\cdot ln[ln\ x]}\cdot\left\{ln[ln\ x]+x\cdot\frac{1}{x\cdot ln\ x}\right\}=$$

$$=[ln\ x]^{x-1}\cdot ln\ x\cdot ln[ln\ x]+1$$

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni

30. a) $sec^{-1}(x)$; b) $csc^{-1}(x)$; c) $\frac{x^3}{3}\cdot sin^{-1}(x)+\frac{\sqrt{1-x^2}\cdot(2+x^2)}{9}$

a) $$x=sec\ y=\frac{1}{cos\ y}\Rightarrow y=sec^{-1}\ x\Rightarrow D\left[sec^{-1}\ x\right]=\frac{1}{D\left[sec\ y\right]}=\frac{1}{D\left[1/cos\ y\right]}=\frac{cos^2\ y}{sin\ y}=$$
$$=\frac{1/x^2}{\sqrt{1-cos^2\ y}}=\frac{1/x^2}{\sqrt{1-1/x^2}}=\frac{|x|}{x^2\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{|x|\cdot\sqrt{x^2-1}};$$

b) $$x=csc\ y=\frac{1}{sin\ y}\Rightarrow y=csc^{-1}\ x\Rightarrow D\left[csc^{-1}\ x\right]=\frac{1}{D\left[csc\ y\right]}=\frac{1}{D\left[1/sin\ y\right]}=\frac{sin^2\ y}{-cos\ y}=$$
$$=\frac{1/x^2}{-\sqrt{1-sin^2\ y}}=\frac{-1/x^2}{\sqrt{1-1/x^2}}=\frac{-|x|}{x^2\sqrt{x^2-1}}=\frac{-1}{|x|\cdot\sqrt{x^2-1}};$$

c) $$x^2sin^{-1}(x)+\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}\cdot\left(2+x^2\right)+\sqrt{1-x^2}\cdot 2x}{9}=$$
$$=x^2sin^{-1}(x)+\frac{x^3}{3\sqrt{1-x^2}}+\frac{\cancel{-2x}-x^3\cancel{+2x}-2x^3}{9\sqrt{1-x^2}}=+\frac{3x^3-3x^3}{3\sqrt{1-x^2}}=x^2sin^{-1}(x)$$

31. a) $(1-x^4)\cdot tan^{-1}(x)/4+x\cdot(3\pi x^3+2x^2-6)/24$; b) $x\cdot cot^{-1}(x)+ln(x^2+1)/2$

a) $$-\cancel{4}x^3\cdot\frac{tan^{-1}(x)}{\cancel{4}}+\frac{1-x^4}{4\left(1+x^2\right)}+\frac{12\pi x^3+6x^2-6}{24}=-x^3\cdot tan^{-1}(x)+\frac{\cancel{1-x^2}}{4}+\frac{2\pi x^3+\cancel{x^2-1}}{4}=$$
$$=-x^3\cdot tan^{-1}(x)+\frac{\pi x^3}{2}=x^3\cdot\left[\frac{\pi}{2}-tan^{-1}(x)\right]=x^3\cdot cot^{-1}(x);$$

b) $$cot^{-1}(x)-x\cdot\frac{1}{1+x^2}+\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\left(1+x^2\right)}=cot^{-1}(x)$$

32. a) $-\frac{1}{9}\cdot\left[3\cdot\sqrt{3}\cdot tan^{-1}\left(\sqrt{3}\cdot x\right)+ln\left(3x^2+1\right)-3x^2\right]$; b) $x\cdot sin^{-1}(x)+\sqrt{1-x^2}$

a) $$-\frac{1}{9}\cdot\left[3\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{1+3x^2}+\frac{6x}{3x^2+1}-6x\right]=-\frac{1}{9}\cdot\frac{9\cancel{+6x}-18x^3\cancel{-6x}}{1+3x^2}=\frac{2x^3-1}{1+3x^2};$$

b) $$sin^{-1}\ x+\cancel{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}}=sin^{-1}\ x$$

33. a) $\frac{\left(2x^2-1\right)\cdot sin^{-1}(x)+x\cdot\sqrt{1-x^2}}{4}$; b) $\frac{x^3}{3}\cdot tan^{-1}(x)+\frac{ln\left(x^2+1\right)-x^2}{6}$

a) $$\frac{4x\cdot sin^{-1}(x)+\frac{2x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x^2}+x\cdot\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}}{4}=x\cdot sin^{-1}(x)+\frac{\cancel{2x^2-1+1-x^2-x^2}}{4\sqrt{1-x^2}}=x\cdot sin^{-1}(x);$$

b) $$x^2\cdot tan^{-1}(x)+\frac{x^3}{3\left(1+x^2\right)}+\frac{\frac{2x}{x^2+1}-2x}{6}=x^2\cdot tan^{-1}(x)+\cancel{\frac{x^3}{3\left(1+x^2\right)}+\frac{x-x^3-x}{3\left(x^2+1\right)}}=x^2\cdot tan^{-1}(x)$$

34. a) $\frac{x^2+1}{2}\cdot tan^{-1}(x)-\frac{x}{2}$; b) $\frac{x^5}{5}\cdot cos^{-1}(x)-\frac{\sqrt{1-x^2}\cdot\left(3x^4+4x^2+8\right)}{75}$

a) $$x\cdot tan^{-1}(x)+\frac{\cancel{x^2+1}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{1+x^2}}-\frac{1}{2}=x\cdot tan^{-1}(x);$$

$$x^4\cdot cos^{-1}(x)+\frac{x^5}{5}\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{\frac{-\cancel{2}x\left(3x^4+4x^2+8\right)}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x^2}\cdot\left(12x^3+8x\right)}{75}=$$

b) $$=x^4\cdot cos^{-1}(x)-\frac{x^5}{5\sqrt{1-x^2}}-\frac{-3x^5-4x^3-8x+\left(1-x^2\right)\cdot\left(12x^3+8x\right)}{75\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=x^4\cdot cos^{-1}(x)-\frac{\cancel{15x^5}\cancel{-3x^5}\cancel{-4x^3}\cancel{-8x}+\cancel{12x^3}\cancel{+8x}\cancel{-12x^5}\cancel{-8x^3}}{150\sqrt{1-x^2}}=x^4\cdot cos^{-1}(x)$$

35. **a) $sin^{-1}[sin(x)]$, $x \in [0, \pi/2]$; b) $sin^{-1}[sin(x)]$, $x \in [\pi/2, \pi]$**
a) $sin^{-1}[sin(x)] = x$, quindi la derivata è1; b) $sin^{-1}[sin(x)] = -x$, quindi la derivata è -1

36. **a) $sin^{-1}[cos(x)]$, $x \in [0, \pi/2]$; b) $tan^{-1}[cot(x)]$, $x \in [0, \pi]$**
a) $sin^{-1}[cos(x)] = sin^{-1}[sin(\pi/2 - x)] = \pi/2 - x$, quindi la derivata è -1; b) $tan^{-1}[cot(x)] = tan^{-1}[tan(\pi/2 - x)] = \pi/2 - x$, quindi la derivata è -1

37. **a)** $tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$**; b)** $tan^{-1}\left(\frac{x^2+3}{x^2-2}\right)$**; c)** $sin^{-1}\left(\frac{x^2-3}{x^2+5}\right)$

a) $$\frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}\cdot\frac{-1-x-1+x}{1+x^2}=\frac{\cancel{1+x^2}}{1+x^2\cancel{+2x}+1\cancel{-2x}+x^2}\cdot\frac{-2}{\cancel{(1+x^2)}}=\frac{-2}{2+2x^2}=\frac{-1}{1+x^2};$$

b) $$\frac{1}{1+\left(\frac{x^2+3}{x^2-2}\right)^2}\cdot\frac{2x\left(\cancel{x^2}-2\right)-2x\left(\cancel{x^2}+3\right)}{\left(x^2-2\right)^2}=\frac{\cancel{\left(x^2-2\right)^2}}{x^4-4x^2+4+x^4+6x^2+9}\cdot\frac{-10x}{\cancel{\left(x^2-2\right)^2}}=\frac{-10x}{2x^4+2x^2+13};$$

c) $$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2-3}{x^2+5}\right)^2}}\cdot\frac{2x\left(\cancel{x^2}+5\right)-2x\left(\cancel{x^2}-3\right)}{\left(x^2+5\right)^2}=\frac{\cancel{\left|x^2+5\right|}}{\sqrt{\cancel{x^4}+10x^2+25\cancel{-x^4}+6x^2-9}}\cdot\frac{16x}{\cancel{\left(x^2+5\right)^2}}=\frac{4x}{\left|x^2+5\right|\cdot\sqrt{x^2+1}}$$

38. **a)** $tan^{-1}\left(\frac{3x^2+2}{2x^2+3}\right)$**; b)** $tan^{-1}(x)^{tan^{-1}(x)}$

a) $$\frac{1}{1+\left(\frac{3x^2+2}{2x^2+3}\right)^2}\cdot\frac{6x\left(\cancel{2x^2}+3\right)-4x\left(\cancel{3x^2}+2\right)}{\left(2x^2+3\right)^2}=\frac{\cancel{\left(2x^2+3\right)^2}}{4x^4+12x^2+9+9x^4+12x^2+4}\cdot\frac{10x}{\cancel{\left(2x^2+3\right)^2}}=\frac{10x}{13x^4+24x^2+13};$$

b) $$D\left[e^{tan^{-1}(x)\cdot ln\left[tan^{-1}(x)\right]}\right]=tan^{-1}(x)^{tan^{-1}(x)}\cdot\left\{\frac{ln\left[tan^{-1}(x)\right]}{x^2+1}+\cancel{tan^{-1}(x)}\cdot\frac{1}{\cancel{tan^{-1}(x)}\cdot\left(1+x^2\right)}\right\}=$$

$$=tan^{-1}(x)^{tan^{-1}(x)}\cdot\frac{ln\left[tan^{-1}(x)\right]+1}{x^2+1}$$

39. **a)** $cos^{-1}\left(\frac{3x^2-x}{x+1}\right)$**; b)** $cot^{-1}\left(\frac{x+3}{5x^2-2}\right)$

a) $$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{3x^2-x}{x+1}\right)^2}}\cdot\frac{6x-1\quad x+1\quad -3x^2+x}{x+1^2}=\frac{\cancel{\left|x+1\right|}}{\sqrt{\cancel{x^2}+2x+1-9x^4+6x^3\cancel{-x^2}}}\cdot\frac{6x^2+6x\cancel{-x}-1-3x^2\cancel{+x}}{\cancel{(x+1)^2}}=$$

$$=\frac{3x^2+6x-1}{\left|x+1\right|\cdot\sqrt{-9x^4+6x^3+2x+1}};$$

b) $\dfrac{-1}{1+\left(\dfrac{x+3}{5x^2-2}\right)^2}\cdot\dfrac{5x^2-2-10x\ \ x+3}{5x^2-2^{\ 2}}=\dfrac{\cancel{5x^2-2^{\ 2}}}{25x^4-20x^2+4+x^2+6x+9}\cdot\dfrac{5x^2+30x+2}{\cancel{(5x^2-2^{\ 2})}}=\dfrac{5x^2+30x+2}{25x^4-19x^2+6x+13}$

40. **a)** $sin^{-1}(x)^{sin^{-1}(x)}$**; b)** $sin^{-1}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

a) $D\left(e^{sin^{-1}(x)\cdot ln\left[sin^{-1}(x)\right]}\right)=sin^{-1}(x)^{sin^{-1}(x)}\cdot\left\{\dfrac{ln\left[sin^{-1}(x)\right]}{\sqrt{1-x^2}}+\cancel{sin^{-1}(x)}\cdot\dfrac{1}{\cancel{sin^{-1}(x)}\sqrt{1-x^2}}\right\}=$;

$=sin^{-1}(x)^{sin^{-1}(x)}\cdot\dfrac{ln\left[sin^{-1}(x)\right]+1}{\sqrt{1-x^2}}$

b) $\dfrac{\dfrac{-2}{x^3}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^4}}}=\dfrac{-2}{x^{\cancel{3}}}\cdot\dfrac{\cancel{x^2}}{\sqrt{x^4-1}}=\dfrac{-2}{x\cdot\sqrt{x^4-1}}$

Calcolare le derivate richieste

41. **a)** $f(x)=x^3+x$**; D[**$f^{-1}(0)$**]=?, D[**$f^{-1}(2)$**] = ?; b)** $f(x)=x^5+x$**; D[**$f^{-1}(0)$**] = ?, D[**$f^{-1}(-2)$**] = ?**

a) La funzione è sempre crescente ($f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$), quindi invertibile. L'inversa è derivabile. Troviamo i corrispondenti di 0 e di 2: $x^3 + x = 0 \Rightarrow x = 0$; $x^3 + x = 2 \Rightarrow x = 1$. Quindi avremo: $D\left[f^{-1}(y)\right]=\dfrac{1}{f'(x)}\Rightarrow D\left[f^{-1}(0)\right]=\dfrac{1}{f'(0)}=\dfrac{1}{3\cdot 0^2+1}=1; D\left[f^{-1}(2)\right]=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{3\cdot 1^2+1}=\dfrac{1}{4}$;

b) La funzione è sempre crescente ($f'(x) = 5x^4 + 1 > 0$), quindi invertibile. L'inversa è derivabile. Troviamo i corrispondenti di 0 e di –2: $x^5 + x = 0 \Rightarrow x = 0$; $x^5 + x = -2 \Rightarrow x = -1$. Quindi avremo: $D\left[f^{-1}(0)\right]=\dfrac{1}{f'(0)}=\dfrac{1}{5\cdot 0^4+1}=1; D\left[f^{-1}(2)\right]=\dfrac{1}{f'(-1)}=\dfrac{1}{5\cdot(-1)^4+1}=\dfrac{1}{6}$

42. $f(-1) = 1, f'(-1) = 3$**;** $h(x) = tan^{-1}[f(x)], h'(-1) = ?$

$h'(x)=\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}\Rightarrow h'(-1)=\dfrac{f'(-1)}{1+f^2(-1)}=\dfrac{3}{1+1^2}=\dfrac{3}{2}$

43. **a)** $f(x)=x^5+x^3$**, D[**$f^{-1}(2)$**] = ?, D[**$f^{-1}(0)$**] = ?; b)** $f(x)=x^7+x-2$**, D[**$f^{-1}(0)$**] = ?, D[**$f^{-1}(-2)$**] = ?**

La funzione è sempre crescente ($f'(x) = 5x^4 + 3x^2 > 0$), quindi invertibile. L'inversa è derivabile. Troviamo i corrispondenti di 0 e di 2: $x^5 + x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$; $x^5 + x^3 = 2 \Rightarrow x = 1$. Quindi avremo: $D\left[f^{-1}(0)\right]=\dfrac{1}{f'(0)}=\dfrac{1}{5\cdot 0^4+3\cdot 0^2}=?; D\left[f^{-1}(2)\right]=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{5\cdot 1^4+3\cdot 1^2}=\dfrac{1}{8}$;

b) La funzione è sempre crescente ($f'(x) = 7x^6 + 1 > 0$), quindi invertibile. L'inversa è derivabile. Troviamo i corrispondenti di 0 e di 2: $x^7 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$; $x^7 + x - 2 = -2 \Rightarrow x = 0$. Quindi avremo: $D\left[f^{-1}(0)\right]=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{7\cdot 1^6+1}=\dfrac{1}{8}; D\left[f^{-1}(-2)\right]=\dfrac{1}{f'(0)}=\dfrac{1}{7\cdot 0^6+1}=1$

44. **a)** $f(x)=x\cdot e^{2x}, x>0$**, D[**$f^{-1}(e^2)$**] = ?; b)** $f(x)=x^3/3+3x/2-sin^2(2x)/4$**; D[**$f^{-1}(0)$**] = ?**

a) La funzione è sempre crescente ($f'(x) = e^{2x}\cdot(x + 2) > 0$ se $x > 0$), quindi invertibile. L'inversa è derivabile. Troviamo il corrispondente di e^2: $x\cdot e^{2x} = e^2 \Rightarrow x = 1$. Quindi avremo: $D\left[f^{-1}(e^2)\right]=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{e^2\cdot(1+2)}=\dfrac{1}{3e^2}$; b) La funzione è sempre crescente ($f'(x) = x^2 + 3/2 - sin(2x)cos(2x) > 0$), quindi invertibile. L'inversa è derivabile. Troviamo il corrispondente di 0: $x^3/3 + 3x/2 - sin^2(2x)/4 = 0 \Rightarrow x = 0$. Quindi avremo: $D\left[f^{-1}(0)\right]=\dfrac{1}{f'(0)}=\dfrac{1}{0^2+3/2-sin(0)cos(0)}=\dfrac{2}{3}$

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni, senza effettuare tutte le derivazioni (nelle risposte $D_{n,k}$ indica le disposizioni di n oggetti a gruppi di k, mentre ! indica il fattoriale)

45. a) $D^{14}[sin(x) + e^x]$; b) $D^{20}[x \cdot cos(x)]$; c) $D^5[x \cdot ln(x)]$

a) Sappiamo già che il seno ha un periodo 4 nella derivazione, mentre la funzione esponenziale ha periodo 0. Quindi facilmente si ha: $D^{14}[sin(x) + e^x] = -sin(x) + e^x$

b) $D[x \cdot cos(x)] = cos(x) - x \cdot sin(x)$; $D^2[x \cdot cos(x)] = -sin(x) - sin(x) - x \cdot cos(x) = -2sin(x) - x \cdot cos(x)$; $D^3[x \cdot cos(x)] = -2cos(x) - cos(x) + x \cdot sin(x) = -3cos(x) + x \cdot sin(x)$; $D^4[x \cdot cos(x)] = 4sin(x) + x \cdot cos(x)$. A questo punto abbiamo capito lo schema: $D^{20}[x \cdot cos(x)] = x \cdot cos(x) + 20\, sin(x)$;

c) $D[x \cdot ln(x)] = ln(x) + x \cdot 1/x = ln(x) + 1$; $D^2[x \cdot ln(x)] = 1/x$; $D^3[x \cdot ln(x)] = -1/x^2$; $D^4[x \cdot ln(x)] = 2/x^3$; $D^5[x \cdot ln(x)] = -6/x^4$

46. a) $D^8[cos^2(x)]$; b) $D^{16}[sin(x) \cdot cos(x)]$

a) $D[cos^2(x)] = -2cos(x)\, sin(x) = -sin(2x)$; $D^2[cos^2(x)] = -2cos(2x)$; $D^3[cos^2(x)] = 4sin(2x)$; $D^4[cos^2(x)] = 8cos(2x)$; …; $D^8[cos^2(x)] = 128cos(2x)$;

b) $sin(x) \cdot cos(x) = sin(2x)/2$; $D[sin(2x)/2)] = cos(2x)$; $D^2[sin(x) \cdot cos(x)] = -2sin(2x)$; $D^3[sin(x) \cdot cos(x)] = -4cos(2x)$; $D^4[sin(x) \cdot cos(x)] = 8cos(2x)$; …; $D^{16}[sin(x) \cdot cos(x)] = 2^{15}sin(2x)$

47. a) $D^{10}[x^2 \cdot sin(x)]$; b) $D^8(x \cdot e^x)$; c) $D^{104}(e^{4x})$

a) $D[x^2 \cdot sin(x)] = 2x \cdot sin(x) + x^2 \cdot cos(x)$; $D^2[x^2 \cdot sin(x)] = 4x \cdot cos(x) + (2 - x^2) \cdot sin(x)$; $D^3[x^2 \cdot sin(x)] = -6x \cdot sin(x) + (6 - x^2) \cdot cos(x)$; $D^4[x^2 \cdot sin(x)] = -8x \cdot cos(x) + (-2 + x^2) \cdot sin(x)$; …; $D^{10}[x^2 \cdot sin(x)] = 20x \cdot cos(x) + (90 - x^2) \cdot sin(x)$;

b) $D(x \cdot e^x) = e^x \cdot (x + 1)$; $D^2(x \cdot e^x) = e^x \cdot (x + 2)$; $D^3(x \cdot e^x) = e^x \cdot (x + 3)$; …; $D^8(x \cdot e^x) = e^x \cdot (x + 8)$

c) $D(e^{4x}) = 4 \cdot e^{4x}$; $D^2(e^{4x}) = 4^2 \cdot e^{4x}$; $D^3(e^{4x}) = 4^3 \cdot e^{4x}$; …; $D^{104}(e^{4x}) = 4^{104} \cdot e^{4x}$

48. a) $D^{24}[sin(3x) + cos(3x)]$; b) $D^{32}[cos(2x)]$

a) $D[sin(3x) + cos(3x)] = 3 \cdot [-sin(3x) + cos(3x)]$; $D^2[sin(3x) + cos(3x)] = 3^2 \cdot [-sin(3x) - cos(3x)]$; $D^3[sin(3x) + cos(3x)] = 3^3 \cdot [sin(3x) - cos(3x)]$; $D^4[sin(3x) + cos(3x)] = 3^4 \cdot [sin(3x) + cos(3x)]$; …; $D^{24}[sin(3x) + cos(3x)] = 3^{24} \cdot [sin(3x) + cos(3x)]$;

b) $D[cos(2x)] = -2sin(2x)$; $D^2[cos(2x)] = -2^2cos(2x)$; $D^3[cos(2x)] = 2^3sin(2x)$; $D^4[cos(2x)] = 2^4cos(2x)$; …; $D^{32}[cos(2x)] = 2^{32}cos(2x)$;

49. a) $D^{2014}(x^{2013})$; b) $D^{2014}(x^{2014})$; c) $D^{2014}(x^{2015})$; d) $D^{2014}(x^{2016})$; e) $D^{2014}(x^{2050})$

a) $D(x^{2013}) = 2013x^{2012}$; $D^2(x^{2013}) = 2013 \cdot 2012x^{2011}$; $D^3(x^{2013}) = 2013 \cdot 2012 \cdot 2011x^{2011}$; …; $D^{2013}(x^{2013}) = 2013!$; $D^{2013}(x^{2013}) = 0$; b) $D(x^{2014}) = 2014x^{2013}$; $D^2(x^{2014}) = 2014 \cdot 2013x^{2012}$; $D^3(x^{2014}) = 2014 \cdot 2013 \cdot 2012x^{2010}$; …; $D^{2013}(x^{2014}) = 2014!x$; $D^{2014}(x^{2014}) = 2014\,!$; c) $D(x^{2015}) = 2015x^{2014}$; $D^2(x^{2015}) = 2015 \cdot 2014x^{2013}$; $D^3(x^{2015}) = 2015 \cdot 2014 \cdot 2013x^{2012}$; …; $D^{2013}(x^{2015}) = 2015!x^2$; $D^{2014}(x^{2015}) = 2015!x$;

d) $D^{2014}(x^{2016}) = 2016!x^2/2$; e) $D^{2014}(x^{2050}) = D_{2050,2014} \cdot x^{36}$

Negli esercizi successivi *n* indica un numero naturale.

50. a) $D^n[cos(x)]$; b) $D^n[cos(5x)]$

a) $$D^n[cos(x)] = \begin{cases} cos(x) & n = 4k \\ -sin(x) & n = 4k+1 \\ -cos(x) & n = 4k+2 \\ sin(x) & n = 4k+3 \end{cases} = cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2} + x\right);$$

b) $$D^n[cos(5x)] = \begin{cases} 5^n \cdot cos(5x) & n = 4k \\ -5^n \cdot sin(5x) & n = 4k+1 \\ -5^n \cdot cos(5x) & n = 4k+2 \\ 5^n \cdot sin(5x) & n = 4k+3 \end{cases} = (-5)^n \cdot cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2} + 5x\right)$$

51. a) $D^n(e^{3x})$; b) $D^n(x \cdot e^x)$; c) $D^n[sin(x) \cdot cos(x)]$

a) $D(e^{3x}) = 3e^{3x}$; $D^2(e^{3x}) = 3^2 \cdot e^{3x}$; $D^3(e^{3x}) = 3^3 \cdot e^{3x}$; …; $D^n(e^{3x}) = 3^n \cdot e^{3x}$;

b) Generalizziamo facilmente l'esercizio 47b: $D^n(x \cdot e^x) = e^x \cdot (x + n)$;

c) Generalizziamo facilmente l'esercizio 46b:

$$D^n[sin(x)\cdot cos(x)] = \begin{cases} 2^{n-1}\cdot sin(2x) & n=4k \\ -2^{n-1}\cdot cos(2x) & n=4k+1 \\ 2^{n-1}\cdot sin(2x) & n=4k+2 \\ -2^{n-1}\cdot cos(2x) & n=4k+3 \end{cases} = (-2)^{n-1}\cdot sin\left(n\cdot\frac{\pi}{2}+2x\right)$$

52. a) $D^n(x^{2014})$; b) $D^{2014}(x^n)$

Generalizziamo facilmente gli esercizi 49:

a) $D^n(x^{2014}) = \begin{cases} D_{2014,n}\cdot x^{2014-n} & 1\le n<2014 \\ 0 & n\ge 2014 \end{cases}$;

b) $D^{2014}(x^n) = \begin{cases} D_{2014,n}\cdot x^{2014-n} & n\ge 2014 \\ 0 & 1\le n<2014 \end{cases}$

53. a) $D^n[x\cdot cos(x)]$; b) $D^n\,[x\cdot ln(x)]$

a) Generalizziamo facilmente l'esercizio 45b: $D^n[x\cdot cos(x)] = \begin{cases} x\cdot cos(x)+n\cdot sin(x) & n=4k \\ n\cdot cos(x)-x\cdot sin(x) & n=4k+1 \\ -n\cdot sin(x)-x\cdot cos(x) & n=4k+2 \\ x\cdot sin(x)-n\cdot cos(x) & n=4k+3 \end{cases}$;

b) Generalizziamo facilmente l'esercizio 45c: $D[x\cdot ln(x)] = ln(x) + 1$; $D^n[x\cdot ln(x)] = \frac{(-1)^n\cdot(n-2)!}{x^{n-1}}$, $n > 1$

54. a) $D^n(x\cdot e^{2x})$; b) $D^n(x^2\cdot e^x)$

a) $D(x\cdot e^{2x}) = (1 + 2x)\cdot e^{2x}$; $D^2(x\cdot e^{2x}) = 4(1 + x)\cdot e^{2x}$; $D^3(x\cdot e^{2x}) = 4(3 + 2x)\cdot e^{2x}$; $D^4(x\cdot e^{2x}) = 16(2 + x)\cdot e^{2x}$;…; $D^n(x\cdot e^{2x}) = \begin{cases} 2^{n-1}\cdot e^{2x}\cdot(2x+n) & n\ pari \\ 2^n\cdot e^{2x}\cdot\left(x+\frac{n}{2}\right) & n\ dispari \end{cases}$; b) $D(x^2\cdot e^x) = e^x\cdot(x^2 + 2x)$; $D^2(x^2\cdot e^x) = e^x\cdot(x^2 + 2\cdot 2x + 1\cdot 2)$; $D^3(x^2\cdot e^x) = e^x\cdot(x^2 + 2\cdot 3x + 2\cdot 3)$; $D^4(x^2\cdot e^x) = e^x\cdot(x^2 + 2\cdot 4x + 3\cdot 4)$; …; $D^n(x^2\cdot e^x) = e^x\cdot(x^2 + 2nx + n^2 - n)$

55. a) $D^n[x^2\cdot ln(x)]$, $n > 2$; b) $D^n\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

a) $D[x^2\cdot ln(x)] = 2x\ ln(x)$; $D^2[x^2\cdot ln(x)] = 2ln(x) + 3$; $D^3[x^2\cdot ln(x)] = 2/x$; $D^4[x^2\cdot ln(x)] = -2/x^2$; $D^5[x^2\cdot ln(x)] = 2\cdot 2!/x^3$; $D^6[x^2\cdot ln(x)] = -2\cdot 2\cdot 3/x^4 = -2\cdot 3!/x^4$; …; $D^n\,[x^2\cdot ln(x)] = \frac{(-1)^{n+1}\cdot 2\cdot(n-3)!}{x^{n-2}}$, $n > 1$;

b) $D\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{2\cdot 1}{(1-x)^2}$; $D^2\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{2\cdot 2}{(1-x)^3}$; $D^3\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{2\cdot 3!}{(1-x)^4}$;…; $D^n\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{2n!}{(1-x)^{n+1}}$

56. $f(x)$ è definita in $\mathbb{R}$, derivabile fino al secondo ordine, con $f(0) = 2$, $f'(0) = -4$, $f''(0) = 3$. a) Sia $g(x) = e^{2x} + f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Determinare $g'(0)$ e $g''(0)$. b) Sia $h(x) = cos(x)\cdot f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Determinare l'equazione della tangente al grafico di $h(x)$ in $x = 0$.

a) $g'(x) = 2e^{2x} + f'(x) \Rightarrow g'(0) = 2e^0 + f'(0) = 2 - 4 = -2$; $g''(x) = 4e^{2x} + f''(x) \Rightarrow g''(x) = 4e^0 + f''(0) = 4 + 3 = 7$; b) $h'(x) = cos(x)\cdot f'(x) - sin(x)\cdot f(x) \Rightarrow h'(0) = cos(0)\cdot f'(0) - sin(0)\cdot f(0) = -4$; quindi l'equazione della tangente è: $y - 2 = -4x$

57. Data $f(x)$ derivabile in x_0, per cui $f(x_0) = 0$ e $f'(x_0) \neq 0$, la funzione $\sqrt[n]{f(x)}, n\in\mathbb{N}$, supposta definita e continua in un intorno di x_0, è derivabile in x_0? Se la risposta è negativa il punto x_0 è angoloso, cuspidale o di flesso a tangente verticale?

Non è derivabile, infatti $D\left(\sqrt[n]{f(x)}\right) = \frac{f'(x)}{n\sqrt[n]{[f(x)]^{n-1}}}$. Si ha: $\lim_{x\to 0^-}\frac{f'(x)}{n\sqrt[n]{[f(x)]^{n-1}}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)}{n\sqrt[n]{[f(x)]^{n-1}}} = \pm\infty$ se n è dispari, quindi punto di flesso a tangente verticale. Se n è pari invece la risposta dipende dal se-

gno di $f(x)$ nell'intorno di 0. Se è positivo da entrambe le parti sempre flesso, se negativo il limite non esiste e se di segno alterno può farsi il limite da una sola parte.

58. Possiamo dire che la derivata della funzione $y = ln\sqrt{x}$ è $y'\ x = \frac{1}{2x}$? Giustificare la risposta.

No perché il dominio della funzione è (0; +∞), quindi la sua derivata non può avere un dominio più grande quindi la derivata è $y'\ x = \frac{1}{2x}$, ma ristretta a (0; +∞).

Teoremi del calcolo differenziale

Verificare la validità del teorema di Rolle per le seguenti funzioni, nell'intervallo a lato indicato, determinando i valori in cui la derivata prima si annulla

1. a) $y = 1 + \sqrt{-x^2 - 2x + 3}$**, $x \in$ [–3; 1]; b)** $y = 4 - \sqrt{-x^2 + 5x + 6}$**, $x \in$ [2; 3]**

a) Il radicando è un polinomio, quindi è continuo e derivabile nel suo dominio, che è proprio [–3; 1], quindi si ha anche $f(-3) = f(1) = 1$. Si ha: $y' = \frac{-2x-2}{2\sqrt{-x^2-2x+3}} \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow x = -1$;

b) Come in a): $f(2) = f(3) = 4$; $y' = \frac{-2x+5}{2\sqrt{-x^2+5x+6}} \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$

2. a) $y = 5 + \sqrt{-x^2 + 7x - 10}$**, $x \in$ [2; 5]; b)** $y = -5 + \sqrt{-x^2 - 2x + 8}$**, $x \in$ [–4; 2]**

Come nei precedenti a): $f(2) = f(5) = 5$; $y' = \frac{-2x+7}{2\sqrt{-x^2+7x-10}} \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{2}$;

b) $f(-4) = f(2) = -5$; $y' = \frac{-2x-2}{2\sqrt{-x^2-2x+8}} \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow x = -1$

3. a) $y = \sqrt{3x^2 - 15x + 21}$**, $x \in$ [1; 4]; b)** $y = \sqrt{-x^2 + x + 1}$**, $x \in$ [0; 1]**

a): $\Delta = 225 - 12 \cdot 21 < 0 \Rightarrow$ dominio tutti i reali. $f(1) = f(4) = 3$;

$y' = \frac{6x-15}{2\sqrt{3x^2-15x+21}} \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$;

b) dominio: $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \supset [0;1]$, $f(0) = f(1) = 1$; $y' = \frac{-2x+1}{2\sqrt{-x^2+x+1}} \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

4. a) $y = x + \sqrt{-x^2 - x + 2}$**, $x \in$ [–1/2; 1]; b)** $y = \frac{x^2+4}{x^2+1}, x \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$

a) dominio: [–2; 1] ⊃ [–1/2; 1], $f(-1/2) = f(1) = 1$;

$$y' = 1 + \frac{-2x-1}{2\sqrt{-x^2-x+2}} \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow 2\sqrt{-x^2-x+2} = 2x+1 \Rightarrow -4x^2 - 4x + 8 = 4x^2 + 4x + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8x^2 + 8x - 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{72}}{4} = \frac{-2 \pm 3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{-2+3\sqrt{2}}{2}$$

b) la funzione è pari, quindi assume lo stesso valori per ascisse opposte.

$$y = \frac{2x\left(\cancel{x^2}+1\right) - 2x\left(\cancel{x^2}+4\right)}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{-6x}{\left(x^2+1\right)^2} \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow x = 0$$

5. a) $y = sin(x) + cos(x)$, $x \in$ [0; π/2]; b) $y = sin(x) - cos(x)$, $x \in$ [0; 3π/2]

a) $sin(0) + cos(0) = sin(\pi/2) + cos(\pi/2) = 1$; $y' = cos(x) - sin(x) = 0 \Rightarrow x = \pi/4$;

b) $sin(0) - cos(0) = sin(3\pi/2) - cos(3\pi/2) = -1$; $y' = cos(x) + sin(x) = 0 \Rightarrow x = 3\pi/4$

6. Se una funzione è pari, continua in [–*a*; *a*] e derivabile in (–*a*; *a*), il teorema di Rolle può sempre applicarsi. Questa affermazione è corretta? Giustificare la risposta.

Sì perché per le funzioni pari si ha sempre $f(-a) = f(a)$.

7. Se una funzione è dispari, continua in [–*a*; *a*] e derivabile in (–*a*; *a*), il teorema di Rolle non può mai applicarsi. Questa affermazione è corretta? Giustificare la risposta.
Sì perché per le funzioni dispari si ha sempre $f(-a) \neq f(a)$

8. Se una funzione è periodica, continua e derivabile in $\mathbb{R}$, il teorema di Rolle può sempre applicarsi in opportuni intervalli. Questa affermazione è corretta? Giustificare la risposta.
Sì perché, detto P il periodo nell'intervallo [a; a + P] le ipotesi del teorema valgono tutte

9. Fornire un esempio di funzione periodica a cui non può applicarsi il Teorema di Rolle in nessun intervallo.
Ovviamente deve essere una funzione non continua in tutti i reali la cui derivata non si annulla mai, per esempio $y = tan(x)$

Trovare i valori dei parametri reali, se esistono, per i quali possa applicarsi il teorema di Rolle, alle seguenti funzioni negli intervalli indicati; quindi determinare i punti in cui si annulla la derivata

10. a) $f(x) = ax^3 + x^2, x \in [0; 1]$; b) $f(x) = x^2 + 1, x \in [0; a]$
La continuità e la derivabilità ci sono perché polinomi. Deve perciò aversi: a) $f(0) = 0 = f(1) = a + 1 \Rightarrow a = -1$, da cui $f'(x) = -3x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0$ (N.A.), $x = 2/3$;
b) $f(0) = 1 = f(a) = a^2 + 1 \Rightarrow a = 0$, quindi impossibile

11. a) $f(x) = ax^2 + x + 1, x \in [0; 1]$; b) $f(x) = e^{ax}, x \in [0; 1]$
a) $f(0) = 1 = f(1) = a + 2 \Rightarrow a = -1$, da cui $f'(x) = -2x + 1 = 0 \Rightarrow x = ½$
b) $f(0) = 1 = f(1) = e^a \Rightarrow a = 0$, quindi impossibile

12. a) $f(x) = x^3 + ax^2 - x + 1, x \in [0; 1]$; b) $f(x) = x^4 + x^2 + a, x \in [-1; 1]$
a) $f(0) = 1 = f(1) = a + 1 \Rightarrow a = 0$, da cui $f'(x) = 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ $N.A.$ $\vee \frac{\sqrt{3}}{3}$
b) $f(-1) = f(1)$ per ogni a. $f'(x) = 4x^3 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0$

Stabilire per quali motivi alle seguenti funzioni non può applicarsi il teorema di Rolle, quindi stabilire se, ciononostante, esiste c interno all'intervallo indicato in cui f'(c)= 0. Nelle risposte N.C. = non continua; N.D. = non derivabile

13. a) $y = x + \sqrt{x^2 - x}$, $x \in [0; 1/2]$; b) $y = \sqrt{x - x^2}$, $x \in [0; 2/3]$
a) la funzione non è definita in (0; 1);
$$y' = 1 + \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-x} = 1 - 2x \Rightarrow \cancel{4x^2 - 4x} = 1 + \cancel{4x^2 - 4x} \Rightarrow 0 = 1;$$
b) $y(0) = 0 \neq y(2/3)$. $y' = \frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \in \left(0; \frac{2}{3}\right)$

14. a) $y = |x|, x \in [-1; 1]$; b) $y = sin(x), x \in [-2; 2]$
a) Non derivabile in $x = 0$. La derivata non si annulla mai;
b) $y(-2) \neq y(2)$. $y' = cos(x) \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow x = \pi/2 \in [-2; 2]$

15. a) $y = x \cdot |x|, x \in [-1; 1]$; b) $y = \sqrt[3]{x^2}$, $x \in [-1; 1]$
a) $y(-1) \neq y(1)$ e non derivabile in $x = 0$. $y' = \begin{cases} -2x & x < 0 \\ 2x & x > 0 \end{cases} \Rightarrow y' \ x \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$;
b) Non derivabile in $x = 0$; $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \Rightarrow y' \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

16. a) $y = cot(x), x \in [\pi/2; 3\pi/2]$; b) $y = ln(x), x \in [0; 1]$
a) Non continua in $x = \pi$; $y' = -\frac{1}{sin^2 \ x} \Rightarrow y' \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$;
b Non continua in $x = 0$; $y' = 1/x$ che non si annulla mai.

Verificare la validità del teorema di Lagrange per le seguenti funzioni, nell'intervallo a lato indicato, determinando i valori per i quali si trova il valore medio

17. a) $y = \frac{x+1}{x-1}$, $x \in [2; 3]$; b) $y = \frac{x^2+1}{x+1}$, $x \in [0; 1]$; c) $y = e^x, x \in [-1; 2]$

a) Continua e derivabile perché il denominatore si annulla solo in $x = 1 \notin [2; 3]$. $y' = \frac{-2}{x-1^2}$;

$$\frac{-2}{x-1^2} = \frac{\frac{3+1}{3-1} - \frac{2+1}{2-1}}{3-2} \Rightarrow \frac{-2}{x-1^2} = -1 \Rightarrow x-1^2 = 2 \Rightarrow x = 1-\sqrt{2} \notin 2;3 \vee x = 1+\sqrt{2} \in 2;3$$

b) Continua e derivabile perché il denominatore si annulla solo in $x = -1 \notin [0; 1]$. $y' = \frac{x^2+2x-1}{x+1^2}$;

$$\frac{x^2+2x-1}{x+1^2} = \frac{\frac{1+1}{1+1} - \frac{1}{1}}{1-0} \Rightarrow \frac{x^2+2x-1}{x+1^2} = 0 \Rightarrow x = -1-\sqrt{2} \notin 0;1 \vee x = -1+\sqrt{2} \in 0;1$$

c) Continua e derivabile nei reali. $y' = e^x$; $e^x = \frac{e^2-e^{-1}}{2+1} \Rightarrow e^x = \frac{e^3-1}{3e} \Rightarrow x = ln\left(\frac{e^3-1}{3e}\right) \in -1;2$

18. a) $y = ln(x), x \in [1; e]$; b) $y = sin(x), x \in [0; \pi/2]$; c) $y = \sqrt{x}, x \in 0;1$

a) Continua e derivabile per $x > 0$. $y' = 1/x$; $\frac{1}{x} = \frac{ln\ e - ln\ 1}{e-1} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{e-1} \Rightarrow x = e-1 \in 1;e$;

b) Continua e derivabile nei reali. $y' = cos(x)$; $cos(x) = 2/\pi \Rightarrow x = cos^{-1}(2/\pi) \in (0; \pi/2)$

c) Continua e derivabile per $x > 0$. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \frac{1}{2\sqrt{x}} = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4} \in 0;1$

19. a) $y = x^2 + x, x \in [-1; 1]$; b) $y = x^3 + x + 1, x \in [-1; 0]$; c) $y = \frac{x}{x^2-1}$, **$x \in [2; 3]$**

a) Continua e derivabile nei reali. $y' = 2x + 1$, $2x + 1 = 1 \Rightarrow x = 0 \in (-1; 1)$;

b) Continua e derivabile nei reali. $y' = 3x^2 + 1$, $3x^2 + 1 = 2 \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \in -1;0 \vee x = \frac{\sqrt{3}}{3} \notin -1;0$;

c) Continua e derivabile per $x \notin \{2; 3\}$.

$$y' = \frac{-x^2-1}{x^2-1^2}; \frac{-x^2-1}{x^2-1^2} = \frac{\frac{3}{9-1} - \frac{2}{4-1}}{3-2} \Rightarrow \frac{-x^2-1}{x^2-1^2} = -\frac{7}{24} \Rightarrow 24x^2 + 24 = 7x^4 - 14x^2 + 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7x^4 - 38x^2 - 17 = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{\frac{19+4\sqrt{30}}{7}} \notin 2;3 \vee x = \sqrt{\frac{19+4\sqrt{30}}{7}} \in 2;3$$

20. a) $y = \frac{x+\sqrt{x}}{x}, x \in 1;2$ **; b)** $y = \frac{sin\ x}{cos\ x + 1}, x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

a) Continua e derivabile per $x > 0$.

$$y' = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}} \cdot -\frac{1}{2\sqrt{x^3}} = \frac{\frac{2+\sqrt{2}}{2} - 2}{2-1} \Rightarrow -\frac{1}{2\sqrt{x^3}} = \frac{\sqrt{2}-4}{2} \Rightarrow \sqrt{x^3} = \frac{1}{4-\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 = \frac{1}{18-8\sqrt{2}} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{18+8\sqrt{2}}{324-128}} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{18+8\sqrt{2}}{196}} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{9+4\sqrt{2}}{98}} \in 1;2$$

b) Continua e derivabile per $x \neq \pi + 2k\pi$.

$$y' = \frac{1}{cos\ x + 1}; \frac{1}{cos\ x + 1} = \frac{\frac{1}{0+1} - 0}{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow cos\ x + 1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = cos^{-1}\left(\frac{\pi-2}{2}\right) \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

21. $y = sin^{-1}(x), x \in [-1; 1]$

Continua e derivabile in $[-1; 1]$.

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sqrt{1-x^2} = \frac{2}{\pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-x^2 = \frac{4}{\pi^2} \Rightarrow x^2 = \frac{\pi^2-4}{\pi^2} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{\pi^2-4}}{\pi} \in -1;1$$

22. $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c, x \in [m; p], a \neq 0, b, c, m, p \in \mathbb{R}}$

Continua e derivabile nei reali per qualsiasi reale *a, b, c*. $y' = 2ax + b$.

$$2ax + b = \frac{ap^2 + bp \cancel{+c} - am^2 - bm \cancel{+c}}{p-m} \Rightarrow 2ax = \frac{a\left(p^2 - m^2\right) + b\left(p - m\right)}{p-m} - b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{a\left(p+m\right)}{2a} \Rightarrow x = \frac{m+p}{2}$$

23. $\boldsymbol{y = ax^3 + x + b, x \in [m; p], a \neq 0, b, m, p \in \mathbb{R}}$

Continua e derivabile nei reali per qualsiasi reale *a, b*.

$$3ax^2 + 1 = \frac{ap^3 + p \cancel{+b} - am^3 - m \cancel{+b}}{p-m} \Rightarrow 3a^2x = \frac{a\left(p^3 - m^3\right) + p - m}{p-m} - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{a\left(p^2 + mp + m^2\right)}{3a^2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{p^2+mp+m^2}{3a}}$$

24. $y = \frac{a^2+x}{x-a^2}, x \in 0;1, a^2 \neq 1$

Continua e derivabile in (0; 1) per $a^2 \neq 1$.

$$\frac{-2a^2}{x-a^2}^2 = \frac{a^2+1}{1-a^2} + 1 \Rightarrow \frac{-\cancel{2}a^2}{\left(x-a^2\right)^2} = \frac{\cancel{2}}{1-a^2} \Rightarrow \left(x-a^2\right)^2 = a^2 \cdot \left(a^2-1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = a^2 \pm |a|\sqrt{a^2-1} \in 0;1, a < -1 \vee a > 1$$

Trovare i valori dei parametri reali, se esistono, per i quali possa applicarsi il teorema di Lagrange, alle seguenti funzioni negli intervalli indicati; quindi determinare i punti in cui si applica

25. **a)** $\boldsymbol{f(x) = ax^3 + x, x \in [0; 1]}$; **b)** $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + x + 1, x \in [0; 1]}$

a) Continua e derivabile nei reali per qualsiasi reale *a*. $3ax^2 + 1 = a + 1 \Rightarrow 3ax^2 = a \Rightarrow 3x^2 = 1, a \neq 0$

$$\Rightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \notin 0;1 \vee x = \frac{\sqrt{3}}{3} \in 0;1; a \neq 0$$

b) Continua e derivabile nei reali per qualsiasi reale *a*. $2ax + 1 = a + 1 \Rightarrow 2ax = a \Rightarrow 2x = 1, a \neq 0 \Rightarrow x = ½$

26. **a)** $\boldsymbol{f(x) = x^3 + ax^2 - x + 1, x \in [0; 1]}$; **b)** $\boldsymbol{f(x) = x^4 + x^2 + a, x \in [-1; 1]}$

a) Continua e derivabile nei reali per qualsiasi reale *a*. $3x^2 + 2ax - 1 = a \Rightarrow 3x^2 + 2ax - 1 - a = 0 \Rightarrow$

$$x = \frac{-a-\sqrt{a^2+3a+3}}{3} \notin 0;1 \vee x = \frac{-a+\sqrt{a^2+3a+3}}{3} \in 0;1$$

b) Continua e derivabile nei reali per qualsiasi reale *a*. $4x^3 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0$

27. **a)** $\boldsymbol{f(x) = x^2 + 1, x \in [0; a]}$; **b)** $\boldsymbol{f(x) = e^{ax}, x \in [0; 1]}$

a) Continua e derivabile nei reali. $2x = a \Rightarrow x = a/2 \Rightarrow a > 0$

b) Continua e derivabile nei reali per qualsiasi reale *a*. $ae^{ax} = e^a - 1 \Rightarrow$

$$e^{ax} = \frac{e^a-1}{a} \Rightarrow ax = ln\left(\frac{e^a-1}{a}\right) \Rightarrow x = ln\left(\sqrt[a]{\frac{e^a-1}{a}}\right), a > 0$$

Stabilire per quali motivi alle seguenti funzioni non può applicarsi il teorema di Lagrange, quindi stabilire se, ciononostante, esiste c interno all'intervallo indicato in cui si ha la media

28. **a)** $y = x + \sqrt{x}, x \in -1;0$ **; b)** $y = \dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}, x \in 0;1$

a) Non continua; b) Non continua

29. **a)** $y = |x - 2|, x \in [0; 3]$**; b)** $y = cot(x), x \in [\pi/3; 4\pi/3]$

a) Non derivabile in $x = 2$, $\varnothing$; b) Non continua in $x = \pi$

30. **Sia $y = f(x)$ una funzione derivabile fino al secondo ordine tale che si abbia $f(2) = 5$ e $f(5) = 2$. a) Dimostrare che esiste $c \in (2; 5)$ per cui si ha $f'(c) = -1$. b) Sia $g(x) = f[f(x)]$. Dimostrare che $g'(2) = g'(5)$ e usare tale fatto per dimostrare che esiste almeno un $k \in (2; 5)$ per cui si ha $g''(k) = 0$. c) Sia poi $h(x) = f(x) + x$, dimostrare che esiste $m \in (2; 5)$ per cui $h(m) = 0$.**

a) In (2; 5) si può applicare il teorema di Lagrange e si ha: $f'\ x = \dfrac{f\ 5 - f\ 2}{5-2} = \dfrac{2-5}{3} = -1$

b) $g'(x) = f'[f(x)] \cdot f'(x) \Rightarrow g'(2) = f'[f(2)] \cdot f'(2) = f'[5] \cdot f'(2)$; $g'(5) = f'[f(5)] \cdot f'(5) = f'[2] \cdot f'(5)$. Si può applicare il teorema di Rolle a $g'(x)$ e si ha: $g''(k) = 0$, $k \in (2; 5)$,

c) Si può applicare il teorema di Rolle a $h(x)$: $h(5) = f(5) + 5 = 2 + 5 = 7$, $h(2) = f(2) + 2 = 5 + 2 = 7$

31. **Nella tabella a lato indichiamo alcune informazioni relative a due funzioni continue e derivabili su tutto $\mathbb{R}$, con g strettamente crescente.**

x	$f(x)$	$f'(x)$	$g(x)$	$g'(x)$
1	6	4	2	5
2	9	2	3	1
3	10	–4	4	2
4	–1	3	6	7

Definiamo la funzione $h(x) = f[g(x)]$. a) Dimostrare che esiste c: $1 < c < 3$, $h(c) = 5$. b) Dimostrare che esiste c: $1 < c < 3$, $h'(c) = -5$. c) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $y = g^{-1}(x)$, per $x = 2$.

a) Poiché $g(x)$ è crescente abbiamo $1 < x < 3 \Rightarrow 2 = g(1) < g(x) < g(3) = 4$, quindi: $h(3) = f[g(3)] = f(4) = -1$ e $h(1) = f[g(1)] = f(2) = 9$. Dato che $h(x)$ è continua in (1; 3) possiamo applicargli il teorema di esistenza dei valori intermedi, quindi esiste c: $1 < c < 3$, $h(c) = 5$.

b) Alla funzione $h(x)$ possiamo applicare il teorema di Lagrange:

$$h'\ x = \frac{h\ 3 - h\ 1}{3-1} = \frac{f\left[g\ 3\right] - f\left[g\ 1\right]}{2} = \frac{f\ 4 - f\ 2}{2} = \frac{-1-9}{2} = -5$$

c) Poiché $g(x)$ è crescente è invertibile e la sua inversa derivabile, inoltre $g(1) = 2 \Rightarrow g^{-1}(2) = 1$, quindi si ha: $D\left[g^{-1}\ x\right] = \dfrac{1}{g'\ y} \Rightarrow D\left[g^{-1}\ 2\right] = \dfrac{1}{g'\ 1} = \dfrac{1}{5}$ e la retta cercata ha equazione: $y - g^{-1}(2) = D[g^{-1}(x)]_{x=2} \cdot (x - 2) \Rightarrow y - 1 = (x - 2)/5 \Rightarrow x - 5y + 3 = 0$

Stabilire quali delle seguenti funzioni sono costanti e, nel caso, calcolarne il valore

32. **a)** $sin^{-1}(x) + cos^{-1}(x)$**; b)** $sin^{-1}[cos(x)] - x$

a) Il dominio è [–1; 1]. Si ha: $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$, quindi la funzione è costante nel suo dominio e vale $sin^{-1}(0) + cos^{-1}(0) = \pi/2$;

b) Il dominio è $-1 \le cos(x) \le 1 \Rightarrow$ tutti gli x reali. Si ha: $y' = \dfrac{-sin(x)}{\sqrt{1-cos^2(x)}} - 1 = \dfrac{-sin(x)}{|sin(x)|} - 1 = \begin{cases} 0 & \pi + 2k\pi < x < 2k\pi \\ -2 & 2k\pi < x < \pi + 2k\pi \end{cases}$, quindi la funzione non è costante nel suo dominio, ma solo in delle restrizioni.

33. **a)** $tan^{-1}(x) + cot^{-1}(x)$**; b)** $tan^{-1}[cot(x)]$

a) Il dominio è $\mathbb{R}$. $y' = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{1+x^2} = 0$, la funzione è costante e vale $tan^{-1}(1) + cot^{-1}(1) = \pi/2$;

b) Il dominio è $\mathbb{R}\setminus\{2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$. $y'=\frac{1}{1+cot^2(x)}\cdot\frac{-1}{sin^2(x)}=\frac{-sin^2(x)}{sin^2(x)}=-1$. Non è costante.

34. **a) $sin^{-1}[cos(x)]-x$, $x\in[-\pi;0]$; b) $sin^{-1}[cos(x)]-x$, $x\in[0;\pi]$**

a) Abbiamo già visto, nell'esercizio 34b) che in $[-\pi; 0]$, $y' = 0$, quindi la funzione è costante e il suo valore è: $sin^{-1}[cos(-\pi/2)] + \pi/2 = sin^{-1}[0] + \pi/2 = \pi/2$

b) Sempre con riferimento all'esercizio 34b), stavolta la risposta è negativa.

35. **a) $sin^{-1}[cos(x)]+x$, $x\in[0;\pi]$; b) $sin^{-1}[cos^{-1}(x)]$**

a) Il dominio è $[-1; 1]$. $y'=\frac{-sin(x)}{\sqrt{1-cos^2(x)}}+1=\frac{-sin(x)}{|sin(x)|}+1=\begin{cases}2 & \pi+2k\pi<x<2k\pi\\ 0 & 2k\pi<x<\pi+2k\pi\end{cases}$, quindi in $[0; \pi]$ la funzione è costante e vale questo $sin^{-1}[cos(\pi/2)] + \pi/2 = sin^{-1}[0] + \pi/2 = \pi/2$;

b) Per quanto visto la risposta è ancora una volta negativa

Mostrare che si ha la validità delle seguenti uguaglianze, precisando l'insieme in cui ciò avviene e determinando il valore del parametro k.

36. **a)** $sin^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)=cos^{-1}(x)+k$ **; b)** $sin^{-1}(x)=cos^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)+k$ **; c) $tan^{-1}[cot(x)]=k-x$**

a) Si ha: $D\left[sin^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)\right]=\frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\cdot\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x}{|x|\cdot\sqrt{1-x^2}}=\begin{cases}\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} & 0<x<1\\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & -1<x<0\end{cases}$ pertanto le due funzioni hanno la stessa derivata solo in (0; 1). In tale intervallo abbiamo $sin^{-1}\left(\sqrt{1-\frac{1}{4}}\right)=cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+k\Rightarrow sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}+k\Rightarrow\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+k\Rightarrow k=0$. In effetti l'uguaglianza vale anche per $x = 0$ e $x = 1$;

b) Si ha: $D\left[cos^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right)\right]=\frac{-1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\cdot\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}=\frac{x}{|x|\cdot\sqrt{1-x^2}}=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & 0<x<1\\ \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} & -1<x<0\end{cases}$ pertanto le due funzioni hanno la stessa derivata solo in (0; 1). In tale intervallo abbiamo $cos^{-1}\left(\sqrt{1-\frac{1}{4}}\right)=sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+k\Rightarrow cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{6}+k\Rightarrow\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+k\Rightarrow k=0$. In effetti l'uguaglianza vale anche per $x = 0$ e $x = 1$;

c) Si ha: $D\left[tan^{-1}(cot(x))\right]=\frac{1}{1+cot^2(x)}\cdot\frac{-1}{sin^2(x)}=\frac{-sin^2(x)}{sin^2(x)}=-1$ pertanto le due funzioni hanno la stessa derivata per $x\neq k\pi$. Ma la funzione non è continua, quindi non possiamo dire che le due funzioni differiscono per una stessa costante, o perlomeno che la costante non è sempre la stessa. Infatti abbiamo per esempio $tan^{-1}[cot(\pi/2)] = k - \pi/2 \Rightarrow tan^{-1}[0] = k - \pi/2 \Rightarrow k = \pi/2$. Quindi per $0 < x < \pi$ si ha: $tan^{-1}[cot(x)] = \pi/2 - x$; mentre $tan^{-1}[cot(3\pi/2)] = k - 3\pi/2 \Rightarrow tan^{-1}[0] = k - 3\pi/2 \Rightarrow k = 3\pi/2 \Rightarrow tan^{-1}[cot(x)] = k - 3\pi/2$, $\pi < x < 2\pi$; e più in generale $tan^{-1}[cot(\pi/2 + h\pi)] = k - (\pi/2 + h\pi) \Rightarrow k = (\pi/2 + h\pi)$. Perciò $tan^{-1}[cot(x)] = h\pi/2 - x$, $(h - 1)\pi < x < h\pi$, h intero relativo.

37. **a)** $tan^{-1}(x)=cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)+k$ **; b)** $tan^{-1}\left(\sqrt{x}\right)=sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)+k$

a) Si ha: $D\left[cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right]=\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+x^2}}}\cdot\frac{-\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{\cancel{1+x^2}}}}\cdot\frac{x}{(1+x^2)\cancel{\sqrt{1+x^2}}}=\frac{x}{|x|(1+x^2)}=\begin{cases}\frac{1}{1+x^2} & x\geq 0\\ \frac{-1}{1+x^2} & x<0\end{cases}$.

Pertanto le due funzioni hanno la stessa derivata per $x \geq 0$ e si ha: $tan^{-1}(0) = cos^{-1}(1) + k \Rightarrow k = 0$

b) Il dominio è $x \geq 0$. Si ha inoltre:

$$D\left[tan^{-1}\left(\sqrt{x}\right)\right] = \frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\left(1+x\right)}; D\left[sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{x+1}}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{x+1}{x}}\cdot\frac{x+1-x}{\left(x+1\right)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{x+1}}{2}\cdot\sqrt{\frac{x+1}{x}}\cdot\frac{1}{\left(x+1\right)^2} = \frac{\cancel{x+1}}{2\sqrt{x}\left(x+1\right)^{\cancel{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\left(1+x\right)}$$

Pertanto le due funzioni hanno la stessa derivata per $x \geq 0$ e si ha: $tan^{-1}(0) = sin^{-1}(0) + k \Rightarrow k = 0$

38. **a)** $2\cdot tan^{-1}\left(x\right) = tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) + k$ **; b)** $tan\left[cot^{-1}\left(x\right)\right] = \frac{1}{x} + k$

a) $$D\left[tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)\right] = \frac{1}{1+\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2}\cdot\frac{2-2x^2+4x^2}{\left(1-x^2\right)^2} = \frac{\cancel{\left(1-x^2\right)^2}}{1-2x^2+x^4+4x^2}\cdot\frac{2\left(x^2+1\right)}{\cancel{\left(1-x^2\right)^2}} = \frac{2\cancel{\left(x^2+1\right)}}{\left(1+x^2\right)^{\cancel{2}}} = \frac{2}{1+x^2}$$

Le due funzioni hanno la stessa derivata, ma non hanno lo stesso dominio, infatti la prima ha dominio tutti i reali, la seconda invece $x \neq \pm 1$. Quindi effettivamente in $(-1; 1)$ si ha: $2tan(0) = tan(0) + k \Rightarrow k = 0$. Per $x < -1$ abbiamo invece $k = -\pi$ e per $x > 1$, $k = \pi$

Risultati analoghi si avranno per $x > 1$.

b) Si ha: $tan[cot^{-1}(x)] = 1/x$, quindi di fatto sono la stessa funzione.

39. **a)** $tan^{-1}\left(\frac{2x\cdot\sqrt{1-x^2}}{2x^2-1}\right) = sin^{-1}\left(2x\cdot\sqrt{1-x^2}\right) + k$ **; b)** $tan^{-1}\left(x\right) + tan^{-1}\left(x^2\right) = tan^{-1}\left(\frac{x+x^2}{1-x^3}\right) + k$

a) Il dominio della prima funzione è $\left[-1;1\right]\setminus\left\{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$, della seconda è $[-1; 1]$.

$$D\left[tan^{-1}\left(\frac{2x\cdot\sqrt{1-x^2}}{2x^2-1}\right)\right] = \frac{1}{1+\frac{4x^2\cdot\left(1-x^2\right)}{\left(2x^2-1\right)^2}}\cdot\frac{\left[2\sqrt{1-x^2}+\frac{-\cancel{4}^{2}x^2}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}\right]\cdot\left(2x^2-1\right)-4x\cdot 2x\cdot\sqrt{1-x^2}}{\left(2x^2-1\right)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{\left(2x^2-1\right)^2}}{\cancel{4x^4-4x^2}+1+\cancel{4x^2-4x^4}}\cdot\frac{2\left(1-x^2-x^2\right)\cdot\left(2x^2-1\right)-8x^2\cdot\left(1-x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}\,\cancel{\left(2x^2-1\right)^2}} =$$

$$= \frac{\cancel{4x^2}-2\cancel{-8x^4}\cancel{+4x^2}\cancel{-8x^2}\cancel{+8x^4}}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$D\left[sin^{-1}\left(2x\cdot\sqrt{1-x^2}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{1-4x^2+4x^4}}\cdot\left(2\sqrt{1-x^2}+\frac{\cancel{2}x\left(-2x\right)}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\left(1-2x^2\right)^2}}\cdot\frac{2-2x^2-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{2\left(1-2x^2\right)}{\left|1-2x^2\right|\cdot\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} & -\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} & -1 < x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee \frac{\sqrt{2}}{2} < x < 1 \end{cases}$$

Quindi le funzioni hanno la stessa derivata solo in $\left(-1;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{2}}{2};1\right)$ e in tali intervalli sono la

stessa funzione.

$$D\left[tan^{-1}(x)+tan^{-1}(x^2)\right]=\frac{1}{1+x^2}+\frac{2x}{1+x^4}=\frac{1+x^4+2x+2x^3}{(1+x^2)\cdot(1+x^4)}$$

b) $$D\left[tan^{-1}\left(\frac{x+x^2}{1-x^3}\right)\right]=\frac{1}{1+\left(\frac{x+x^2}{1-x^3}\right)^2}\cdot\frac{(1+2x)\cdot(1-x^3)+3x^2\cdot(x+x^2)}{(1-x^3)^2}=$$

$$=\frac{\cancel{(1-x^3)^2}}{1\cancel{-2x^3}+x^6+x^2\cancel{+2x^3}+x^4}\cdot\frac{1-x^3+2x-2x^4+3x^3+3x^4}{\cancel{(1-x^3)^2}}=\frac{1+x^4+2x+2x^3}{(1+x^2)\cdot(1+x^4)}$$

In $x = 1$ la seconda funzione ha una discontinuità, pertanto abbiamo: $tan^{-1}(0) + tan^{-1}(0) = tan(0) + k$ $\Rightarrow k = 0$, per $x < 1$; mentre per $x > 1 \Rightarrow k = \pi$

Stabilire l'applicabilità del Teorema di Cauchy per le seguenti coppie di funzioni, nell'intervallo indicato. Per quelle cui può applicaris, determinare i valori per i quali si trova il valore medio

40. **a) $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = 2x - 1$, $x \in [0; 1]$; b) $f(x) = x^2 - x$, $g(x) = x^2 + 1$, $x \in [-1; 1]$**

Sono polinomi, quindi funzioni continue e derivabili dappertutto:

a) Si ha $g(1) \neq g(0)$: $\frac{2x+1}{2}=\frac{2-0}{1+1}\Rightarrow 2x+1=2\Rightarrow x=\frac{1}{2}$;

b) Si ha $g(1) = g(-1)$, il teorema non è applicabile

41. **a)** $f(x)=\frac{x}{x+1}, g(x)=x$, **$x \in [0; 1]$; b)** $f(x)=x, g(x)=\frac{x}{x+1}$, **$x \in [0; 1]$**

a) Continue in [0; 1] e derivabili in (0; 1), $g(1) \neq g(0)$:

$$\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{1/2-0}{1-0}\Rightarrow(x+1)^2=2\Rightarrow x+1=\pm\sqrt{2}\Rightarrow x=-1-\sqrt{2}\notin(0;1)\vee x=-1+\sqrt{2}\in(0;1);$$

b) Continue in [0; 1] e derivabili in (0; 1), $g(1) \neq g(0)$:

$$\frac{1}{\frac{1}{(x+1)^2}}=\frac{1-0}{1/2-0}\Rightarrow(x+1)^2=2\Rightarrow x=-1-\sqrt{2}\notin(0;1)\vee x=-1+\sqrt{2}\in(0;1)$$

42. **a) $f(x) = ln(x)$, $g(x) = 2x + 1$, $x \in [1; e]$; b) $f(x) = ln(x^2)$, $g(x) = x^2 + 1$, $x \in [1; e]$**

a) Continue in [1; e] e derivabili in (1; e), $g(1) \neq g(e)$: $\frac{1/x}{2}=\frac{1-0}{2e+1-3}\Rightarrow\frac{1}{x}=\frac{1}{e-1}\Rightarrow x=e-1\in(1;e)$;

b) Continue in [1; e] e derivabili in (1; e), $g(1) \neq g(e)$:

$$\frac{\cancel{2x}}{x^2}\cdot\frac{1}{\cancel{2x}}=\frac{2-0}{e^2+1-2}\Rightarrow\frac{1}{x^2}=\frac{2}{e^2-1}\Rightarrow x^2=\frac{e^2-1}{2}\Rightarrow x=-\sqrt{\frac{e^2-1}{2}}\notin(1;e)\vee x=\sqrt{\frac{e^2-1}{2}}\in(1;e);$$

43. **a) $f(x) = ln(x)$, $g(x) = ln^2(x)$, $x \in [e; e^2]$; b) $f(x) = e^x$, $g(x) = x$, $x \in [0; 1]$**

a) Continue in [e; e^2] e derivabili in (e; e^2), $g(e) \neq g(e^2)$:

$$\frac{1}{\cancel{x}}\cdot\frac{\cancel{x}}{2ln(x)}=\frac{2-1}{4-1}\Rightarrow\frac{1}{2ln(x)}=\frac{1}{3}\Rightarrow 2ln(x)=3\Rightarrow ln(x)=\frac{3}{2}\Rightarrow x=\sqrt{e^3}\in(e;e^2);$$

b) Continue in [0; 1] e derivabili in (0; 1), $g(1) \neq g(0)$: $\frac{e^x}{1}=\frac{e-1}{1-0}\Rightarrow e^x=e-1\Rightarrow x=ln(e-1)\in(0;1)$

44. **a) $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = x^3 - x$, $x \in [-2; 1]$; b)** $f(x)=\frac{x}{x-1}, g(x)=\frac{x-1}{x}$, **$x \in [2; 3]$**

a) Continue e derivabili dappertutto, $g(-2) \neq g(1)$: $\frac{2x+1}{3x^2-1}=\frac{2-2}{0+6}\Rightarrow 2x+1=0\Rightarrow x=-\frac{1}{2}\in(-2;1)$;

b) Continue in [2; 3] e derivabili in (2; 3), $g(2) \neq g(3)$:

$$\frac{-1}{(x-1)^2}\cdot\frac{x^2}{1}=\frac{3/2-2}{2/3-1/2}\Rightarrow\left(\frac{x}{x-1}\right)^2=3\Rightarrow\frac{x}{x-1}=\pm\sqrt{3}\Rightarrow x=\frac{3-\sqrt{3}}{2}\notin(2;3)\vee x=\frac{3+\sqrt{3}}{2}\in(2;3)$$

45. **a)** $f(x)=\frac{x}{x^2+1}, g(x)=x$, **$x \in [0; 2]$; b)** $f(x)=\frac{x}{x^2+1}, g(x)=\frac{x^2+1}{x}$, **$x \in [1; 2]$**

a) Continue in [0; 2] e derivabili in (0; 2), $g(0) \neq g(2)$:

$$\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{2/5-0}{2-0}\Rightarrow 5-5x^2=x^4+2x^2+1\Rightarrow x=-\sqrt{\frac{\sqrt{65}-7}{2}}\notin(0;2)\vee x=\sqrt{\frac{\sqrt{65}-7}{2}}\in(0;2);$$

b) Continue in [1; 2] e derivabili in (1; 2), $g(1) \neq g(2)$:

$$\frac{\cancel{1-x^2}^{-1}}{(x^2+1)^2}\cdot\frac{x^2}{\cancel{x^2-1}}=\frac{2/5-1/2}{5/2-2}\Rightarrow\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^2=\frac{1}{5}\Rightarrow\frac{x}{x^2+1}=\pm\sqrt{\frac{1}{5}}\Rightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}(1;2)$$

46. **a) $f(x) = sin(x)$, $g(x) = cos(x)$, $x \in [\pi/6; \pi/3]$; b) $f(x) = tan(x)$, $g(x) = cot(x)$, $x \in [\pi/6; \pi/4]$**

a) Continue e derivabili dappertutto, $g(\pi/6) \neq g(\pi/3)$:

$$\frac{cos(x)}{-sin(x)}=\frac{1/2-\sqrt{3}/2}{\sqrt{3}/2-1/2}\Rightarrow -tan(x)=\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\Rightarrow tan(x)=1\Rightarrow x=\frac{\pi}{4};$$

b) Continue in [π/6; π/4] derivabili in (π/6; π/4), $g(\pi/6) \neq g(\pi/4)$:

$$\frac{1}{cos^2(x)}\cdot\frac{-sin^2(x)}{1}=\frac{1-\sqrt{3}/3}{1-\sqrt{3}}\Rightarrow -tan^2(x)=\frac{3-\sqrt{3}}{3(1-\sqrt{3})}\Rightarrow tan^2(x)=\frac{3-\sqrt{3}+3\sqrt{3}-3}{6}\Rightarrow$$

;

$$\Rightarrow tan^2(x)=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow tan(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\Rightarrow x=tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)\in\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right)$$

47. **a) $f(x) = ax^2 + bx + c$, $g(x) = mx^2 + nx + p$, $x \in [0; 2]$; b) $f(x) = ax^2 + bx + c$, $g(x) = mx + n$, $x \in [-4; 2]$**

a) Continue e derivabili dappertutto, $g(0) \neq g(2)$ se $p \neq 4m + 2n + p \Rightarrow 2m + n \neq 0$.

$$\frac{2ax+b}{2mx+n}=\frac{4a+2b+c-c}{4m+2n}\Rightarrow\frac{2ax+b}{2mx+n}=\frac{2a+b}{2m+n}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{4amx}+2anx+2bm+\cancel{bn}=\cancel{4amx}+2bmx+2an+\cancel{bn}\Rightarrow;$$

$$\Rightarrow(an-bm)x=an-bm\Rightarrow x=1, an-bm\neq 0$$

b) Continue e derivabili dappertutto, $g(-4) \neq g(2)$ se $2m + n \neq -4m + n \Rightarrow m \neq 0$:

$$\frac{2ax+b}{m}=\frac{4a+2b+c-16a+4b-c}{6m}\Rightarrow 2ax+b=b-2a\Rightarrow x=-1, a\neq 0$$

48. **Se possiamo applicare il Teorema di Cauchy alle funzioni $f(x)$ e $g(x)$, sia scegliendo f come funzione al numeratore, sia come funzione al denominatore, possiamo dire che il valore c trovato è sempre lo stesso? Giustificare la risposta.**

Sì. Infatti $\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\Leftrightarrow\frac{g'(x)}{f'(x)}=\frac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)}$, dato che né i numetìratori, né i denominatori si annullano.

49. **Se $g(x)$ è una funzione pari, continua in $[-a; a]$ e derivabile in $(-a; a)$, il Teorema di Cauchy non può applicarsi, quale che sia a. L'affermazione è corretta? giustificare la risposta.**

Sì, perché $g(a) = g(-a)$

Stabilire per quali motivi alle seguenti coppie di funzioni non può applicarsi il Teorema di Cauchy, quindi determinare se, ciononostante, esiste c interno all'intervallo indicato in cui si ha la media

50. **a)** $f(x)=\frac{x}{x^2-1}, g(x)=x$, **$x \in [0; 2]$; b) $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$, $x \in [-1; 1]$**

a) f non continua in $x = 1$. L'equazione $\frac{-x^2-1}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2/3-0}{2-0}$ ovviamente non ha soluzioni nei reali;

b) $g(-1) = g(1)$. L'equazione non si può impostare

51. **a) $f(x) = x^2$, $g(x) = |x|$, $x \in [-1; 2]$; b) $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$, $x \in [-2; 1]$**

a) g non derivabile in $x = 0$. L'equazione non si può impostare;

b) $g'(0) = 0$. L'equazione $\frac{2x}{3x^2}=\frac{1-4}{1+8}\Rightarrow\frac{2}{3x}=-\frac{1}{3}\Rightarrow x=-2\notin(-2;1)$

52. $f(x)=\sqrt[3]{x^2}, g(x)=x,[-1;2]$

f non è derivabile in $x = 0$. L'equazione non si può impostare

Utilizzando, ove possibile, il Teorema di de L'Hôpital – Bernoulli calcolare i seguenti limiti

53. **a)** $\lim_{x\to0^+}\frac{sin\ x+sin\ 2x}{1-cos\ 4x}$; **b)** $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+ln\ x}{e^x+1}$; **c)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^3+x^2}$; **d)** $\lim_{x\to0^+}\frac{x+ln\ x}{x+sin\ x}$

a) $\lim_{x\to0^+}\frac{cos\ x+2cos\ 2x}{4sin\ 4x}=+\infty$; b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{1+1/x}{e^x}=0$; c) Non è forma indeterminata, ma $0/\infty = 0$;

d) Non è forma indeterminata, ma $-\infty/0^+ = -\infty$

54. **a)** $\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{2x+ln\ x}$; **b)** $\lim_{x\to1}\frac{x^4-x^3-3x^2+5x-2}{x^4-2x^3+2x-1}$; **c)** $\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{x^5}+4\cdot\sqrt{x^3}+4\cdot\sqrt{x}}{x^3-6x^2+12x-8}$

a) Non è forma indeterminata, ma $0/-\infty = 0$;

b) $\lim_{x\to1}\frac{4x^3-3x^2-6x+5}{4x^3-6x^2+2}=\lim_{x\to1}\frac{12x^2-6x-6}{12x^2-12x}=\lim_{x\to1}\frac{24x-6}{24x-12}=\frac{18}{12}=\frac{3}{2}$;

c) Non è forma indeterminata, ma $0/-64 = 0$

55. **a)** $\lim_{x\to\sqrt{2}^+}\frac{ln\ x^2-2}{cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right)}$; **b)** $\lim_{x\to+\infty}\frac{7x+ln\left(x^2\right)}{5x+ln\left(3x^3\right)}$; **c)** $\lim_{x\to3}\frac{cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)}{tan\left(\frac{\pi}{3}x\right)}$; **d)** $\lim_{x\to-1}\frac{ln\ x^2}{e^x-e}$; **e)** $\lim_{x\to\pi}\frac{sin\ x}{sin^{-1}\ \pi-x}$

a) Non è forma indeterminata, ma $-\infty/0^+ = -\infty$;

b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{7+\frac{2x}{x^2}}{5+\frac{9x^2}{3x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{7+\frac{2}{x}}{5+\frac{3}{x}}=\frac{7}{5}$;

c) $\lim_{x\to3}\frac{-\frac{\cancel{\pi}}{\cancel{6}^{\,2}}sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)}{\frac{\cancel{\pi}}{\cancel{3}}\left[1+tan^2\left(\frac{\pi}{3}x\right)\right]}=\frac{-\frac{1}{2}}{1}=-\frac{1}{2}$; d) Non è forma indeterminata, ma $0/(e^{-1} - e) = 0$;

e) $\lim_{x\to\pi}\frac{cos\ x}{\frac{-1}{\sqrt{1-\ \pi-x\ ^2}}}=\frac{-1}{-1}=1$

56. **a)** $\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{3\cdot tan^{-1}\ x\ -\pi}{x^2-3}$; **b)** $\lim_{x\to e}\frac{ln\ x^2\ -2}{sin\ x-e}$; **c)** $\lim_{x\to e}\frac{1-ln\ x}{e^x-\sqrt{e}}$; **d)** $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+ln\ x}{e^{2x}-ln\ x^2}$

a) $\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{\frac{3}{1+x^2}}{2x}=\frac{\frac{3}{1+3}}{2\sqrt{3}}=\frac{3}{8\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{8}$; b) $\lim_{x\to e}\frac{\frac{2x}{x^2}}{cos\ x-e}=\frac{2}{e}$; c) Non è forma indeterminata, ma

$$\frac{0}{e^e-\sqrt{e}}=0;$$

d) Al denominatore vi è una forma indeterminata ∞ – ∞, che si elimina facilmente utilizzando il principio di sostituzione degli infiniti: $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+ln\ x}{e^{2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+1/x}{2e^{2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2e^{2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2e^x}=0$

57. **a)** $\lim_{x\to+\infty}\frac{2\cdot tan^{-1}\ x\ -\pi}{e^{-4x}+1}$; **b)** $\lim_{x\to2}\frac{e^x-e^2}{tan(x-2)}$; **c)** $\lim_{x\to0^+}\frac{e^{2x}}{x+\ln(x^2)}$; **d)** $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x+ln\ x^2}$;

e) $\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{sin(x^2-x-6)}$

a) Non è forma indeterminata, ma 0/1 = 0; b) $\lim_{x\to2}\frac{e^x}{1+tan^2(x-2)}=\frac{e^2}{1}=e^2$;

c) Non è forma indeterminata, ma 1/∞ = 0;

d) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{2x}}{1+\frac{2x}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{2x}}{\frac{x+2}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2xe^{2x}}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{2x}+4xe^{2x}}{1}=+\infty$

e) $\lim_{x\to3}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{(2x-1)cos(x^2-x-6)}=\frac{\frac{1}{4}}{5}=\frac{1}{20}$

58. **a)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{tan^{-1}\ x^2}$; **b)** $\lim_{x\to1}\frac{x^3-2x^2-x+2}{sin(x^4-2x+1)}$; **c)** $\lim_{x\to0}\frac{sin^{-1}(x)}{x}$; **d)** $\lim_{x\to0}\frac{sin^{-1}(x)}{sin(x)}$; **e)** $\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^3-1}{sin(2x)}$

a) Non è forma indeterminata, ma ∞/(π/2) = +∞; b) $\lim_{x\to1}\frac{3x^2-4x-1}{(4x^3-2)cos(x^4-2x+1)}=\frac{-2}{2cos(0)}=-1$;

c) $\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1$; d) $\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{cos(x)}=1$; e) $\lim_{x\to0}\frac{3(1+x)^2}{2cos(2x)}=\frac{3}{2}$

59. **a)** $\lim_{x\to1}\frac{3x\cdot ln(x^2)}{sin(\sqrt{2x-1}-1)}$; **b)** $\lim_{x\to2}\frac{(x-1)^5-1}{ln(x^2-3)}$; **c)** $\lim_{x\to-1^-}\frac{sin(\sqrt{x^2+3}-2)}{(x^2-1)^2}$; **d)** $\lim_{x\to0}\frac{ln[cos(3x)]}{4sin(3x)-6sin(8x)}$

a) $\lim_{x\to1}\frac{3ln(x^2)+\frac{3x\cdot2x}{x^2}}{\frac{\cancel{2}cos(\sqrt{2x-1}-1)}{\cancel{2}\sqrt{2x-1}}}=\lim_{x\to1}6\sqrt{2x-1}=6$; b) $\lim_{x\to2}\frac{5(x-1)^4}{\frac{2x}{x^2-3}}=\frac{5}{4}$; c) $\lim_{x\to-1^-}\frac{\frac{cos(\sqrt{x^2+3}-2)}{2\sqrt{x^2+3}}}{2(x^2-1)\cdot2x}=-\infty$;

d) $\lim_{x\to0}\frac{\frac{3sin(3x)}{cos(3x)}}{12cos(3x)-48cos(8x)}=\frac{0}{-36}=0$

60. **a)** $\lim_{x\to0}\frac{ln(2+x)}{sin(x+1)+(x+1)\cdot cos(x)}$; **b)** $\lim_{x\to3}\frac{ln(10-x^2)}{1-cos(x-3)+2x\cdot sin(x^2-9)}$

a) Non è forma indeterminata, ma $\frac{ln(2)}{sin(1)+1}$;

b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\dfrac{-2x}{10-x^2}}{sin(x-3)+2sin(x^2-9)+2x\cdot 2x\cdot cos(x^2-9)}=\dfrac{-6}{36}=-\dfrac{1}{6}$

61. **a)** $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{ln\left(1+\sqrt{x-2}\right)}{(x-1)\cdot sin(x^3-8)}$ **; b)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x\cdot ln(x+3)}{\sqrt{x^3-17x+1}}$ **; c)** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{e^{-x}+1}{5x^4-x-12}$ **; d)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln(x+1)}{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}$

a) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\dfrac{1}{\left(1+\sqrt{x-2}\right)\cdot 2\sqrt{x-2}}}{sin(x^3-8)+(x-1)\cdot 3x^2\cdot cos(x^3-8)}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}\cdot\left[sin(x^3-8)+1\cdot 12\cdot 1\right]}=+\infty$;

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{ln(x+3)+\dfrac{x}{x+3}}{\dfrac{3x^2-17}{2\sqrt{x^3-17x+1}}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{ln(x+3)+1}{\dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3}}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2\left[ln(x+3)+1\right]}{3\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\dfrac{2}{x+3}}{\dfrac{3}{2\sqrt{x}}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{4\sqrt{x}}{3(x+3)}=0$;

c) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-e^{-x}}{20x^3-1}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{e^{-x}}{60x^2}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-e^{-x}}{120x}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{e^{-x}}{120}=+\infty$;

d)

$$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln(x+1)}{e^{\frac{ln(1+x)}{x}}-e}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{x+1}}{(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\left[\dfrac{\dfrac{x}{1+x}-ln(1+x)}{x^2}\right]}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{e\cdot\dfrac{\dfrac{x}{1+x}-ln(1+x)}{x^2}}=$$

$$=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{e}\cdot\dfrac{x^2}{\dfrac{x}{1+x}-ln(1+x)}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{e}\cdot\dfrac{2x}{\dfrac{\cancel{1+x-x}}{(1+x)^2}-\dfrac{1}{1+x}}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{e}\cdot\dfrac{2x}{\dfrac{\cancel{1-1}-x}{(1+x)^2}}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2(1+x)}{e}=-\dfrac{2}{e}$$

62. **a)** $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}}{tan\left(x+\frac{\pi}{2}-1\right)}$ **;b)** $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{1-\sqrt{x-3}}{e^{\frac{x}{x-4}}}$ **; c)** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{sin\left(\sqrt{x-4}-1\right)}{x\cdot ln(x^2-24)}$ **; d)** $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{ln\ x^2-4}{tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)}$ **;e)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin^{-1}(x)-x}{x-tan^{-1}(x)}$

a) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}}{-cot(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\dfrac{-e^{\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^2}}{\dfrac{1}{sin^2(x-1)}}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{-e^{\frac{1}{x-1}}}{\dfrac{(x-1)^2}{sin^2(x-1)}}$; $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)^2}{sin^2(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2(x-1)}{2sin(x-1)cos(x-1)}=$;

$=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2(x-1)}{sin(2x-2)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2}{2cos(2x-2)}=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to 1^+}-e^{\frac{1}{x-1}}=-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{-\dfrac{1}{2\sqrt{x-3}}}{e^{\frac{x}{x-4}}\cdot\dfrac{x-4-x}{(x-4)^2}}=\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x-3}}}{e^{\frac{x}{x-4}}\cdot\dfrac{4}{(x-4)^2}}=\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{(x-4)^2}{8e^{\frac{x}{x-4}}}=\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{2(x-4)}{32\dfrac{e^{\frac{x}{x-4}}}{(x-4)^2}}=\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{(x-4)^3}{16e^{\frac{x}{x-4}}}=\ldots$, si entra in un ciclo e quindi non si può usare la regola, valutiamo quindi gli ordini di infinitesimo stabilendo che i limite è del tipo 1/0 = ∞;

c) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\dfrac{cos\left(\sqrt{x-4}-1\right)}{2\sqrt{x-4}}}{ln\left(x^2-24\right)+\dfrac{2x^2}{x^2-24}}=\dfrac{\frac{1}{2}}{50}=\dfrac{1}{100}$;

d) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\dfrac{\dfrac{2x}{x^2-4}}{\pi}}{4cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}x\right)}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{8x\cdot cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}x\right)}{\pi\ x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{8cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}x\right)-8x\cdot 2cos\left(\dfrac{\pi}{4}x\right)sin\left(\dfrac{\pi}{4}x\right)\cdot\dfrac{\pi}{4}}{2\pi x}=\dfrac{0}{4\pi}=0$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1}{1-\dfrac{1}{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\dfrac{1+x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cancel{2x}}{2\sqrt{1-x^2}\,\cancel{2x}}=\dfrac{1}{2}$;

Trasformando le forme indeterminate in modo da utilizzare il Teorema di de L'Hôpital – Bernoulli, se possibile, calcolare i seguenti limiti

63. **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}\cdot x$ **; b)** $\lim\limits_{x\to 0}\left[sin^{-1}(x)\cdot ln(x)\right]$**; c)** $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[ln(x)\cdot sin(x)\right]$**; d)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x-\sqrt{x}\right]$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin^{-1}(x)}{\dfrac{1}{ln(x)}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\dfrac{-1/x}{ln^2(x)}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-ln^2(x)}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\dfrac{2ln(x)}{\cancel{x}}}{-\dfrac{1}{x^{\cancel{2}}}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2ln(x)}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{2}{\cancel{x}}}{-\dfrac{1}{x^{\cancel{2}}}}=\lim\limits_{x\to 0}(-2x)=0$;

c) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{sin(x)}{\dfrac{1}{ln(x)}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{cos(x)}{\dfrac{-1/x}{ln^2(x)}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{ln^2(x)}{\dfrac{-1}{x}}=0$;

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{e^x}}{\dfrac{1}{e^x\sqrt{x}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}+\dfrac{1}{e^x}}{\dfrac{-\cancel{e^x}\cdot\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{x\cdot e^{\cancel{2}x}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{2\sqrt{x^3}-e^x}{2\cancel{e^x}\sqrt{x^3}}}{\dfrac{-\left(\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x}}\right)}{x\cdot\cancel{e^x}}}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{e^x-2\sqrt{x^3}}{\cancel{2\sqrt{x^3}}}\cdot\dfrac{\cancel{2\sqrt{x^3}}}{2x+1}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-2\sqrt{x^3}}{2x+1}=+\infty$

64. **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x+2}\right)^{5x+3}$ **; b)** $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[sin(x)\right]^{ln(x)}$**; c)** $\lim\limits_{x\to 2^+}\left[\sqrt{x-2}\cdot tan\left(\dfrac{\pi}{x}\right)\right]$**; d)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^x$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{(5x+3)\cdot ln\left(\frac{3x+1}{3x+2}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{ln\left(\frac{3x+1}{3x+2}\right)}{\frac{1}{5x+3}}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ln\left(\frac{3x+1}{3x+2}\right)}{\frac{1}{5x+3}}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{\cancel{3x+2}}{3x+1}\cdot\frac{\cancel{9x}+6\cancel{-9x}-3}{(3x+2)^{\cancel{2}}}}{\frac{-5}{(5x+3)^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3(5x+3)^2}{5(3x+1)(3x+2)}}=e^{\frac{-75}{45}}=e^{\frac{-5}{3}}$;

b) Non è necessario applicare la regola: $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{ln(x)\cdot ln\left[sin(x)\right]}=+\infty$;

c) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x-2}}{cot\left(\dfrac{\pi}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}}{\dfrac{\pi}{x^2\cdot sin^2\left(\dfrac{\pi}{x}\right)}}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2\cdot sin^2\left(\dfrac{\pi}{x}\right)}{2\pi\sqrt{x-2}}=+\infty$; d) No FI , il limite è $+\infty$

65. **a)** $\lim\limits_{x\to 1}\left[sin^{-1}(x)\cdot tan^{-1}(\pi x)\right]$; **b)** $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[ln(x)\right]^{sin(x)}$; **c)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e-\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x}{ln(x)}$

a) No FI, il limite è $\pi\cdot tan^{-1}(\pi)/2$; b) Privo di senso perché l'Id.E. è $ln(x)>0\Rightarrow x>1$;
c) No FI, il limite è 0

66. **a)** $\lim\limits_{x\to\pi/2^+}\left[\sqrt{2x-\pi}\cdot tan(x)\right]$; **b)** $\lim\limits_{x\to 0^+}cot(x)\cdot ln(x)$; **c)** $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{5x^2+3x-1}{x^2+x+5}\right)^{ln(x-1)}$

a) $\lim\limits_{x\to\pi/2^+}\dfrac{\sqrt{2x-\pi}}{cot(x)}=\lim\limits_{x\to\pi/2^+}\dfrac{\dfrac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2x-\pi}}}{-\dfrac{1}{sin^2(x)}}=\lim\limits_{x\to\pi/2^+}\dfrac{-sin^2(x)}{\sqrt{2x-\pi}}=-\infty$; b) No FI , il limite è $-\infty$;

c) $e^{\lim\limits_{x\to 1^+}\left[ln(x-1)\cdot ln\left(\frac{5x^2+3x-1}{x^2+x+5}\right)\right]}=e^{\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{ln\left(\frac{5x^2+3x-1}{x^2+x+5}\right)}{\frac{1}{ln(x-1)}}}=e^{\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\frac{\cancel{x^2+x+5}}{5x^2+3x-1}\cdot\frac{(10x+3)(x^2+x+5)-(5x^2+3x-1)(2x+1)}{(x^2+x+5)^{\cancel{2}}}}{\frac{-1}{(x-1)\cdot ln^2(x-1)}}}=$, la regola non

$=e^{\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(2x^2+52x+16)(1-x)\cdot ln^2(x-1)}{(x^2+x+5)(5x^2+3x-1)}}=e^{\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{70(1-x)\cdot ln^2(x-1)}{49}}=e^{\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{10ln^2(x-1)}{\frac{7}{(1-x)}}}=e^{\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\frac{20ln(x-1)}{x-1}}{\frac{7}{(1-x)^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{20}{7}ln(x-1)(x-1)}$

si può applicare, perché entra in loop. Dobbiamo usare il limite notevole:

$$\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{x^2+x+5}{x^2+x+5}+\frac{4x^2+2x-6}{x^2+x+5}\right)^{ln(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+x+5}{4x^2+2x-6}}\right)^{\frac{x^2+x+5}{4x^2+2x-6}}\right]^{\frac{4x^2+2x-6}{x^2+x+5}\cdot ln(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1^+}e^{\frac{4x^2+2x-6}{x^2+x+5}\cdot ln(x-1)}=e^0=1$$

67. **a)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{sin(x)}-\dfrac{1}{x}\right)$; **b)** $\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2-1)\cdot tan\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$; **c)** $\lim\limits_{x\to 2^+}ln(x-1)\cdot ln(x-2)$

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-sin(x)}{x\cdot sin(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-cos(x)}{sin(x)+x\cdot cos(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin(x)}{cos(x)+cos(x)-x\cdot sin(x)}=0$;

b) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-1}{cot\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x}{-\dfrac{\pi}{2}sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)}=\dfrac{2}{-\dfrac{\pi}{2}}=-\dfrac{4}{\pi}$;

c) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{ln(x-1)}{\dfrac{1}{ln(x-2)}}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\dfrac{1}{x-1}}{\dfrac{-1}{(x-2)ln^2(x-2)}}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{(2-x)ln^2(x-2)}{x-1}$, la regola non si può applicare, perché entra in loop. Il limite è 0 perché il logaritmo si avvicina più rapidamente a zero che non a infinito;

68. **a)** $\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\left(\dfrac{1}{sin(x-1)}-\dfrac{1}{ln(x)}\right)\right]$; **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{1/x}$; **c)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^{1/x}-1}{3^{1/x}-1}$

a) $$\lim_{x\to1^+}\frac{ln(x)-sin(x-1)}{ln(x)sin(x-1)}=\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{x}-cos(x-1)}{\frac{sin(x-1)}{x}+ln(x)cos(x-1)}=\lim_{x\to1^+}\frac{1-x\cdot cos(x-1)}{sin(x-1)+x\cdot ln(x)cos(x-1)}=$$;

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{-cos(x-1)+x\cdot sin(x-1)}{cos(x-1)+ln(x)cos(x-1)+cos(x-1)-x\cdot ln(x)sin(x-1)}=\frac{-1}{1+0+1-0}=-\frac{1}{2}$$

b) $$\lim_{x\to+\infty}e^{ln(x)/x}=e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{ln(x)}{x}}=e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}=e^0=1;$$

c) $$\lim_{x\to\infty}\frac{2^{1/x}\cdot ln(2)\cdot\frac{-1}{x^2}}{3^{1/x}\cdot ln(3)\cdot\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2^{1/x}\cdot ln(2)}{3^{1/x}\cdot ln(3)}=\frac{ln(2)}{ln(3)}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\frac{ln(2)}{ln(3)}$$

69. Usando il Teorema di de L'Hôpital–Bernoulli provare che e^x è infinito di ordine superiore a x^n, per x che tende a + ∞ e per ogni n reale positivo.

Si ha: $$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{n\cdot x^{n-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{n\cdot(n-1)\cdot x^{n-2}}=\ldots=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{n!}=+\infty$$

70. Usando il Teorema di de L'Hôpital–Bernoulli provare che x è infinito di ordine superiore a $ln(x)$, per x che tende a + ∞.

71. Si ha: $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{ln(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$

72. a) $\lim_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}, n\neq0, a\neq0$ **; b)** $\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^m-1}{x}, m\neq0$ **; c)** $\lim_{x\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{x}}-1}{b^{\frac{1}{x}}-1}, a,b\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}, a\neq b$

a) $\lim_{x\to a}\frac{m\cdot x^{m-1}}{n\cdot x^{n-1}}=\frac{m}{n}\cdot a^{m-n}$; b) $\lim_{x\to0}\frac{m\cdot(1+x)^{m-1}}{1}=m$;

c) $$\lim_{x\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{x}}\cdot ln(a)\cdot\frac{-1}{x^2}}{b^{\frac{1}{x}}\cdot ln(b)\cdot\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{ln(a)}{ln(b)}=\frac{ln(a)}{ln(b)}$$

73. a) $\lim_{x\to0^+}\frac{(1+x)^m-1}{x^2}, m\neq0$ **; b)** $\lim_{x\to+\infty}x^n\cdot sin\left(\frac{a}{x}\right), n>0, a\neq0$ **; c)** $\lim_{x\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{n}{x}}-1}, n\neq1$

a) $$\lim_{x\to0^+}\frac{m\cdot(1+x)^{m-1}}{2x}=\begin{cases}+\infty & m>0\\ -\infty & m<0\end{cases};$$

b) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{sin\left(\frac{a}{x}\right)}{x^{-n}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{cos\left(\frac{a}{x}\right)\cdot\frac{-a}{x^2}}{-n\cdot x^{-n-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a\cdot cos\left(\frac{a}{x}\right)}{n\cdot x^{-n-3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a}{n}\cdot x^{n+3}=\begin{cases}+\infty & a>0\\ -\infty & a<0\end{cases};$$

c) $$\lim_{x\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{n}{x}}-1}\lim_{x\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{x}}\cdot\cancel{ln(2)}\cdot\frac{-1}{x^2}}{2^{\frac{n}{x}}\cdot\cancel{ln(2)}\cdot\frac{-n}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2^{\frac{1-n}{x}}}{n}=\frac{1}{n}$$

74. Se non esiste il limite del rapporto delle derivate possiamo dire che non esiste neanche il limite del rapporto delle funzioni? Giustificare la risposta.

No, per esempio $\lim_{x\to\infty}\frac{x+sin(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{sin(x)}{x}\right)=1$, mentre $\lim_{x\to\infty}\frac{1+cos(x)}{1}$ non esiste

75. Possiamo calcolare i seguenti limiti usando il Teorema di de L'Hôpital–Bernoulli. Giustificare le risposte, calcolando in ogni caso il limite: a) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot sin(1/x)}{sin(x)}$ **; b)** $\lim_{x\to\infty}\frac{x-sin(x)}{x+sin(x)}$**.**

a) Il numeratore è infinitesimo perché prodotto di una infinitesima per una limitata, quindi è FI 0/0; numeratore e denominatore sono continue e derivabili in un intorno di 0. Abbiamo allora: $\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot sin(1/x)+x^2\cdot cos(1/x)\cdot(-1/x^2)}{cos(x)}=\lim_{x\to 0}\left[2x\cdot sin(1/x)-cos(1/x)\right]=\lim_{x\to 0}\left[-cos(1/x)\right]$, che non esiste; b) Ipotesi principali del teorema verificate, ma $\lim_{x\to\infty}\frac{1-cos(x)}{1+cos(x)}$ non esiste.

Sviluppare le seguenti funzioni con i polinomi di Mac Laurin fino al generico esponente n

76. a) e^{-x} **; b)** e^{3x}**; c)** e^{x^2} **; d)** $sin(2x)$**; e)** $sin(3x)$**; f)** $sin(x/2)$

a) Basta sostituire $-x$ al posto di x nell'espressione $e^x\approx\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$, ottenendo $e^{-x}\approx\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^k}{k!}$

b) Dato che e^{3x} è continua e derivabile per qualsiasi ordine, sostituendo $3x$ a x nell'espressione di e^x, otteniamo: $\sum_{k=0}^{n}\frac{(3x)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{3^k x^k}{k!}$; c) come prima: $e^{x^2}\approx\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2n}}{n!}$;

d) Stavolta sostituiamo in $sin(x)\approx\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, ottenendo: $sin(2x)\approx\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(2x)^{2k+1}}{(2k+1)!}$;

e) Come prima: $sin(3x)\approx\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(3x)^{2k+1}}{(2k+1)!}$; f) $sin\left(\frac{x}{2}\right)\approx\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(x/2)^{2k+1}}{(2k+1)!}$;

77. a) $cos(2x)$**; b)** $cos(x/3)$**; c)** $cos(x^2)$**; d)** $ln(1+2x)$**; e)** $ln(1+x/4)$**; f)** $ln(1+x^2)$

a) Stavolta operiamo su $cos(x)\approx\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$, ottenendo: $cos(2x)\approx\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(2x)^{2k}}{(2k)!}$;

b) $cos\left(\frac{x}{3}\right)\approx\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(x/3)^{2k}}{(2k)!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k}}{3^{2k}\cdot(2k)!}$; c) $cos(x^2)\approx\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(x^2)^{2k}}{(2k)!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{4k}}{(2k)!}$;

d) Usiamo: $ln(1+x)\approx\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot\frac{x^{k+1}}{k+1}$, $|x|<1$, ottenendo: $ln(1+2x)\approx\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot\frac{(2x)^{k+1}}{k+1}, |x|<\frac{1}{2}$;

e) $ln\left(1+\frac{x}{4}\right)\approx\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot\frac{(x/4)^{k+1}}{k+1}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot\frac{x^{k+1}}{4^{k+1}\cdot(k+1)}, |x|<4$;

f) $ln(1+x^2)\approx\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot\frac{(x^2)^{k+1}}{k+1}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot\frac{x^{2k+2}}{k+1}, |x|<1$

78. a) $tan^{-1}(2x)$**; b)** $tan^{-1}(x/2)$**; c)** $tan^{-1}(x^3)$**; d)** e^x+e^{-x}**; e)** $sin(x)-cos(x)$

a) Stavolta $tan^{-1}(x)\approx\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$, otteniamo: $tan^{-1}(2x)\approx\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot\frac{(2x)^{2k+1}}{2k+1}, |x|<\frac{1}{2}$;

b) $tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\approx\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot\frac{(x/2)^{2k+1}}{2k+1}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)\cdot 2^{k+1}}, |x|<2$;

c) $tan^{-1}\left(x^3\right) \approx \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \cdot \frac{\left(x^3\right)^{2k+1}}{2k+1} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \cdot \frac{x^{6k+3}}{2k+1}$;

d)
$$e^x + e^{-x} \approx \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^k}{k!} = \left(1 + \cancel{\frac{x}{1!}} + \frac{x^2}{2!} + \cancel{\frac{x^3}{3!}} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right) +$$
$$+\left(1 - \cancel{\frac{x}{1!}} + \frac{x^2}{2!} - \cancel{\frac{x^3}{3!}} + \ldots + (-1)^n\frac{x^n}{n!}\right) = 2 + 2\cdot\frac{x^2}{2!} + \ldots + \left(1 + (-1)^n\right)\cdot\frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{2x^{2k}}{(2k)!}$$

e)
$$sin(x) - cos(x) \approx \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \cdot \left[\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} - \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right] = \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right] -$$
$$-\left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right] = -1 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\cdot\left(\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right)$$

79. **a)** $sinh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ **(Seno iperbolico); b)** $cosh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ **(Coseno iperbolico)**

a) Basta considerare il 79d) e dividere per 2: $\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{(2k)!}$;

b)
$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} \approx \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^k}{k!}\right) = \frac{1}{2}\left(\cancel{1} + \frac{x}{1!} + \cancel{\frac{x^2}{2!}} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right) -$$
$$-\frac{1}{2}\left(\cancel{1} - \frac{x}{1!} + \cancel{\frac{x^2}{2!}} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^n}{n!}\right) = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{\left(1 - (-1)^n\right)}{2}\cdot\frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

***Usando il polinomio di Mac Laurin, approssimare i seguenti numeri con una precisione di* 10^{-3}. Può essere utile l'identità:** $tan^{-1}(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} - tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) & x < 0 \\ \frac{\pi}{2} - tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) & x > 0 \end{cases}$

80. **a)** e^3**; b)** $\sqrt{e}$**; c)** e^{-1}**; d)** $sin(1)$**; e)** $sin(2)$**; f)** $sin\left(\sqrt{2}\right)$

a) Calcoliamo valori di $e^3 \approx \sum_{k=0}^{n}\frac{3^k}{k!}$ per n consecutivi, controllando quando due elementi adiacenti hanno uguali le prime 3 cifre decimali: ciò accade per n = 12 e 13: 20,085; b) $\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} \approx \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k \cdot k!}$, per n = 4, 5: 1,648; c) $e^{-1} \approx \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$, per n = 7, 8: 0,367; d) $sin(1) \approx \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$, per n = 2, 3: 0,841;

e) $sin(2) \approx \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k \cdot 2^{2k+1}}{(2k+1)!}$, per n = 4, 5: 0,909; f) $sin\left(\sqrt{2}\right) \approx \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\, 2^{k+\frac{1}{2}}}{(2k+1)!}$, per n = 3, 4: 0,987

81. **a)** $cos(2)$**; b)** $cos\left(\sqrt{3}\right)$**; c)** $cos(1/2)$**; d)** $ln(1/5)$**; e)** $1{,}2^{3{,}5}$

a) $cos(1) \approx \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\, 2^{2k}}{(2k)!}$, per n = 5, 6: –0,416; b) $cos(2) \approx \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\, 3^k}{(2k)!}$, per n = 4, 5: –0,160;

c) $cos\left(\frac{1}{2}\right) \approx \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2^{2k}(2k)!}$, per n = 2, 3: 0,887;

d) $ln\left(\frac{1}{5}\right)=ln\left(1-\frac{4}{5}\right)\approx\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot\frac{(-0,8)^{k+1}}{(k+1)}$, per n = 25, 26: –1,609

e) Usiamo: $(1+x)^{\alpha}\approx\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}^k\cdot x^k,|x|<1$. Il calcolo di coefficienti binomiali non interi utilizza le stesse regole di quello con valori interi, per esempio $\binom{2,7}{3}=\frac{2,7\cdot1,7\cdot0,7}{3!}=0,5355$. Quindi $1,2^{3,5}=(1+0,2)^{3,5}\approx\sum_{k=0}^{n}\binom{3,5}{k}^k\cdot0,2^k$, per n = 2, 3: 1,892.

82. a) $ln\left(1+\sqrt{2}\right)$**; b)** tan^{-1}**(2/3); c)** $tan^{-1}\left(\sqrt{2}\right)$**; d)** tan^{-1}**(3) e)** ln**(2);**

a) $ln\left(1+\sqrt{2}\right)=2\cdot ln\left(\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)=2\cdot ln\left[1+\left(\sqrt{1+\sqrt{2}}-1\right)\right]\approx\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot\frac{\left(\sqrt{1+\sqrt{2}}-1\right)^{k+1}}{k+1}$, per n = 8, 9: 0,881;

b) $tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\approx\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot\frac{2^{2k+1}}{(2k+1)\cdot^{2k+1}}$, per n = 10, 11: 0,588;

c) $tan^{-1}\left(\sqrt{2}\right)=\frac{\pi}{2}-tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\approx\frac{\pi}{2}-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot\frac{1}{\sqrt{2}^{2k+1}\cdot(2k+1)}$, per n = 5, 6: 0,955;

d) $tan^{-1}(3)=\frac{\pi}{2}-tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\approx\frac{\pi}{2}-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot\frac{1}{3^{2k+1}\cdot(2k+1)}$, per n = 3, 4: 1,249

e) $ln(2)=2ln\left(\sqrt{2}\right)=2\cdot ln\left[1+\left(\sqrt{2}-1\right)\right]\approx2\cdot\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^{k+1}}{k+1}$, per n = 6, 7: 0,693;

83. a) $\sqrt{3}$**; b)** $\sqrt[3]{2}$**; c)** $\sqrt[5]{17}$**; d)** $2^{\sqrt{2}}$**; e)** π^2**; f)** $\left(\sqrt{3}\right)^{1,2}$**; g)** ln**(12)**

a) Dato che 3 = 1 + 2, la formula $(1+x)^{\alpha}\approx\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}^k\cdot x^k,|x|<1$ non si può usare. Allora scriviamo $\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(1-\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$, adesso possiamo applicare la formula: $\sqrt{3}\approx\sum_{k=0}^{n}\binom{-1/2}{k}^k\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^k$ per n = 21, 22: 1,732; b) $\sqrt[3]{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}=\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}\Rightarrow\sqrt[3]{2}\approx\sum_{k=0}^{n}\binom{-1/3}{k}^k\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^k$, per n = 7, 8: 1,259;

c) $\sqrt[5]{17}=\left(\frac{1}{17}\right)^{-\frac{1}{5}}=\left(1-\frac{16}{17}\right)^{-\frac{1}{5}}\Rightarrow\sqrt[5]{17}\approx\sum_{k=0}^{n}\binom{-1/5}{k}^k\cdot\left(-\frac{16}{17}\right)^k$, per n = 91, 92: 1,762;

d) $2^{\sqrt{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{2}}=\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{2}}\Rightarrow2^{\sqrt{2}}\approx\sum_{k=0}^{n}\binom{-\sqrt{2}}{k}^k\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^k$, per n = 15, 16: 2,665;

e) $\pi^2=\left(\frac{1}{\pi}\right)^{-2}=\left(1-\frac{\pi-1}{\pi}\right)^{-\frac{1}{5}}\Rightarrow\pi^2\approx\sum_{k=0}^{n}\binom{-2}{k}^k\cdot\left(-\frac{\pi-1}{\pi}\right)^k$, per n = 31, 32: 9,869;

f) $\left(\sqrt{3}\right)^{1,2}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-1,2}=\left(1-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\right)^{-1,2}\Rightarrow\left(\sqrt{3}\right)^{1,2}\approx\sum_{k=0}^{n}\binom{-1,2}{k}^k\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\right)^k$, per n = 11, 12: 1,933;

g) $ln(12) = 4ln\left(\sqrt[4]{12}\right) = 4ln\left[1+\left(\sqrt[4]{12}-1\right)\right] \approx \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \cdot \frac{\left(\sqrt[4]{12}-1\right)^{k+1}}{k+1}$, per n = 41, 42: 2,484

Usando il polinomio di Mac Laurin calcolare i seguenti limiti.

84. **a)** $\lim_{x\to 0}\frac{sin(2x)}{3x}$; **b)** $\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x^2}$; **c)** $\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+4x)}{3x}$; **d)** $\lim_{x\to 0}\frac{tan^{-1}(x)}{2x}$; **e)** $\lim_{x\to 0}\frac{sin(x^2)}{ln(1+3x^2)}$

a) $\lim_{x\to 0}\frac{2x-\frac{8x^3}{3!}}{3x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{3}-\frac{4x^2}{9}\right) = \frac{2}{3}$; b) $\lim_{x\to 0^+}\frac{1+x+\frac{x^2}{2!}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{2!}\right) = +\infty$;

c) $\lim_{x\to 0}\frac{4x-\frac{16x^2}{2}}{3x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{4}{3}-\frac{8x}{3}\right) = \frac{4}{3}$; d) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3}}{2x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{6}\right) = \frac{1}{2}$;

e) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}}{3x^2-\frac{9x^4}{2}+\frac{27x^6}{3}} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$

85. **a)** $\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{tan^{-1}(2x)}$; **b)** $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{sin(3x^2)}$; **c)** $\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+\sqrt{x})}{tan^{-1}(1+\sqrt[3]{x})}$; **d)** $\lim_{x\to 1}\frac{tan^{-1}(1-x)}{e^x-e}$

a) $\lim_{x\to 0}\frac{1+3x+\frac{9x^2}{2!}-1}{2x-\frac{8x^3}{3}} = \lim_{x\to 0}\frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$; b) $\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2+\frac{x^4}{2!}-1}{3x^2-\frac{27x^6}{3!}} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$;

c) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}-\frac{x}{2}}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)-\frac{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3}{3}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}-\frac{1}{3}} = 0$;

d) $\lim_{x\to 1}\frac{tan^{-1}(1-x)}{e\cdot\left(e^{x-1}-1\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{(1-x)-\frac{(1-x)^3}{3}}{e\cdot\left(1+x-1+\frac{(x-1)^2}{2!}-1\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{(1-x)}{e\cdot(x-1)} = -\frac{1}{e}$

Determinare i polinomi p(x) di grado n tale che valga quanto detto. Suggerimento: scrivere il polinomio con coefficienti generici, quindi applicare le condizioni e risolvere il sistema ottenuto

86. **a)** $n = 2$; $p(0) = 1$, $p'(0) = 1$, $p''(0) = 1$; **b)** $n = 3$; $p(0) = 1$, $p'(0) = 1$, $p''(0) = 1$, $p'''(0) = 1$

a) $p(x) = ax^2 + bx + c$; $p'(x) = 2ax + b$; $p''(x) = 2a$; $\begin{cases} c = 1 \\ b = 1 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x^2/2 + x + 1$;

b) $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $p''(x) = 6ax + 2b$; $p'''(x) = 6a$; $\begin{cases} d = 1 \\ c = 1 \\ b = \frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow x^3/6 + x^2/2$

$+ x + 1$

87. $\boldsymbol{n = 3; p(0) = 0, p'(1) = 1, p''(-1) = 1, p'''(0) = 1}$

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d; \begin{cases} d = 0 \\ 3a + 2b + c = 1 \\ -6a + 2b = 1 \\ a = \dfrac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{6} \\ b = 1 \\ c = -\dfrac{3}{2} \\ d = 0 \end{cases} \Rightarrow x^3/6 + x^2 - 3x/2 + 1$$

88. $\boldsymbol{n = 4; p(0) = 1, p'(0) = 0, p''(0) = -1, p'''(0) = 0, p^{IV}(0) = 1}$

$p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$; $p'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$; $p''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$; $p'''(x) = 24ax$

$$+ 6b; p^{IV}(x) = 24a; \begin{cases} e = 1 \\ d = 0 \\ c = -\dfrac{1}{2} \\ b = 0 \\ a = \dfrac{1}{24} \end{cases} \Rightarrow x^4/24 - x^2/2 + 1$$

Determinare il grado di molteplicità degli zeri dati, rispetto ai polinomi P(x)

89. $\boldsymbol{x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1; x = 1}$

$p(1) = 0$; $p'(1) = 5 + 4 - 6 - 4 + 1 = 0$; $p''(x) = 20 + 12 - 12 - 4 \neq 0$ quindi 1 ha molteplicità 2

90. $\boldsymbol{x^6 - 3x^5 + 10x^3 - 15x^2 + 9x - 2, x = 1}$

$p(1) = 0$; $p'(1) = 6 - 15 + 30 - 30 + 9 = 0$; $p''(1) = 30 - 6\ 0 - 30 = 0$; $p'''(1) = 120 - 180 + 60 = 0$; $p^{IV}(1) = 360 - 360 = 0$; $p^{V}(1) = 720 - 360 \neq 0$ quindi 1 ha molteplicità 5

91. $\boldsymbol{x^7 - x^6 - 21x^5 + 5x^4 + 160x^3 + 72x^2 - 432x - 432, x = 3}$

$p(3) = 0$; $p'(3) = 0$; $p''(3) = 0$; $p'''(3) \neq 0$ quindi 3 ha molteplicità 3

92. $\boldsymbol{x^7 - x^6 - 21x^5 + 5x^4 + 160x^3 + 72x^2 - 432x - 432, x = -2}$

$p(-2) = 0$; $p'(-2) = 0$; $p''(-2) = 0$; $p'''(-2) = 0$; $p^{IV}(-2) \neq 0$ quindi -2 ha molteplicità 4

93. $\boldsymbol{x^6 + 10x^5 + 41x^4 + 88x^3 + 104x^2 + 64x + 16, x = -1}$

$p(-1) = 0$; $p'(-1) = 0$; $p''(-1) \neq 0$ quindi -1 ha molteplicità 2

94. **Correggere il seguente procedimenti errato:** $\boldsymbol{D(x^3) = D(x^2 + x^2 + ... + x^2)}$ **[x volte]** $\boldsymbol{\Rightarrow 3x^2 = 2x + 2x + ... + 2x \Rightarrow 3x^2 = 2x^2 \Rightarrow 3 = 2.}$

Ovviamente x non è un numero intero, quindi non ha senso dire che x^3 è x volte x^2.

$\mathcal{E} = mc^2$ L'angolo della MateFisica

1. Data la legge del moto uniformemente accelerato: $s(t) = s_0 + v_0 \cdot t + 1/2a \cdot t^2$, la relazione fra velocità e accelerazione.

   La velocità è la derivata dello spazio rispetto al tempo: $v(t) = v_0 + at$

2. L'equazione oraria del moto di un punto materiale è $s(t) = 4t^2 - 3t + 5$. a) Determinare la velocità istantanea del punto a $4s$. b) Dopo quanti secondi la velocità si annulla?

   a) Dal precedente: $v(t) = 8t - 3 \Rightarrow v(4) = (32 - 3)\ m/s = 29m/s$; b) $v(t) = 0 \Rightarrow 8t - 3 = 0 \Rightarrow t = 3/8\ s = 0{,}375\ s$

3. L'equazione oraria della velocità di un punto materiale è $v(t) = 1/3t^3 - 3t^2 + 8t - 1$. a) Determinare l'accelerazione istantanea del punto dopo $3s$. b) In quale intervallo temporale l'accelerazione è negativa?

   a) L'accelerazione è la derivata della velocità rispetto al tempo: $a(t) = t^2 - 6t + 8 \Rightarrow a(3) = (9 - 18 + 8)\ m/s^2 = -1m/s^2$; b) $a(t) < 0 \Rightarrow t^2 - 6t + 8 < 0 \Rightarrow 2s < t < 4s$

4. Una particella si muove nel piano seguendo le leggi orarie $\begin{cases} x(t) = 2t^3 - 3t \\ y(t) = 4 - 3t^2 \end{cases}$, determinare il modulo della sua velocità istantanea dopo 2 s. (Si ricorda che il modulo del vettore $(a; b)$ è $\sqrt{a^2 + b^2}$)

$$\begin{cases} x'(t) = 6t^2 - 3 \\ y'(t) = -6t \end{cases} \Rightarrow |v(t)| = \sqrt{(6t^2-3)^2 + (-6t)^2} \Rightarrow |v(2)| = \sqrt{(24-3)^2 + (-12)^2} = \sqrt{441+144} = 24m/s$$

5. Con riferimento al precedente quesito. a) Determinare il modulo dell'accelerazione istantanea dopo 2*s*. b) Ci sono istanti in cui l'accelerazione istantanea è nulla? Giustificare la risposta.

a) $\begin{cases} x''(t) = 12t \\ y''(t) = -6 \end{cases} \Rightarrow |a(t)| = \sqrt{144t^2 + 36} \Rightarrow |a(2)| = \sqrt{576+36} = 25m/s^2$; b) Il modulo non si annulla per nessun valore di *t*.

6. Provare che la forza è la derivata della quantità di moto ($p = m \cdot v$) rispetto al tempo.

$p'(t) = m \cdot v'(t) = m \cdot a\ (t) = F$

7. Provare che la potenza è derivata del lavoro rispetto al tempo. Determinare altresì la sua espressione per una forza costante che agisce lungo un angolo ω.

a) Per forze costanti: $P = [F \cdot s \cdot cos(\omega)]/t$, quindi per forze variabili: $P = d[F(t) \cdot s \cdot cos(\omega)]/dt = dW/dt$;
b) $P = d[F \cdot s(t) \cdot cos(\omega)]/dt = F \cdot v\ cos(\omega)$

8. La carica elettrica che attraversa la sezione di un conduttore è $q(t) = 1 - e^{3-t}$, determinare dopo quanti secondi nel conduttore passano 2 *A*.

Per correnti variabili nel tempo: $i(t) = dq/dt = e^{3-t} \Rightarrow i(t) = 2A \Rightarrow e^{3-t} = 2A \Rightarrow 3 - t = ln(2) \Rightarrow t = 2{,}3\ s$

9. Tenuto conto che la carica elettrica in un condensatore segue la legge: $Q(t) = C \cdot \Delta V \cdot \left[1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right]$, determinare la carica che attraversa le armature del condensatore.

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{d\left[C \cdot \Delta V \cdot \left[1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right]\right]}{dt} = \cancel{C} \cdot \Delta V \cdot \frac{e^{-\frac{t}{RC}}}{R\cancel{C}} = \frac{\Delta V}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

10. La legge del moto armonico semplice è $x(t) = r \cdot cos(\omega t + \phi)$. Determinare la legge della velocità e dell'accelerazione.

$x'(t) = d[r \cdot cos(\omega t + \phi)]/dt = -\omega r \cdot sin(\omega t + \phi)$; $x''(t) = d[-\omega r \cdot sin(\omega t + \phi)] = -\omega^2 r \cdot cos(\omega t + \phi)$

11. Un punto si muove di moto armonico seguendo la legge oraria del moto $x(t) = 1{,}35 \cdot cos(5{,}8t)$. Determinare la velocità e l'accelerazione dopo 4 *s*.

Dal precedente: $x'(t) = d[1{,}35 \cdot cos(5{,}8t)]/dt = -5{,}8 \cdot 1{,}35 \cdot sin(5{,}8t) \Rightarrow x'(4) = -5{,}8 \cdot 1{,}35 \cdot sin(5{,}8 \cdot 4) = 7{,}3\ m/s$; $x''(t) = d[-5{,}8 \cdot 1{,}35 \cdot sin(5{,}8t)] = -5{,}8^2 \cdot 1{,}35 \cdot cos(5{,}8t) \Rightarrow x''(4) = -5{,}8^2 \cdot 1{,}35 \cdot cos(5{,}8 \cdot 4)] = 16\ m/s^2$

12. Con riferimento al precedente problema, quando a) la velocità si annulla? b) l'accelerazione è positiva?

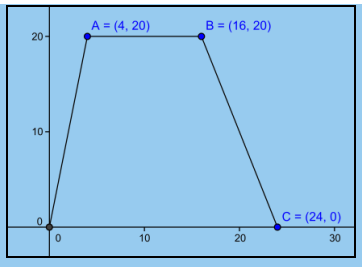
a) $x'(t) = 0 \Rightarrow -5{,}8 \cdot 1{,}35 \cdot sin(5{,}8t) = 0 \Rightarrow sin(5{,}8t) = 0 \Rightarrow 5{,}8t = k\pi \Rightarrow t = \frac{k\pi}{5{,}8}s = \frac{5k\pi}{29}s$;

b) $x''(t) > 0 \Rightarrow -5{,}8^2 \cdot 1{,}35 \cdot cos(5{,}8t) > 0 \Rightarrow cos(5{,}8t) < 0$

$$\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)s < 5{,}8t < \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)s \Rightarrow \left(\frac{\pi + 4k\pi}{2}\right)s < \frac{29}{5}t < \left(\frac{3\pi + 4k\pi}{2}\right)s \Rightarrow \frac{5\pi \cdot (4k+1)}{29}s < t < \frac{5\pi \cdot (4k+3)}{29}s; k \in \mathbb{N}_0$$

13. Fra le armature di un condensatore di capacita 12 *mF*, vi è una differenza di potenziale $V(t) = ln(t^3 + 2)$. Determinare la corrente di carica all'istante $t = 2{,}4\ s$.

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{d[C \cdot \Delta V]}{dt} = \frac{d\left[12 \cdot ln(t^3+2)\right]}{dt} = \frac{12 \cdot 3t^2}{t^3+2} = \frac{36t^2}{t^3+2} \Rightarrow I(2{,}4) = \frac{36 \cdot 2{,}4^2}{2{,}4^3+2}A = 13A$$

14. In figura 

abbiamo rappresentato la velocità di una macchina, in *m*/*s*, per 24 secondi. Tenuto conto che l'accelerazione è la derivata della velocità al variare del tempo, scrivi una

funzione per l'accelerazione.

Dalla figura l'accelerazione è derivata della velocità, pertanto è il coefficiente angolare delle rette che contengono i tre tratti di segmento, quindi: $a(t)=\begin{cases} 5 & 0<t<4 \\ 0 & 4<t<16 \\ -2,5 & 16<t<24 \end{cases}$

15. La funzione $f(t)=3+cos\left(\frac{t}{8}\right)+4\cdot sin\left(\frac{6}{35}t\right)$, serve a fornire un modello matematico per la velocità, in *Km* al minuto, di un piccolo aereo che vola in linea retta, al variare del tempo *t*. Secondo questo modello quanto vale l'accelerazione dell'aereo per *t* = 18 *min*?

$$a(t)=f'(t)=-\frac{1}{8}sin\left(\frac{t}{8}\right)+4\cdot\frac{6}{35}cos\left(\frac{6}{35}t\right)\Rightarrow a(18)=-\frac{1}{8}sin\left(\frac{18}{8}\right)+4\cdot\frac{6}{35}cos\left(\frac{6}{35}\cdot 18\right)=-0,78Km/min^2$$

16. Una particella si muove lungo l'asse *y*, in modo che la legge $v(t) = 1 - tan^{-1}(e^t)$ descriva la sua velocità. a) Determina l'accelerazione della particella dopo 2,0 secondi. b) In quell'istante la velocità aumenta o diminuisce?

$a(t)=\frac{-e^t}{1+e^{2t}}\Rightarrow a(2)=\frac{-e^2}{1+e^4}=-0,13m/s^2$, l'accelerazione è negativa, quindi la velocità sta diminuendo

17. Un punto materiale si muove nel piano seguendo la legge: $\begin{cases} x(t)=-0,12t^2+4,5t+14 \\ y(t)=0,34t^2-5,8t+18 \end{cases}$, determinare il modulo della sua a) velocità dopo t_1 = 5,2 *s*; b) accelerazione dopo t_2 = 1,3 *s*. c) Un dato non è necessario, quale?

a) $\begin{cases} x'(t)=-0,24t+4,5 \\ y'(t)=0,68t-5,8 \end{cases}\Rightarrow |v(t)|=\sqrt{(-0,24t+4,5)^2+(0,68t-5,8)^2}\Rightarrow |v(5,2)|=\sqrt{(-0,24t+4,5)^2+(0,68t-5,8)^2}=4,0m/s$

b) $\begin{cases} x''(t)=-0,24 \\ y''(t)=0,68 \end{cases}\Rightarrow |a(t)|=\sqrt{(-0,24)^2+(0,68)^2}=0,72m/s^2$

c) t_2 non è necessario perché l'accelerazione è costante

18. Un disco ruota attorno a un asse centrale in modo che la sua posizione angolare rispetti la legge: $\theta(t) = 0,32t^2 - 0,12t + 1,2$. a) Quanto vale la sua velocità angolare dopo *t* = 2,3 *s*? b) E la sua accelerazione angolare?

a) $\theta'(t) = 0,64t - 0,12 \Rightarrow \theta'(2,3) = 0,64 \cdot 2,3 - 0,12 = 1,4$ rad/*s*;

b) $\theta''(t) = 0,64$ rad/s^2

19. (Simulazione 28/02/19) Un punto materiale si muove di moto rettilineo, secondo la legge oraria espressa, per $t \geq 0$, da $x(t)=\frac{1}{9}\cdot t^2\cdot\left(\frac{1}{3}t+2\right)$, dove *x*(*t*) indica (in *m*) la posizione occupata dal punto all'istante *t* (in *s*). a) Si tratta di un moto uniformemente accelerato? b) Calcolare la velocità media nei primi 9 secondi di moto e determinare l'istante in cui il punto si muove a questa velocità.

a) No, l'accelerazione non è costante: $x'(t)=\frac{1}{9}\cdot t^2+\frac{4}{9}t\Rightarrow x''(t)=\frac{2}{9}\cdot t+\frac{4}{9}$

b) $v_m=\frac{x(9)-x(0)}{9}m/s=\frac{\frac{1}{9}\cdot 9^2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 9+2\right)-0}{9}m/s=\frac{45}{9}m/s=5m/s$;

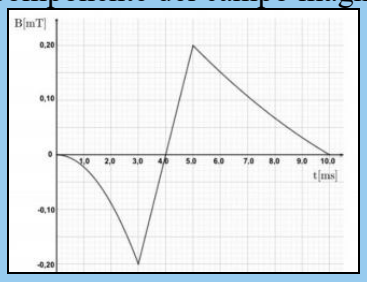
$x'(t)=5\Rightarrow\frac{1}{9}\cdot t^2+\frac{4}{9}t=5\Rightarrow t^2+4t-45=0\Rightarrow t=5s$

20. (Simulazione 28/02/19) Un campo magnetico, la cui intensità varia secondo la legge $B(t) = B_0 \cdot (2 + sin(\omega t)$, dove *t* indica il tempo, attraversa perpendicolarmente un circuito quadrato di lato ℓ. Detta *R* la resistenza presente nel circuito, determinare la forza elettromotrice e l'intensità di corrente indotte nel circuito all'istante *t*. Specificare le unità di misura di tutte le grandezze coinvolte.

Per la legge di Faraday-Neumann:

$$fem(t) = -\frac{d\phi_B(t)}{dt} = -\frac{dB(t)\cdot \ell^2}{dt} = -\frac{d\left[B_0\cdot\left[2+sin(\omega t)\right]\right]\cdot \ell^2}{dt} = -B_0\ell^2\omega\cdot cos(\omega t)$$

Inoltre: $i(t) = \frac{fem(t)}{R} = \frac{-B_0\ell^2\omega\cdot cos(\omega t)}{R}$

21. (Esame di stato 2018/19) Una spira di rame, di resistenza R = 4,0 mΩ, racchiude un'area di 30 cm^2 ed è immersa in un campo magnetico uniforme, le cui linee di forza sono perpendicolari alla superficie della spira. La componente del campo magnetico perpendicolare alla superficie varia nel tempo come indicato in figura. 

Spiegare la relazione esistente tra la variazione del campo che induce la corrente e il verso della corrente indotta. Calcolare la corrente media che passa nella spira durante i seguenti intervalli di tempo: a) da 0,0 *ms* a 3,0 *ms*; b) da 3,0 *ms* a 5,0 *ms*; c) da 5,0 *ms* a 10 *ms*.

Per la legge di Lenz il verso della corrente indotta si oppone alla variazione di flusso che l'ha generata.

Usando la legge di Faraday-Neumann abbiamo: $fem(t) = -\frac{\Delta\Phi(B)}{\Delta t}$ e per la I legge di Ohm: $fem = R\cdot i$.

Quindi $i = -\frac{\Delta\Phi(B)}{R\cdot\Delta t} = \frac{(B_i - B_f)\cdot S}{R\cdot\Delta t}$. Basta sostituire i dati per ottenere i risultati richiesti:

$$i_1 = \frac{(0T + 0,20\cdot 10^{-3}T)\cdot 30\cdot 10^{-4}m^2}{4,0\cdot 10^{-3}\Omega\cdot 3,0\cdot 10^{-3}s} = 0,050A; \qquad i_2 = \frac{(-0,20\cdot 10^{-3}T - 0,20\cdot 10^{-3}T)\cdot 30\cdot 10^{-4}m^2}{4,0\cdot 10^{-3}\Omega\cdot 2,0\cdot 10^{-3}s} = -0,15A;$$

$$i_3 = \frac{(0,20\cdot 10^{-3}T - 0T)\cdot 30\cdot 10^{-4}m^2}{4,0\cdot 10^{-3}\Omega\cdot 5,0\cdot 10^{-3}s} = 0,030A$$

La sfida

1. **Possiamo dire che se *f*(*x*) è una funzione continua in [*a*; *b*] tale che si abbia *f*(*x*₀) = 0, per *x*₀ ∈[*a*; *b*], allora |*f*(*x*)| non è derivabile in *x*₀? Giustificare la risposta.**

   Il limite destro è $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)}{x-x_0}$, che è una forma indeterminata 0/0. Supponiamo che questo limite sia finito e valga h, allora se $\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)}{x-x_0} = h$, la funzione è derivabile, ma ciò accade solo se $f(x)$ non cambia segno negli intorni sinistro e destro di x_0, per esempio per $f(x) = |x^2|$; diversamente non è derivabile, come $f(x) = |x|$.

2. **Osserviamo che *sin*(*x*) è una funzione dispari e la sua derivata, *cos*(*x*) è una funzione pari. Analogamente la derivata della funzione pari *cos*(*x*) è la funzione dispari – *sin*(*x*). Possiamo dire che è sempre vero che la derivata di una funzione pari è dispari e viceversa? Giustificare la risposta.**

   Sì. Sia $f(x) = f(-x)$, allora $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x); \lim_{h\to 0}\frac{f(-x+h)-f(-x)}{h} = f'(-x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h} = -f'(x)$. Analogamente se $f(x)$ fosse dispari.

3. **Sempre con riferimento all'esercizio precedente sia *sin*(*x*) che *cos*(*x*) sono funzioni periodiche. Possiamo dire che la derivata di una funzione periodica e derivabile è ancora periodica? E il periodo della derivata è lo stesso della funzione? Giustificare la risposta.**

Sì. Sia $f(x) = f(x + P)$, allora $f'(x+P) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+P+h)-f(x+P)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$

4. Sia f una funzione che verifica le proprietà: $f(1) = 3$, $f(3) = 1$, $f'(1) = -4$ e $f'(3) = 2$. Determinare la pendenza della retta tangente alla funzione $g(x) = \frac{1}{f^{-1}(x)}$, per $x = 1$.

Dobbiamo determinare $g'(1) = \frac{-D\left[f^{-1}(1)\right]}{\left[f^{-1}(1)\right]^2} = \frac{-D\left[f^{-1}(1)\right]}{3^2}$. Dal teorema sulla derivabilità delle funzioni inverse sappiamo che: $D\left[f^{-1}(y)\right] = \frac{1}{D\left[f(x)\right]} \Rightarrow D\left[f^{-1}(1)\right] = \frac{1}{D\left[f(3)\right]} = \frac{1}{2}$, quindi $g'(1) = \frac{-1/2}{9} = -\frac{1}{18}$

5. Calcolare la derivata ennesima di $x^3 \cdot e^x$.

$f(x) = e^x x^3$; $f'(x) = e^x(x^3 + 3x^2)$; $f''(x) = e^x(x^3 + 3x^2 + 3x^2 + 6x) = e^x(x^3 + 6x^2 + 6x)$; $f'''(x) = e^x(x^3 + 6x^2 + 6x + 3x^2 + 12x + 6) = e^x(x^3 + 9x^2 + 18x + 6)$; $f^{IV}(x) = e^x(x^3 + 9x^2 + 18x + 6 + 3x^2 + 18x + 18) = e^x(x^3 + 15x^2 + 36x + 24)$. Osserviamo che il risultato è del tipo $e^x(x^3 + ax^2 + bx + c)$, in cui $a = 3n$ (n è l'ordine di derivazione), mentre $b = 6 + 12 + 18 + \ldots + 3(n - 1) = 6[1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1)] = 3(n - 1)\cdot n$, del resto per $n = 1$ questo coefficiente deve essere 0. Ragionando allo stesso modo, il termine noto non è presente per $n = 1$ e 2, quindi deve essere prodotto di $(n - 1)$ e $(n - 2)$ e qualcos'altro, che facilmente si vede essere n. Infatti per $n = 3$: $3\cdot 2\cdot 1 = 6$, $n = 4$: $4\cdot 3\cdot 2 = 24$, …. Quindi $f^n(x) = e^x \cdot [x^3 + 3n \cdot x^2 + 3n \cdot (n - 1) \cdot x + n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2)]$. Possiamo anche dimostrare la validità della regola usando il principio di induzione.

$n = 1$: $f'(x) = e^x \cdot [x^3 + 3x^2 + 3 \cdot 2 \cdot x + 1 \cdot 0 \cdot (-1)] = e^x(x^3 + 3x^2)$. Ok. Ora supponiamo che sia vero che: $f^n(x) = e^x \cdot [x^3 + 3n \cdot x^2 + 3n \cdot (n - 1) \cdot x + n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2)]$ e proviamo che $f^{n+1}(x) = e^x \cdot [x^3 + 3(n + 1) \cdot x^2 + 3(n + 1) \cdot n \cdot x + (n + 1) \cdot n \cdot (n - 1)]$. Si ha: $f^{n+1}(x) = e^x \cdot [x^3 + 3n \cdot x^2 + 3n \cdot (n - 1) \cdot x + n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) + 3x^2 + 6n \cdot x + 3n \cdot (n - 1)] = e^x \cdot [x^3 + 3(n + 1) \cdot x^2 + 3(n + 1) \cdot n \cdot x + (n + 1) \cdot n \cdot (n - 1)]$. Ok

6. Calcolare la derivata ennesima di $x^2 \cdot sin(x)$.

$f(x) = x^2 \cdot sin(x)$; $f'(x) = 2x \cdot sin(x) + x^2 \cdot cos(x)$; $f''(x) = 2sin(x) + 2x \cdot cos(x) + 2x \cdot cos(x) - x^2 \cdot sin(x) = (2 - x^2) \cdot sin(x) + 4x \cdot cos(x)$; $f'''(x) = -2x \cdot sin(x) + (2 - x^2) \cdot cos(x) + 4cos(x) - 4x \cdot sin(x) = -6x \cdot sin(x) + (6 - x^2) \cdot cos(x)$; $f^{IV}(x) = -6sin(x) - 6x \cdot cos(x) - 2x \cdot cos(x) - (6 - x^2) \cdot sin(x) = -(12 - x^2) \cdot sin(x) - 8x \cdot cos(x)$. A questo punto pensiamo di avere trovato la regola che per convenienza dividiamo nei due casi n pari ed n dispari.

$$D^n\left[x^2 \cdot sin(x)\right] = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}+1} \cdot \left\{\left(n^2 - n - x^2\right) \cdot sin(x) + 2n \cdot x \cdot cos(x)\right\} & n\ pari \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left\{\left(x^2 - n^2 + n\right) \cdot cos(x) + 2n \cdot x \cdot sin(x)\right\} & n\ dispari \end{cases}$$

7. Calcolare la derivata ennesima del prodotto di due funzioni derivabili fino all'ordine n. Trovi somiglianza con qualche altra espressione matematica?

$D(f \cdot g) = f' \cdot g + f \cdot g'$; $D^2(f \cdot g) = f'' \cdot g + 2f' \cdot g' + f''g$; $D^3(f \cdot g) = f''' \cdot g + 3f'' \cdot g' + 3f'g'' + g'''$;...

facilmente si prova, per esempio per induzione, che si ha: $D^n(f \cdot g) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} D^{n-k}(f) \cdot D^k(g)$, che ricorda lo sviluppo del binomio di Newton, sostituendo l'ordine di derivazione con la potenza.

8. A una classe di funzioni continue e derivabili dappertutto non è possibile applicare il Teorema di Rolle in nessun intervallo, dire quali sono e motivare la risposta.

Le Funzioni iniettive perché per esse non accade mai $f(a) = f(b)$

9. Per quali polinomi il Teorema della media di Lagrange ha come valore medio il punto medio dell'intervallo $(a; b)$?

$$f(x)=mx^2+px+q \Rightarrow f'(x)=2mx+p;$$

Per polinomi di II grado. Infatti: $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{(b^2-a^2)m+(b-a)p}{b-a}=(a+b)m+p \Rightarrow$

$$2mx+p=(a+b)m+p \Rightarrow x=\frac{(a+b)m}{2m}=\frac{a+b}{2}$$

10. Per quali polinomi il Teorema di Cauchy ha come valore medio il punto medio dell'intervallo (*a*; *b*)?

Uno almeno dei due polinomio di II grado, l'altro polinomio al massimo di II grado. Infatti:

$$f(x)=mx^2+px+q \Rightarrow f'(x)=2mx+p; g(x)=zx^2+tx+w \Rightarrow g'(x)=2zx+t;$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{(b^2-a^2)m+(b-a)p}{(b^2-a^2)z+(b-a)t}=\frac{(a+b)m+p}{(a+b)z+t} \Rightarrow$$

$$\frac{2mx+p}{2zx+t}=\frac{(a+b)m+p}{(a+b)z+t} \Rightarrow x=\frac{a+b}{2}$$

$$f(x)=mx^2+px+q \Rightarrow f'(x)=2mx+p; g(x)=zx+t \Rightarrow g'(x)=z;$$

Oppure $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{(b^2-a^2)m+(b-a)p}{(b-a)z}=\dfrac{(a+b)m+p}{z} \Rightarrow$

$$\frac{2mx+p}{z}=\frac{(a+b)m+p}{z} \Rightarrow x=\frac{a+b}{2}$$

Mentre

$$f(x)=mx^2+px+q \Rightarrow f'(x)=2mx+p; g(x)=zx^3+tx^2+wx+j \Rightarrow g'(x)=3zx^2+2tx+w;$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{(b^2-a^2)m+(b-a)p}{(b^3-a^3)z+(b^2-a^2)t+(b-a)w}=\frac{(a+b)m+p}{(a^2+b^2+ab)(a+b)t+w} \Rightarrow$$

$$\frac{2mx+p}{3zx^2+2tx+w}=\frac{(a+b)m+p}{(a^2+b^2+ab)(a+b)t+w} \Rightarrow x \neq \frac{a+b}{2}$$

Temi assegnati agli esami di stato

1. (Liceo scientifico 1992/93) Sia $f(x)=\begin{cases}-3x^2+Hx & x\le 1\\ \dfrac{K}{x^2} & x>1\end{cases}$. Determinare le costanti *H* e *K* in modo che la funzione *y* = *f*(*x*) e la sua derivata siano continue in *x* = 1.

La discontinuità e non derivabilità ovviamente può aversi solo in $x = 1$, quindi deve essere:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-}(-3x^2+Hx)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{K}{x^2}\right)\\ \lim\limits_{x\to 1^-}(-6x+H)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(-\dfrac{2K}{x^3}\right)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-3+H=K\\ -6+H=-2K\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}H=K+3\\ -6+K+3+2K=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}H=4\\ K=1\end{cases}$$

2. (Liceo Scientifico 2000/01) Si consideri la funzione $\dfrac{x+\sin x}{x-\cos x}$. Stabilire se si può calcolarne il limite per *x*→ +∞ e spiegare se il calcolo può essere effettuato ricorrendo al Teorema di de L'Hôpital.

Il limite vale 1, perché ovviamente le funzioni goniometriche essendo limitate al tendere di *x*

all'infinito si tralasciano e quindi il limite equivale a $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$; Non possiamo applicare il teorema perché non esiste il limite del rapporto delle derivate: $\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\cos x}{1+\sin x}$

3. **(Liceo Scientifico 2001/02) In un piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali (*Oxy*), è assegnata la curva *k* di equazione *y* = *f*(*x*), dove è: $f\ x\ =\frac{x^2+2}{x^3+2}$. a) Determinare per quali valori di *x* essa è situata nel semipiano *y* > 0 e per quali nel semipiano *y* < 0. b) Trovare l'equazione della parabola passante per l'origine *O* degli assi e avente l'asse di simmetria parallelo all'asse *y*, sapendo che essa incide ortogonalmente la curva *k* nel punto di ascissa –1. (*N.B. : si dice che una curva incide ortogonalmente un'altra in un punto se le rette tangenti le due curve in quel punto sono perpendicolari*). c) Stabilire se la retta tangente alla curva *k* nel punto di ascissa –1 ha in comune con *k* altri punti oltre a quello di tangenza. d) Determinare per quanti punti la curva *k* ha per tangente una retta parallela all'asse *x*. e) Enunciare il Teorema di Lagrange e dire se sono soddisfatte le condizioni perché esso si possa applicare alla funzione *f*(*x*) assegnata, relativamente all'intervallo $-\sqrt{2}\le x\le 0$.**

a) $\frac{x^2+2}{x^3+2}>0\Rightarrow x^3+2>0\Rightarrow x>-\sqrt[3]{2}$

b) Determiniamo $f'\ x\ =-\frac{x^4+6x^2-4x}{x^3+2\ ^2}\Rightarrow f'\ -1\ =-\frac{1+6+4}{-1+2\ ^2}=-11$. La parabola ha equazione $y = ax^2 + bx$, inoltre $y'(x) = 2ax + b \Rightarrow y'(-1) = -2a + b \Rightarrow -2a + b = 1/11$, inoltre la parabola passa per (–1; 3), quindi: $a - b = 3$. Risolvendo il sistema: $y=-\frac{34}{11}x^2-\frac{67}{11}x$.

c) L'equazione della tangente è $y - 3 = -11(x + 1)$. Intersecando con *k* si vede che non vi sono altre soluzioni.

d) Deve essere $\frac{x^4+6x^2-4x}{x^3+2\ ^2}=0\Rightarrow x^4+6x^2-4x=0\Rightarrow x^2=-3\pm\sqrt{9+4}\Rightarrow x=\pm\sqrt{-3+\sqrt{13}}$, quindi 2.

e) La funzione non è continua in $x=-\sqrt[3]{2}\in\ -\sqrt{2};0$, quindi il teorema di Lagrange non può applicarsi

4. **(Liceo Scientifico 2001/02) La funzione reale di variabile reale *f*(*x*) è continua nell'intervallo chiuso e limitato [1; 3] e derivabile nell'intervallo aperto (1; 3). Si sa che *f*(1) = 1 e inoltre 0 ≤ *f* '(*x*) ≤ 2 per ogni *x* dell'intervallo (1; 3). Spiegare in maniera esauriente perché risulta 1 ≤ *f* (3) ≤ 5. (*Suggerimento* Usare il Teorema di Lagrange)**

Possiamo applicare il T. di Lagrange, quindi ∃ c ∈ (1; 3): $f'(c)=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{f(3)-1}{2}$, ma sappiamo che $0\le f'(x)\le 2$ per ogni x dell'intervallo (1; 3), quindi:

$$0\le\frac{f(3)-1}{2}\le 2\Rightarrow 0\le f(3)-1\le 4\Rightarrow 1\le f(3)\le 5$$

5. **(Liceo Scientifico PNI 2001/02) Utilizzando il Teorema di Rolle, si verifichi che il polinomio $x^n + px + q$, $p, q \in \mathbb{R}$, se *n* è pari ha al più due radici reali, se *n* è dispari ha al più tre radici reali.**

I polinomi sono funzioni continue e derivabili in tutti i reali. Se *n* è pari. In tal caso la derivata prima è un polinomio di grado n − 1 dispari: $nx^{n-1}+p$ che risulta non negativa per $x\ge\sqrt[n-1]{-\frac{p}{n}}$, quindi per un corollario del teorema di Lagrange è crescente per $x>\sqrt[n-1]{-\frac{p}{n}}$.

Se $P\left(\sqrt[n-1]{-\frac{p}{n}}\right)<0 \Rightarrow \exists x_1, x_2 : x_1 < \sqrt[n-1]{-\frac{p}{n}} < x_2, P(x_1)=P(x_2)=0$, se $P\left(\sqrt[n-1]{-\frac{p}{n}}\right)>0$, invece non vi sono soluzioni reali. Se n è dispari $\sqrt[n-1]{-\frac{p}{n}}$ sarà reale solo se $p \cdot n < 0$ e in questo caso la derivata prima è positiva per $x \le -\sqrt[n-1]{-\frac{p}{n}} \vee x \ge \sqrt[n-1]{-\frac{p}{n}}$, quindi in $x = \pm\sqrt[n-1]{-\frac{p}{n}}$, vi sono un massimo e un minimo, perciò se il massimo ha ordinata positiva e il minino negativa vi sono 3 intersezioni con l'asse x, diversamente ve ne sono di meno.

6. **(Liceo Scientifico PNI 2001/02) Verificare che la funzione $3x + ln(x)$ è strettamente crescente. Detta g la funzione inversa, calcolare $g'(3)$.**
D$[3x + ln(x)] = 3 + 1/x > 0$ per $x > 0$ che coincide con il dominio della funzione. Perciò la funzione è invertibile e si ha: $g'(y)=\frac{1}{3+1/x} \Rightarrow g'(3)=\frac{1}{3+1}=\frac{1}{4}$, la scelta $x = 1$, discende dal fatto che la soluzione dell'equazione $3x + ln(x) = 3$ è appunto $x = 1$
7. **(Liceo Scientifico PNI 2002/03) Dare un esempio di polinomio $P(x)$ il cui grafico tagli la retta $y = 2$ quattro volte.**
Basta prendere un polinomio che si annulla 4 volte e aggiungervi 2: $(x - a) \cdot (x - b) \cdot (x - c) \cdot (x - d) + 2$, a; b, c, d reali distinti
8. **(Liceo Scientifico PNI 2002/03) Dimostrare, usando il Teorema di Rolle, che se l'equazione: $x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + + a_0 = 0$, ammette radici reali, allora fra due di esse giace almeno una radice dell'equazione: $n \cdot x^{n-1} + (n - 1) \cdot a_{n-1} \cdot x^{n-2} + \ldots + a_1 = 0$.**
Ogni polinomio è continua e derivabile nei reali. Inoltre, dato che stiamo supponendo che esistono almeno due numeri $x_1 < x_2$ per cui $P(x_1) = P(x_2) = 0$, possiamo applicare Rolle e concludere che $\exists\, c \in (x_1 ; x_2) : P'(c) = 0$. Il che equivale a quanto richiesto.
9. **(Liceo Scientifico PNI 2002/03) Si vuole che l'equazione $x^3 + bx - 7 = 0$ abbia tre radici reali. Quale è un possibile valore di b?**
Da quanto detto nel quesito 5, la derivata prima deve annullarsi due volte: $3x^2 + b = 0$, quindi deve essere $b < 0$, e i due valori ottenuti sostituiti nella funzione devono dare valori di segno opposto, positivo il minore e negativo l'altro. Quindi
$$-\sqrt{\left(\frac{-b}{3}\right)^3} - b\sqrt{\frac{-b}{3}} - 7 > 0 \Rightarrow -\frac{b}{3}\sqrt{\frac{-b}{3}} - b\sqrt{\frac{-b}{3}} - 7 > 0 \Rightarrow -\frac{2b}{3}\sqrt{\frac{-b}{3}} > 7 \Rightarrow b < -3 \cdot \sqrt[3]{\frac{49}{4}}$$
10. **(Liceo Scientifico PNI 2002/03) Verificare che l'equazione $x^3 - 3x + 1 = 0$ ammette tre radici reali. Di una di esse, quella compresa tra 0 e 1, se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.**
Possiamo applicare il teorema di esistenza degli zeri, e ci viene suggerito di considerare intanto (0; 1): e si ha $f(0) = 1 > 0$ e $f(1) = -1 < 0$, quindi una soluzione si trova in (0; 1). Inoltre si ha: $\lim_{x\to-\infty}\left(x^3-3x+1\right)=-\infty$, $\lim_{x\to+\infty}\left(x^3-3x+1\right)=+\infty$, perciò vi sono due altre soluzioni per $x < 0$ e $x > 1$. Per determinare una soluzione approssimata possiamo usare il metodo di bisezione. $f(0.5) = 1 - 0{,}375 < 0$, quindi la soluzione appartiene a (0; 0,5). Proviamo $f(0{,}3) = 0{,}127 > 0$, siamo quindi in (0,3; 0,5). Continuando in questo modo, eventualmente non usando per forza il punto medio degli intervalli, troveremo $\approx 0{,}347$
11. **(Liceo Scientifico 2002/03) La funzione $2x^3 - 3x^2 + 2$ ha un solo zero reale, vale a dire che il suo grafico interseca una sola volta l'asse delle ascisse. Fornire un'esauriente dimostrazione di questo fatto e stabilire se lo zero della funzione è positivo o negativo.**
Ogni polinomio di grado dispari ha almeno uno zero reale, inoltre, poiché $D(2x^3 - 3x^2 + 2) = 6x^2 - 6x$, che si annulla per $x = 0$ e $x = 1$, ammette per questi valori rispettivamente un massimo e un minimo relativi. Inoltre $y(0) = 2$ e $y(1) = 1$, quindi la funzione viene da $-\infty$ $\left[\lim_{x\to-\infty}\left(2x^3-3x^2+2\right)=-\infty\right]$, taglia l'asse x in un valore negativo, assume il massimo per $x = 0$, cambio verso di crescenza, raggiunge

l'ordinata 1 e poi riprende a crescere, quindi non incontra più l'asse x.

12. (Liceo Scientifico 2002/03) È assegnata la funzione $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+m+|m|}$, dove m è un parametro reale. a) Determinare il suo dominio di derivabilità. b) Calcolare per quale valore di m la funzione ammette una derivata che risulti nulla per $x = 1$.

a) La funzione è definita per $x^2 + m + |m| \neq 0$, che per $m > 0$, significa tutti i reali, mentre per $m < 0$ diventa $x \neq 0$. Per la derivabilità abbiamo: $f'(x)=\dfrac{2\left(|m|+m-x^2-x\right)}{\left(x^2+m+|m|\right)}, x\neq 0, m\neq 0$;

b) $f'(1)=0 \Rightarrow 2\left(|m|+m-2\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} -2=0 & m<0 \\ 2m-2=0 \Rightarrow m=1 & m>0 \end{cases}$.

13. (Liceo Scientifico 2003/04) Verificate che le due funzioni $f(x) = 3ln(x)$ e $g(x) = ln(2x)^3$ hanno la stessa derivata. Quale giustificazione ne date?

$g'(x) = 3ln(2x); f'(x) = 3/x = g'(x)$. Per un corollario al Teorema di Lagrange differiscono per una costante

14. (Liceo scientifico 2004/05) Si consideri la funzione $f(x)=\begin{cases} 1 & se\, x=0 \\ \frac{1}{2}x^2\left[3-2log\left(x\right)\right]+1 & se\, x>0 \end{cases}$ definita sull'intervallo [0; + ∞[. Si dimostri che l'equazione $f(x) = 0$ ha, su [0, +∞) un'unica radice reale.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left\{\frac{1}{2}x^2\left[3-2log\left(x\right)\right]+1\right\}=-\infty$, quindi la curva incontra almeno una volta l'asse delle ascisse. Inoltre: $D\left\{\frac{1}{2}x^2\left[3-2log\left(x\right)\right]+1\right\}=2x\left[1-ln\left(x\right)\right]$, che si annulla per $x = e$. Quindi la funzione cresce in (0; e), poi decresce. Poiché $f(e) = e^2/2 + 1 > 0$, questo ci basta per concludere che vi è una sola intersezione con l'asse x.

15. (Liceo scientifico PNI 2006/07) Si dimostri che l'equazione $2x^3 – 3x^2 + 6x + 6 = 0$ ha un'unica radice reale e si trovi il valore con una precisione di due cifre significative.

$D(2x^3 – 3x^2 + 6x + 6) = 6x^2 – 6x + 6$, che non si annulla mai perché $\Delta = 1 – 1 < 0$. Quindi la derivata è sempre positiva e la funzione sempre crescente, essendo un polinomio di terzo grado ha almeno uno zero, quindi ne ha esattamente uno. Dato che $f(–1) < 0$ e $f(0) > 0$, la soluzione appartiene a (–1; 0), utilizzando il metodo di bisezione troviamo –0,69

16. (Liceo Scientifico 2004/05) Si dimostri che la curva $y = x \cdot sin(x)$ è tangente alla retta $y = x$ quando $sin(x) = 1$ ed è tangente alla retta $y = –x$ quando $sin(x) = –1$.

Si ha: $y' = sin(x) + x \cdot cos(x)$ e se $sin(x) = 1 \Rightarrow cos(x) = 0$ e perciò $y' = 1$, che è il coefficiente angolare di $y = x$. Allo stesso modo se $sin(x) = –1 \Rightarrow cos(x) = 0$ e perciò $y' = –1$, che è il coefficiente angolare di $y = –x$.

17. (Liceo Scientifico 2004/05) Se $f(x) = x^4 – 4x^3 + 4x^2 + 3$ per quanti numeri reali k è $f(k) = 2$? Si illustri il ragionamento seguito.

Dobbiamo risolvere l'equazione $k^4 – 4k^3 + 4k^2 + 3 = 2 \Rightarrow k^4 – 4k^3 + 4k^2 = –1 \Rightarrow k^2 \cdot (k^2 – 4k + 4) = –1 \Rightarrow k^2 \cdot (k – 2)^2 = –1$, che è evidentemente impossibile.

18. (Liceo Scientifico PNI 2004/05) Si trovi l'equazione della retta tangente alla curva di equazioni parametriche $x = e^t + 2$ e $y = e^{–t} + 3$ nel suo punto di coordinate (3; 4).

Possiamo scrivere: $e^t = x – 2$, da cui $y=\dfrac{1}{x-2}+3 \Rightarrow y'=\dfrac{-1}{\left(x-2\right)^2}$, l'equazione cercata è perciò: $y – 4 = –1(x – 3) \Rightarrow x + y – 7 = 0$

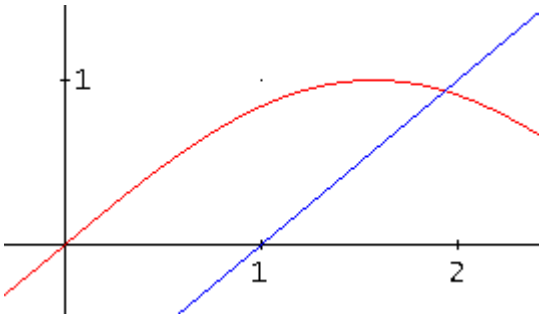
19. (Liceo Scientifico 2005/06) La funzione $f(x) = x^3 – 2x^2$ soddisfa le condizioni del Teorema di Lagrange nell'intervallo [0; 1]? Se si, trova il punto che compare nella formula.

Tutti i polinomi verificano il teorema in qualsiasi intervallo.

$f'\left(x\right)=\dfrac{-1-0}{1-0} \Rightarrow 3x^2-4x=-1 \Rightarrow x=\dfrac{1}{3}\in\left(0;1\right) \vee x=1\notin\left(0;1\right)$

20. (Liceo Scientifico PNI 2005/06) Si dimostri che l'equazione *sin*(*x*) = *x* – 1 ha una e una sola radice α e, utilizzando una calcolatrice tascabile, se ne dia una stima. Si descriva altresì una procedura di calcolo che consenta di approssimare α con la precisione voluta.

Ecco la rappresentazione grafica



Usando il procedimento di approssimazione: $f(1) > 0$, $f(2) < 0$. Per il teorema di esistenza degli zeri abbiamo almeno uno zero in (1; 2). Calcolando la derivata della funzione $f(x) = sen(x) - x + 1$, otteniamo $cos(x) - 1$, che si annulla per $x = 2k\pi$, mentre per il resto è sempre negativa, quindi abbiamo solo uno zero, che abbiamo detto essere compreso tra 1 e 2. Troviamone un'approssimazione con il metodo di bisezione. $f(1{,}5) > 0$. La soluzione è in]1.5, 2[.$f(1{,}75) > 0$. La soluzione è in]1.75, 2[. Andando avanti in questo modo otteniamo che la soluzione alla prima cifra decimale è 1.9.

21. (Liceo Scientifico 2006/07) Si mostri che la funzione $y = x^3 + 8$ soddisfa le condizioni del Teorema del valor medio (o Teorema di Lagrange) sull'intervallo [–2; 2]. Si determinino i valori medi forniti dal teorema e se ne illustri il significato geometrico.

Le condizioni sono semplicemente quelli di continuità e derivabilità, che per un polinomio sono verificati addirittura in tutti i reali. Applichiamo il teorema. $3x^2 = \frac{16-0}{2+2} \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}} \in (-2;2)$. Il valore medio è 4

22. (Liceo Scientifico suppletiva 2006/07) Sia la funzione: $f(x) = \begin{cases} x \cdot tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$. Si dica se essa è continua e derivabile nel punto di ascissa 0.

Continua: $\lim_{x\to 0}\left[x \cdot tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 0$, ma non derivabile:

$$\lim_{x\to 0^-}\left[tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{x}{1+x^2}\right] = -\frac{\pi}{2}, \lim_{x\to 0^+}\left[tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{x}{1+x^2}\right] = \frac{\pi}{2}$$

23. (Liceo Scientifico PNI 2007/08) Si esponga la regola del marchese de L'Hôpital (1661 – 1704) e la si applichi per dimostrare che $\lim_{x\to\infty}\frac{x^{2008}}{2^x} = 0$.

La regola è applicabile a forme indeterminate del tipo $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$, per rapporti di funzioni continue e derivabili, per le quali esiste il limite del rapporto delle derivate. Tutte le ipotesi sono valide. Abbiamo allora: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^{2008}}{2^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2008 \cdot x^{2007}}{2^x \cdot \ln(2)}$. Il limite ottenuto è ancora forma indeterminata a cui è applicabile la regola. La applicheremo altre 2007 volte, ottenendo: $\lim_{x\to\infty}\frac{2008!}{2^x \cdot (\ln 2)^{2008}} = 0$.

24. (Liceo scientifico PNI 2007/08) Sia *f* la funzione definita da $f(x) = \pi^x - x^\pi$. Si precisi il dominio di *f* e si stabilisca il segno delle sue derivate, prima e seconda, nel punto $x = \pi$.

La funzione è definita in tutti i reali positivi. Poi si ha:

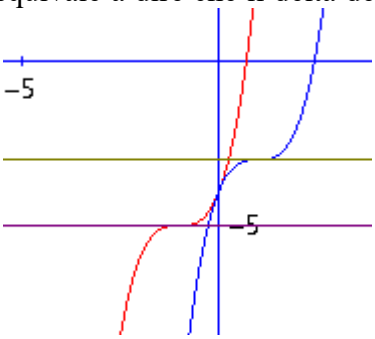
$f'(x) = \pi^x \cdot \ln(\pi) - \pi \cdot x^{\pi-1}$; $f''(x) = \pi^x \cdot \ln^2(\pi) - \pi \cdot (\pi - 1) \cdot x^{\pi-2}$. Inoltre:

$f'(\pi) = \pi^\pi \cdot \ln(\pi) - \pi \cdot \pi^{\pi-1} = \pi^\pi \cdot [\ln(\pi) - 1] > 0$;

$$f''(\pi) = \pi^\pi \cdot \ln^2(\pi) - \pi \cdot (\pi - 1) \cdot \pi^{\pi-2} = \pi^\pi \cdot \left[\ln^2(\pi) - 1 + \frac{1}{\pi}\right] > 0$$

25. (Liceo Scientifico 2008/09) Per quale o quali valori di *k* la curva d'equazione $y = x^3 + kx^2 + 3x - 4$ ha una sola tangente orizzontale?

Determiniamo la derivata prima $y' = 3x^2 + 2kx + 3$. Vi è una sola tangente se la derivata ha una sola soluzione, che equivale a dire che il delta dell'espressione sia nullo: $k^2 - 9 = 0 \Rightarrow k = \pm 3$. Verifichiamo graficamente



26. (Liceo scientifico 2008/09) Si provi che l'equazione: $x^{2009} + 2009x + 1 = 0$ ha una sola radice compresa fra –1 e 0.

Ogni equazione algebrica di grado dispari ha almeno una soluzione reale. Applicando il teorema di esistenza degli zeri nell'intervallo indicato, abbiamo che tale soluzione si trova in esso; $f(-1) < 0$, $f(0) > 0$. Calcoliamo la derivata prima: $2009x^{2008} + 2009 > 0$ per ogni x, quindi la funzione è sempre crescente. In conclusione la soluzione è anche unica.

27. (Liceo scientifico 2010/11) Si provi che l'equazione $x^{2011} + 2011x + 12 = 0$ ha una sola radice compresa tra –1 e 0.

Come il precedente. Basta osservare $(-1)^{2011} + 2011 \cdot (-1) + 12 = -2000 < 0, 0^{2011} + 2011 \cdot 0 + 12 = 12 > 0$, per sostenere l'esistenza di una radice. Per l'unicità basta osservare che la derivata prima è sempre positiva: $2011x^{2010} + 2011$.

28. (Liceo scientifico PNI 2010/11) Sia $f(x) = x + ln(4) + \frac{2}{e^x + 1}$. Si provi che, per tutti i reali *m*, l'equazione $f(x) = m$ ammette una e una sola soluzione in $\mathbb{R}$. Sia α soluzione dell'equazione $f(x) = 3$; per quale *m*, $(-\alpha)$ è soluzione dell'equazione $f(x) = m$?

Essendo la funzione ovviamente continua, il fatto che i due limiti per x che tende a $\pm\infty$, valgono $\pm\infty$, ci permettono di potere applicare il teorema di esistenza degli zeri in un conveniente intervallo chiuso anche alla funzione $y = f(x) - m$, che quindi ha sempre almeno uno zero. Per provare che tale zero è unico basta calcolare la derivata prima: $f'(x) = 1 - \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} + 1}{(e^x + 1)^2}$ che è ovviamente sempre positiva, quindi la funzione è crescente, perciò lo zero è unico. Sia $f(\alpha) = 3$, per quanto visto si ha:

$$f(\alpha) + f(-\alpha) = 2 \cdot [1 + ln(4)] \Rightarrow f(-\alpha) = 2 \cdot [1 + ln(4)] - f(\alpha) = 2 \cdot [1 + ln(4)] - 3 = 2 \cdot ln(4) - 1$$

29. (Liceo Scientifico 2010/11) Si calcoli $\lim_{x \to a} \frac{tan(x) - tan(a)}{x - a}$.

Con il teorema di De L'Hopital, che può certamente applicarsi, avremo $\lim_{x \to a} \frac{1}{cos^2(x)} = \frac{1}{cos^2(a)}$. Oppure potevamo usare il limite notevole $\lim_{x \to a} \frac{tan(x - a)}{x - a} = 1$. Infatti mediante la formula di sottrazione ab-

biamo: $\lim_{x\to a}\frac{tan(x)-tan(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{tan(x-a)}{x-a}\cdot\left[1+tan(x)\cdot tan(a)\right]=\lim_{x\to a}\left[1+tan(x)\cdot tan(a)\right]=1+tan^2(a)$. Il risultato coincide con il precedente, mediante un'identità ben nota.

30. (Liceo Scientifico 2011/12) Si scrivano le equazioni delle rette *r* e *s* tangenti, rispettivamente, alle funzioni $f(x) = |27x^3|$ e $g(x) = sin(3\pi x/2)$ nel punto di ascissa $x = 1/3$. Qual è l'ampiezza, in gradi e primi sessagesimali, dell'angolo acuto formato da *r* e da *s*?

Si ha: $r: y-f\left(\frac{1}{3}\right)=f'\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right)\Rightarrow y-27\cdot\frac{1}{27}=81\cdot\frac{1}{9}\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right)\Rightarrow y-1=9x-3\Rightarrow y=9x-2$ e $s: y-g\left(\frac{1}{3}\right)=g'\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right)\Rightarrow y-sen\left(\frac{3}{2}\pi\cdot\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{2}\pi\cdot cos\left(\frac{3}{2}\pi\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right)\Rightarrow y-1=0$. L'ampiezza dell'angolo è ovviamente la stessa dell'angolo che *r* forma con il semiasse positivo delle ascisse, dato che la retta *s* è parallela a tale asse, quindi non è altri che $tan^{-1}\ 9\ \approx 83°39'35''$.

31. (Liceo Scientifico 2011/12) Cosa rappresenta $\lim_{h\to 0}\frac{5\cdot\left(\frac{1}{2}+h\right)^4-5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4}{h}$ e qual è il suo valore?

Banalmente abbiamo a che fare con il limite di un rapporto incrementale, quindi rappresenta la derivata della funzione $5x^4$ in $x = ½$, il suo valore è perciò quello di $20x^3$ in $x = ½$, cioè 5/2.

32. (Liceo Scientifico 2011/12) La posizione di una particella è data da $s(t) = 20 \cdot (e^{-t/2} + t - 2)$. Qual è la sua accelerazione al tempo $t = 4$?

Nota che l'accelerazione in un moto vario è la derivata seconda della funzione spazio, il quesito è banalissimo: $a\ t\ =s''\ t\ =\frac{d}{dt}20\cdot\left(\cancel{2}\cdot\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)\cdot e^{-\frac{t}{2}}+1\right)=-\cancel{20}^{10}\cdot\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)e^{-\frac{t}{2}}=10\cdot e^{-\frac{t}{2}}$, quindi $a(4) = 10e^{-2}$

33. (Liceo Scientifico 2011/12) Si calcoli $f'(x)$, per $f(x) = 5sin(x) \cdot cos(x) + cos^2(x) - sin^2(x) - 5/2sin(2x) - cos(2x) - 17$.

Invece che calcolare la derivata, banalissima peraltro, basta osservare che si ha

$$5\cdot sin\ x\ \cdot cos\ x\ +cos\ 2\ -\frac{5}{2}\cdot 2\cdot sen\ x\ \cdot cos\ x\ -cos\ 2x\ -17=-17$$

Quindi la funzione è costante, la sua derivata è nulla.

34. (Liceo Scientifico 2011/12) Qual è il valor medio di $f(x) = 1/x$ da $x = 1$ a $x = e$?

Il valore medio della funzione è dato dal Teorema di Lagrange, che è applicabile nel dato intervallo perché in esso la funzione è continua e derivabile, il valore medio si trova per l'ascissa *c* soluzione dell'equazione $f'\ c\ =\frac{f\ e\ -f\ 1}{e-1}\Rightarrow-\frac{1}{c^2}=\frac{\frac{1}{e}-1}{e-1}\Rightarrow c^2=\frac{e-1}{\frac{e-1}{e}}\Rightarrow c^2=e\Rightarrow c=\sqrt{e}$. Abbiamo accettato ovviamente solo il valore interno a [1; *e*]. Il valore medio è perciò $f\ \sqrt{e}\ =\frac{1}{\sqrt{e}}$.

35. (Liceo Scientifico PNI 2011/12) Sia $f(x) = 3^x$. Per quale valore di *x*, approssimato a meno di 10^{-3}, la pendenza della retta tangente alla curva nel punto $(x, f(x))$ è uguale a 1?

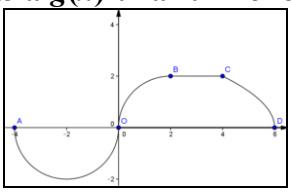
La pendenza è $f'(x) = 3^x \cdot ln\ (3)$. Quindi dobbiamo risolvere $3^x \cdot ln\ (3) = 1$. Con un metodo di bisezione troviamo circa –0,0856

36. (Liceo Scientifico PNI 2012/13) Se la funzione $f(x) - f(2x)$ ha derivata 5 in $x = 1$ e derivata 7 in $x = 2$, qual è la derivata di $f(x) - f(4x)$ in $x = 1$?

Abbiamo $D[f(x) - f(4x)] = f'(x) - 4f'(4x)$. Noi sappiamo che $D[f(x) - f(2x)] = f'(x) - 2f'(2x)$ e inoltre $f'(1) - 2f'(2) = 5$ (*) e $f'(2) - 2f'(4) = 7$ (**). Vogliamo calcolare $f'(1) - 4f'(4)$. Moltiplichiamo la (**) per 2 e la sommiamo alla (*), ottenendo: $2f'(2) - 4f'(4) + f'(1) - 2f'(2) = f'(1) - 4f'(4)$, che è proprio ciò che volevamo calcolare, pertanto quanto richiesto è $2 \cdot 7 + 5 = 19$.

37. (Liceo Scientifico 2013/14) Il valor medio della funzione $f(x) = x^3$, sull'intervallo chiuso $[0; k]$ è 9. Si determini *k*.

Per il teorema di Lagrange il valor medio di una funzione si ottiene per $x = c$ in modo che si abbia: $f'(c)=\frac{f(k)-f(0)}{k-0}\Rightarrow 3c^2=\frac{k^3}{k}\Rightarrow 3c^2=k^2, k>0$. Il valore medio è $f(c)$, quindi deve essere $c^3 = 9$, cioè $c=\sqrt[3]{9}$. Perciò $f'(c)=f'\left(\sqrt[3]{9}\right)=3\cdot\left(\sqrt[3]{9}\right)^2=9\cdot\sqrt[3]{3}$. Quindi $9\cdot\sqrt[3]{3}=k^2\Rightarrow k=3\cdot\sqrt[6]{3}$.

38. (Liceo Scientifico PNI 2013/14) Sia $g(x)$ una funzione continua sull'intervallo chiuso [– 4; 6]. Il grafico di $g(x)$, disegnato a lato,  **passa per i punti $A \equiv (-4; 0)$, $O \equiv (0; 0)$, $B \equiv (2; 2)$, $C \equiv (4; 2)$, $D \equiv (6; 0)$ e consiste della semicirconferenza di diametro AO, dell'arco, quarto di circonferenza, di estremi O e B, del segmento BC e dell'arco CD di una parabola avente per asse di simmetria l'asse x. Si dica, giustificando la risposta, se $g(x)$ è derivabile nei punti A, O, B, C, D.**

Possiamo scrivere la legge di definizione di $g(x)$ nel seguente modo, tenendo conto di quanto detto nel testo. In particolare la parabola di vertice in (6; 0) ha equazione $x = ay^2 + by + c$ e passa per C.

$$g(x)=\begin{cases}-\sqrt{-x^2-4x} & -4\le x\le 0\\ \sqrt{-x^2+4x} & 0<x<2\\ 2 & 2\le x\le 4\\ \sqrt{12-2x} & 4<x\le 6\end{cases}$$

Calcoliamo la derivata: $g'(x)=\begin{cases}\frac{x+2}{\sqrt{-x^2-4x}} & -4<x<0\\ \frac{2-x}{\sqrt{-x^2+4x}} & 0<x<2\\ 0 & 2<x<4\\ -\frac{1}{\sqrt{12-2x}} & 4<x<6\end{cases}$. Per calcolarla nei punti indicati ricorriamo ai limiti:

$$g_+'(-4)=\lim_{x\to -4^+}\frac{x+2}{\sqrt{-x^2-4x}}=-\infty;$$

$$g_-'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x+2}{\sqrt{-x^2-4x}}=+\infty; g_+'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2-x}{\sqrt{-x^2+4x}}=+\infty;$$

$$g_-'(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{2-x}{\sqrt{-x^2+4x}}=0; g_+'(2)=\lim_{x\to 2^+}0=0;$$

$$g_-'(4)=\lim_{x\to 4^-}0=0; g_+'(4)=\lim_{x\to 4^+}-\frac{1}{\sqrt{12-2x}}=-\frac{1}{2};$$

$$g_-'(6)=\lim_{x\to 6^-}-\frac{1}{\sqrt{12-2x}}=-\infty$$

Quindi la funzione nei punti indicati è derivabile solo in B. Invece O è un punto di flesso a tangente verticale e C è un punto angoloso. Anche A e D hanno tangente verticale, ma essendo la funzione definita solo in un loro semiintorno non possiamo classificare i punti.

39. (Liceo Scientifico PNI 2014/15) Data la funzione $f(x)=\begin{cases}x^3 & 0\le x\le 1\\ x^2-kx+k & 1<x\le 2\end{cases}$ determinare il parametro k in modo che nell'intervallo [0; 2] sia applicabile il Teorema di Lagrange e trovare il punto in cui la tesi del teorema assicura l'esistenza.

La funzione deve essere continua e derivabile. Essendo formata dall'unione di polinomi l'unica discontinuità può essere nel punto di "contatto" fra i due rami, cioè in $x = 1$. Si ha: $\lim_{x\to 1^-} x^3 = 1, \lim_{x\to 1^+}\left(x^2 - kx + k\right) = 1$, quindi la funzione è continua per ogni k. Ora $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & 0 \le x < 1 \\ 2x - k & 1 < x \le 2 \end{cases}$ e $\lim_{x\to 1^-} 3x^2 = 3, \lim_{x\to 1^+}(2x - k) = 2 - k$, pertanto la derivabilità si ha solo per $2 - k = 3 \Rightarrow k = -1$. In questo caso si ha: $f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \le x \le 1 \\ x^2 + x - 1 & 1 < x \le 2 \end{cases}$. Applichiamo il teorema: $f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{5 - 0}{2} = \frac{5}{2}$. Deve perciò essere: $\begin{cases} 3c^2 = \frac{5}{2} & 0 \le c < 1 \\ 2c + 1 = \frac{5}{2} & 1 < c \le 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = \sqrt{\frac{5}{6}} & 0 \le c < 1 \\ c = \frac{3}{4} (N.A) & 1 < c \le 2 \end{cases}$.

Quindi un solo valore accettabile.

40. (Liceo scientifico 2015/16) Si stabilisca se la seguente affermazione è vera o falsa, giustificando la risposta: "Esiste un polinomio $P(x)$ tale che: $|P(x) - cos(x)| \le 10^{-3}$, $\forall x \in \mathbb{R}$". Suggerimento: si consideri lo sviluppo di Taylor della funzione $cos(x)$.

Sappiamo che lo sviluppo di Taylor è $cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$, sappiamo inoltre che l'errore che commettiamo approssimando la funzione con il suo polinomio è dato dal primo termine che si trascura. Quindi il "migliore" polinomio che approssima $cos(x)$ differisce da esso di un termine $\frac{x^{2n}}{(2n)!}$, che ovviamente non potrà mai essere minore di alcuna quantità finita per ogni x, dato che per x che tende a $+\infty$, anche tale valore tende a $+\infty$.

41. (Liceo Scientifico 2016/17) Determinare il numero reale α in modo che il valore di $\lim_{x\to 0} \frac{sin(x) - x}{x^\alpha}$ sia un numero reale non nullo.

Possiamo applicare il Teorema di De L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{sin(x) - x}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0} \frac{cos(x) - 1}{\alpha x^{\alpha - 1}} = \lim_{x\to 0} \frac{-sin(x)}{\alpha \cdot (\alpha - 1) x^{\alpha - 2}} = \lim_{x\to 0} \frac{-cos(x)}{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot (\alpha - 2) x^{\alpha - 3}} = \begin{cases} \infty & \alpha > 3 \\ -\frac{1}{6} & \alpha = 3 \\ 0 & \alpha < 3 \end{cases}$$

42. (Liceo Scientifico 2016/17) Dimostrare che l'equazione: $tan^{-1}(x) + x^3 + e^x = 0$, ha una e una sola soluzione reale.

Abbiamo $tan^{-1}(0) + 0^3 + e^0 = 1 > 0$ e $tan^{-1}(-1) + (-1)^3 + e^{-1} < 0$, quindi per il teorema di esistenza degli zeri l'equazione ha almeno una soluzione in $(-1; 0)$. D'altro canto si ha $D(tan^{-1}(x) + x^3 + e^x) = \frac{1}{1 + x^2} + 3x^2 + e^x$, che è un'espressione positiva per ogni x. Quindi la funzione $f(x) = tan^{-1}(x) + x^3 + e^x$, è sempre crescente, quindi anche iniettiva, perciò essa può incontrare al massimo una volta l'asse x.

43. (Liceo Scientifico 2016/17) Data la funzione: $f(x) = |4 - x^2|$, verificare che essa non soddisfa tutte le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[-3; 3]$ e che comunque esiste almeno un punto dell'intervallo $[-3;3]$ in cui la derivata prima di $f(x)$ si annulla. Questo esempio contraddice il teorema di Rolle? Motivare la risposta in maniera esauriente.

Pur essendo la funzione continua in $[-3; 3]$ e con $f(-3) = f(3) = 1$, essa non è derivabile in $(-3; 3)$; in effetti non è derivabile per $x = \pm 2$, dato che $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & x \in [-2; 2] \\ x^2 - 4 & x \in [-3; 2) \cup (2; 3] \end{cases}$, da cui

$f'(x)=\begin{cases}-2x & x\in(-2;2)\\ 2x & x\in(-3;2)\cup(2;3)\end{cases}$ e quindi $(f')^-(-2)=2=(f')^+(2);(f')^+(-2)=-2=(f')^-(2)$.

Ciononostante si ha $f'(0) = 0$; ma ciò non contraddice il teorema di Rolle perché esso è una condizione necessaria e non sufficiente.

44. (Liceo Scientifico 2017/18) Dimostra che il grafico di un qualsiasi polinomio di grado $n > 0$ non può possedere più di $2n - 1$ punti nei quali la retta normale al grafico passa per l'origine.

Sia $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, l'equazione della normale avrebbe come termine noto $a_0x_0^n+a_1x_0^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x_0+a_n+\dfrac{x_0}{na_0x_0^{n-1}+(n-1)a_1x_0^{n-2}+\ldots+a_{n-1}}$, che facilmente si vede rappresentare un polinomio di grado $2n - 1$, diviso un polinomio di grado $n - 1$ e perciò si annulla al massimo per $2n - 1$ valori reali.

45. (Liceo Scientifico 2017/18) Determinare i valori di k tali che la retta di equazione $y = -4x + k$ sia tangente alla curva di equazione $y = x^3 - 4x^2 + 5$.

La retta e la curva sono tangenti in un punto di ascissa x_0 se il sistema formato dalle loro equazioni, in pratica l'equazione $x^3 - 4x^2 + 5 = -4x + k$, ha almeno due soluzioni coincidenti. Il problema è che abbiamo a che fare con un'equazione di III grado, $x^3 - 4x^2 + 4x + 5 - k = 0$, che non è semplice da risolvere. Allora imponiamo l'uguaglianza: $x^3 - 4x^2 + 4x + 5 - k = (x - h)^2 \cdot (x - p)$, che conduce all'uguaglianza di due polinomi: $x^3 - 4x^2 + 4x + 5 - k = x^3 - x^2\cdot(2h + p) + x\cdot(h^2 + 2hp) - h^2p$. a questo punto applichiamo il principio di identità dei polinomi, imponendo l'uguaglianza dei coefficienti delle incognite di uguale grado, ottenendo il sistema $\begin{cases}2h+p=4\\ h^2+2hp=4\\ h^2p=k-5\end{cases}$, che, pur essendo di IV grado è semplice da risolvere: $\begin{cases}p=4-2h\\ h^2+8h-4h^2=4\\ k=5+h^2p\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p=4-2h\\ 3h^2-8h+4=0\\ k=5+h^2p\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p=\dfrac{8}{3}\vee p=0\\ h=\dfrac{2}{3}\vee h=2\\ k=\dfrac{167}{27}\vee k=5\end{cases}$. Oppure possiamo imporre che il coefficiente angolare della generica tangente alla curva in un suo punto sia uguale a quello della retta. Cioè $3x^2 - 8x = -4$, che ha soluzioni: 2/3 e 2. Pertanto gli unici due punti in cui le tangenti sono parallele alla retta data hanno le ascisse trovate, quindi sono i punti (2/3; 95/27) e (2; –3). Affinché questi punti appartengano anche alla retta data deve essere: $k = 4x + y$, quindi $k = 8/3 + 95/27 = 167/27$ oppure $k = 8 - 3 = 5$, che ovviamente coincidono con i valori trovati con l'altra procedura.

46. (Liceo Scientifico 2018/19) È assegnata la funzione $g(x)=\sum_{n=1}^{1010}x^{2n-1}$. Provare che esiste un solo $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $g(x_0) = 0$. Determinare inoltre il valore di $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{1,1^x}$.

Abbiamo $g(0) = 0$. Inoltre $g'(x)=\sum_{n=1}^{1010}(2n-1)\cdot x^{2n}$, che è positiva per ogni x, quindi la funzione è strettamente crescente, il che implica che 0 è l'unico zero della funzione. Passiamo al calcolo del limite: $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sum_{n=1}^{1010}x^{2n-1}}{1,1^x}=0$, perché un'esponenziale a base maggiore di 1 è un infinito di ordine superiore a qualsiasi polinomio.

47. (Liceo Scientifico 2022/23) Determinare l'equazione della retta tangente alla curva di equazione $y=\sqrt{25-x^2}$ nel suo punto di ascissa 3, utilizzando due metodi diversi.

La curva rappresenta una semicirconferenza di centro l'origine e raggio 5, quindi un metodo consiste

nel tracciare la perpendicolare alla diametrale passante per (3; 4), che ha coefficiente angolare –4/3, e perciò è $y - 4 = ¾ (x - 3) \Leftrightarrow 3x - 4y + 7 = 0$. Oppure utilizzando le derivate per determinare il coefficiente angolare: $y'(x) = \frac{-x}{\sqrt{25-x^2}} \Rightarrow y'(3) = \frac{-3}{4}$.

48. Si consideri la funzione: $f(x) = \begin{cases} -1+tan^{-1}(x) & x<0 \\ ax+b & x \geq 0 \end{cases}$**. Determinare per quali valori dei parametri reali *a*, *b* la funzione è derivabile. Stabilire se esiste un intervallo di ℝ in cui la funzione *f* soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle. Motivare la risposta.**

La funzione deve essere continua $\Rightarrow \lim_{x\to 0^-}\left[-1+tan^{-1}(x)\right] = -1, \lim_{x\to 0^+}(ax+b) = b \Rightarrow b = -1$, e ovviamente derivata sinistra e destra devono essere uguali: $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & x<0 \\ a & x>0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1+x^2} = 1 \Rightarrow a = 1$. A questo punto $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & x<0 \\ 1 & x>0 \end{cases}$, per la validità del Teorema di Rolle deve esistere un intervallo $[a; b]$ in cui si ha $f(a) = f(b)$. Consideriamo i vari casi:

1) $a < b < 0 \Rightarrow -1 + tan^{-1}(a) = -1 + tan^{-1}(b) \Rightarrow tan^{-1}(a) = tan^{-1}(b) \Rightarrow a = b$. Non si può applicare;
2) $a < 0 < b \Rightarrow -1 + tan^{-1}(a) = b - 1 \Rightarrow tan^{-1}(a) = b \Rightarrow a = tan(b)$, che non è possibile perché $a < 0$ e $b > 0$. Non si può applicare;
3) $0 < a < b \Rightarrow a - 1 = b - 1 \Rightarrow a = b$. Non si può applicare;

Si poteva anche osservare che $f'(x) > 0$ quindi la funzione è strettamente crescente e perciò iniettiva.

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

1. (HSMC2003) Determinare le ascisse di tutti i punti della funzione $f(x) = \frac{x}{x+1}$**, la cui tangente passa anche per (1; 2).**

$f'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$, l'equazione della tangente è $y - \frac{c}{c+1} = \frac{1}{(c+1)^2}(x-c)$, nella generica scissa c. Deve aversi:

$$2 - \frac{c}{c+1} = \frac{1}{(c+1)^2}(1-c) \Rightarrow \frac{c+2}{c+1} = \frac{1-c}{(c+1)^2} \Rightarrow (c+2)(c+1) - 1 + c = 0 \Rightarrow c^2 + 4c + 1 = 0 \Rightarrow c = -2 \pm \sqrt{3}$$

2. (HSMC2004) Sia *f* una funzione derivabile tale che $f(x + y) = f(x) + f(y) + 5xy$ ∀ *x* e *y* e $f'(0) = 3$. Calcolare $f'(x)$.

Si ha $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) + 5(0)(0) = 2f(0)$, quindi $f(0) = 0$. Da $f'(0) = 3$, abbiamo:

$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = 3 \Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h} = 3$, d'altro canto

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x)+\cancel{f(h)}+5xh-\cancel{f(h)}}{h} = \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(h)}{h}+5x\right] = 3+5x$$

3. (HSMC2005) Se gonfiamo una palla sferica a un tasso di 16 cm^3 al secondo, a che tasso aumenta il raggio quando è 4 *cm*?

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow V' = 4\pi r^2\frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{V'}{4\pi r^2} = \frac{16}{4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi}$$

4. (Rice2006) $tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ **si chiama tangente iperbolica, calcolare** $\frac{d}{dx}tanh^{-1}\left[tan(x)\right]$**.**

$$tanh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\Rightarrow tanh^{-1}(y)=ln\sqrt{\frac{y+1}{y-1}}\Rightarrow\frac{d}{dx}tanh^{-1}\left[tan(x)\right]=\frac{d}{dx}\left[ln\sqrt{\frac{tan(x)+1}{tan(x)-1}}\right]=$$

$$=\sqrt{\frac{tan(x)-1}{tan(x)+1}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{tan(x)-1}{tan(x)+1}}\cdot\frac{\left[tan^2(x)+1\right]\cdot\left[tan(x)-1\right]-\left[tan^2(x)+1\right]\cdot\left[tan(x)+1\right]}{\left[tan(x)-1\right]^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\cancel{tan(x)-1}}{tan(x)+1}\frac{-2\left[tan^2(x)+1\right]}{\left[tan(x)-1\right]^{\cancel{2}}}=\frac{tan^2(x)+1}{1-tan^2(x)}=\frac{sin^2(x)+cos^2(x)}{cos^2(x)-sin^2(x)}=\frac{1}{cos(2x)}=sec(2x)$$

5. (Rice2008) Determinare il valore della *n*–esima derivata di $f(x) = sin^n(x)$, in $x = 0$.

$f'(x) = n \cdot sin^{n-1}(x) \cdot cos(x)$; $f''(x) = n(n-1)\cdot sin^{n-2}(x) \cdot cos(x) - n \cdot sin^n(x)$; $f'''(x) = n(n-1)(n-2)\cdot sin^{n-3}(x) \cdot cos(x) - sin^{n-1}(x) - n^2 \cdot sin^{n-1}(x) \cdot cos(x)$; …; $f^n(x) = n! \cdot cos(x) - S(x)$, dove $S(x)$ sono addendi che contengono tutti una potenza di $sin(x)$, quindi: $f^n(0) = n!$

6. (HSMC2008) Sia una funzione f che verifica $f(x + y) = f(x) + f(y) + 3x^2y + 3xy^2 + 2xy$ e $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$. Calcolare $f'(x)$.

Si ha $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) + 0 = 2f(0)$, quindi $f(0) = 0$. Ora:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{f(x)}+f(h)+3x^2h+3xh^2+3hx-\cancel{f(x)}}{h}=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(h)}{h}+x^2+3xh+3x\right]=x^2+3x,$$

7. (Rice2008) Calcolare $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{n!}$. Suggerimento: Moltiplicare per 2 e osservare che il termine generale è derivata ennesima di …

Si ha: $2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$, ricordiamo che $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\Rightarrow e^{2x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!}\Rightarrow e^2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{n!}=\frac{e^2}{2}$

8. (HSMC2008) Trovare la derivata di ordine 2008 di $f(x) = x^{2007} \cdot ln(x)$.

$f'(x) = 2007x^{2006} \cdot ln(x) + x^{2006} = x^{2006} \cdot [2007ln(x) + 1]$; $f''(x) = 2006x^{2005} \cdot [2007ln(x) + 1] + 2007x^{2005} = x^{2005} \cdot [2006 \cdot 2007ln(x) + 40013]$; $f'''(x) = x^{2004} \cdot [2005 \cdot 2006 \cdot 2007ln(x) + 12072107]$; …; $f^{2006}(x) = x \cdot [3 \cdot \ldots \cdot 2005 \cdot 2006 \cdot 2007ln(x) + N]$; $f^{2007}(x) = 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2005 \cdot 2006 \cdot 2007ln(x) + N$, con M e N numeri interi il cui valore non importa, dato che la successiva derivata non li contiene: $f^{2008}(x) = 2007!/x$

9. (AK2008) Se $x^n + y^n = 1$, per qualche numero reale non nullo n, calcolare y''.

$$y=\sqrt[n]{1-x^n}=\left(1-x^n\right)^{\frac{1}{n}}\Rightarrow y'=\frac{\left(1-x^n\right)^{\frac{1-n}{n}}\left(-\cancel{n}x^{n-1}\right)}{\cancel{n}};y''=$$

$$=\frac{(1-n)\left[\left(1-x^n\right)^{\frac{1-2n}{n}}\left(\cancel{n}x^{2n-2}\right)-\left(1-x^n\right)^{\frac{1-n}{n}}\cdot(1-n)x^{n-2}\right]}{\cancel{n}}=x^{n-2}(1-n)\left(1-x^n\right)^{\frac{1-2n}{n}}=(1-n)\cdot\frac{x^{n-2}}{y^{2n-1}}$$

10. (HSMC2009) Sia una funzione tale che si abbia $f(1) = 3$, $f(3) = 1$, $f'(1) = -4$ e $f'(3) = 2$. Determinare la pendenza della tangente a $\frac{1}{f^{-1}(x)}$ in $x = 1$.

$$D\left[\frac{1}{f^{-1}(x)}\right]_{x=1}=-\frac{D\left[f^{-1}(x)\right]_{x=1}}{\left[f^{-1}(1)\right]^2}=-\frac{1}{D\left[f(y)\right]_{y=3}\left[f^{-1}(1)\right]^2}=-\frac{1}{f'(3)\cdot 3^2}=-\frac{1}{18}$$

11. (HSMC2009) Calcolare la derivata 50–esima di $f(x)=\frac{x^{50}}{1-x}$ in $x = 0$.

$f'(x)=\frac{50x^{49}(1-x)+x^{50}}{(1-x)^2}=\frac{x^{49}(50-49x)}{(1-x)^2};f''(x)=\frac{x^{48}\left(2352x^2-4800x+50\cdot 49\right)}{(1-x)^3}$, ci accorgiamo che all'aumentare dell'ordine di derivazione, l'esponente del fattore comune diminuisce di una unità, per cui alla derivata 50ª avremo al numeratore un polinomio di grado 50 e al denominatore la potenza 51ª di $(1-x)$. Ponendo $x = 0$ ci rimane solo il termine noto del polinomio, che è uguale a 50!

12. (Rice2010) Calcolare $\lim_{t\to 0}\frac{tan^{-1}\left(\frac{1}{x+t}\right)-tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)}{t}$**.**

Applichiamo De L'Hopital derivando rispetto a t e considerando x costante:

$$\lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{\left(\frac{1}{x+t}\right)^2+1}\cdot\frac{-1}{(x+t)^2}\right]=\lim_{t\to 0}\left[\frac{\cancel{(x+t)^2}}{(x+t)^2+1}\cdot\frac{-1}{\cancel{(x+t)^2}}\right]=-\frac{1}{x^2+1}$$

13. (AK2010) $y(x)$ verifica l'equazione $ln(x + y) - e^{2xy} + 1 = 0$. Calcolare $y'(0)$.

Si ha $ln[x + y(x)] - e^{2xy(x)} + 1 = 0$, quindi: $ln[y(0)] = 0 \Rightarrow y(0) = 1$. Adesso deriviamo:

$$\frac{1+y'(x)}{x+y(x)}-e^{2xy(x)}\cdot\left[2y(x)+2xy'(x)\right]=0\Rightarrow\frac{1+y'(0)}{0+y(0)}-e^0\cdot\left[2y(0)+0\right]=0\Rightarrow 1+y'(0)-2=0\Rightarrow y'(0)=1$$

14. (HSMC2011) Determinare la somma di tutti i numeri c che rendono la seguente funzione derivabile in $x = 1$: $f(x)=\begin{cases}x^2+c^2\cdot x-1 & x\le 1\\ c\cdot x^2+5x+1 & x>1\end{cases}$**.**

Intanto stabiliamo la continuità:

$$\lim_{x\to 1^-}\left(x^2+c^2\cdot x-1\right)=c^2;\lim_{x\to 1^+}\left(c\cdot x^2+5x+1\right)=c+6\Rightarrow c^2=c+6\Rightarrow c=-2\vee 3$$

Passiamo alla derivabilità:

$$f'(x)=\begin{cases}2x+c^2 & x<1\\ 2cx+5 & x>1\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}2x+4 & x<1\\ -4x+5 & x>1\end{cases}\vee'(x)=\begin{cases}2x+9 & x<1\\ 6x+5 & x>1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 1^-}(2x+4)=\lim_{x\to 1^+}(-4x+5)\vee\lim_{x\to 1^-}(2x+9)=\lim_{x\to 1^+}(6x+5)\Rightarrow 6=1\Rightarrow 11=11$$

È accettabile solo $c = 3$, che è anche la soluzione

15. (HSMC2000) Let $f(x)$ be a differentiable function and suppose a is a real number such that $f(a) > 0$ and $f'(a) > 0$. Let P be the point $(a; f(a))$; let Q be the point $(a; 0)$ and let R be the point where the tangent line to the graph of $f(x)$ at P intersects the x–axis. Give a formula for the area of the triangle with vertices PQR.

Traduzione. Sia $f(x)$ una funzione derivabile e a un numero reale tale che si abbia $f(a) > 0$ e $f'(a) > 0$. Sia P il punto $(a; f(a))$; sia Q il punto $(a; 0)$ ed R il punto dove la tangente al grafico di $f(x)$ in P incontra l'asse x. Trovare la formula per calcolare l'area del triangolo di vertici PQR.

Determiniamo le coordinate di R: la tangente in P: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$; l'intersezione con l'asse x:

$x=a-\frac{f(a)}{f'(a)}\Rightarrow R\equiv\left(a-\frac{f(a)}{f'(a)};0\right)$. L'area del triangolo PQR:

$$\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}a & f(a) & 1\\ a & 0 & 1\\ a-\frac{f(a)}{f'(a)} & 0 & 1\end{vmatrix}=\frac{f(a)}{2}\cdot\begin{vmatrix}a & 1\\ a-\frac{f(a)}{f'(a)} & 1\end{vmatrix}=\frac{f(a)}{2}\cdot\left[a-a+\frac{f(a)}{f'(a)}\right]=\frac{\left[f(a)\right]^2}{2f'(a)}$$

, il determinante è stato calcolato in valore assoluto.

16. (HSMC2001) Find $f'(0)$ if $f(x) = x + f(-x)$ for all x.

$f'(x) = 1 - f'(-x) \Rightarrow f'(0) = 1 - f'(0) \Rightarrow f'(0) = 1/2$

17. (HSMC2001) Let *f* be infinitely differentiable and suppose that $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{n^2}{n^2+1}, \forall n \in \mathbb{N}$. Find $f^{IV}(0)$.

$$f(n)=\frac{1/n^2}{1/n^2+1}=\frac{1}{1+n^2} \Rightarrow f'(n)=\frac{-2n}{\left(1+n^2\right)^2} \Rightarrow f''(n)=\frac{2\left(3n^2-1\right)}{\left(1+n^2\right)^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'''(n)=\frac{24n\left(1-n^2\right)}{\left(1+n^2\right)^4} \Rightarrow f^{IV}(n)=\frac{24\left(5n^4-10n^2+1\right)}{\left(1+n^2\right)^5} \Rightarrow f^{IV}(0)=24$$

18. (HSMC2001) Suppose that $g(x) = f\{x^3 + f[x^2 + f(x)]\}$, where $f(1) = 1$; $f(2) = 2$; $f'(1) = 1$; $f'(2) = 2$ and $f'(3) = 3$. Then $g'(1)$ is?

Traduzione. Supponiamo che $g(x) = f\{x^3 + f[x^2 + f(x)]\}$, con $f(1) = 1$; $f(2) = 2$; $f'(1) = 1$; $f'(2) = 2$ e $f'(3) = 3$. Quanto vale $g'(1)$?

$g'(x) = f'\{x^3 + f[x^2 + f(x)]\}\cdot\{3x^2 + f'[x^2 + f(x)]\cdot[2x + f'(x)]\} \Rightarrow g'(1) = f'\{1^3 + f[1^2 + f(1)]\}\cdot\{3 + f'[1 + f(1)]\cdot[2 + f'(1)]\} = f'[1 + f(1 + 1)]\cdot[3 + f'(1 + 1)\cdot(2 + 1)] = f'[1 + f(2)]\cdot[3 + f'(2)\cdot 3] = f'(1 + 2)\cdot(3 + 2\cdot 3) = f'(3)\cdot 9 = 3\cdot 9 = 27$

19. (HSMC2002) Define a function *f* by $f(x)=\frac{x^{2002}-1}{x-1}$, for all $x \neq 1$. Compute the limit $\lim_{x\to 1} f'(x)$.

$$f'(x)=\frac{2002x^{2001}(x-1)-x^{2002}}{(x-1)^2}=\frac{2001x^{2002}-2002x^{2001}+1}{(x-1)^2} \Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{2001x^{2002}-2002x^{2001}+1}{(x-1)^2}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2001\cdot 2002x^{2001}-2002\cdot 2001x^{2000}}{2(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{2001\cdot 2002\cdot 2001x^{2000}-2002\cdot 2001\cdot 2000x^{1999}}{2}=$$

$$=\frac{2001\cdot 2002\cdot(2001-2000)}{2}=2001\cdot 1001=2003001$$

20. (HSMC2002) The tangent line to the graph of the equation $y = x^2 + 7x + 11$ at the point (3; 41) crosses the *y*-axis at the point (0; *a*), where *a* is a real number. What is the value of *a*?

Traduzione. La tangente al grafico dell'equazione $y = x^2 + 7x + 11$ nel punto (3; 41) attraversa l'asse y nel punto (0; a), con a numero reale. Quanto vale a?

La tangente è $y - 41 = (2\cdot 3 + 7)\cdot(x - 3) \Rightarrow y = 13x + 2$. Che incontra l'asse y in (0; 2)

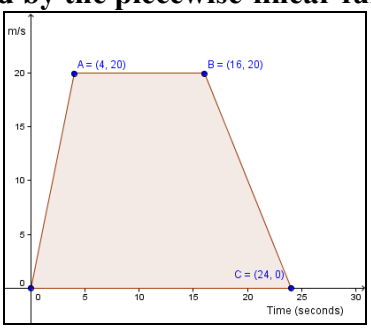
21. (HSMC2003) Let *f* and *g* be differentiable functions with some values of the functions and their derivatives given in the chart below. What is the derivative of $f[g(x)]$ at $x = 2$?

Traduzione. Siano f e g funzioni derivabili, alcuni valori delle funzioni e delle loro derivate sono dati nella tabella sotto. Quanto vale la derivata di $f[g(x)]$ in $x = 2$?

x	1	2	3	4
$f(x)$	2	4	3	1
$f'(x)$	4	3	2	1
$g(x)$	3	1	4	2
$g'(x)$	2	4	1	3

$D\{f[g(x)]\} = f'[g(x)]\cdot g'(x) \Rightarrow D\{f[g(x)]\}_{x=2} = f'[g(2)]\cdot g'(2) = f'[1]\cdot 4 = 4\cdot 4 = 16$

22. (CEEB2005) A car is travelling on a straight road. For $0 \le t \le 24$ seconds, the car's velocity $v(t)$, in meters per second, is modelled by the piecewise-linear function defined by the following graph



a) For each of $v'(4)$ and $v'(20)$, find the value or explain why it does not exist. b) Let $a(t)$ be the car's acceleration at time t, in m/s^2, for $0 < t < 24$, write a piecewise-defined function for $a(t)$. c)

Find the average rate of change of v over the interval $8 \le t \le 20$. Does the Mean Value Theorem guarantee a value of c, for $8 < c < 20$, such that $v'(c)$ is equal to this average rate of change?

Traduzione. Una macchina viaggia su una strada rettilinea. Per $0 \le t \le 24$ secondi, $v(t)$, la velocità della macchina in metri al secondo, è rappresentata dalla funzione lineare a tratti mostrata nel grafico seguente. a) Per $v'(4)$ e $v'(20)$ trova il valore o spiega perché non esiste. b) Sia $a(t)$ l'accelerazione della macchina al tempo t, in m/s^2, per $0 < t < 24$, scrivi una funzione definita a tratti per $a(t)$. c) Trova il tasso medio di variazione di v nell'intervallo $8 \le t \le 20$. Il Teorema del valor medio garantisce un valore di c, per $8 < c < 20$, in modo che $v'(c)$ sia uguale a questo tasso medio di variazione?

a) La funzione non è derivabile per $t = 4$, dove si osserva un evidente punto angoloso; per $t = 20$ bisogna considerare la pendenza del segmento cui appartiene, che vale $-20/8\ m/s^2 = -2{,}5\ m/s^2$;

b) Tenuto conto di quanto detto facilmente troviamo: $a(t) = \begin{cases} 5 & 0 < t < 4 \\ 0 & 4 < t < 16 \\ -2{,}5 & 16 < t < 24 \end{cases}$;

c) Determiniamo $v(20)$, la retta cui appartiene il segmento ha equazione:

$$\frac{y-20}{0-20} = \frac{x-16}{24-16} \Rightarrow \frac{-y+20}{\cancel{20}^{5}} = \frac{x-16}{\cancel{8}^{2}} \Rightarrow y = -\frac{5}{2}x + 60 \Rightarrow v(20) = 10, \text{ quindi}$$

$$\frac{v(20)-v(8)}{20-8} = \frac{10-20}{12} m/s^2 = -\frac{5}{6} m/s^2;$$

Il teorema non si applica in [8; 20] perché non esiste $v'(16)$.

23. (AK2008) If $f(x) = \frac{2}{x}, g(x) = \frac{x}{x^2+1}$, compute D{$f$[$g(x)$]}.

$$D\{f[g(x)]\} = f'[g(x)] \cdot g'(x) = -\frac{2}{\left(\frac{x}{\cancel{x^2+1}}\right)^2} \cdot \frac{x^2+1-2x^2}{\cancel{(x^2+1)^2}} = \frac{2x^2-2}{x^2}$$

24. (AK2009) Let y be a function of x which satisfies $ln(x + y) - 2xy = 0$ and $y(0) = 1$. Find $y'(0)$.

$$D[ln(x+y) - 2xy] = \frac{1+y'}{x+y} - 2y - 2xy' = 0 \Rightarrow \frac{1+y'(0)}{0+y(0)} - 2y(0) - 2 \cdot 0 \cdot y'(0) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + y'(0) - 2 = 0 \Rightarrow y'(0) = 1$$

25. (AK2010) For what values of a and b will $f(x) = \begin{cases} ax & x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 & x \ge 2 \end{cases}$ be differentiable for all values of x?

$f'(x) = \begin{cases} a & x < 2 \\ 2ax - b & x > 2 \end{cases}$. Imponiamo continuità e derivabilità:

$$\begin{cases} \lim_{x \to 2^-} (ax) = \lim_{x \to 2^+} (ax^2 - bx + 3) \\ \lim_{x \to 2^-} (a) = \lim_{x \to 2^+} (2ax - b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a = 4a - 2b + 3 \\ a = 4a - b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - 6a = -3 \\ b = 3a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = \frac{9}{4} \end{cases}$$

26. (HSMC2011) Let $h(x) = x \cdot f^{-1}(x)$. Use the table of values below to find $h'(5)$.

x	$f(x)$	$f'(x)$
2	4	–1
3	5	2
5	1	3

$$h'(x) = f^{-1}(x) + \frac{x}{D[f(y)]} \Rightarrow h'(5) = f^{-1}(5) + \frac{5}{D[f(y)]_{y=3}} = 3 + \frac{5}{2} = \frac{11}{2}$$

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. **(Odontoiatria 1997) La derivata prima della funzione $f(x) = x \cdot (3x - 2)$ è:**
   A) $3x - 2$ B) $6x - 2$ C) $-2x$ D) x E) nessuna delle risposte proposte e' corretta
   $f'(x) = 3x - 2 + 3x = 6x - 2$. Risposta corretta B
2. **(Medicina 1997) La derivata della funzione $f(x) = 5x + 2ln(x)$ è:**
   A) $5 + 2x$ B) $2/x$ C) $5 + 2\,ln(x)/x$ D) $5 + 2/x$ E) nessuna di quelle delle precedenti risposte
   $f'(x) = 5 + 2/x$. Risposta corretta D