11. L'integrazione

11.1 Integrazione indefinita

L'integrale come area di un trapezoide

Inscrivendo e circoscrivendo* 10 *plurirettangoli, determinare dei valori approssimati per difetto e per eccesso delle aree dei seguenti integrali definiti. Nelle risposte indichiamo con I il valore esatto.

1. **a)** $\int_0^1 x\ dx$ **; b)** $\int_0^2 x^2\ dx$ **; c)** $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ **; d)** $\int_{-2}^{-1} x^2\ dx$

a) $s(10) = [f(0) + f(1/10) + f(2/10) + ... + f(9/10)]/10 = (0 + 1/10 + 2/10 + ... + 9/10)/10 = (1 + 2 + 3 + ... + 9)/100 = 45/100 = 0,45$; $S(10) = [f(1/10) + f(2/10) + ... + f(1)]/10 = (1/10 + 2/10 + ... + 9/10 + 1)/10 = 55/100 = 0,55$. Quindi possiamo dire che si ha: $0,45 < \int_0^1 x\ dx < 0,55$. Il valore esatto è ½ = 0,5, dato che è l'area di un triangolo rettangolo isoscele di cateti che misurano 1.

b) $s(10) = [f(0) + f(2/10) + f(4/10) + ... + f(18/10)]/5 = (0 + 4/100 + 16/100 + ... + 324/100)/10 = (4 + 16 + ... + 324)/500 = 57/25 = 2,28$; $S(10) = [f(2/10) + f(4/10) + ... + f(2)]/5 = (4/100 + 16/100 + ... + 324/100 + 4)/500 = 77/50 = 3,08$. Quindi possiamo dire che si ha: $2,28 < \int_0^2 x^2\ dx < 3,08$. Il valore esatto è $8/3 \approx 2,67$.

c) La funzione è decrescente, quindi la somma inferiore parte da $f(11/10)$ e arriva a $f(2)$, mentre quella superiore parte da $f(1)$ e arriva a $f(19/10)$. $s(10) = [f(11/10) + f(12/10) + ... + f(2)]/10 = (10/11 + 10/12 + ... + ½)/10 \approx 0,67$; $S(10) = [f(1) + f(2/10) + ... + f(19/10)]/10 \approx 0,72$. Quindi possiamo dire che si ha: $0,67 < \int_1^2 \frac{1}{x}\ dx < 0,72$. Il valore esatto è $ln(2) \approx 0,69$;

d) $s(10) = [f(-19/10) + f(-18/10) + ... + f(-1)]/10 = (361/100 + 324/100 + ... + 1)/10 = 437/200 = 2,185$; $S(10) = [f(-2) + f(-19/10) + ... + f(-11/100) = 497/200 = 2,485$. Quindi possiamo dire che si ha: $2,185 < \int_{-2}^{-1} x^2\ dx < 2,485$. Il valore esatto è $7/3 \approx 2,333$.

2. **a)** $\int_0^2 x^3\ dx$ **; b)** $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2}\ dx$ **; c)** $\int_{-3}^{-2} \frac{x^2+1}{x^2}\ dx$ **; d)** $\int_{-1}^{2} \frac{x^2}{x^2+1} dx$

a) $s(10) = [f(0) + f(2/10) + f(4/10) + ... + f(18/10)]/5 = 81/25 = 3,24$; $S(10) = [f(2/10) + f(4/10) + ... + f(2)]/5 = 121/25 = 4,84$. Quindi possiamo dire che si ha: $3,24 < \int_0^2 x^2\ dx < 4,84$. Il valore esatto è 4;

b) $s(10) = [f(-2) + f(-19/10) + f(-18/10) + ... + f(-12/10)]/10 \approx 0,46$; $S(10) = [f(-19/10) + f(-18/10) + ... + f(-1))]/10 \approx 0,54$. Quindi possiamo dire che si ha: $0,46 < \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2}\ dx < 0,54$. Il valore esatto è ½ = 0,5;

c) $s(10) = [f(-3) + f(-29/10) + f(-28/10) + ... + f(-19/10)]/10 \approx 1,16$; $S(10) = [f(-29/10) + f(-28/10) + ... + f(-2)]/10 \approx 1,17$. Quindi possiamo dire che si ha: $1,16 < \int_{-3}^{-2} \frac{x^2+1}{x^2}\ dx < 1,17$. Il valore esatto è $7/6 = 1,1\overline{6}$;

d) $s(10) = [f(-1) + f(-7/10) + f(-4/10) + ... + f(17/10)]/10 \approx 1,07$; $S(10) = [f(-7/10) + f(-4/10) + ... + f(2)]/10 \approx 1,16$. Quindi possiamo dire che si ha: $1,07 < \int_{-1}^{2} \frac{x^2}{x^2+1} dx < 1,16$. Il valore esatto è $tan^{-1}(½) - ¾\ (\pi - 4) \approx 1,11$.

3. **a)** $\int_0^{\pi/2} sin\ x\ \ dx$ **; b)** $\int_1^3 ln\ x\ \ dx$ **; c)** $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ dx$ **; d)** $\int_{-1}^{2} e^x\ dx$

a) $s(10) = [f(0) + f(\pi/20) + f(\pi/10) + ... + f(9\pi/20)]/10 \approx 0{,}92$; $S(10) = [f(\pi/20) + f(\pi/10) + ... + f(\pi/2)]/10 \approx 1{,}08$. Quindi possiamo dire che si ha: $0{,}92 < \int_0^{\pi/2} sin\ x\ dx < 1{,}08$. Il valore esatto è 1;

b) $s(10) = [f(1) + f(6/5) + f(7/5) + ... + f(14/5)]/10 \approx 1{,}18$; $S(10) = [f(6/5) + f(7/5) + ... + f(3)]/10 \approx 1{,}40$. Quindi possiamo dire che si ha: $1{,}18 < \int_1^3 ln\ x\ dx < 1{,}40$. Il valore esatto è $ln(27) - 2 \approx 1{,}30$;

c) $s(10) = [f(1/10) + f(2/10) + ... + f(1)]/10 \approx 0{,}83$; $S(10) = [f(0) + f(1/10) + f(2/10) + ... + f(9/10)]/10 \approx 0{,}73$. Quindi possiamo dire che si ha: $0{,}73 < \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ dx < 0{,}83$. Il valore esatto è $\pi/4 \approx 0{,}79$;

d) $s(10) = [f(-1) + f(-7/10) + f(-4/10) + ... + f(17/10)]/10 \approx 6{,}02$; $S(10) = [f(-7/10) + f(-4/10) + ... + f(2)]/10 \approx 8{,}13$. Quindi possiamo dire che si ha: $6{,}02 < \int_{-1}^2 e^x\ dx < 8{,}13$. Il valore esatto è $e^2 - e^{-1} \approx 7{,}02$.

4. Determinare una relazione fra *S*(*n*) e *s*(*n*) relativamente a *f*(*x*) definita e strettamente monotona nell'intervallo [*a*; *b*].

Facilmente si vede che le due somme hanno gli addendi dal secondo a quello di posto $n - 1$ che sono uguali, quindi indicando con A questi addendi avremo, se la funzione è crescente in $[a; b]$: $s(n) = f(a) + A$ e $S(n) = A + f(b) \Rightarrow S(n) = s(n) + f(b) - f(a)$. se invece è decrescente: $S(n) = s(n) + f(a) - f(b)$, quindi in generale: $S(n) = s(n) + |f(b) - f(a)|$.

L'operatore inverso della derivata

Calcolare le derivate rispetto ad x delle seguenti funzioni integrali

1. **a)** $\int_5^x \frac{sin(t)}{t}\ dt$ **; b)** $\int_{-2}^x \frac{\sqrt{t^2+1}}{t^2+3}\ dt$ **; c)** $\int_0^x \frac{ln(t)}{t^2+1}\ dt$ **; d)** $\int_0^x \frac{\sqrt{t}+t}{cos(t)}\ dt$ **; e)** $\int_{-\sqrt{2}}^x \frac{e^{2t}-t}{e^{3t}+t^2}\ dt$ **; f)** $\int_1^x \frac{sin(t^2)}{tan^{-1}(t)}\ dt$

a) $D\left(\int_5^x \frac{sin(t)}{t}\ dt\right) = \frac{sin(x)}{x}$; b) $D\left(\int_{-2}^x \frac{\sqrt{t^2+1}}{t^2+3}\ dt\right) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+3}$; c) $D\left(\int_0^x \frac{ln(t)}{t^2+1}\ dt\right) = \frac{ln(x)}{x^2+1}$;

d) $D\left(\int_0^x \frac{\sqrt{t}+t}{cos(t)}\ dt\right) = \frac{\sqrt{x}+x}{cos(x)}$; e) $D\left(\int_{-\sqrt{2}}^x \frac{e^{2t}-t}{e^{3t}+t^2}\ dt\right) = \frac{e^{2x}-x}{e^{3x}+x^2}$; f) $D\left(\int_1^x \frac{sin(t^2)}{tan^{-1}(t)}\ dt\right) = \frac{sin(x^2)}{tan^{-1}(x)}$

2. **a)** $\int_2^{x^2} \frac{sin(t)}{t}\ dt$ **; b)** $\int_0^{x^2+x} \frac{\sqrt{t}+t}{cos(t)}\ dt$ **; c)** $\int_1^{2x+1} e^{-t^2+1}\ dt$

a) $D\left(\int_2^{x^2} \frac{sin(t)}{t}\ dt\right) = \frac{sin(x^2)}{x^2}\cdot 2x = \frac{2sin(x^2)}{x}$; b) $D\left(\int_0^{x^2+x} \frac{\sqrt{t}+t}{cos(t)}\ dt\right) = \frac{\sqrt{x^2+x}+x^2+x}{cos(x^2+x)}\cdot(2x+1)$;

c) $D\left(\int_1^{2x+1} e^{-t^2+1}\ dt\right) = e^{-(2x+1)^2+1}\cdot 2 = 2e^{-4x^2-4x}$

3. $\int_a^x f(t)\ dt$, con f continua e $a \in \mathbb{R}$

$$D\left(\int_a^x f(t)\ dt\right) = f(x)$$

4. **a)** $\int_x^{x+1} sin(t)\ dt$ **; b)** $\int_{x^2}^{x^3+1} cos(t)\ dt$ **; c)** $\int_{x^2}^{x^2+x} e^t\ dt, x > 1$

a) $D\left(\int_x^{x+1} sin(t)\ dt\right) = sin(x+1) - sin(x)$; b) $D\left(\int_{x^2}^{x^3+1} cos(t)\ dt\right) = cos(x^3+1)\cdot 3x^2 - cos(x^2)\cdot 2x$;

c) $D\left(\int_{x^2}^{x^2+x} e^t\ dt, x>1\right) = e^{x^2+x}\cdot(2x+1) - e^{x^2}\cdot 2x = e^{x^2}\cdot\left(2xe^x + e^x - 2x\right)$

5. **a)** $\int_{x+1}^{x^2} e^{t^2+1}\ dt, x>1$ **; b)** $\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt[3]{x^2}} \left(t^2+3t+1\right) dt, 0<x<1$ **; c)** $\int_{tan(x^2)}^{tan(x^4)} tan^{-1}(t)\ dt, x>1$

a) $D\left(\int_{x+1}^{x^2} e^{t^2+1}\ dt, x>1\right) = e^{x^4+1}\cdot 2x - e^{(x+1)^2+1} = 2xe^{x^4+1} - e^{x^2+2x+2}$; b) $D\left(\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt[3]{x^2}} \left(t^2+3t+1\right) dt, 0<x<1\right) =$

$= \left(x\sqrt[3]{x} + 3\sqrt[3]{x^2} + 1\right)\cdot\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - \left(x+3\sqrt{x}+1\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$; c) $D\left(\int_{tan(x^2)}^{tan(x^4)} tan^{-1}(t)\ dt, x>1\right) = x^4[tan^2(x^4) + 1]\cdot 4x^3 -$

$x^2\,[tan^2(x^2) + 1]\cdot 2x.$

Usando il teorema di De l'Hôpital calcolare i seguenti limiti

6. $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x\cdot cos(x)}$**, con *f*(*x*) funzione continua per *x* > 0, tale che *f*(0) = 1.**

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{cos(x) - x\cdot sin(x)} = 1$

7. **a)** $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} cos(t)\,dt}{x\cdot sin(x)}$ **; b)** $\lim_{x\to 1^+}\frac{\int_1^{x^3} e^{t+2}\,dt}{ln(x)}$ **; c)** $\lim_{x\to -2}\frac{\int_3^{x^2-1}\sqrt{t^2+t+1}\,dt}{x^3+8}$

a) $\lim_{x\to 0}\frac{cos(x^2)\cdot 2x}{sin(x)+x\cdot cos(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-4x^2 sin(x^2) + 2cos(x^2)}{cos(x)+cos(x)-x\cdot sin(x)} = \frac{2}{2} = 1$;

b) $\lim_{x\to 1^+}\frac{3x^2 e^{x^2+2}}{1/x} = 3e^3$; c) $\lim_{x\to -2}\frac{2\cancel{x}\sqrt{(x^2-1)^2 + x^2 \cancel{-1+1}}}{3x^{\cancel{2}}} = -\frac{\sqrt{13}}{3}$

8. **Calcolare a)** $\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x e^{-t^2}\,dt}{1-cos(x)}$ **; b)** $\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x \frac{sin(t)}{t}\,dt}{ln(1+x)}$ **; c)** $\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x \frac{ln(t)}{t}\,dt}{\int_0^x e^{-t}\,dt}$

Usando il teorema fondamentale del calcolo integrale e la regola di De L'Hopital, otteniamo:

a) $\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-x^2}}{sin(x)} = +\infty$; b) $\lim_{x\to 0^+}\frac{(1+x)sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+}(1+x) = 1$; c) $\lim_{x\to 0^+}\frac{ln(x)}{xe^{-x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x ln(x)}{x} = -\infty$

Calcolare i seguenti integrali indefiniti

9. **a)** $\int \sqrt[8]{x}\,dx$ **; b)** $\int \sqrt[7]{x^2}\,dx$ **; c)** $\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\,dx$ **; d)** $\int \frac{1}{x^{e+1}}\,dx$

a) $\int x^{1/8}\,dx = \frac{x^{1/8-1}}{1/8+1} + c = \frac{8}{9\sqrt[8]{x^7}} + c$; b) $\int x^{2/7}\,dx = \frac{x^{9/7}}{9/7} + c = \frac{7x\sqrt[7]{x^2}}{9} + c$;

c) $\int x^{-1/4}\,dx = \frac{x^{3/4}}{3/4} + c = \frac{4\sqrt[4]{x^3}}{3} + c$; d) $\int x^{-e-1}\,dx = \frac{x^{-e}}{-e} + c = -\frac{1}{ex^e} + c$

10. **a)** $\int 2^x\,dx$ **; b)** $\int \frac{sin\ 2x}{sin\ x}\,dx$ **; c)** $\int \frac{x^2}{\sqrt{x}}\,dx$ **; d)** $\int \sqrt[8]{\frac{3}{x}}\,dx$

a) $\frac{2^x}{ln(2)}+c$; b) $\int \frac{2\cancel{sin\ x}\ cos\ x}{\cancel{sin\ x}}dx = 2sin\ x + c$; c) $\int x^{2-1/2}\,dx = \frac{x^{5/2}}{5/2}+c = \frac{2x^2\sqrt{x}}{5}+c$;

d) $\int \sqrt[8]{3}x^{-1/8}\,dx = \frac{\sqrt[8]{3}x^{7/8}}{7/8}+c = \frac{8\sqrt[8]{3x^7}}{7}+c$

11. **a)** $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x}}dx$ **; b)** $\int \frac{2}{x}dx$ **; c)** $\int \frac{sec(x)}{\sqrt{1-sin^2(x)}}dx$ **; d)** $\int 2^{x+3}\,dx$

a) $\int x^{2/3-1/4}\,dx = \frac{x^{17/12}}{17/12}+c = \frac{12x\sqrt[12]{x^5}}{17}+c$; b) $2ln(|x|) + c$; c) $\int \frac{sec(x)}{cos(x)}dx = \int \frac{1}{cos^2(x)}dx = tan(x)+c$;

d) $8\int 2^x\,dx = \frac{2^{x+3}}{ln(2)}+c$

12. **a)** $\left(\int \sqrt[3]{x^5} - \frac{7}{x^2} + \frac{9}{\sqrt[5]{2x^3}}\right)dx$ **; b)** $\int\left(x^e - e^x + \frac{\pi}{\sqrt[3]{4x}}\right)dx$ **; c)** $\int\left(\sqrt[3]{3x^4} - \frac{2}{3}\cdot sin\ x - \frac{3}{cos^2\ x}\right)dx$

a) $\int\left(x^{5/3} - 7x^{-2} + \frac{9x^{-3/5}}{\sqrt[5]{2}}\right)dx = \frac{x^{8/3}}{8/3} + \frac{7}{x} + \frac{45x^{2/5}}{2\sqrt[5]{2}} + c = \frac{3x^2\sqrt[3]{x^2}}{8} + \frac{7}{x} + \frac{45\sqrt[5]{x^2}}{2\sqrt[5]{2}} + c$;

b) $\int\left(x^e - e^x + \frac{\pi x^{-1/3}}{\sqrt[3]{4}}\right)dx = \frac{x^{e+1}}{e+1} - e^x + \frac{3\pi\sqrt[3]{x^2}}{2\sqrt[3]{4}} + c$;

c) $\int\left(\sqrt[3]{3}x^{4/3} - \frac{2}{3}sin\ x - \frac{3}{cos^2\ x}\right)dx = \frac{\sqrt[3]{3}x^{7/3}}{7/3} + \frac{2}{3}cos\ x - 3tan\ x + c = \frac{3x^2\sqrt[3]{3x}}{7} + \frac{2}{3}cos\ x - 3tan\ x + c$

13. **a)** $\int\left(\sqrt[5]{4}cos\ x - \frac{5}{x^2+1} + \frac{2}{\sqrt[3]{x^5}}\right)dx$ **; b)** $\int\left(2\sqrt[3]{x} - \frac{17}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2}{x}\right)dx$

a) $\sqrt[5]{4}sin\ x - 5tan^{-1}\ x - \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}} + c$; b) $\frac{3x\sqrt[3]{x}}{2} - 17sin^{-1}\ x + 2ln\ |x| + c$

14. **a)** $\int\left(5^x + \frac{2}{x^{e+1}} + \frac{3}{\sqrt[5]{x^e}}\right)dx$ **; b)** $\int\left(4^{x+1} - \frac{8}{x^{\pi+1}} + \frac{2}{\sqrt[e]{x^2}}\right)dx$ **; c)** $\int\left(\frac{2}{7^x} - \frac{1}{x^3} + \frac{sin\ x}{\sqrt[3]{7}}\right)\ dx$

a) $\int\ 5^x + 2x^{-e-1} + 3x^{-e/5}\ dx = \frac{5^x}{ln\ 5} - \frac{2x^{-e}}{e} + \frac{15x^{\frac{5-e}{5}}}{5-e} + c = \frac{5^x}{ln\ 5} - \frac{2}{e\cdot x^e} + \frac{15\sqrt[5]{x^{5-e}}}{5-e} + c$;

b) $\int\ 4^{x+1} - 8x^{-\pi-1} + 2x^{-2/e}\ dx = \frac{4^{x+1}}{ln\ 4} - \frac{8}{\pi x^\pi} + \frac{2e\cdot x^{\frac{e-2}{e}}}{e-2} + c = \frac{4^{x+1}}{ln\ 4} - \frac{8}{\pi x^\pi} + \frac{2e\cdot\sqrt[e]{x^{e-2}}}{e-2} + c$;

c) $-\frac{2}{7^x\cdot ln\ 7} + \frac{1}{2x^2} - \frac{cos\ x}{\sqrt[3]{7}}$

15. **a)** $\int\left(\pi^x - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}^x} + \frac{2}{3\cdot cos^2\ x}\right)dx$ **; b)** $\int\left(\sqrt{3}^{x-1} - \frac{1}{3x} - \frac{1}{\sqrt[\pi]{x^e}}\right)dx$

a) $\int\left(\pi^x - \sqrt{3}\cdot 2^{-x/2} + \frac{2}{3cos^2\ x}\right)dx = \frac{\pi^x}{ln\ \pi} + \frac{2\sqrt{3}\cdot 2^{-x/2}}{ln\ 2} + \frac{2}{3}tan\ x + c = \frac{\pi^x}{ln\ \pi} + \frac{2\sqrt{3\cdot 2^{-x}}}{ln\ 2} + \frac{2}{3}tan\ x + c$;

b) $\int\left(3^{\frac{x-1}{2}} - \frac{1}{3x} - x^{-\frac{e}{\pi}}\right)dx = -\frac{2\cdot\sqrt{3^{x-1}}}{ln\ 3} - \frac{1}{3}ln\ x - \frac{\pi\cdot x^{\frac{\pi-e}{\pi}}}{\pi-e} + c$

16. **a)** $\int x+1^{\,2}\,dx$ **; b)** $\int 2x+1^{\,3}\,dx$ **; c)** $\int \frac{x^2+2x+1}{x+1}dx$

a) $(x+1)^3/3+c$; b) $\frac{1}{2}\int 2\cdot\ 2x+1^{\,3}\,dx=\frac{2x+1^{\,4}}{8}+c$; c) $\int \frac{x+1^{\,2}}{x+1}dx=\int x+1\ dx$ = ½ $(x+1)^2+c$;

17. **a)** $\int \frac{x^2+2}{x^2+1}dx$ **; b)** $\int \frac{x^3+x^2-3x+1}{x}dx$

a) $\int \frac{x^2+1+1}{x^2+1}dx=\int\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)dx=x+tan^{-1}\ x\ +c$;

b) $\int\left(x^2+x-3+\frac{1}{x}\right)dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-3x+ln\ |x|\ +c$

18. **a)** $\int \frac{\sqrt{x}+2\cdot\sqrt[3]{x}-3}{\sqrt[4]{x}}dx$ **; b)** $\int \frac{2^x+4^x}{2^x}dx$

a) $\int\ x^{1/2-1/4}+2x^{1/3-1/4}-3x^{-1/4}\ dx=\frac{4x^{5/4}}{5}+\frac{24x^{13/12}}{13}-4x^{3/4}+c=\frac{4\sqrt[5]{x^4}}{5}+\frac{24x\sqrt[12]{x}}{13}-4\sqrt[4]{x^3}+c$;

b) $\int\ 1+2^x\ dx=x+\frac{2^x}{ln\ 2}+c$

19. **a)** $\int \frac{cos\ 2x}{cos^2\ x}dx$ **; b)** $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x+1}dx$ **; c)** $\int \frac{e^{3x}-e^{2x}+1}{e^x}dx$

a) $\int \frac{2cos^2\ x\ -1}{cos^2\ x}dx=\int\left(2-\frac{1}{cos^2\ x}\right)dx=2x-tan\ x\ +c$; b) $\int\ e^x-1\ dx=e^x-x+c$;

c) $\int\ e^{2x}-e^x+e^{-x}\ dx=\frac{e^{2x}}{2}-e^x-e^{-x}+c$

20. **a)** $\int \frac{2^x-3^x+1}{4^x}dx$ **; b)** $\int \frac{x^4+2x^2+3}{x^2+1}dx$

a) $\int\ 2^{-x}-\ 3/4\ ^x+4^{-x}\ dx=-\frac{2^{-x}}{ln\ 2}-\frac{3/4\ ^x}{ln\ 3/4}-\frac{4^{-x}}{ln\ 4}+c=-\frac{1}{ln\ 2\ 2^x}-\frac{3^x}{ln\ 3/4\ 4^x}-$
$-\frac{1}{2ln\ 2\ 4^x}+c==-\frac{2^{x+1}+1}{2ln\ 2\ 4^x}-\frac{3^x}{ln\ 3/4\ 4^x}+c=-4^{-x}\left[\frac{2^{x+1}+1}{ln\ 4}+\frac{3^x}{ln\ 3/4}\right]+c$;

b) $\int \frac{x^2+1\ ^2+2}{x^2+1}dx=\int\left(x^2+1+\frac{2}{x^2+1}\right)dx=\frac{x^3}{3}+x+2tan^{-1}\ x\ +c$

21. **a)** $\int \frac{e^{2x}+2e^x+1}{e^x+1}dx$ **; b)** $\int sin^2\left(\frac{x}{2}\right)dx$ **; c)** $\int tan^2\ x\ dx$

a) $\int \frac{e^x+1\ ^{\cancel{2}}}{\cancel{e^x+1}}dx=\int\ (e^x+1)\,dx=e^x+x+c$; b) $\int \frac{1-cos\ x}{2}dx=\frac{x-sin\ x}{2}+c$;

c) $\int\left[tan^2\ x\ +1-1\right]dx=tan\ x\ -x+c$

22. $\int \frac{sin\ x\ +sin\ 3x}{3\cdot sin\ 2x}dx$ **(Suggerimento: applicare la formula di prostaferesi)**

$$\int \frac{2\,\cancel{\sin 2x}\,\cos x}{3\cdot \cancel{\sin 2x}}dx=\frac{2}{3}\sin x+c$$

23. **a)** $\int \frac{\cos 2x}{\cos x\cdot[\cos x+\cos 3x]}dx$ **; b)** $\int \frac{x^5+x^3-x^2}{x^2+1}dx$

a) $\int \frac{\cancel{\cos 2x}}{2\cos x\cdot\cos x\,\cancel{\cos 2x}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\frac{\tan x}{2}+c$;

b) $\int\left[\frac{x^3\cdot\cancel{x^2+1}}{\cancel{x^2+1}}-\frac{\cancel{x^2+1}}{\cancel{x^2+1}}+\frac{1}{x^2+1}\right]dx=\frac{x^4}{4}-x+\tan^{-1}x+c$

24. **a)** $\int\left[\sqrt[4]{5x+1}^{\,7}+\frac{9}{2x+1^{\,8}}\right]dx$ **; b)** $\int \sin^3 x\cos x\,dx$

a) $\int\left[5x+1^{\,7/4}\cdot\frac{5}{5}+9\,2x+1^{\,-8}\cdot\frac{2}{2}\right]dx=5x+1^{\,11/4}\cdot\frac{4}{55}-2x+1^{\,-7}\cdot\frac{9}{14}+c=\frac{4\,5x+1^{\,2}\sqrt[4]{5x+1^{\,3}}}{55}-\frac{9}{14\,2x+1^{\,7}}+c$;

b) $\int \sin^3 x\,d[\sin x]=\frac{\sin^4 x}{4}+c$

25. **a)** $\int\left[\sqrt[3]{2x-3^{\,4}}+\frac{7}{3x+1^{\,2}}\right]dx$ **; b)** $\int x\cdot\sin x^2\,dx$

a) $\int\left[2x-3^{\,4/3}\cdot\frac{2}{2}+7\,3x+1^{\,-2}\cdot\frac{3}{3}\right]dx=2x-3^{\,7/3}\cdot\frac{3}{14}-3x+1^{\,-1}\cdot\frac{7}{3}+c=\frac{3\sqrt[3]{2x-3^{\,7}}}{14}-\frac{7}{3\,3x+1}+c$;

b) $\frac{1}{2}\int 2x\cdot\sin x^2\,dx=-\frac{\cos x^2}{2}+c$

26. **a)** $\int\left[\sqrt[6]{12x+1^{\,5}}-\frac{3}{\sqrt[5]{3-2x}}\right]dx$ **; b)** $\int\frac{e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

a) $\int\left[12x+1^{\,5/6}\cdot\frac{12}{12}-3\,3-2x^{\,-1/5}\cdot\frac{-2}{-2}\right]dx=12x+1^{\,11/6}\cdot\frac{1}{22}+\frac{15}{8}\,3-2x^{\,4/5}+c=\frac{\sqrt[6]{12x+1^{\,11}}}{22}+\frac{15\sqrt[5]{3-2x^{\,4}}}{8}+c$;

b) $\int e^{2\sqrt{x}}d\left(2\sqrt{x}\right)=e^{2\sqrt{x}}+c$

27. **a)** $\int x^2+1^{\,3}\cdot x\,dx$ **; b)** $\int\sqrt{x^2+x+1}\cdot 2x+1\,dx$

a) $\frac{1}{2}\int x^2+1^{\,3}\cdot 2x\,dx=\frac{x^2+1^{\,4}}{8}+c$;

b) $\int x^2+x+1^{\,1/2}\,d\sqrt{x^2+x+1}=\frac{2\,x^2+x+1^{\,3/2}}{3}+c=\frac{2\sqrt{x^2+x+1^{\,3}}}{3}+c$

28. **a)** $\int e^x\cdot e^x+1\,dx$ **;b)** $\int\frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}dx$ **;c)** $\int\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$

a) $\int e^{2x}+e^x\,dx=\frac{e^{2x}}{2}+e^x+c$; b) $\int\tan^{-1}x\,d[\tan^{-1}x]=\frac{[\tan^{-1}x]^2}{2}+c$;

c) $\int \frac{d\ e^x+e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx = ln\ e^x+e^{-x}\ +c = ln\left(\frac{e^{2x}+1}{e^x}\right)+c = ln\ e^{2x}+1\ -x+c$

29. **a)** $\int \frac{1+cos\ x}{x+sin\ x}dx$ **; b)** $\int \frac{sin\ x\ +cos\ x}{sin\ x}dx$ **; c)** $\int \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

a) $\int \frac{d\left[x+sin\ x\right]}{x+sin\ x} = ln\left[\left|x+sin\ x\right|\right]+c$; b) $\int\left[1+\frac{D\left[sin\ x\right]}{sin\ x}\right]dx = x+ln\ \left|sin\ x\right|\ +c$;

c) $-\frac{3}{2}\int 1-x^2\ ^{-1/2}\cdot\ -2x\ dx = -\frac{3}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\left(-x^2\right)^{1/2}+c = -3\sqrt{1-x^2}+c$

30. **a)** $\int \frac{3x+5}{x^2+1}dx$ **; b)** $\int \frac{sin^{-1}\ x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ **c)** $\int \sqrt{2^x}\ dx$

a) $\frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx+\int \frac{5}{x^2+1}dx = \frac{3}{2}ln\ x^2+1\ +5tan^{-1}\ x\ +c$;

b) $\int sin^{-1}\ x\ d\left[sin^{-1}\ x\ \right] = \frac{\left[sin^{-1}\ x\ \right]^2}{2}+c$ c) $2\int \frac{2^{x/2}}{2}dx = \frac{2\sqrt{2^x}}{ln(2)}+C$

31. **a)** $\int \frac{3}{x^2+6x+9}dx$ **; b)** $\int \frac{x}{4x^4-12x^2+9}dx$

a) $\int 3\ x+3\ ^{-2}dx = \frac{-3}{x+3}+c$; b) $\frac{1}{4}\int 4x\ 2x^2-3\ ^{-2}dx = \frac{-1}{4\ 3-2x^2}+c$

32. **a)** $\int \frac{ln\left(\left|x^3\right|\right)}{x}dx$ **; b)** $\int \frac{ln\left(x^4\right)}{2x}dx$ **; c)** $\int \frac{tan(x)}{cos^2(x)}dx$

a) $D\left[ln\left(\left|x^3\right|\right)\right] = \frac{3x^2}{x^3} = \frac{3}{x} \Rightarrow \frac{1}{3}\int ln\left(\left|x^3\right|\right)d\left[ln\left(\left|x^3\right|\right)\right] = \frac{3ln^2\left(\left|x^3\right|\right)}{2}+c$;

b) $D\left[ln\left(x^4\right)\right] = \frac{4x^3}{x^4} = \frac{4}{x} \Rightarrow \frac{1}{8}\int ln\left(x^4\right)d\left[ln\left(x^4\right)\right] = \frac{ln^2\left(x^4\right)}{16}+c$;

c) $\int tan(x)d\left[tan(x)\right] = \frac{tan^2(x)}{2}+c$

33. **a)** $\int x\cdot\sqrt{x^2+1}\,dx$ **; b)** $\int x\cdot e^{x^2+5}dx$ **; c)** $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

a) $\frac{1}{2}\int\left(x^2+1\right)^{1/2}d\left(\sqrt{x^2+1}\right) = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{3}\left(x^2+1\right)^{3/2}+c = \frac{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}{3}+c$; b) $\frac{1}{2}\int 2x\cdot e^{x^2+5}dx = \frac{e^{x^2+5}}{2}+c$;

c) $2\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}dx = 2e^{\sqrt{x}}+c$

34. **a)** $\int x^2\cdot\sqrt[4]{x^3+1}\,dx$ **; b)** $\int \frac{sin\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}dx$ **; c)** $\int \frac{5x}{x^2+12}dx$ **; d)** $\int \frac{cos\left(\sqrt[3]{x^2}\right)}{\sqrt[3]{x}}dx$

a) $\frac{1}{3}\int 3x^2\cdot\left(x^3+1\right)^{1/4}dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}\left(x^3+1\right)^{5/4}+c = \frac{4\sqrt[4]{\left(x^3+1\right)^5}}{15}+c$; b) $2\int \frac{sin\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}dx = -2cos\left(\sqrt{x}\right)+c$;

c) $\frac{5}{2}\int \frac{d\left(x^2+12\right)}{x^2+12} = \frac{5ln\left(x^2+12\right)}{2}+c$; d) $\frac{3}{2}\int cos\left(\sqrt[3]{x^2}\right)\ d\left(\sqrt[3]{x^2}\right) = \frac{3sin\left(\sqrt[3]{x^2}\right)}{2}+c$

35. **a)** $\int \frac{2x+5}{2x-1}\,dx$ **; b)** $\int \frac{4x+1}{2x-15}\,dx$ **; c)** $\int \frac{2x-7}{3x-10}\,dx$

a) $\int \frac{2x-1+6}{2x-1}\,dx = \int\left(1+3\cdot\frac{2}{2x-1}\right)dx = x+ln\left|2x-1\right|^3+c$;

b) $\int \frac{4x-30+31}{2x-15}\,dx = \int\left(2+\frac{31}{2}\frac{2}{2x-15}\right)dx = 2x+\frac{31}{2}ln\left|2x-15\right|+c$;

c) $\frac{2}{3}\int \frac{3x-21/2}{3x-10}\,dx = \frac{2}{3}\int\left(1-\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{3x-10}\right)dx = \frac{2}{3}x-\frac{1}{9}ln\left|3x-10\right|+c$

36. **a)** $\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+3}}\,dx$ **; b)** $\int \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3+1}}\,dx$ **; c)** $\int \frac{x^3+x}{x^4+1}\,dx$

a) $\frac{1}{4}\int\left(2x^2+3\right)^{-1/2}\cdot 4x\,dx = \frac{1}{4}\cdot 2\left(2x^2+3\right)^{1/2}+c = \frac{\sqrt{2x^2+3}}{2}+c$;

b) $\frac{1}{3}\int\left(x^3+1\right)^{-1/4}\cdot 3x^2dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}\left(x^3+1\right)^{3/4}+c = \frac{4}{9}\sqrt[4]{\left(x^3+1\right)^3}$;

c) $\frac{1}{4}\int\frac{4x^3}{x^4+1}\,dx+\frac{1}{2}\int\frac{2x}{\left(x^2\right)^2+1}\,dx = \frac{ln\left(x^4+1\right)}{4}+\frac{1}{2}tan^{-1}\left(x^2\right)+c = \frac{ln\left(x^4+1\right)+2tan^{-1}\left(x^2\right)}{4}+c$

37. **a)** $\int \frac{1}{sin(x)}\,dx$ **Sugg. Scrivere *sin*(*x*) = 2*sin*(*x*/2)*cos*(*x*/2); b)** $\int \frac{1}{cos(x)}\,dx$**.**

a) $\int\frac{sin^2(x/2)+cos^2(x/2)}{2sin(x/2)cos(x/2)}\,dx = \frac{1}{2}\int\left[tan\left(\frac{x}{2}\right)+cot\left(\frac{x}{2}\right)\right]dx = -ln\left[cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]+ln\left[sin\left(\frac{x}{2}\right)\right]+c = ln\left[tan\left(\frac{x}{2}\right)\right]+c$

b) $\int\frac{1}{sin(\pi/2-x)}\,dx = -\int\frac{1}{sin(x-\pi/2)}\,dx = -ln\left[tan\left(\frac{2x-\pi}{2}\right)\right]+c = ln\left[cot\left(\frac{2x-\pi}{2}\right)\right]+c$. Abbiamo sfruttato il risultato precedente.

38. **a)** $\int\frac{1}{x^2+4}\,dx$ **; b)** $\int\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$ **; c)** $\int\frac{1}{16x^2+1}\,dx$

a) $\frac{1}{2}\int\frac{1/2}{(x/2)^2+1}\,dx = \frac{1}{2}tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+c$; b) $\int\frac{1/3}{\sqrt{1-(x/3)^2}}\,dx = sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)+c$;

c) $\frac{1}{4}\int\frac{4}{(4x)^2+1}\,dx = \frac{1}{4}tan^{-1}(4x)+c$

39. **a)** $\int\frac{1}{\sqrt{1-25x^2}}\,dx$ **; b)** $\int\frac{1}{\sqrt{1-6x^2}}\,dx$ **; c)** $\int\frac{1}{x^2+3}\,dx$

a) $\frac{1}{5}\int\frac{5}{\sqrt{1-(5x)^2}}\,dx = \frac{sin^{-1}(5x)}{5}+c$; b) $\frac{1}{\sqrt{6}}\int\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{1-\left(\sqrt{6}x\right)^2}}\,dx = \frac{sin^{-1}\left(\sqrt{6x}\right)}{\sqrt{6}}+c$;

c) $\frac{\sqrt{3}}{3}\int\frac{1/\sqrt{3}}{\left(x/\sqrt{3}\right)^2+1}\,dx = \frac{tan^{-1}\left(\sqrt{3x}\right)}{\sqrt{3}}+c$

40. **a)** $\int\frac{3x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$ **; b)** $\int\frac{1}{9x^2+16}\,dx$ **; c)** $\int\frac{1}{\sqrt{25-4x^2}}\,dx$

a) $-\frac{3}{8}\int\left(1-4x^2\right)^{-1/2}\cdot(-8x)\,dx = -\frac{3}{4}\left(1-4x^2\right)^{1/2}+c = -\frac{3\sqrt{1-4x^2}}{4}+c$;

b) $\frac{1}{16}\int\frac{1}{(3x/4)^2+1}dx=\frac{1}{12}\int\frac{3/4}{(3x/4)^2+1}dx=\frac{tan(3x/4)}{12}+c$;

c) $\frac{1}{5}\int\frac{1}{\sqrt{1-(2x/5)^2}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2/5}{\sqrt{1-(2x/5)^2}}dx=\frac{sin^{-1}(2x/5)}{2}+c$

41. **a)** $\int\frac{5x-1}{5x^2+9}dx$; **b)** $\int\frac{11x+5}{x^2+1}dx$

a) $\int\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{10x}{5x^2+9}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{5}x/3\right)^2+1}\right)dx=\frac{1}{2}ln\left(5x^2+9\right)-\frac{1}{3\sqrt{5}}\int\left(\frac{\sqrt{5}/3}{\left(\sqrt{5}x/3\right)^2+1}\right)dx=$

$=ln\sqrt{5x^2+9}-\frac{tan^{-1}\left(\sqrt{5}x/3\right)}{3\sqrt{5}}+c=\frac{ln\sqrt{\left(5x^2+9\right)^{15}}-\sqrt{5}tan^{-1}\left(\sqrt{5}x/3\right)}{15}+c$;

b) $\frac{11}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx+5\int\frac{1}{x^2+1}dx=\frac{11}{2}ln\left(x^2+1\right)+5tan^{-1}(x)+c=\sqrt{ln\left(x^2+1\right)^{11}}+5tan^{-1}(x)+c$

42. **a)** $\int\frac{6x-1}{x^2+7}dx$; **b)** $\int\frac{2x+5}{16x^2+1}dx$

a) $3\int\frac{2x}{x^2+7}dx-\frac{1}{\sqrt{7}}\int\frac{1/\sqrt{7}}{\left(x/\sqrt{7}\right)^2+1}dx=3ln\left(x^2+7\right)-\frac{\sqrt{7}tan\left(x/\sqrt{7}\right)}{7}+c=\frac{ln\left(x^2+7\right)^{21}-\sqrt{7}tan\left(x/\sqrt{7}\right)}{7}+c$;

b) $\frac{1}{16}\int\frac{32x}{16x^2+1}dx+\frac{5}{4}\int\frac{4}{(4x)^2+1}dx=\frac{ln\left(16x^2+1\right)}{16}+\frac{5}{4}tan^{-1}(4x)+c=\frac{ln\left(16x^2+1\right)+20tan^{-1}(4x)}{16}+c$

43. **a)** $\int\frac{5x+2}{3x^2+1}dx$; **b)** $\int\frac{5x+1}{\sqrt{1-9x^2}}dx$

a) $\frac{5}{6}\int\frac{6x}{3x^2+1}dx+\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}x\right)^2+1}dx=\frac{ln\left(3x^2+1\right)^5}{6}+\frac{2}{\sqrt{3}}tan^{-1}\left(\sqrt{3}x\right)+c=\frac{ln\left(3x^2+1\right)^5+4\sqrt{3}tan^{-1}\left(\sqrt{3}x\right)}{6}+c$;

b) $-\frac{5}{18}\int-18\cdot\left(1-9x^2\right)^{-1/2}dx+\frac{1}{3}\int\frac{3}{\sqrt{1-(3x)^2}}dx=-\frac{5}{9}\left(1-9x^2\right)^{1/2}+\frac{sin^{-1}(3x)}{3}+c=\frac{3sin^{-1}(3x)-5\sqrt{1-9x^2}}{9}+c$

44. **a)** $\int\frac{14x+1}{x^2+35}dx$; **b)** $\int\frac{x^2+3}{2x^2+1}dx$

a) $7\int\frac{2x}{x^2+35}dx+\frac{1}{\sqrt{35}}\int\frac{1/\sqrt{35}}{\left(x/\sqrt{35}\right)^2+1}dx=ln\left(x^2+35\right)^7+\frac{1}{\sqrt{35}}tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{35}}\right)+c=\frac{ln\left(x^2+35\right)^{245}+\sqrt{35}tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{35}}\right)}{35}+c$;

b) $\frac{1}{2}\int\frac{2x^2+1}{2x^2+1}dx+\frac{5}{2}\int\frac{1}{2x^2+1}dx=\frac{x}{2}+\frac{5}{2\sqrt{2}}\int\frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}x\right)^2+1}dx+c=\frac{x}{2}+\frac{5\sqrt{2}}{4}tan^{-1}\left(\sqrt{2}x\right)+c=\frac{2x+5\sqrt{2}tan^{-1}\left(\sqrt{2}x\right)}{4}+c$

45. **a)** $\int\frac{1}{x\cdot ln(x)}dx$; **b)** $\int\frac{1}{x\cdot ln(x)\cdot ln\left[ln(x)\right]}dx$

a) $\int\frac{d\left[ln(x)\right]}{ln(x)}=ln\left|ln(x)\right|+c$; b) $\int\frac{d\left[ln\left[ln(x)\right]\right]}{ln\left[ln(x)\right]}dx=ln\left|ln\left[ln(x)\right]\right|+c$

46. **a)** $\int\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx$; **b)** $\int\frac{x}{2x^4-2x^2+1}dx$

a) $\frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1-\ x^2\ ^2}}\ dx = \frac{1}{2} sin^{-1}\ x^2\ + c$;

b) $2\int \frac{x}{4x^4-4x^2+1+1}\ dx = \frac{1}{2}\int \frac{4x}{2x^2-1\ ^2+1}\ dx = \frac{tan^{-1}\ 2x^2-1}{2} + c$

47. **a)** $\int \frac{cos\ x}{1+sin^2\ x} dx$; b) $\int \frac{1}{x\cdot\left[1+ln^2\ x\right]} dx$

a) $\int \frac{d\left[sin\ x\right]}{1+sin^2\ x} dx = tan^{-1}\left[sin\ x\right]+c$; b) $\int \frac{d\left[ln\ x\right]}{1+ln^2\ x} = tan^{-1}\left[ln\ x\right]+c$

48. **a)** $\int \frac{1}{x\cdot\sqrt{1-ln^2\ x}} dx$; **b)** $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx$

a) $\int \frac{d\left[ln\ x\right]}{\sqrt{1-ln^2\ x}} = sin^{-1}\left[ln\ x\right]+c$; b) $sin^{-1}(e^x) + c$

49. **a)** $\int sin^3(x)\ dx$; **b)** $\int cos^5(x)\ dx$; **c)** $\int \frac{2}{x\cdot ln\left(x^2\right)} dx$

a) $\int sin(x)\left[1-cos^2(x)\right]\ dx = \int sin(x)\ dx + \int cos^2(x) sin(x)\ dx = -cos(x) + \frac{cos^3(x)}{3} + c = \frac{cos(x)\cdot\left[2cos^2(x)-3\right]}{6} + c$;

b) $\int cos(x)\cdot\left[1-sin^2(x)\right]^2\ dx = \int cos(x)\cdot\left[1-sin^2(x)\right]^2\ dx = \int cos(x)dx + \int sin^4(x)cos(x)dx -$
$-2\int sin^2(x)cos(x)dx = sin(x) + \frac{sin^5(x)}{5} - \frac{2sin^3(x)}{3} + c$

c) $D\left[ln\left(x^2\right)\right] = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x} \Rightarrow \int \frac{d\left[ln\left(x^2\right)\right]}{ln\left(x^2\right)} = ln\left|ln\left(x^2\right)\right| + c$

50. **a)** $\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} dx$; **b)** $\int \frac{1}{\sqrt{2-5x^2}} dx$; **c)** $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2-x}} dx$

a) $\frac{1}{2}\int \frac{2}{\sqrt{1-\ 2x\ ^2}} dx = \frac{sin^{-1}\ 2x}{2} + c$; b) $\frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{\sqrt{5/2}}{\sqrt{1-\ \sqrt{5/2}x\ ^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{5}} sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{5}{2}}x\right) + c$;

c) $\int \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}} dx = \frac{2}{\sqrt{5}}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x+1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\sqrt{5}}\right)^2}} dx = \int \frac{2/\sqrt{5}}{\sqrt{1-\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right)^2}} dx = sin^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right) + c$

51. **a)** $\int \frac{1}{x^2+2x+3} dx$; **b)** $\int \frac{1}{4x^2+4x+5} dx$

a) $\int \frac{1}{x+1\ ^2+2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1/\sqrt{2}}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1} dx = \frac{tan^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}} + c$;

b) $\int \frac{1}{2x+1\ ^2+4} dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{2}\right)^2+1} dx = \frac{tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{2}\right)}{4} + c$

52. **a)** $\int \frac{1}{2x^2+x+1}dx$ **; b)** $\int \frac{1}{3x^2+3x+4}dx$

a)
$$\int \frac{1}{\left(\sqrt{2}x+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2+1-\frac{1}{8}}dx=\int \frac{1}{\left(\frac{4x+1}{2\sqrt{2}}\right)^2+\frac{7}{8}}dx=\frac{8}{7}\int \frac{1}{\left(\frac{4x+1}{\sqrt{7}}\right)^2+1}dx=$$
$$=\frac{2}{\sqrt{7}}\int \frac{4/\sqrt{7}}{\left(\frac{4x+1}{\sqrt{7}}\right)^2+1}dx=\frac{2}{\sqrt{7}}tan^{-1}\left(\frac{4x+1}{\sqrt{7}}\right)+c \quad ;$$

b)
$$\int \frac{1}{\left(\sqrt{3}x+\frac{3}{2\sqrt{3}}\right)^2+4-\frac{3}{4}}dx=\int \frac{1}{\left(\frac{6x+3}{2\sqrt{3}}\right)^2+\frac{13}{4}}dx=\frac{4}{13}\int \frac{1}{\left(\frac{6x+3}{\sqrt{39}}\right)^2+1}dx=$$
$$=\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{13}}\int \frac{6/\sqrt{39}}{\left(\frac{6x+3}{\sqrt{39}}\right)^2+1}dx=\frac{2}{\sqrt{39}}tan^{-1}\left(\frac{6x+3}{\sqrt{39}}\right)+c$$

53. **a)** $\int \frac{8x+1}{9x^2-12x+5}dx$ **; b)** $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$ **; c)** $\int \frac{1}{\sqrt{3-x^2}}dx$

a)
$$\frac{4}{9}\int \frac{18x+9/4}{9x^2-12x+5}dx=\frac{4}{9}\int \frac{18x-12}{9x^2-12x+5}dx+\frac{4}{9}\int \frac{57/4}{9x^2-12x+5}dx=$$
$$=\frac{4}{9}ln\ 9x^2-12x+5\ +\frac{19}{9}\int \frac{3}{3x-2\ ^2+1}dx=\frac{ln\ 9x^2-12x+5\ ^4+19tan^{-1}\ 3x-2}{9}+c \quad ;$$

b) $\int \frac{1/2}{\sqrt{1-\ x/2\ ^2}}dx=sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+c$; c) $\int \frac{1/\sqrt{3}}{\sqrt{1-\ x/\sqrt{3}\ ^2}}dx=sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+c$

54. **a)** $\int \frac{1}{\sqrt{2-x^2-4x}}dx$ **; b)** $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2+4x}}dx$ **; c)** $\int \frac{1}{\sqrt{3-2x^2+x}}dx$

a) $\int \frac{1}{\sqrt{6-\ x+2\ ^2}}dx=\int \frac{1/\sqrt{6}}{\sqrt{1-\left(\frac{x+2}{\sqrt{6}}\right)^2}}dx=sin^{-1}\left(\frac{x+2}{\sqrt{6}}\right)+c$;

b) $\int \frac{1}{\sqrt{8-\ x-2\ ^2}}dx=\int \frac{1/\sqrt{8}}{\sqrt{1-\left(\frac{x-2}{\sqrt{8}}\right)^2}}dx=sin^{-1}\left(\frac{x-2}{2\sqrt{2}}\right)+c$;

c) $\int \frac{1}{\sqrt{3+\frac{1}{8}-\left(\sqrt{2}x-\frac{1}{\sqrt{8}}\right)^2}}dx=\int \frac{1}{\sqrt{\frac{25}{8}-\left(\frac{4x-1}{\sqrt{8}}\right)^2}}dx=\frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{4/5}{\sqrt{1-\left(\frac{4x-1}{\cancel{\sqrt{8}}}\cdot\frac{\cancel{\sqrt{8}}}{5}\right)^2}}dx=\frac{\sqrt{2}}{2}sin^{-1}\left(\frac{4x-1}{5}\right)+c$

Negli esercizi seguenti le lettere diverse dalla x indicano parametri reali

55. **a)** $\int sin^n\ x\cdot cos\ x\ dx$ **; b)** $\int \frac{sin\ \sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{x^{n-1}}}dx, n>1$

a) $\int sin^n\ x\ d\left[sin\ x\ \right]=\frac{sin^{n+1}\ x}{n+1}+c$; b) $\int\ sin\ \sqrt[n]{x}\ d\ \sqrt[n]{x}\ =-n\cdot cos\ \sqrt[n]{x}$

56. **a)** $\int \frac{1}{ax+b}dx$ **; b)** $\int \sqrt[n]{ax+b}\,dx, n>1$

a) $\frac{1}{a}\int \frac{a}{ax+b}dx = \frac{ln\ |ax+b|}{a}+c$; b) $\frac{1}{a}\int\ ax+b\ ^{1/n}\cdot a\,dx = \frac{ax+b\ ^{1/n+1}}{a\ \ 1/n+1}+c = \frac{n\cdot\sqrt[n]{\ ax+b\ ^{n+1}}}{a\cdot\ n+1}+c$

57. **a)** $\int \frac{1}{x^2+a^2}dx$ **; b)** $\int \frac{1}{\sqrt[n]{ax+b}}dx, n>1$

a) $\frac{1}{a}\int \frac{1/a}{1+\ \ x/a\ ^2}dx = \frac{1}{a}tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c$;

b) $\frac{1}{a}\int a\cdot\ ax+b\ ^{-1/n}dx = \frac{ax+b\ ^{-1/n+1}}{-1/n+1\ \ a}+c = \frac{n\cdot\sqrt[n]{\ ax+b\ ^{n-1}}}{a\cdot\ n-1}+c$

58. **a)** $\int \frac{ax+b}{ax-b}dx$ **; b)** $\int \frac{ax+b}{x^2+1}dx$

a) $\int \frac{ax-b+2b}{ax-b}dx = \int\left(1+\frac{2b}{ax-b}\right)dx = x+\frac{2b}{a}ln|ax-b|+c$;

b) $\int\left(\frac{a}{2}\frac{2x}{x^2+1}+\frac{b}{x^2+1}\right)dx = \frac{a}{2}ln\ \ x^2+1\ \ +b\cdot tan^{-1}\ \ x\ \ +c = ln\sqrt{\ x^2+1\ ^a}+b\cdot tan^{-1}\ \ x\ \ +c$

59. **a)** $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$ **; b)** $\int \frac{ax+b}{x^2+a^2}dx$

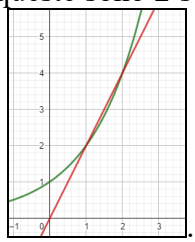
a) $\int \frac{1/a}{\sqrt{1-\ \ x/a\ ^2}}dx = sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c$;

b) $\int\left(\frac{a}{2}\frac{2x}{x^2+a^2}+\frac{b}{a}\frac{1/a}{1+\ \ x/a\ ^2}\right)dx = ln\sqrt{\ x^2+a^2\ ^a}+\frac{b}{a}\cdot tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c$

60. ***Il seguente procedimento*** $\int e^{4x}\,dx = \int\left(e^{2x}\right)^2 dx = \left(\int e^{2x}\,dx\right)^2 = \left(\frac{e^{2x}}{2}\right)^2+c = \frac{e^{4x}}{4}+c$ **, è *errato, ma fornisce un risultato corretto. Dopo avere corretta la procedura, stabilire se tale problema si ha per tutti o solo per alcuni valori di n nel caso di*** $\int e^{2\alpha x}\,dx, \alpha\in\mathbb{R}$ **.**

Intanto verifichiamo che il risultato sia corretto: $\frac{1}{4}\int 4e^{4x}\,dx = \frac{e^{4x}}{4}+c$. In generale si ha $\int e^{2\alpha x}\,dx = \frac{e^{2\alpha x}}{2\alpha}+c$, con la procedura errata avremmo: $\int e^{\alpha x}\,dx = \left(\int e^{\alpha x}\,dx\right)^2 = \left(\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\right)^2+c = \frac{e^{2\alpha x}}{\alpha^2}+c$, che è il risultato corretto solo se $\alpha^2 = 2\alpha \Rightarrow \alpha = 0 \vee 2$.

61. **Con riferimento al precedente esercizio cosa succede se innalziamo l'integrale ad α invece che a 2?**

La procedura sarebbe: $\int e^{\alpha x}\,dx = \left(\int e^{2x}\,dx\right)^\alpha = \left(\frac{e^{2x}}{2}\right)^\alpha+c = \frac{e^{2\alpha x}}{2^\alpha}+c$, stavolta dovrebbe essere: $2^\alpha = 2\alpha \Rightarrow \alpha = 1 \vee 2$, come si osserva facilmente queste sono 2 soluzioni (2 = 2 e 4 = 4) e sono le uniche, come si vece rappresentandole graficamente: 

.

Fra tutte le primitive delle funzioni degli esercizi indicati, determinare il valore della costante additiva affinché si trovi l'unica passante per il punto assegnato

62. a) 11b; (1; 1); b) 13a; (0; 2); c) 16c; (–2; 1); d) 17a; ($\sqrt{3}$; 1); e) 19c; (0; –2)

a) $2ln(1) + c = 1 \Rightarrow c = 1$; b) $\sqrt[5]{4}sin\ 0 - 5tan^{-1}\ 0 - \frac{3}{\sqrt[3]{0^2}} + c = 2$, 0 non è un valore accettabile;

c) $\frac{1}{2}(-2 + 1)^2 + c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$; d) $\sqrt{3} + tan^{-1}(\sqrt{3}) + c = 1 \Rightarrow c = 1 - \pi/3 - \sqrt{3}$;

e) $\frac{1}{2}e^0 - e^0 - e^0 + c \Rightarrow c = 3/2$

63. a) 24b; (π/6; 1); b) 29c; (½; ½); c) 35a; (–1; 1); d) 37a; (π/2; 0); e) 42b; (¼; 1)

a) $\frac{1}{4}sin^4(\pi/6) + c = 1 \Rightarrow c = 63/64$; b) $-3\sqrt{1-\frac{1}{4}} + c = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{3\sqrt{3}+1}{2}$; c) $-1 + ln(|-2 - 1|^3) + c = 1 \Rightarrow c = 2 - ln(27)$; d) $ln[tan(\pi/4)] + c = 0 \Rightarrow c = 0$; e) $\frac{ln(16/16+1)+20tan^{-1}(1)}{16} + c = 1 \Rightarrow c = \frac{16-ln(2)-5\pi}{16}$

Integrazione per parti

Calcolare i seguenti integrali, usando, se possibile, il metodo di integrazione per parti

1. **a)** $\int x \cdot cos(x)dx$; **b)** $\int x \cdot e^x dx$; **c)** $\int x \cdot e^{5x} dx$

a) $\int x \cdot d[sin(x)] = x \cdot sin(x) - \int sin(x)dx = x \cdot sin(x) + cos(x) + c$;

b) $\int x \cdot d(e^x) = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + c = e^x(x-1) + c$;

c) $\int x \cdot d(e^{5x}/5) = \frac{x \cdot e^{5x}}{5} - \frac{1}{5}\int e^{5x}dx = \frac{x \cdot e^{5x}}{5} - \frac{e^{5x}}{25} + c = \frac{e^{5x}(5x-1)}{25} + c$

2. **a)** $\int x^3 \cdot sin(x)dx$; **b)** $\int x^4 \cdot e^x dx$; **c)** $\int x \cdot e^{-x} dx$

a) $\int x^3 \cdot d[-cos(x)] = -x^3 cos(x) + \int 3x^2 cos(x)dx = -x^3 cos(x) + 3x^2 sin(x) - \int 6x \cdot sin(x)dx =$
$= -x^3 cos(x) + 3x^2 sin(x) + 6x \cdot cos(x) - \int 6cos(x)dx = (6x - x^3)cos(x) + (3x^2 - 6)sin(x) + c$;

b) $\int x^4 \cdot d(e^x) = x^4 e^x - \int 4x^3 e^x dx = x^4 e^x - 4x^3 e^x + \int 12x^2 e^x dx = e^x(x^4 - 4x^3 + 12x^2) - \int 24xe^x dx =$
$= e^x(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x) + \int 24e^x dx = e^x(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + c$;

c) $\int x \cdot d(-e^{-x}x) = -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x}dx = -x \cdot e^{-x} - e^{-x} + c = -e^{-x}(x+1) + c$

3. **a)** $\int x^2 \cdot e^{2x} dx$; **b)** $\int [ln(x)]^2 dx$

a) $\int x^2 \cdot d(e^{2x}/2) = \frac{x^2 e^{2x}}{2} - \int \cancel{2}x\frac{e^{2x}}{\cancel{2}}dx = \frac{x^2 e^{2x}}{2} - \frac{xe^{2x}}{2} + \int \frac{e^{2x}}{2}dx = \frac{e^{2x}(2x^2 - 2x + 1)}{4} + c$;

b) $x[ln(x)]^2 - \int 2\cancel{x} \cdot \frac{ln(x)}{\cancel{x}}dx = x[ln(x)]^2 - 2x \cdot ln(x) + \int 2\cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}dx = x[ln(x)]^2 - 2x \cdot ln(x) + 2x + c$

4. **a)** $\int x^2 \cdot ln(x)dx$; **b)** $\int sin^{-1}\ x\ dx$

a) $\int ln(x)d(x^3/3)x = \frac{x^3 ln(x)}{3} - \int \frac{x^{\cancel{3}2}}{3} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}dx = \frac{x^3 ln(x)}{3} - \frac{x^3}{9} + c = \frac{x^3[ln(x^3) - 1]}{9} + c$;

b) $x \cdot sin^{-1}\ x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x \cdot sin^{-1}\ x + 1 - x^2\ ^{1/2} + c = x \cdot sin^{-1}\ x + \sqrt{1-x^2} + c$

5. **a)** $\int tan^{-1}(x)dx$ **b)** $\int x \cdot tan^{-1}(x)dx$

a) $x\cdot tan^{-1}(x)-\int\frac{x}{1+x^2}dx=x\cdot tan^{-1}(x)-\frac{1}{2}ln(1+x^2)+c=x\cdot tan^{-1}(x)-ln\sqrt{1+x^2}+c$

b) $\int tan^{-1}(x)d\left(\frac{x^2}{2}\right)=\frac{x^2}{2}tan^{-1}(x)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=\frac{x^2}{2}tan^{-1}(x)-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=$

$=\frac{x^2}{2}tan^{-1}(x)-\frac{x+tan^{-1}(x)}{2}+c=\frac{(x^2+1)tan^{-1}(x)-x}{2}+c$

6. **a)** $\int e^{3x}\cdot sin(x)\ dx$; **b)** $\int\frac{ln(x)}{x^2}dx$

a) $\int e^{3x}\cdot\ d[-cos(x)]=-e^{3x}cos(x)+3\int e^{3x}cos(x)dx=-e^{3x}cos(x)+3e^{3x}sin(x)-9\int e^{3x}sin(x)dx$, segue l'equazione: $10\int e^{3x}sin(x)dx=e^{3x}[3sin(x)-cos(x)]\Rightarrow\int e^{3x}sin(x)dx=\frac{e^{3x}[3sin(x)-cos(x)]}{10}+c$;

b) $\int ln(x)d\left(-\frac{1}{x}\right)=-\frac{ln(x)}{x}+\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{ln(x)}{x}-\frac{1}{x}+c=-\frac{ln(x)+1}{x}+c$

7. **a)** $\int ln(x^2+1)dx$; **b)** $\int log_2(x)dx$

a) $x\cdot ln(x^2+1)-\int x\cdot\frac{2x}{x^2+1}dx=x\cdot ln(x^2+1)-2\int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=x\cdot ln(x^2+1)-2x+2tan^{-1}(x)+c$;

b) $x\cdot log_2(x)-\int\cancel{x}\frac{1}{\cancel{x}\cdot ln(2)}dx=x\cdot log_2(x)-\frac{x}{ln(2)}+c=x\cdot\frac{ln(x)}{ln(2)}-\frac{x}{ln(2)}+c=\frac{x\cdot[ln(x)-1]}{ln(2)}+c$

8. **a)** $\int ln^2(x)dx$; **b)** $\int ln(5x+1)dx$

a) $x\cdot ln^2(x)-\int\cancel{x}\cdot\frac{2ln(x)}{\cancel{x}}dx=x\cdot ln^2(x)-2x\cdot ln(x)+2\int\cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}dx=x\cdot ln^2(x)-2x\cdot ln(x)+2x+c$;

b) $x\cdot ln(5x+1)-\int\frac{5x}{5x+1}dx=x\cdot ln(5x+1)-\int\left(1-\frac{1}{5x+1}\right)dx=x\cdot ln(5x+1)-x+\frac{ln(5x+1)}{5}+c=\frac{(5x+1)ln(5x+1)-5x}{5}+c$

9. **a)** $\int x\cdot sin(x)\cdot cos(x)dx$; **b)** $\int e^{2x}\cdot cos(x)dx$

a) $\frac{1}{2}\int x\cdot sin(2x)dx=\frac{1}{2}\int x\cdot d\left[-\frac{cos(2x)}{2}\right]=-\frac{x\cdot cos(2x)}{4}+\int\frac{cos(2x)}{4}dx=\frac{sin(2x)-2x\cdot cos(2x)+}{8}+c$;

b) $\int e^{2x}\cdot d[sin(x)]=e^{2x}sin(x)-\int 2e^{2x}sin(x)dx=e^{2x}sin(x)+2e^{2x}cos(x)-\int 4e^{2x}cos(x)dx$, a questo punto abbiamo ottenuto l'uguaglianza: $\int e^{2x}cos(x)dx=e^{2x}sin(x)+2e^{2x}cos(x)-\int 4e^{2x}cos(x)dx$, da cui: $5\int e^{2x}cos(x)dx=e^{2x}sin(x)+2e^{2x}cos(x)\Rightarrow\int e^{2x}cos(x)dx=\frac{e^{2x}[sin(x)+2cos(x)]}{5}+c$

10. **a)** $\int ln^3(x)dx$; **b)** $\int tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx$

a) $x\cdot ln^3(x)-\int\cancel{x}\cdot\frac{3ln^2(x)}{\cancel{x}}dx=x\cdot ln^3(x)-3x\cdot ln^2(x)+3\int\cancel{x}\cdot\frac{2ln(x)}{\cancel{x}}dx=$

$=x\cdot ln^3(x)-3x\cdot ln^2(x)+6xln(x)-6\int\cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}dx=x\cdot ln^3(x)-3x\cdot ln^2(x)+6xln(x)-6x+c$;

b)
$$x\cdot tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-\int x\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}\cdot\frac{\cancel{x}-1-\cancel{x}-1}{(x-1)^2}dx=x\cdot tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+\int x\cdot\frac{\cancel{(x-1)^2}}{2x^2+2}\cdot\frac{2}{\cancel{(x-1)^2}}dx=$$
$$=x\cdot tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx=x\cdot tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+ln\sqrt{x^2+1}+c$$

11. ***Calcolare i seguenti integrali usando* 1 *come fattore differenziale:* a)** $\int sin^2\ x\ dx$ **;b)** $\int cos^2\ x\ dx$

a)
$$x\cdot sin^2\ x-\int 2x\cdot sin\ x\ cos\ x\ dx=x\cdot sin^2\ x-\int x\cdot sin\ 2x\ dx=x\cdot sin^2\ x+\frac{x}{2}cos\ 2x-$$
$$-\int\frac{cos\ 2x}{2}dx=\frac{2x\cdot sin^2\ x+2x\cdot cos^2\ x-x}{2}-\frac{sin\ 2x}{4}+c=\frac{2x-sin\ 2x}{4}+c$$
;

b)
$$x\cdot cos^2\ x+\int 2x\cdot sin\ x\ cos\ x\ dx=x\cdot cos^2\ x+\int x\cdot sin\ 2x\ dx=x\cdot cos^2\ x-\frac{x}{2}cos\ 2x+$$
$$+\int\frac{cos\ 2x}{2}dx=\frac{\cancel{2x\cdot cos^2\ x}-\cancel{2x\cdot cos^2\ x}+x}{2}+\frac{sin\ 2x}{4}+c=\frac{2x+sin\ 2x}{4}+c$$

12. **a)** $\int x\cdot ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx$ **; b)** $\int ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$

a)
$$\frac{x^2}{2}\cdot ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\int\frac{x^2}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{1-x}}{1+x}\cdot\frac{\cancel{2}}{(1-x)^{\cancel{2}}}dx=\frac{x^2}{2}\cdot ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+\int\frac{x^2}{x^2-1}dx=\frac{x^2}{2}\cdot ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+\int\left(1+\frac{1}{x^2-1}\right)dx=$$
$$=x^2\cdot ln\sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}+x+\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx=x^2\cdot ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+x+ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+c=\left(x^2+1\right)\cdot ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+x+c$$
;

b)
$$x\cdot ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\int x\cdot\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}}\right)dx=x\cdot ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\int x\cdot\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}}\right)dx=$$
$$=x\cdot ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\int\frac{x}{\cancel{x+\sqrt{1+x^2}}}\cdot\frac{\cancel{x+\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}}dx=x\cdot ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\frac{1}{2}\int\left(1+x^2\right)^{-1/2}\cdot 2x\,dx=$$
$$=x\cdot ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\frac{2}{2}\left(1+x^2\right)^{1/2}+c=x\cdot ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}+c$$

13. **a)** $\int sin\left[ln(x)\right]\ dx$ **; b)** $\int sin^4(x)\ dx$ **; c)** $\int\frac{x\cdot cos(x)}{sin^2(x)}dx$

a) $x\cdot sin\left[ln(x)\right]-\int\cancel{x}\cdot\frac{cos\left[ln(x)\right]}{\cancel{x}}\ dx=x\cdot sin\left[ln(x)\right]-x\cdot cos\left[ln(x)\right]-\int\cancel{x}\cdot\frac{sin\left[ln(x)\right]}{\cancel{x}}\ dx$, ottenia-mo l'equazione seguente: $2\int sin\left[ln(x)\right]dx=x\cdot sin\left[ln(x)\right]-x\cdot cos\left[ln(x)\right]+c\Rightarrow\int sin\left[ln(x)\right]dx=$
$$=\frac{x\cdot\left\{sin\left[ln(x)\right]-cos\left[ln(x)\right]\right\}}{2}+c;$$

b)
$$-sin^3(x)cos(x)+\int 3sin^2(x)cos^2(x)dx=-sin^3(x)cos(x)+\frac{3}{4}\int sin^2(2x)dx=-sin^3(x)cos(x)-$$
$$-\frac{3}{8}sin(2x)cos(2x)+\frac{3}{8}\int 2sin(2x)cos^2(2x)dx=-sin^3(x)cos(x)-\frac{3}{16}sin(4x)-\frac{3}{8}\int cos^2(2x)\left[-2sin(2x)\right]dx=;$$
$$=-sin^3(x)cos(x)-\frac{3}{16}sin(4x)-\frac{\cancel{3}}{8}\cdot\frac{cos^3(2x)}{\cancel{3}}+c=-\frac{16sin^3(x)cos(x)+3sin(4x)+2cos^3(2x)}{16}+c$$

c) $\int x\cdot sin^{-2}(x)\,d\left[sin(x)\right]=-\frac{x}{sin(x)}+\int\frac{1}{sin(x)}dx=-\frac{x}{sin(x)}+\int\frac{sin^2(x/2)+cos^2(x/2)}{2sin(x/2)cos(x/2)}dx=$

$=-\frac{x}{sin(x)}+\frac{1}{2}\int\left[-\frac{-sin(x/2)}{cos(x/2)}+\frac{cos(x/2)}{sin(x/2)}\right]dx=+ln\left|sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|+c=-\frac{x}{sin(x)}+ln\left|tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|+c$

14. **a)** $\int cos^4(x)\ dx$ **; b)** $\int x^n\cdot ln\ x\ dx, n\in\mathbb{N}$

a) $cos^3(x)sin(x)+\int 3sin^2(x)cos^2(x)dx=\frac{16cos^3(x)sin(x)-3sin(4x)-2cos^3(2x)}{16}+c$, abbiamo sfruttato il calcolo già effettuato nel quesito b) precedente;

b) $\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot ln\ x-\int\frac{x^{n\cancel{+1}}}{n+1}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot ln\ x-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}+c=\frac{x^{n+1}\cdot\left[ln\ (x^{n+1})-1\right]}{(n+1)^2}+c$

Mostrare che i seguenti integrali non possono essere calcolati con il metodo di integrazione per parti

15. **a)** $\int\frac{cos(x)}{x}\ dx$ **; b)** $\int\frac{e^x}{x}\ dx$ **; d)** $\int e^{x^2}\ dx$

a) Le diverse possibilità sono: $\frac{sin(x)}{x}+\int\frac{sin(x)}{x^2}\ dx$ che è più complicato di quello da integrare; $cos(x)\cdot ln(x)+\int sin(x)\cdot ln(x)\ dx$ che non è integrabile elementarmente; infine: $x\cdot\frac{cos(x)}{x}\int x\cdot\frac{-cos(x)-x\cdot sin(x)}{x^2}dx$

b) $\frac{e^x}{x}+\int\frac{e^x}{x^2}\ dx$, oppure $e^x\cdot ln(x)-\int e^x\cdot ln(x)dx$ o infine: $x\cdot\frac{e^x}{x}-\int x\cdot\frac{e^x(x-1)}{x^2}\ dx$;

c) $\int e^{x^2}dx=x\cdot e^{x^2}-\int 2x^2\cdot e^{x^2}dx$

16. **a)** $\int\frac{sin^{-1}(x)}{x}\ dx$ **; b)** $\int\frac{tan^{-1}(x)}{x}\ dx$ **; c)** $\int\frac{1}{ln(x)}\ dx$

a) $sin^{-1}(x)\cdot ln(x)-\int\frac{ln(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$ o, tenendo conto che $\int sin^{-1}(x)dx=x\cdot sin^{-1}(x)+\sqrt{1-x^2}$, abbiamo: $\frac{x\cdot sin^{-1}(x)+\sqrt{1-x^2}}{x}+\int\frac{x\cdot sin^{-1}(x)+\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$, o $x\cdot\frac{sin^{-1}(x)}{x}-\int x\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{sin^{-1}(x)}{x^2}\right]dx$;

b) $tan^{-1}(x)\cdot ln(x)-\int\frac{ln(x)}{1+x^2}dx$ o, tenendo conto che $\int tan^{-1}(x)dx=x\cdot tan^{-1}(x)-ln\sqrt{x^2+1}$, abbiamo: $\frac{x\cdot tan^{-1}(x)-ln\sqrt{x^2+1}}{x}+\int\frac{x\cdot tan^{-1}(x)-ln\sqrt{x^2+1}}{x^2}dx$, o $x\cdot\frac{tan^{-1}(x)}{x}-\int x\cdot\left[\frac{1}{1+x^2}-\frac{tan^{-1}(x)}{x^2}\right]dx$;

c) $\frac{x}{ln(x)}+\int\frac{1}{ln^2(x)}dx$.

Spiegare perché il seguenti ragionamenti sono evidentemente errati.

17. $\int sin(x)cos(x)dx=\int sin(x)\left[d\,sin(x)\right]=\frac{sin^2(x)}{2}+c$. **Ma** $\int sin(x)cos(x)dx=-\int cos(x)\left[d\,cos(x)\right]=-\frac{cos^2(x)}{2}+c$. **Quindi $sin^2(x)=-cos^2(x)\Rightarrow sin^2(x)+cos^2(x)=0$, che è assurdo perché si ha invece $sin^2(x)+cos^2(x)=1$.**

L'errore consiste nel fatto che le costanti dei due integrali non è detto che siano uguali, quindi la corretta uguaglianza è $sin^2(x)+2c=-cos^2(x)+2k\Rightarrow sin^2(x)+cos^2(x)=2(k-c)$, che poiché vale 1, ci di-

ce che $k - c = ½ \Rightarrow k = ½ + c$.

18. $\int \frac{dx}{x} = ln(x)$ **e** $\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{dx}{-x} = ln(-x)$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{ln(x) = ln(-x) \Rightarrow x = -x \Rightarrow 1 = -1.}$

In effetti si ha: $\int \frac{dx}{x} = ln|x| + c$ e $\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{dx}{-x} = ln|-x|$ $\Rightarrow$ $ln(|x|) = ln(|-x|)$ $\Rightarrow$ $|x| = |-x|$, che è un'identità.

Integrazione di funzioni razionali fratte

Calcolare i seguenti integrali di funzioni razionali fratte

1. a) $\int \frac{x+2}{x^2-7x+10}dx$; b) $\int \frac{3x^3-1}{x^2-5x+6}dx$; c) $\int \frac{5x-1}{6x^2+x-2}dx$

a) $\int \frac{x+2}{x-2\ \ x-5}dx = \int\left(\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-5}\right)dx = ln\left|\ x-2\ ^{A}\ \ x-5\ ^{B}\right| \Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ -5A-2B=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-4/3 \\ B=7/3 \end{cases}$

$\Rightarrow \int \frac{x+2}{x^2-7x+10}dx = ln\left(\sqrt[3]{\frac{|x-5|^7}{x-2\ ^4}}\right)$;

b) $\int\left(3x+15+\frac{57x-91}{x-2\ \ x-3}\right)dx = \frac{3}{2}x^2+15x+\int\left(\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}\right)dx \Rightarrow \begin{cases} A+B=57 \\ 3A+2B=91 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-23 \\ B=80 \end{cases}$,

quindi: $\int \frac{3x^3-1}{x^2-5x+6}dx =$ $3x^2/2 + 15x - 23ln(|x - 2|) + 80ln(|x - 3|) + c =$ $3x^2/2 + 15x +$ $ln\left(\frac{x-3\ ^{80}}{|x-2|^{23}}\right)+c$;

c) $\int \frac{5x-1}{2x-1\ \ 3x+2}dx = \int\left(\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{3x+2}\right)dx \Rightarrow \begin{cases} 3A+2B=5 \\ 2A-B=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3/7 \\ B=13/7 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{7}\int\left(\frac{3}{2x-1}+\frac{13}{3x+2}\right)dx$,

da cui: $\int \frac{5x-1}{6x^2+x-2}dx = ln\ \sqrt[42]{3x+2\ ^{26}\cdot|2x-1|^9}\ +c$

2. **a)** $\int \frac{2x+1}{x^3-x}dx$ **; b)** $\int \frac{7x-3}{x^2+12x+20}dx$ **; c)** $\int \frac{1}{x^3+1}dx$

a) $\int \frac{2x+1}{x\ \ x-1\ \ x+1}dx = \int\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}\right)dx = \int \frac{A+B+C\ \ x^2+\ \ B-C\ \ x-A}{x\ \ x-1\ \ x+1}dx \Rightarrow$

$\begin{cases} A+B+C=0 \\ B-C=2 \\ A=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=3/2 \\ C=-1/2 \end{cases} \Rightarrow \int \frac{2x+1}{x^3-x}dx = -ln\ |x|\ +ln\ \sqrt{x-1\ ^3}\ -ln\ \sqrt{x+1}\ +c = ln\left(\sqrt{\frac{x-1\ ^3}{x^2\ \ x+1}}\right)+c$;

b) $\int \frac{7x-3}{x+2\ \ x+10}dx = \int\left(\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+10}\right)dx = \int \frac{A+B\ \ x+10A+2B}{x+2\ \ x+10}dx \Rightarrow$

$\begin{cases} A+B=7 \\ 10A+2B=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-17/8 \\ B=73/8 \end{cases} \Rightarrow \int \frac{7x-3}{x+2\ \ x+10}dx = ln\left(\sqrt[8]{\frac{|x+10|^{73}}{|x+2|^{17}}}\right)+c$

c)

$$\int \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}dx = \int\left(\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}\right)dx = \int \frac{(A+B)x^2+(-A+B+C)x+A+C}{(x+1)(x^2-x+1)}dx \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A+B+C=0 \\ A+C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1/3 \\ B=-1/3 \\ C=2/3 \end{cases} \Rightarrow \int \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}dx = \frac{ln(|x+1|)}{3} - \frac{1}{6}\int \frac{2x-4}{x^2-x+1}dx =$$

$$= ln\left(\sqrt[6]{\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}}\right) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx = ln\left(\sqrt[6]{\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{2/\sqrt{3}}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx =$$

$$= ln\left(\sqrt[6]{\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

3. **a)** $\int \frac{5x+1}{x^2-7x+12}dx$ **; b)** $\int \frac{x}{16x^4-1}dx$ **; c)** $\int \frac{1}{x^2-3}dx$

a)

$$\int \frac{5x+1}{x-3 \quad x-4}dx = \int\left(\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-4}\right)dx = \int \frac{A+B \quad x-4A-3B}{x-3 \quad x-4}dx \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A+B=5 \\ 4A+3B=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-16 \\ B=21 \end{cases} \Rightarrow \int \frac{5x+1}{x-3 \quad x-4}dx = ln\left(\frac{|x-4|^{21}}{|x-3|^{16}}\right) + c \quad ;$$

b)

$$\int \frac{x}{(4x^2+1)(2x-1)(2x+1)}dx = \int\left(\frac{Ax+B}{4x^2+1}+\frac{C}{2x-1}+\frac{D}{2x+1}\right)dx =$$

$$= \int \frac{2(2A+4C+D)x^3+4(B+C-D)x^2+(-A+2C+2D)x-B+C-D}{(4x^2+1)(2x-1)(2x+1)}dx \Rightarrow \quad ;$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2A+4C+D=0 \\ B+C-D=0 \\ -A+2C+2D=1 \\ -B+C-D=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1/2 \\ B=0 \\ C=1/8 \\ D=1/8 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{16}\int \frac{8x}{4x^2+1}dx + \frac{1}{16}\int\left(\frac{2}{2x-1}+\frac{2}{2x+1}\right)dx = ln\left(\sqrt[16]{\frac{|4x^2-1|}{4x^2+1}}\right) + c$$

c)

$$\int \frac{1}{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}dx = \int\left(\frac{A}{x-\sqrt{3}}+\frac{B}{x+\sqrt{3}}\right)dx = \int \frac{(A+B)x+\sqrt{3}(A-B)}{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}dx \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B=1/\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\sqrt{3}/2 \\ B=-\sqrt{3}/2 \end{cases} \Rightarrow \int \frac{1}{x^2-3}dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\int\left(\frac{1}{x-\sqrt{3}}-\frac{1}{x+\sqrt{3}}\right)dx = \sqrt{3}\cdot ln\left(\sqrt{\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}}\right) + c$$

4. **a)** $\int \frac{2x}{x^2-3x-4}dx$ **; b)** $\int \frac{x}{x^2-2}dx$ **; c)** $\int \frac{1}{x^3-5x}dx$

a)

$$\int \frac{2x}{(x-4)(x+1)}dx = \int\left(\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+1}\right)dx = \int \frac{(A+B)x+(A-4B)}{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}dx \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A+B=2 \\ A-4B=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=8/5 \\ B=2/5 \end{cases} \Rightarrow \int \frac{2x}{x^2-3x-4}dx = \frac{2}{5}\int\left(\frac{4}{x-4}+\frac{1}{x+1}\right)dx = ln\left(\sqrt[5]{(x-4)^8(x+1)^2}\right) + c \quad ;$$

b) $\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-2}dx = ln\left(\sqrt{|x^2-2|}\right) + c$;

$$\int \frac{1}{x\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)}dx=\int\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x-\sqrt{5}}+\frac{C}{x+\sqrt{5}}\right)dx=\int\frac{\left(A+B+C\right)x^2+\sqrt{5}\left(B-C\right)x-5A}{x\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)}dx\Rightarrow$$

c) $\begin{cases}A+B+C=0\\B-C=0\\-5A=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-1/5\\B=1/10\\C=1/10\end{cases}\Rightarrow\int\frac{1}{x^3-5x}dx=ln\left(\sqrt[10]{\frac{\left|x^2-5\right|}{x^2}}\right)+c$

5. **a)** $\int\frac{x^2-3}{\left(x^2-1\right)^2}dx$ **; b)** $\int\frac{x^2-2}{x^4+x^3}dx$

a) $$\int\left(\frac{A}{x-1}+\frac{B}{\left(x-1\right)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{\left(x+1\right)^2}\right)dx=\int\frac{\left(A+C\right)x^3+\left(A+B-C+D\right)x^2-\left(A-2B+C+2D\right)x-A+B+C+D}{\left(x^2-1\right)^2}dx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+C=0\\A+B-C+D=1\\A-2B+C+2D=0\\-A+B+C+D=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=-1/2\\C=1\\D=-1/2\end{cases}\Rightarrow\int\frac{x^2-3}{\left(x^2-1\right)^2}dx=\frac{x}{x^2-1}+ln\left(\frac{\left|x-1\right|}{\left|x+1\right|}\right)+c$$;

b) $$\int\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x+1}\right)dx=\int\frac{\left(A+D\right)x^3+\left(A+B\right)x^2+\left(B+C\right)x+C}{\left(x^2-1\right)^2}dx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+D=0\\A+B=1\\B+C=0\\C=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-1\\B=2\\C=-2\\D=1\end{cases}\Rightarrow\int\frac{x^2-2}{x^4+x^3}dx=\frac{1-2x}{x^2}+ln\left(\frac{\left|x+1\right|}{\left|x\right|}\right)+c$$

6. **a)** $\int\frac{x^6-1}{x^4-4x^2}dx$ **; b)** $\int\frac{x^5-1}{x^4-2x^3+x^2}dx$ **; c)** $\int\frac{1}{x^3+2x^2+x}dx$ **; d)** $\int\frac{x+1}{x^4+2x^3+x^2}dx$

a) $$\int\left(x^2+4+\frac{16x^2-1}{x^4-4x^2}\right)dx=\frac{x^3}{3}+4x+\int\frac{16x^2-1}{x^2\ \ x-2\ \ x+2}dx=\frac{x^3}{3}+4x+\int\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-2}+\frac{D}{x+2}\right)dx.$$

Consideriamo solo l'integrale: $\int\frac{\left(A+C+D\right)x^3+\left(B+2C-2D\right)x^2-4Ax-4B}{\left(4x^2+1\right)\left(2x-1\right)\left(2x+1\right)}dx\Rightarrow\begin{cases}A+C+D=0\\B-2C-2D=16\\4A=0\\4B=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=0\\B=1/4\\C=63/16\\D=-63/16\end{cases}$.

Infine: $\int\frac{x^6-1}{x^4-4x^2}dx=\frac{x^3}{3}+4x-\frac{1}{4x}+ln\left(\sqrt[16]{\left|\frac{x-2}{x+2}\right|^{63}}\right)+c$;

b) $\int\left(x+2+\frac{3x^3-2x^2-1}{x^2\ \ x-1^{\ 2}}\right)dx=\frac{x^2}{2}+2x+\int\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{x-1^{\ 2}}\right)dx$. Determiniamo i parametri: $\int\frac{A+C\ \ x^3-\ 2A-B+C-D\ \ x^2+\ A-2B\ \ x+B}{x^4-2x^3+x^2}dx\Rightarrow\begin{cases}A+C=3\\2A-B+C-D=2\\A-2B=0\\B=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-2\\B=-1\\C=5\\D=0\end{cases}$;

da cui: $\int\frac{x^5-1}{x^4-2x^3+x^2}dx=\frac{x^2}{2}+2x+\frac{1}{x}+ln\left(\frac{\left|x-1\right|^5}{x^2}\right)+c$

c)
$$\int\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+1^{\,2}}\right)dx=\int\frac{A+B\;x^2+\;2A+B+C\;x+A}{x^3+2x^2+x}dx\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\\2A+B+C=0\\A=1\end{cases}\Rightarrow;$$
$$\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=-1\\C=-1\end{cases}\Rightarrow\int\frac{1}{x^3+2x^2+x}dx=ln\left(\frac{|x|}{|x+1|}\right)+\frac{1}{x+1}+c$$

d)
$$\int\frac{\cancel{x+1}}{x^2\;(x+1)^{\cancel{2}}}dx=\int\frac{1}{x^2\;(x+1)}dx=\int\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}\right)dx=\int\frac{(A+C\;)x^2+\;(A+B\;)x+B}{x^2\;(x+1)}dx\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\begin{cases}A+C=0\\A+B=0\\B=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-1\\B=1\\C=1\end{cases}\Rightarrow\int\frac{1}{x^2\;(x+1)}dx=ln\left(\left|\frac{x+1}{x}\right|\right)-\frac{1}{x}+c$$

7. **a)** $\int\frac{1}{x^2\cdot\;x+1^{\,2}}dx$ **; b)** $\int\frac{1}{x^3\cdot\;x-2}dx$ **; c)** $\int\frac{8x+1}{x^3-x^2}dx$ **; d)** $\int\frac{x^2+x+1}{x^3-4x^2+4x}dx$

$$\int\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{x+1^{\,2}}\right)dx=\int\left(\frac{A+C\;x^3+\;2A+B+C+D\;x^2+\;A+2B\;x+B}{x^2\;x+1^{\,2}}\right)dx\Rightarrow$$

a)
$$\begin{cases}A+C=0\\2A+B+C+D=0\\A+2B=0\\B=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-2\\B=1\\C=2\\D=1\end{cases}\Rightarrow\int\frac{1}{x^2\cdot\;x+1^{\,2}}dx=ln\left(\frac{x+1}{x}\right)^2-\frac{2x+1}{x^2+x}+c;$$

$$\int\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x-2}\right)dx=\int\left(\frac{A+D\;x^3-\;2A-B\;x^2-\;2B-C\;x-2C}{x^3\;x-2}\right)dx\Rightarrow$$

b)
$$\begin{cases}A+D=0\\2A-B=0\\2B-C=0\\2C=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-1/8\\B=-1/4\\C=1/2\\D=1/8\end{cases}\Rightarrow\int\frac{1}{x^3\cdot\;x-2}dx=\frac{x+1}{4x^2}+ln\left(\sqrt[8]{\frac{|x-2|}{|x|}}\right)+c;$$

c)
$$\int\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}\right)dx=\int\left(\frac{A+C\;x^2-\;A-B\;x-B}{x^3-x^2}\right)dx\Rightarrow\begin{cases}A+C=0\\A-B=-8\\B=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-9\\B=-1\\C=9\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{x}+ln\left(\sqrt[9]{\left|\frac{x-1}{x}\right|}\right)+c;$$

d)
$$\int\frac{x^2+x+1}{x\;x-2^{\,2}}dx=\int\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-2^{\,2}}\right)dx=\int\frac{A+B\;x^2-\;4A+2B-C\;x+4A}{x\;x-2^{\,2}}dx\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\begin{cases}A+B=1\\4A+2B-C=-1\\4A=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1/4\\B=3/4\\C=7/2\end{cases}\Rightarrow\int\frac{x^2+x+1}{x^3-4x^2+4x}dx=ln\left(\sqrt[4]{\left|x\cdot\;x-2^{\,3}\right|}\right)-\frac{7}{2\;x-2}+c$$

8. **a)** $\int\frac{x^3+x^2+x+1}{x^4-5x^3+5x^2+5x-6}dx$ **; b)** $\int\frac{2x^3-3}{4x^4-8x^3+3x^2+2x-1}dx$

a)
$$\int\left(\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{x+1}\right)dx=\int\frac{A+B+C+D\;x^3-\;2A+3B+4C+6D\;x^2-\;A+B-C-11D\;x+2A+3B+6C-6D}{x^4-5x^3+5x^2+5x-6}dx\Rightarrow;$$
$$\Rightarrow\begin{cases}A+B+C+D=1\\2A+3B+4C+6D=-1\\A+B-C-11D=-1\\2A+3B+6C-6D=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=5\\B=-5\\C=1\\D=0\end{cases}\Rightarrow\int\frac{x^3+x^2+x+1}{x^4-5x^3+5x^2+5x-6}dx=ln\left(\left|\frac{|x-1|\cdot|x-3|^5}{|x-2|^5}\right|\right)+c$$

b) $$\int\left(\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-1^{\,2}}+\frac{C}{2x-1}+\frac{D}{2x+1}\right)dx=\int\frac{4A+2C+2D\ x^3-\ 4A-4B+3C+5D\ x^2-\ A-4D\ x+A-B+C-D}{x^4-5x^3+5x^2+5x-6}dx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}4A+2C+2D=2\\4A-4B+3C+5D=0\\A-4D=0\\A-B+C-D=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=26/9\\B=-1/3\\C=-11/2\\D=13/18\end{cases}\Rightarrow\int\frac{2x^3-3}{4x^4-8x^3+3x^2+2x-1}dx=ln\left(\sqrt[36]{\frac{(x-1)^{104}\cdot|2x+1|^{13}}{|2x-1|^{99}}}\right)+\frac{1}{3(x-1)}+c$$

9. **a)** $\int\frac{1}{x^2-x+1\ \cdot\ x^2+x+1}dx$ **; b)** $\int\frac{1}{x^3+x^2+x}dx$

$$\int\left(\frac{Ax+B}{x^2-x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}\right)dx=\int\frac{A+C\ x^3+\ A+B-C+D\ x^2+\ A+B+C-D\ x+B+D}{x^2-1^{\,2}}dx\Rightarrow$$

a) $$\Rightarrow\begin{cases}A+C=0\\A+B-C+D=0\\A+B+C-D=0\\B+D=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-1/2\\B=1/2\\C=1/2\\D=1/2\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{2}\int\left(\frac{-x+1}{x^2-x+1}+\frac{x+1}{x^2+x+1}\right)dx=-\frac{1}{4}\int\frac{2x-2}{x^2-x+1}dx+$$;

$$+\frac{1}{4}\int\frac{2x+2}{x^2+x+1}dx=-\frac{1}{4}ln\left(x^2-x+1\right)-\frac{1}{4}\int\frac{1}{(x-1/2)^2+3/4}dx+\frac{1}{4}ln\left(x^2+x+1\right)-\frac{1}{4}\int\frac{1}{(x+1/2)^2+3/4}dx$$

$$=ln\left(\sqrt[4]{\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}}\right)+\frac{1}{2\sqrt{3}}\int\left(\frac{2/\sqrt{3}}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}+\frac{2/\sqrt{3}}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\right)dx=ln\left(\sqrt[4]{\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}}\right)+\frac{1}{2\sqrt{3}}\left[tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right]+c$$

b) $$\int\left(\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}\right)dx=\int\frac{(A+B)x^2+(A+C)x+A}{x^3+x^2+x}dx\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\\A+C=0\\A=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=-1\\C=-1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int\frac{1}{x^3+x^2+x}dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x+1}{x^2+x+1}\right)dx=ln(|x|)+\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+x+1}dx=ln\left(\sqrt{\frac{x^2}{x^2+x+1}}\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c$$

Nei seguenti esercizi k è un parametro non nullo

10. **a)** $\int\frac{1}{x^2-k^2}dx$ **; b)** $\int\frac{x}{x^3-k^3}dx$

a) $$\int\left(\frac{A}{x-k}+\frac{B}{x+k}\right)dx\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\\k(A-B)=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\frac{1}{2k}\\B=-\frac{1}{2k}\end{cases}\Rightarrow\int\frac{1}{x^2-k^2}dx=ln\left(\sqrt[2k]{\frac{x-k}{x+k}}\right)+c\,;$$

$$\int\left(\frac{A}{x-k}+\frac{Bx+C}{x^2+kx+k^2}\right)dx=\int\left(\frac{(A+B)x^2+(Ak-Bk+C)x+(Ak-C)k}{x^3-k^3}\right)dx\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\\Ak-Bk+C=1\\(Ak-C)k=0\end{cases}\Rightarrow$$

b) $$\Rightarrow\begin{cases}A=\frac{1}{3k}\\B=-\frac{1}{3k}\\C=\frac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow\int\frac{x}{x^3-k^3}dx=ln\left(\sqrt[6k]{\frac{(x-k)^2}{x^2+kx+k^2}}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2k}tan^{-1}\left(\frac{2x+k}{\sqrt{3}k}\right)+c$$

11. **a)** $\int\frac{1}{x^3+k^3}dx$ **; b)** $\int\frac{1}{x^4-k^4}dx$

$$\int\left(\frac{A}{x+k}+\frac{Bx+C}{x^2-kx+k^2}\right)dx=\int\left(\frac{(A+B)x^2-(Ak-Bk-C)x+(Ak+C)k}{x^3+k^3}\right)dx\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\\Ak-Bk-C=-1\\(Ak+C)k=0\end{cases}\Rightarrow$$

a)
$$\Rightarrow\begin{cases}A=-\dfrac{1}{3k}\\B=\dfrac{1}{3k}\\C=\dfrac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow\int\frac{1}{x^3+k^3}dx=ln\left(\sqrt[6k^2]{\frac{(x+k)^2}{x^2-kx+k^2}}\right)+\frac{\sqrt{3}}{3k^2}tan^{-1}\left(\frac{2x-k}{\sqrt{3}k}\right)+c$$

$$\int\left(\frac{A}{x+k}+\frac{B}{x+k}+\frac{Cx+D}{x^2+k^2}\right)dx=\int\left(\frac{(A+B+C)x^3+(Ak-Bk+D)x^2+(A+B-C)k^2x+(Ak-Bk-D)k^2}{x^4-k^4}\right)dx\Rightarrow$$

b)
$$\Rightarrow\begin{cases}A+B+C=0\\Ak-Bk+D=0\\A+B-C=0\\(Ak-Bk-D)k^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\dfrac{1}{4k^3}\\B=-\dfrac{1}{4k^3}\\C=0\\D=-\dfrac{1}{2k^2}\end{cases}\Rightarrow\int\frac{1}{x^4-k^4}dx=ln\left(\sqrt[4k^3]{\frac{|x-k|}{|x+k|}}\right)-\frac{1}{2k^3}tan^{-1}\left(\frac{x}{k}\right)+c$$

12. **a)** $\int\frac{x^2}{x^2-k^2}dx$ **; b)** $\int\frac{1}{x^4+k^2x^2+k^4}dx$

a) $\int\left(1+\frac{k^2}{x^2-k^2}\right)dx=x+k^2\int\frac{1}{x^2-k^2}=x+ln\left(\sqrt{\left(\frac{x-k}{x+k}\right)^k}\right)+c$

$$\int\left(\frac{Ax+B}{x^2+kx+k^2}+\frac{Cx+D}{x^2-kx+k^2}\right)dx=\int\frac{(A+C)x^3-(Ak-B-Ck-D)x^2+k(Ak-B+Ck+D)x+(B+D)k^2}{x^4+k^2x^2+k^4}dx\Rightarrow$$

b)
$$\begin{cases}A+C=0\\Ak-B-Ck-D=0\\Ak-B+Ck+D=0\\(B+D)k^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\dfrac{1}{2k^3}\\B=\dfrac{1}{2k^2}\\C=-\dfrac{1}{2k^3}\\D=\dfrac{1}{2k^2}\end{cases}\Rightarrow\int\frac{1}{x^4+k^2x^2+k^4}dx=ln\left(\sqrt[4k^3]{\frac{x^2+kx+k^2}{x^2-kx+k^2}}\right)+\frac{\sqrt{3}}{6}\left[tan^{-1}\left(\frac{2x-k}{\sqrt{3}k}\right)+tan^{-1}\left(\frac{2x+k}{\sqrt{3}k}\right)\right]+c$$

Integrazione per sostituzione

Calcolare i seguenti integrali operando un'opportuna sostituzione di variabile

1. **a)** $\int\frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$ **; b)** $\int\frac{x+\sqrt{x}}{x-1}dx$

a) $t=\sqrt{x},x=t^2,dx=2t\,dt\Rightarrow\int_{t=\sqrt{x}}\frac{2t^2}{t^2+1}dt=2\int_{t=\sqrt{x}}\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=2\left[t-tan^{-1}(t)\right]_{t=\sqrt{x}}+c=2\left[\sqrt{x}-tan^{-1}\left(\sqrt{x}\right)\right]+c$;

b)
$$t=\sqrt{x}, x=t^2, dx=2t\,dt \Rightarrow 2\int_{t=\sqrt{x}} \frac{t^3+t^2}{t^2-1}dt = 2\int_{t=\sqrt{x}} \frac{t^2\cancel{(t+1)}}{(t-1)\cancel{(t+1)}}dt = 2\int_{t=\sqrt{x}} \left(\frac{\cancel{t^2-1}^{\,t+1}}{\cancel{t-1}}+\frac{1}{t-1}\right)dt =$$
$$=2\left[\frac{t^2}{2}+t+ln(|t-1|)\right]_{t=\sqrt{x}}+c=2\left[\frac{x}{2}+\sqrt{x}+ln\left(\left|\sqrt{x}-1\right|\right)\right]+c=x+2\sqrt{x}+ln\left(\sqrt{x}-1\right)^2+c$$

2. **a)** $\int \frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}dx$ **; b)** $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}+1}dx$

a)
$$\int \frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}dx\, 2\int_{t=\sqrt{x}} \frac{t^3+t^2}{t^2-t}dt = 2\int_{t=\sqrt{x}} \frac{t^2\cancel{(t+1)}}{(t-1)\cancel{(t+1)}}dt = 2\int_{t=\sqrt{x}} \left(\frac{\cancel{t^2-1}^{\,t+1}}{\cancel{t-1}}+\frac{1}{t-1}\right)dt =$$
$$=2\left[\frac{t^2}{2}+t+ln(|t-1|)\right]_{t=\sqrt{x}}+c=2\left[\frac{x}{2}+\sqrt{x}+ln\left(\left|\sqrt{x}-1\right|\right)\right]+c=x+2\sqrt{x}+ln\left(\sqrt{x}-1\right)^2+c$$
;

b) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}+1}dx$ $\left[\text{a) } 4\cdot ln\ \sqrt{x}-1\ +x+4\cdot\sqrt{x}; \text{b) } \frac{3}{2}\cdot\left[\sqrt[3]{x^2}-ln\ \sqrt[3]{x^2}+1\right]\right]$

3. **a)** $\int \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}dx$ **; b)** $\int \frac{\sqrt{x+1}}{3x-2}dx$

a) $t=\sqrt{x+1} \Rightarrow x=t^2-1, dx=2tdt \Rightarrow \int_{t=\sqrt{x+1}} \frac{2\cancel{t}\left(t^2-1\right)^2}{\cancel{t}}dx = \left[\frac{2t^5}{5}-\frac{4t^3}{3}+2t+c\right]_{t=\sqrt{x+1}} = \frac{2\sqrt{x+1}\left(3x^2-4x+8\right)}{15}+c$;

b)
$$t=\sqrt{x+1}, x=t^2-1, dx=2tdt \Rightarrow \int_{t=\sqrt{x+1}} \frac{2t^2}{3t^2-5}dt = \frac{2}{3}\int_{t=\sqrt{x+1}} \frac{3t^2-5+5}{3t^2-5}dt = \frac{2}{3}\int_{t=\sqrt{x+1}} \left(1+\frac{5}{3t^2-5}\right)dt =$$
$$=\frac{2}{3}\left[t+\frac{5}{\sqrt{3}}ln\left(\frac{\left|\sqrt{15}t+5\right|}{\left|\sqrt{15}t-5\right|}\right)+c\right]_{t=\sqrt{x+1}} = \frac{2\sqrt{x+1}}{3}+\frac{5}{\sqrt{3}}ln\left(\frac{\left|\sqrt{15(x+1)}+5\right|}{\left|\sqrt{15(x+1)}-5\right|}\right)+c$$

4. **a)** $\int \frac{x+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}}dx$ **; b)** $\int \frac{sin(x)}{cos^2(x)-cos(x)}dx$ **; c)** $\int x\cdot\sqrt{x+3}\,dx$

a)
$$\sqrt[6]{x+1}=t \Rightarrow x=t^6-1, dx=6t^5dt \Rightarrow \int_{t=\sqrt[6]{x+1}} \frac{6t^{\cancel{5}\,3}\left(t^6+t^3-1\right)}{\cancel{t^2}}dt =$$
$$\left[\frac{3t^{10}}{5}+\frac{6t^7}{7}-\frac{3t^4}{2}+c\right]_{t=\sqrt[6]{x+1}} = \frac{3\sqrt[3]{(x+1)^2}\left(20\sqrt{x+1}+14x-35\right)}{70}+c$$
;

b) $cos(x)=t, sin(x)dx=-dt \Rightarrow \int_{t=cos(x)} \frac{1}{t-t^2}dt = \left[ln\left(\frac{|t|}{|t-1|}\right)+c\right]_{t=cos(x)} = ln\left(\frac{|cos(x)|}{1-cos(x)}\right)+c$;

c) $t=\sqrt{x+3}, x=t^2-3, dx=2tdt \Rightarrow \int_{t=\sqrt{x+3}} 2t^2\left(t^2-3\right)dt = \left[\frac{2t^5}{5}-2t^3+c\right]_{t=\sqrt{x+3}} = \frac{2\sqrt{(x+3)^3}(x-2)}{5}+c$

5. **a)** $\int \frac{cos(x)}{sin^2(x)-sin(x)-2}dx$ **; b)** $\int (x+1)\cdot\sqrt{x-2}\,dx$

a) $sin(x)=t, cos(x)dx=dt \Rightarrow \int_{t=sin(x)} \frac{1}{t^2-t-2}dt = \left[ln\left(\sqrt[3]{\frac{|t-2|}{|t+1|}}\right)+c\right]_{t=sin(x)} = ln\left(\sqrt[3]{\frac{2-sin(x)}{1+sin(x)}}\right)+c$;

b) $t=\sqrt{x-2}, x=t^2+2, dx=2tdt \Rightarrow \int_{t=\sqrt{x-2}} 2t^2\left(t^2+3\right)dx=\left[\frac{2t^5}{5}+2t^3+c\right]_{t=\sqrt{x-2}}=\frac{2\sqrt{(x-2)^3}\,(x+3)}{5}+c$

6. **a)** $\int \frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}dx$ **; b)** $\int \frac{1}{sin(x)}dx$

a) $t=\sqrt[6]{x-1}, x=t^6+1, dx=6t^5dt \Rightarrow \int_{t=\sqrt[6]{x-1}} 6t^{\cancel{5}}\frac{t^3+1}{\cancel{t^4}}dx=\left[\frac{6t^5}{5}+3t^2+c\right]_{t=\sqrt[6]{x-1}}=\frac{6\sqrt[6]{(x-1)^5}+15\sqrt[3]{x-1}}{5}+c$;

b) $t=tan\left(\frac{x}{2}\right), sin(x)=\frac{2t}{1+t^2}, dx=\frac{2dt}{1+t^2} \Rightarrow \int_{t=tan\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{\cancel{1+t^2}}{\cancel{2}t}\frac{\cancel{2}}{\cancel{1+t^2}}dt=\left[ln(|t|)+c\right]_{t=tan\left(\frac{x}{2}\right)}=ln\left(\left|tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right)+c$

7. **a)** $\int \sqrt{4-x^2}dx$ **; b)** $\int \frac{1}{1-sin(x)}dx$

a) $x=2sin(t) \Rightarrow \sqrt{4-x^2}=2cos(t), dx=2cos(t)dt \Rightarrow \int_{t=sin^{-1}(x/2)} 4cos^2(t)dt=$

$=\left[2t+2sin(t)cos(t)+c\right]_{t=sin^{-1}(x/2)}=\left[2t+2sin(t)\sqrt{1-sin^2(t)}+c\right]_{t=sin^{-1}(x/2)}=2sin^{-1}(x/2)+\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}+c$;

b) $\int_{t=tan\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{1}{1-\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt=\int_{t=tan\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{2}{(1-t)^2}dt=\left[\frac{2}{1-t}+c\right]_{t=tan\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{2}{1-tan\left(\frac{x}{2}\right)}+c$

8. **a)** $\int \frac{1}{2+cos(x)}dx$ **; b)** $\int \frac{1}{sin(x)\cdot cos(x)}dx$

a) $t=tan\left(\frac{x}{2}\right), cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2}, dx=\frac{2dt}{1+t^2} \Rightarrow \int_{t=tan\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt=\int_{t=tan\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{2}{t^2+3}dt=$

$=\frac{2}{\sqrt{3}}\left[tan^{-1}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\right]_{t=tan\left(\frac{x}{2}\right)}+c=\frac{2}{\sqrt{3}}tan^{-1}\left(\frac{tan(x/2)}{\sqrt{3}}\right)+c$;

b) $\int \frac{2}{sin(2x)}dx \Rightarrow t=tan(x), sin(2x)=\frac{2t}{1+t^2}, dx=\frac{dt}{1+t^2} \Rightarrow \int_{t=tan(x)} \frac{\cancel{1+t^2}}{\cancel{2}t}\frac{\cancel{2}}{\cancel{1+t^2}}dt=\left[ln(t)+c\right]_{t=tan(x)}=ln(|tan(x)|)+c$

9. **a)** $\int \frac{1}{sin(x)+cos(x)}dx$ **; b)** $\int e^{\sqrt{x}}dx$ **; c)** $\int \frac{1}{1+sin^2(x)}dx$

a) $\int_{t=tan(x/2)} \frac{1}{\frac{2t}{\cancel{1+t^2}}+\frac{1-t^2}{\cancel{1+t^2}}}\frac{2}{\cancel{1+t^2}}dt=\int_{t=tan(x/2)} \frac{-2}{t^2-2t-1}dt=\int_{t=tan(x/2)} \frac{-2}{\left(t+\sqrt{2}-1\right)\left(t-\sqrt{2}-1\right)}dt=$

$=\left[\frac{1}{\sqrt{2}}ln\left(\frac{\left|t+\sqrt{2}-1\right|}{\left|t-\sqrt{2}-1\right|}\right)+c\right]_{t=tan(x/2)}=\frac{1}{\sqrt{2}}ln\left(\frac{\left|tan(x/2)+\sqrt{2}-1\right|}{\left|tan(x/2)-\sqrt{2}-1\right|}\right)+c$;

b) $t=\sqrt{x}, x=t^2, dx=2tdt \Rightarrow 2\int_{t=\sqrt{x}} te^t\,dt=\left[2te^t\right]_{t=\sqrt{x}}-2\int_{t=\sqrt{x}} e^t\,dt=\left[2te^t-2e^t+c\right]_{t=\sqrt{x}}=2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)+c$

c) $$\int \frac{2}{2+2sin^2(x)}dx = \int \frac{2}{3+cos(2x)}dx = \int_{t=tan(x)} \frac{2}{3+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{1}{1+t^2}dt = \int_{t=tan(x)} \frac{1}{t^2+2}dt =$$

$$= \left[\frac{\sqrt{2}}{2}tan^{-1}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)+c\right]_{t=tan(x)} = \frac{\sqrt{2}}{2}tan^{-1}\left(\frac{tan(x)}{\sqrt{2}}\right)+c \quad ;$$

10. **a)** $\int \frac{tan(x)+2}{tan^2(x)+1}dx$ **; b)** $\int \frac{1}{e^{2x}-1}dx$

a) $$t = tan(x), x = tan^{-1}(t), dx = \frac{dt}{1+t^2} \Rightarrow \int_{t=tan(x)} \frac{t+2}{(1+t^2)^2}dt =$$

$$= \left[tan^{-1}(t) + \frac{2t-1}{2(t^2+1)} + c\right]_{t=tan(x)} = x + \frac{2tan(x)-1}{2(tan^2(x)+1)} + c \quad ;$$

b) $$t = e^{2x}, x = \frac{ln(t)}{2}, dx = \frac{dt}{2t} \Rightarrow \int_{t=e^{2x}} \frac{1}{2t(t-1)}dt = \frac{1}{2}\left[ln(|t-1|) - ln(|t|)\right]_{t=e^{2x}} + c = ln\left(\sqrt{e^{2x}-1}\right) - x + c$$

11. **a)** $\int \frac{e^x+1}{\sqrt{e^x-1}}dx$ **; b)** $\int \frac{1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}}dx$

a) $$t = \sqrt{e^x-1}, e^x = t^2+1, x = ln(t^2+1), dx = \frac{2t}{t^2+1}dt \Rightarrow \int_{t=\sqrt{e^x-1}} \frac{t^2+2}{\cancel{t}}\frac{2\cancel{t}}{t^2+1}dt =$$

$$= \int_{t=\sqrt{e^x-1}} \left(2+\frac{2}{t^2+1}\right)dt = \left[2t + 2tan^{-1}(t) + c\right]_{t=\sqrt{e^x-1}} = 2\sqrt{e^x-1} + 2tan^{-1}\left(\sqrt{e^x-1}\right) + c \quad ;$$

b) $$t = \sqrt{1-x}, x = 1-t^2, dx = -2tdt \Rightarrow 2\int_{t=\sqrt{1-x}} \frac{t+t^2}{t-1}dt = 2\int_{t=\sqrt{1-x}} \left(t+2+\frac{2}{t-1}\right)dt =$$

$$= \left[t^2 + 4t + 4ln(|t-1|) + c\right]_{t=\sqrt{1-x}} = 1 - x + 4\sqrt{1-x} + ln\left(\sqrt{1-x}-1\right)^4 + c$$

12. **a)** $\int \frac{1}{1+sin(x)-cos(x)}dx$ **; b)** $\int \frac{1}{e^x+1}dx$ **; c)** $\int \frac{\sqrt{e^x+1}}{e^x-2}dx$

a) $$\int_{t=tan\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2t}{1+t^2}dt = \int_{t=tan\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{1}{t+1}dt = \left[ln(|t+1|)+c\right] = ln\left|tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right| + c \; ;$$

b) $$t = e^x, x = ln(t), dx = \frac{dt}{t} \Rightarrow \int_{t=e^x} \frac{1}{t^2+t}dt = \left[ln(|x|) - ln(|x+1|) + c\right]_{t=e^x} = x - ln(e^x+1) + c \; ;$$

c) $$t = \sqrt{e^x+1}, e^x = t^2-1, x = ln(t^2-1), dx = \frac{2t}{t^2-1}dt \Rightarrow \int_{t=\sqrt{e^x+1}} \frac{2t^2}{(t^2-3)(t^2-1)}dt =$$

$$= \left[\sqrt{3}ln\left(\sqrt{\frac{|t-\sqrt{3}|}{|t+\sqrt{3}|}}\right) + ln\left(\sqrt{\frac{|t+1|}{|t-1|}}\right) + c\right]_{t=\sqrt{e^x+1}} = \sqrt{3}ln\left(\sqrt{\frac{|\sqrt{e^x+1}-\sqrt{3}|}{\sqrt{e^x+1}+\sqrt{3}}}\right) + ln\left(\sqrt{\frac{\sqrt{e^x+1}+1}{\sqrt{e^x+1}-1}}\right) + c$$

13. $\int x \cdot sin^{-1}(x)dx$ **(prima integra per parti, poi sostituisci …)**

$$\frac{x^2}{2}\cdot sin^{-1}(x)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{x^2}{2}\cdot sin^{-1}(x)+\frac{1}{2}\int\left(\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx=$$

$$=\frac{x^2 sin^{-1}(x)}{2}+\frac{1}{2}\int\sqrt{1-x^2}dx-\frac{sin^{-1}(x)}{2}=\frac{(x^2-1)sin^{-1}(x)}{2}+\frac{1}{2}\int_{t=sin^{-1}(x)}cos^2(t)dt=$$

$$=\frac{(x^2-1)sin^{-1}(x)}{2}+\frac{1}{4}\left[sin(t)cos(t)+t\right]_{t=sin^{-1}(x)}+c=\frac{(2x^2-1)sin^{-1}(x)+2x\sqrt{1-x^2}}{4}+c$$

14. **a)** $\int\frac{1}{(x^2+1)^2}dx$ **; b)** $\int\frac{1}{(x^2+1)^3}dx$ **(Poni *x* = *tan*(*t*))**

$$x=tan(t),dx=\left[tan^2(t)+1\right]dt\Rightarrow\int_{t=tan^{-1}(x)}\frac{\cancel{tan^2(t)+1}}{\left[tan^2(t)+1\right]^{\cancel{2}}}dt=\int_{t=tan^{-1}(x)}\frac{1}{tan^2(t)+1}dt=$$

a) $$=\int_{t=tan^{-1}(x)}cos^2(t)dt=\left[\frac{sin(t)cos(t)+t}{2}\right]_{t=tan^{-1}(x)}+c=$$;

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{tan(t)}{\sqrt{1+tan^2(t)}}\frac{1}{\sqrt{1+tan^2(t)}}+t\right]_{t=tan^{-1}(x)}+c=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x^2}+tan^{-1}(x)\right)+c$$

b)

$$\int_{t=tan^{-1}(x)}\frac{\cancel{tan^2(t)+1}}{\left[tan^2(t)+1\right]^{\cancel{2}^2}}dt=\int_{t=tan^{-1}(x)}\frac{1}{\left[tan^2(t)+1\right]^2}dt=$$

$$=\int_{t=tan^{-1}(x)}cos^4(t)dt=\left[\frac{2sin(t)cos^3(t)+3sin(t)cos(t)+3t}{8}\right]_{t=tan^{-1}(x)}+c=\frac{1}{8}\left(\frac{3x^3+5x}{(1+x^2)^2}+3tan^{-1}(x)\right)+c$$

15. **a)** $\int\frac{1}{\sqrt{x^2-x}}dx$ **(Poni** $\sqrt{x^2-x}=x+t$**); b)** $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

$$\sqrt{x^2-x}=x+t\Rightarrow x^2-x=x^2+2xt+t^2\Rightarrow x=\frac{-t^2}{2t+1},dx=\frac{-2t(t+1)}{(2t+1)^2}dt\Rightarrow\sqrt{x^2-x}=\frac{-t^2}{2t+1}+t=\frac{t^2+t}{2t+1}$$

a) $$\int_{t=\sqrt{x^2-x}-x}\frac{1}{\frac{\cancel{t(t+1)}}{\cancel{2t+1}}}\frac{-2t\cancel{(t+1)}}{(2t+1)^{\cancel{2}}}dt=\int_{t=\sqrt{x^2-x}+x}\frac{-2}{2t+1}dt=\left[ln\left(\frac{1}{|2t+1|}\right)\right]_{t=\sqrt{x^2-x}-x}+c=ln\left(2\sqrt{x^2-x}+2x-1\right)+c$$;

$$x=a\cdot sin(t)\Rightarrow\sqrt{a^2-x^2}=a\cdot cos(t),dx=a\cdot cos(t)dt\Rightarrow\int_{t=sin^{-1}(x/a)}a^2cos^2(t)dt=$$

b) $$=\frac{1}{2}\left[a^2t+a\cdot sin(t)cos(t)+c\right]_{t=sin^{-1}(x/a)}=\frac{1}{2}\left[a^2t+a\cdot sin(t)\sqrt{1-sin^2(t)}+c\right]_{t=sin^{-1}(x/a)}=;$$

$$=\frac{a^2}{2}sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+c$$

16. **a)** $\int x^2\cdot\sqrt{1-x^2}\,dx$ **; b)** $\int\frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}dx$ **(Poni** $\frac{1-x^2}{x^2}=t^2$ **)**

$$x=sin(t)\Rightarrow\sqrt{1-x^2}=cos(t),dx=cos(t)dt\Rightarrow\int_{t=sin^{-1}(x)}sin^2(t)cos^2(t)dt=\int_{t=sin^{-1}(x)}\frac{sin^2(2t)}{4}dt=$$

$$\text{a)}\ =\left[\frac{2t-sin(2t)cos(2t)}{16}+c\right]_{t=sin^{-1}(x)}=\left[\frac{2t-2sin(t)\sqrt{1-sin^2(t)}\left(1-2sin^2(t)\right)}{16}+c\right]_{t=sin^{-1}(x)}=\quad;$$

$$=\frac{2sin^{-1}(x)-2x\sqrt{1-x^2}\left(1-2x^2\right)}{16}+c=\frac{sin^{-1}(x)-x\left(1-2x^2\right)\sqrt{1-x^2}}{8}+c$$

$$\int_{t=sin^{-1}(x)}\frac{sin^4(t)}{\cancel{cos(t)}}\cancel{cos(t)}dt=\int_{t=sin^{-1}(x)}sin^4(t)dt=\left[-sin^3(t)cos(t)+3\int sin^2(t)cos^2(t)dt\right]_{t=sin^{-1}(x)}=$$

$$\text{b)}\ =\left[-sin^3(t)cos(t)+\frac{3}{4}\int sin^2(2t)dt\right]_{t=sin^{-1}(x)}=\left[-sin^3(t)cos(t)+\frac{3x-3sin(t)cos(t)}{8}+c\right]_{t=sin^{-1}(x)}=$$

$$=\frac{-2x^3\sqrt{1-x^2}+3sin^{-1}(x)-3x\sqrt{1-x^2}}{8}+c=\frac{3sin^{-1}(x)-\left(2x^3+3x\right)\sqrt{1-x^2}}{8}+c$$

17. a) $\int\frac{1}{\left(x^2-1\right)^2}dx$ **(si ponga** $t=\frac{x+1}{x-1}$**); b)** $\int\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

$$t=\frac{x+1}{x-1}\Rightarrow x=\frac{t+1}{t-1},dx=\frac{-2dt}{(t-1)^2}\Rightarrow\int_{t=\frac{x+1}{x-1}}\frac{(t-1)^{\cancel{4}\,2}}{\cancel{16}^{\,8}t^2}\cdot\frac{-\cancel{2}dt}{\cancel{(t-1)^2}}=\int_{t=\frac{x+1}{x-1}}\frac{-(t-1)^2}{8t^2}dt=$$

$$\text{a)}\ =\int_{t=\frac{x+1}{x-1}}\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{4t}-\frac{1}{8t^2}\right)dt=\left[-\frac{t}{8}+\frac{1}{4}ln(|t|)+\frac{1}{8t}+c\right]_{t=\frac{x+1}{x-1}}=\left[\frac{2t\cdot ln(|t|)-t^2+1}{8t}+c\right]_{t=\frac{x+1}{x-1}};$$

$$=\frac{2\frac{x+1}{1-x}\cdot ln\left(\left|\frac{x+1}{1-x}\right|\right)-\frac{x+1}{1-x}^2+1}{8\frac{x+1}{1-x}}+c=ln\left(\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}\right)-\frac{x}{2\left(x^2-1\right)}+c$$

$$\text{b)}\ \int_{t=\sqrt{x}}\frac{2\cancel{t}\sqrt{1+t}}{\cancel{t}}dt=\left[\frac{4\sqrt{(t+1)^3}}{3}+c\right]_{t=\sqrt{x}}=\frac{4\sqrt{\left(\sqrt{x}+1\right)^3}}{3}+c$$

$\mathcal{E}=mc^2$ L'angolo della MateFisica

1. Un punto materiale si muove con un'accelerazione variabile nel tempo secondo la legge: *a*(*t*) = (0,15*t*² + 0,20*t* – 0,12) *m/s*². Determinare quanta strada ha percorso dopo 3,5 *s*.

Abbiamo

$$s(t)=\int v(t)dt=\int\left(\int a(t)dt\right)dt=\int\left(\int\left(0,15t^2+0,20t-0,12\right)dt\right)dt=\int\left(0,05t^3+0,10t^2-0,12t\right)dt=$$

$$=\frac{0,05}{4}t^4+\frac{0,10}{3}t^3-0,06t^2\Rightarrow s(3,5)=2,57m$$

2. Determinare il campo elettrico generato da una carica lineare, a partire dalla relazione $dE=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$**, in cui *r* è la distanza dalla carica.**

$$\int dE = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

3. **Tenuto conto della relazione $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, in cui *p* è la quantità di moto, e quella $\vec{\ell} = m \cdot \left(\vec{r} \times \vec{v}\right)$, del momento angolare; determinare una relazione fra il momento della forza τ e il momento angolare.**

$$\tau = \vec{F} \times \vec{r} = \frac{d\vec{p}}{dt} \times \vec{r} = \frac{m \cdot d\vec{v}}{dt} \times \vec{r} = \frac{d\vec{\ell}}{dt}$$

4. **Determinare il modulo del momento angolare di un sistema il cui momento della forza è (14*t* + 3) *N* · *m*.**

$\vec{\ell} = \int \tau\, dt = \int (14t + 3)\, dt = 7t^2 + 3t\, kg \cdot m^2 / s$ $(7t^2 + 3t)$.

5. **In un circuito passa una corrente non continua *I*(*t*) = *cos*(0,002*t* + 0,005), determinare quanti coulomb sono transitati per il circuito in 3 secondi dall'accensione.**

$Q(t) = \int cos(0,002t + 0,005)\, dt =$ $sin(0,002t + 0,005)/0,002 \Rightarrow Q(3) = sin(0,006 + 0,005)/0,002 = 5,5\ C$

6. **In un condensatore da 3,5μF, passa una corrente variabile *I*(*t*) = 2,3 · 10^{-4}*cos*(2*t* + 1), quanti volt si sono accumulati sulle armature dopo 4μs?**

$$V(t) = \frac{1}{3,5 \cdot 10^{-6}} \cdot \int 2,3 \cdot 10^{-4} cos(2t+1)\, dt = 32,9 sin(2t+1) \Rightarrow V(4 \cdot 10^{-6}) = 27,7V$$

La sfida

1. **Dopo avere provato che le funzioni iperboliche $sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, sono primitive una dell'altra, e ricordando che *cosh*²(*x*) – *sinh*²(*x*) = 1, utilizzarle per determinare per calcolare i seguenti integrali** a) $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$; b) $\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx$.

a) $D\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, D\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow D\left[sinh(t)\right] = cosh(t), D\left[cosh(t)\right] = sinh(t)$.

Si deve determinare la funzione inversa, detta settore seno (o coseno) iperbolico. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \left[\frac{t + 1/t}{2}\right]_{t=e^x} \Rightarrow t = y + \sqrt{y^2 - 1} \Rightarrow e^x = y + \sqrt{y^2 - 1} \Rightarrow x = ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$. Ricordiamo che si ha *cosh*²(*x*) – *sinh*²(*x*) = 1. Perciò poniamo *x* = *a* · *cosh*(*t*) ⇒ *dx* = *a* · *sinh*(*t*) *dt*, da cui: $t = ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}\right) = ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right)$. Otteniamo così: $\int_{t = ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right)} a^2 sinh^2(t)\, dt =$, che integriamo per parti, non scriviamo la sostituzione per comodità:

$$\int a^2 sinh^2(t)\, dt = a^2 sinh(t) \cdot cosh(t) - a^2 \int cosh^2(t)\, dt = a^2 sinh(t) \cdot cosh(t) - a^2 \int \left[1 + sinh^2(t)\right] dt \Rightarrow$$

$$\int a^2 sinh^2(t)\, dt = \frac{a^2}{2}\left[sinh(t) \cdot cosh(t) - t\right] + c$$

Dato che *cosh*(*t*)= *x*/*a* e $sinh(t) = \sqrt{cosh^2(t) - 1} = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{2}$, quindi l'integrale richiesto è $\frac{x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 ln\left(\sqrt{x^2 - a^2} + x\right)}{2} + c$.

b) Ragionando in modo simile al precedente, ma con le sostituzioni: $x = a \cdot sinh(t) \Rightarrow dx = a \cdot cosh(t)dt$, otteniamo: $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \dfrac{x\sqrt{x^2+a^2}+a^2 ln\left(\sqrt{x^2+a^2}+x\right)}{2}+c$

2. **Possiamo eseguire $\int \dfrac{tan(x)}{cos^2(x)}dx$ nei due diversi modi seguenti: $\int tan(x)\cdot\dfrac{1}{cos^2(x)}dx = \dfrac{tan^2(x)}{2}+c$, oppure $\int \dfrac{sin(x)}{cos(x)}\cdot\dfrac{1}{cos^2(x)}dx = -\int -sin(x)\cdot cos^{-3}(x)\,dx = -\dfrac{cos^{-2}(x)}{-2}+c = \dfrac{1}{2cos^2(x)}+c$. Ora si ha: $\dfrac{1}{cos^2(x)} = \dfrac{sin^2(x)+cos^2(x)}{cos^2(x)} = tan^2(x)+1$. Quindi i due risultati sono distinti, come si spiega il fatto? Ci sono errori nelle risoluzioni?**

È solo una questione di costanti additive, infatti: $\frac{1}{2}\, tan^2(x) + \frac{1}{2} + c_1 = \frac{1}{2}\, tan^2(x) + c_2$, quindi avremo: $+\frac{1}{2} + c_1 = c_2$, ossia l'uguaglianza fra due costanti e visto che le primitive sono tutte uguali a differenza di una costante, i risultati sono equivalenti.

Temi assegnati agli esami di stato

1. **(Liceo scientifico 1991/1992) La funzione $f(x) = \left(2x^3-4x\right)\cdot e^{-x^2}$ rappresenti, in opportune unità di misura, la forza *f*(*x*) a cui è soggetto un punto *P* libero di muoversi lungo l'asse delle *x*. Sapendo che la forza *f* è data da $f(x) = -\dfrac{dE(x)}{dx}$, dove *E*(*x*) è l'energia potenziale, trovare la funzione *E*(*x*) e rappresentarla avendo posto *E*(0) = −1. Per quali valori di *x* il punto *P* è in equilibrio, ossia per quali valori di *x* la forza è nulla? Per tali valori di *x* l'energia potenziale quale valore assume?**

$E(x) = -\int f(x)dx = -\int\left(2x^3-4x\right)\cdot e^{-x^2}dx = \left(x^2-2\right)\cdot e^{-x^2} - \int 2x\cdot e^{-x^2} = \left(x^2-2\right)\cdot e^{-x^2} + e^{-x^2} + c = \left(x^2-1\right)\cdot e^{-x^2} + c$

$f(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee \pm\sqrt{2}$, quindi i punti cercati sono $P_1 \equiv (0; -1)$ e $P_{2,3} \equiv \left(\pm\sqrt{2}; e^{-2}\right)$.

2. **(Liceo scientifico 2001/2002) Determinare, se esistono, i numeri *a*, *b* in modo che la seguente relazione: $\dfrac{1}{x^2-2x-3} = \dfrac{a}{x-3}+\dfrac{b}{x+1}$, sia un'identità.**

L'esercizio si svolge come in un'integrazione di funzione razionale fratta:

$$\frac{1}{(x-3)(x+1)} = \frac{(a+b)x+(a-3b)}{(x-3)(x+1)} \Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a-3b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1/4 \\ b=-1/4 \end{cases}$$

3. **(Liceo scientifico 2000/2001) Sia *f*(*x*) una funzione reale di variabile reale, continua nel campo reale, tale che *f*(0) = 2. Calcolare: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(t)\,dt}{2xe^x}$, dove *e* è la base dei logaritmi naturali.**

Usando De L'Hopital e il teorema fondamentale del calcolo integrale: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{(2+2x)e^x} = 1$.

4. **(Liceo scientifico 2001/2002) Calcolare la derivata, rispetto ad *x*, della funzione *f*(*x*) tale che: $f(x) = \int_x^{x+1} ln(t)\,dt, x > 0$.**

$D\left[f(x)\right] = ln(x+1) - ln(x) = ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$

5. (Liceo scientifico PNI 2001/2002) Trovare *f*(4) sapendo che $\int_0^x f(t)\,dt = x\cdot cos(\pi x)$, con *f* continua.

$f(x) = D\left[\int_0^x f(t)\,dt\right] = cos(\pi x) - \pi x\cdot sin(\pi x) \Rightarrow f(4) = cos(4\pi) - 4\pi sin\,(4\pi) = 1.$

6. (Liceo scientifico PNI 2002/2003) Di una funzione *f*(*x*) si sa che ha derivata seconda uguale a *sen*(*x*) e che *f* '(0) = 1. Quanto vale *f*(π/2) – *f*(0)?

$f(x) = \int\left(\int sin(x)dx\right)dx = \int\left(-cos(x) + c_1\right)dx = -sin(x) + c_1x + c_2$, quindi: $f(\pi/2) - f(0) = -sin(\pi/2) + c_1\pi/2 + c_2 + sin(0) - c_2 = -1 + c_1\pi/2$, e dato che $f'(x) = -cos(x) + c_1 \Rightarrow f'(0) = 1 \Leftrightarrow -1 + c_1 = 1 \Rightarrow c_1 = 2$, infine: $f(\pi/2) - f(0) = \pi - 1$.

7. (Liceo scientifico 2002/2003) La derivata della funzione $f(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2}dt$ è la funzione $f'(x) = 2xe^{-x^4}$. Eseguire tutti i passaggi necessari a giustificare l'affermazione.

$f'(x) = D\left(\int_0^{x^2} e^{-t^2}dt\right) = e^{-\left(x^2\right)^2}\cdot 2x = 2xe^{-x^4}$

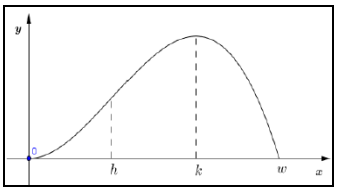
8. (Liceo scientifico PNI suppletiva 2004/2005) Calcolare la derivata, rispetto a *x*, della funzione $F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{sin(t)}dt$.

Basta semplicemente applicare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

9. (Liceo scientifico 2008/2009) Si trovi la funzione *f*(*x*) la cui derivata è *sin*(*x*) e il cui grafico passa per il punto (0; 2).

$f(x) = \int sin(x)dx = -cos(x) + c$, deve essere $f(0) = 2 \Leftrightarrow -cos(0) + c = 2 \Rightarrow c = 3 \Rightarrow f(x) = 3 - cos(x)$

10. (Liceo scientifico 2013/2014) Nella figura a lato è disegnato il grafico Γ di $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, con *f* funzione definita sull'intervallo [0, *w*] e ivi continua e derivabile.

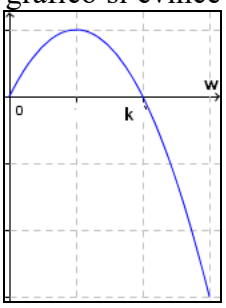


Γ è tangente all'asse *x* nell'origine O del sistema di riferimento e presenta un flesso e un massimo rispettivamente per *x* = *h* e *x* = *k* . a) Si determinino *f* (0) e *f* (*k*); b) si dica se il grafico della funzione *f* presenta punti di massimo o di minimo e se ne tracci il possibile andamento. c) Si supponga che *g*(*x*) sia, sull'intervallo considerato, esprimibile come funzione polinomiale di terzo grado. Si provi che, in tal caso, i numeri *h* e *k* dividono l'intervallo [0, *w*] in tre parti uguali. d) Si determini l'espressione di *g*(*x*) nel caso *w* = 3 e *g*(1) = 2/3 e si scrivano le equazioni delle normali a Γ nei punti in cui esso è tagliato dalla retta *y* = 2/3.

a) Per il teorema fondamentale del calcolo integrale g (*x*) è derivabile in [0, *w*] e $g'(x) = f(x)$. Quindi avremo $f(0) = g'(0)$ e $f(k) = g'(k)$. Sapendo che Γ è tangente all'asse *x* nell'origine O, possiamo dire che $g'(0) = 0$, quindi anche $f(0) = 0$. Invece sapendo che Γ presenta un massimo per $x = k$, abbiamo ancora una volta che deve essere $g'(k) = 0 = f(k)$.

b) Affinché *f* abbia estremi relativi la sua derivata deve annullarsi. Ma $f(x) = g'(x) \Rightarrow f'(x) = g''(x)$, quindi dobbiamo vedere dove $g''(x) = 0$, poiché sappiamo che per $x = h$, Γpresenta un flesso, vuol dire che si ha $g''(h) = 0$, quindi anche $f'(h) = 0$. Perciò l'unico estremo relativo si ha per $x = h$. Dal grafico si vede che in un intorno sinistro di *h*, Γ volge la concavità verso l'alto, mentre in un intor-

no destro la concavità è verso il basso. Ciò significa che si ha: $f'(x) = g''(x) = \begin{cases} > 0 & x \in (0,h) \\ < 0 & x \in (h,k) \end{cases}$ quindi per $x = h$, $f(x)$ ha un massimo relativo. Sempre dal grafico si evince che $f(x)$ ha minimo assoluto per $x = w$. Un grafico probabile è perciò il seguente



c) Se abbiamo $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, avremo: $g'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ e $g''(x) = 6ax + 2b$. Nel punto a) abbiamo visto che $\begin{cases} g'(0) = 0 \\ g''(h) = 0 \\ g'(k) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 6ah + 2b = 0 \\ 3ak^2 + 2bk + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ h = -\dfrac{b}{3a} \\ k = 0 \vee k = -\dfrac{2b}{3a} \end{cases}$. Dal grafico abbiamo anche $g(0) = g(w) = 0$, cioè $d = 0$ e $aw^3 + bw^2 = 0$, quindi $w = 0 \vee w = -\dfrac{b}{a}$. Ovviamente le soluzioni nulle non sono accettabili, infine abbiamo $h = -\dfrac{b}{3a}, k = -\dfrac{2b}{3a}, w = -\dfrac{b}{a}$, che è la richiesta.

d) Riprendiamo il punto b), mediante il quale possiamo dire che $g(x) = ax^3 + bx^2$. Imponendo le condizioni si ha: $\begin{cases} w = -\dfrac{b}{a} = 3 \\ g(1) = a + b = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -3a \\ a - 3a = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$. Perciò $g(x) = -1/3x^3 + x^2$. Determiniamo le intersezioni: $-\dfrac{1}{3}x^3 + x^2 = \dfrac{2}{3}$, già sappiamo che $x = 1$ è una soluzione, quindi usando la regola di Ruffini, avremo: $x^3 - 3x^2 + 2 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x^2 - 2x - 2)$. Perciò le altre ascisse dei punti di intersezione sono: $x = 1 \pm \sqrt{3}$, ma tenuto conto delle imposizioni sul dominio: [0, 3], solo la soluzione positiva è accettabile. L'equazione della normale si trova con la regola: $y - g(x_0) = -\dfrac{1}{g'(x_o)} \cdot (x - x_0)$. Poiché $g'(x) = -x^2 + 2x$, abbiamo $g'(1) = 1$ e $g'(1+\sqrt{3}) = -(1+\sqrt{3})^2 + 2 \cdot (1+\sqrt{3}) = -1 - 3 - 2\sqrt{3} + 2 + 2\sqrt{3} = -2$. Infine le normali cercate hanno equazioni: $y - \dfrac{2}{3} = -(x-1) \Rightarrow 3x + y - 5 = 0; y - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{2} \cdot (x - 1 - \sqrt{3}) \Rightarrow 3x - 6y + 1 - 3\sqrt{3} = 0$.

11. (Liceo scientifico 2014/2015) Determinare l'espressione analitica della funzione $y = f(x)$ sapendo che la retta $y = -2x + 5$ è tangente al grafico di f nel secondo quadrante e che $f'(x) = -2x^2 + 6$.

$f'(x) = -2x^2 + 6 \Rightarrow f(x) = \int(-2x^2 + 6)dx = -\dfrac{2}{3}x^3 + 6x + k$. Per determinare il parametro usiamo l'informazione sulla tangente, cioè sul fatto che $f'(x) = -2$ per $x < 0$. Cioè $-2x^2 + 6 = -2 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = -2$ dato che abbiamo detto che è $x < 0$. Allora $f(-2) = -2 \cdot (-2) + 5 = 9 \Rightarrow k = 47/3$.

12. (Liceo scientifico 2015/2016) Data la funzione $f(x)$ definita in $\mathbb{R}$, $f(x) = e^x \cdot (2x + x^2)$, individuare la primitiva di $f(x)$ il cui grafico passa per il punto $(1; 2e)$.

È un problema di Cauchy. Calcoliamo $\int e^x \cdot (2x + x^2)\, dx$, o osservando che una sua primitiva è $e^x \cdot x^2$

o con il metodo di integrazione per parti: $\left(2x+x^2\right)e^x-\int(2+2x)e^x\,dx=\left(2x+x^2\right)e^x-(2+2x)e^x+\int 2e^x\,dx$ $= e^x\cdot(2x+x^2-2-2x+2)+c=e^x\cdot x^2+c$. Adesso imponiamo la condizione iniziale: $e\cdot 1^2+c=2e$ $\Rightarrow c=e$ e la primitiva cercata è $y=e^x\cdot x^2+e$.

13. (Liceo scientifico 2015/2016) Sia *f* la funzione così definita nell'intervallo]1, +∞): $f(x)=\int_e^{x^2}\frac{t}{ln(t)}\,dt$ Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di *f* nel suo punto di ascissa $\sqrt{e}$.

L'equazione cercata ha equazione $y-f\left(\sqrt{e}\right)=f'\left(\sqrt{e}\right)\cdot\left(x-\sqrt{e}\right)$. Abbiamo $f\left(\sqrt{e}\right)=\int_e^e\frac{t}{ln(t)}\,dt=0$, per il calcolo della derivata usiamo il Teorema fondamentale del calcolo integrale: $f'(x)=\left[\frac{t}{ln(t)}\right]_{t=x^2}\cdot D\left(x^2\right)=\frac{x^2\cdot 2x}{ln\left(x^2\right)}=\frac{2x^3}{ln\left(x^2\right)}$, pertanto avremo: $f'\left(\sqrt{e}\right)=\frac{2\left(\sqrt{e}\right)^3}{ln(e)}=2e\cdot\sqrt{e}$. Infine la tangente cercata è $y=2e\cdot\sqrt{e}\cdot\left(x-\sqrt{e}\right)$.

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

1. (Rice2008) Calcolare $\int\frac{x+2}{(x-1)^2\cdot(x-2)}dx$.

$$\int\frac{x+2}{(x-1)^2\cdot(x-2)}dx=\int\left(\frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{c}{x-2}\right)dx=\int\left(\frac{(a+c)x^2-(3a-b+2c)x+2a-2b+c}{(x-1)^2\cdot(x-2)}\right)dx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a+c=0\\3a-b+2c=-1\\2a-2b+c=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-4\\b=-3\\c=4\end{cases}\Rightarrow\int\frac{x+2}{(x-1)^2\cdot(x-2)}dx=\int\left(\frac{-4}{x-1}-\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{4}{x-2}\right)dx=ln\left(\frac{x-2}{x-1}\right)^4+\frac{3}{x-1}+c$$

2. (CC2008) Calcolare $\int sin^{-1}(3x)\,dx$.

$$x\cdot sin^{-1}(3x)+\int\frac{3x}{\sqrt{1-9x^2}}dx=x\cdot sin^{-1}(3x)-\frac{1}{6}\int\left(1-9x^2\right)^{-1/2}\cdot(-18x)\,dx=x\cdot sin^{-1}(3x)+\frac{\sqrt{1-9x^2}}{3}+c$$

3. (CC2010) Calcolare $\int\frac{1}{x^2\cdot\sqrt{1-x^2}}dx$.

$$\int_{t=cos^{-1}(x)}\frac{-\cancel{sin(t)}}{cos^2(t)\cdot\cancel{sin(t)}}dt=\left[-tan(t)+c\right]_{t=cos^{-1}(x)}=\left[-\frac{\sqrt{1-cos^2(t)}}{cos(t)}+c\right]_{t=cos^{-1}(x)}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+c$$

4. (CC2011) Calcolare $\int\frac{x+1}{x^2+\sqrt{2}\cdot x+1}dx$.

$$\frac{1}{2}\int\frac{2x+\sqrt{2}+\left(2-\sqrt{2}\right)}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx=ln\left(\sqrt{x^2+2\sqrt{x}+1}\right)+\frac{2-\sqrt{2}}{2}\int\frac{1}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}dx=ln\left(\sqrt{x^2+2\sqrt{x}+1}\right)+$$

$$+\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\int\frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}x+1\right)^2+1}dx=ln\left(\sqrt{x^2+2\sqrt{x}+1}\right)+\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}tan^{-1}\left(\sqrt{2}x+1\right)+c$$

5. (HH2012) Sia *f* una funzione continua e $F(x)=\int_0^x\left[(2t+3)\cdot\int_t^2 f(u)\,du\right]dt$**, allora *F*"(2) è**

a) –2*f*(2) b) – 7*f*(2) c) 7*f* '(2) d) 3*f* '(2) e) 7*f*(2)

$$F'(x)=\left[(2x+3)\cdot\int_x^2 f(u)\,du\right]\Rightarrow F''(x)=2\cdot\int_x^2 f(u)\,du-(2x+3)f(x)\Rightarrow F''(2)=2\cdot\int_2^2 f(u)\,du-7f(2)=-7f($$

Risposta b.

6. (Rice 2009) Let *a*(*t*) = *cos*²(2*t*) be the acceleration at time *t* of a point particle traveling on a straight line. Suppose at time *t* = 0, the particle is at position *x* = 1 with velocity *v* = –2. Find its position at time *t* = 2.

Sia a(*t*) = *cos*²(2*t*) *l'accelerazione al tempo t di una particella puntiforme che si muove su una retta. Supponiamo che al tempo t* = 0, *la particella si trovi nella posizione x* = 1 *con velocità v* = –2. *Determina la sua posizione al tempo t* = 2.

$v(t)=\int cos^2(2t)\,dt=\frac{sin(2t)cos(2t)+2t}{2}+c=\frac{sin(4t)+4t}{4}+c$, e si ha: $v(0) = 1 \Rightarrow c = -2$; abbiamo altresì che: $s(t)=\int\frac{sin(4t)+4t-8}{4}dt=\frac{8t^2-cos(4t)-64t}{32}+c$, e $s(0) = 1 \Rightarrow c = 33/32$, quindi:

$$s(2)=\frac{32-cos(8)-128+33}{32}=-\frac{cos(8)}{16}+\frac{33}{32}$$

7. (AK 2012) Solve the following $\int\frac{x^3+8x^2+16x-4}{x+5}dx$**.**

$$\int\left(x^2+3x+1-\frac{9}{x+5}\right)dx=\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+x-9ln\ |x+5|\ +c$$

8. (AK 2012) Evaluate the following $\int sin^3(2x)\cdot cos(2x)\,dx$**.**

$$\frac{1}{2}\int sin^3\ 2x\ \cdot d[sin\ 2x\ ]=\frac{sin^4\ 2x}{8}+c$$

Test di Verifica

1. Seleziona le uguaglianze corrette.

A $\int[f\ x\ +g\ x\ ]dx=\int f\ x\ dx+\int g\ x\ dx$

B $\int[f\ x\ \cdot g\ x\ ]dx=\int f\ x\ dx\cdot\int g\ x\ dx$ **C** $\int\frac{f\ x}{g\ x}dx=\frac{\int f\ x\ dx}{\int g\ x\ dx}$

D $\int\sqrt{f\ x}\cdot f'\ x\ dx=\frac{2f\ x\cdot\sqrt{f\ x}}{3}+c$ **E** $\int sin[f\ x\ ]\cdot f'\ x\ dx=cos[f\ x\ ]+c$

Sono sicuramente errate la B e la C perché non sono regole esistenti; alla E manca un segno meno nel membro destro per essere corretta. Risposte corrette: A – D

2. Quali fra le seguenti uguaglianze sono corrette?

A $\int\frac{1}{x+1\ \ x+2^{\ 2}}dx=\int\left(\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{Cx+D}{x+2^{\ 2}}\right)dx$

B $\int\frac{1}{x+1\ \ x^2+x+1}dx=\int\left(\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}\right)dx$

C $\int\frac{1}{x^2+2x+1\ \ x-1}dx=\int\left(\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2^{\ 2}}+\frac{C}{x-1}\right)dx$

D $\int \frac{1}{x+1 \quad x^2-4} dx = \int \left(\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-4} \right) dx$

E $\int \frac{1}{x+1 \quad x-1} dx = \int \left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x^2-1} \right) dx$

Risposte corrette: B – C – D.

La A sarebbe corretta se $\int \frac{1}{x+1 \quad x+2^{\ 2}} dx = \int \left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+2^{\ 2}} \right) dx$

La E invece se: $\int \frac{1}{x+1 \quad x-1} dx = \int \left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} \right) dx$

3. Quali fra i seguenti integrali non possono essere risolti con il metodo di integrazione per parti?

A $\int x^3 \cdot sin \ x \ dx$ **B** $\int \frac{cos \ x}{x} dx$ **C** $\int \frac{ln \ x}{x} dx$ **D** $\int e^{\sqrt{x}} \ dx$ **E** $\int e^{x\sqrt{x}} \ dx$

La A si risolve con $sin(x)$ fattore differenziale; la C si risolve immediatamente senza integrazione per parti, ma può risolversi con questo metodo con $1/x$ come fattore differenziale; nella D è 1 il fattore differenziale. Risposte corrette: B – E

4. Quali fra i seguenti integrali sono ottenuti da $\int \frac{cos \ x \ + sin \ x}{sin^2 \ x} dx$ sostituendo opportunamente le variabili?

A $\int_{t=sin \ x} \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t\sqrt{1-t^2}} \right) dt$ **B** $\int_{t=cos \ x} \left(\frac{\sqrt{1-t^2}+t}{\sqrt{1-t^2}} \right) dt$ **C** $\int_{t=tan \ x/2} \left(\frac{1-t^2+2t}{2t^2} \right) dt$

D $\int_{t=sin \ x/2} \left(\frac{2t\sqrt{1-t^2}+1-2t^2}{4t^2\sqrt{1-t^2}} \right) dt$ **E** $\int_{t=tan \ x} \left(\frac{t+1}{\sqrt{1+t^2}} \right) dt$

Risposte corrette: A – C. La B corretta è: $\int_{t=cos \ x} \left(-\frac{t+\sqrt{1-t^2}}{1-t^2 \ \sqrt{1-t^2}} \right) dt$;

la D: $\int_{t=sin \ x/2} \left(8\frac{2t\sqrt{1-t^2}+1-2t^2}{t^2 \ 1-t^2 \ \sqrt{1-t^2}} \right) dt$; la E: $\int_{t=tan \ x} \left(\frac{t+1}{t^2\sqrt{1+t^2}} \right) dt$

5. Quali delle seguenti uguaglianze sono vere per ogni valore del numero naturale *n*?

A $\int [f \ x]^{1-n} \cdot f' \ x \ dx = \frac{[f \ x]^{2-n}}{2-n} + c$ **B** $\int e^{n^2-4 \ x} \ dx = \frac{e^{n^2-3 \ x}}{n^2-3} + c$

C $\int \sqrt[n]{x^4+1} \cdot x^3 \ dx = \frac{n\left[\sqrt[n]{x^4+1}^{\ n+1} - 1\right]}{4 \ n+1} + c$ **D** $\int sin \ n^2 x \ dx = -\frac{cos \ n^2 x}{n^2} + c$

E $\int \frac{1}{[n-3 \ x]^2+1} dx = \frac{tan^{-1}[n-3 \ x]}{n-3} + c$

Risposte corrette: C – D. La A non è corretta per $n = 2$; la B è corretta se: $\int e^{n^2-4 \ x} \ dx = \frac{e^{n^2-4 \ x}}{n^2-4} + c$;

la E non è corretta per $n = 3$.

6. Quale fra le seguenti rappresenta la derivata di $F \ x \ = \int_{x+1}^{x^3+x} \frac{1}{t} dt$?

A $(3x^2 + 1)/(x^3 + x) - 1/(x + 1)$ **B** $(3x^2 + 1)\, ln(x^3 + x) - ln(x + 1)$ **C** $1/(x^3 + x) - 1/(x + 1)$
D $ln(x^3 + x) - ln(x + 1)$ **E** **Nessuno dei precedenti**

$D\left(\int_{x+1}^{x^3+x} \frac{1}{t}\, dt\right) = \frac{3x^2+1}{x^3+x} - \frac{1}{x+1}$: risposta corretta: C

7. Quale fra le seguenti è una primitiva di $x^2 \cdot [x \cdot cos(x) + 3sin(x)]$?
A $x^3cos(x)$ **B** $x^3cos(x)sin(x)$ **C** $x^3sin(x)$
D **La data funzione non ha primitive** **E** **Nessuno dei precedenti**
$D[x^3sin(x)] = 3x^2sin(x) + x^3 \cdot cos(x)$. Risposta corretta: C

8. Quale fra le seguenti è una primitiva di $\frac{2x^2+3x-1}{x^3+2x^2+x}$?

A $ln(x+1)^3 - \frac{2}{x+1}$ **B** $ln\left[\frac{(x+1)^3}{x}\right] - \frac{1}{x+1}$ **C** $tan^{-1}\left[\frac{(x+1)^3}{x}\right] - \frac{2}{x+1}$

D $ln\left[\frac{(x+1)^3}{2x}\right]$ **E** **Nessuno dei precedenti**

$$\int \frac{2x^2+3x-1}{x^3+2x^2+x}dx = \int \frac{2x^2+3x-1}{x(x+1)^2}dx = \int\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}\right)dx = \int \frac{(a+b)x^2+(2a+b+c)x+a}{x(x+1)^2}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ 2a+b+c=3 \\ a=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=3 \\ c=2 \end{cases} \Rightarrow \int \frac{2x^2+3x-1}{x^3+2x^2+x}dx = ln\left(\frac{|x+1|^3}{|x|}\right) - \frac{2}{x+1} + c$$

Risposta corretta: E

9. Quale fra le seguenti è una primitiva di $\frac{2\sqrt{x}+1}{x-1}$?

A $ln\left(\sqrt{x}-1\right)^3 + 4\sqrt{x}$ **B** $2ln\left(\sqrt{x}+1\right) - 2\sqrt{x} + 2x$ **C** $ln(x+1) + 4\sqrt{x} - 4tan^{-1}\left(\sqrt{x}\right)$

D $ln\left(\frac{\left|\sqrt{x}-1\right|^3}{\sqrt{x}+1}\right) + 4\sqrt{x}$ **E** **Nessuno dei precedenti**

$$\int_{t=\sqrt{x}} \frac{2t(2t+1)}{t^2-1}dt = \left[ln\left(\frac{|t-1|^3}{|t+1|}\right) + 4t + c\right]_{t=\sqrt{x}} = ln\left(\frac{\left|\sqrt{x}-1\right|^3}{\sqrt{x}+1}\right) + 4\sqrt{x} + c$$. Risposta corretta: D

10. Per quali valori del numero naturale n, $\int sin^n\ x \cdot cos\ x\ dx$ è certamente un'integrale immediato?
A n **pari** **B** n **dispari** **C** **qualsiasi valore di** n **D** **nessun valore di** n **E** **Nessuno dei precedenti**

$\int sin^n\ x \cdot cos\ x\ dx = \frac{sin^{n+1}\ x}{n+1} + c, n \neq -1$. Risposta corretta: C

11. Calcolare $\int \frac{1}{9x^2+6x+4}dx$

$$\int \frac{1}{3x+1\ ^2+3}dx = \frac{\sqrt{3}}{9}\int \frac{\sqrt{3}/3}{\left(\frac{3x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx = \frac{\sqrt{3}}{9}tan^{-1}\left(\frac{3x+1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

12. Calcolare $\int x^n \cdot ln\ x\ dx, n \in \mathbb{N}$

$$\frac{x^{n+1}\cdot ln(x)}{n+1}-\int\frac{x^n}{n+1}dx=\frac{x^{n+1}\cdot ln(x)}{n+1}-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}+c=\frac{\left[ln\left(x^{n+1}\right)-1\right]x^{n+1}}{(n+1)^2}$$

13. Calcolare $\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2+x}sin(t)\,dt}{x}$

Usando la regola di De L'Hopital e la formula fondamentale del calcolo integrale, otteniamo: $\lim_{x\to 0^+}(2x+1)sin\left(x^2+x\right)=0$

14. Data una funzione *f*(*x*) continua e *positiva* **in un intervallo [*a*; *b*], diciamo integrale secondo Riemann di *f*(*x*) esteso all'intervallo [*a*; *b*], il limite comune alle successioni delle sue somme** *inferiori* **e** *superiori*

15. Data una funzione *f*(*x*) continua in un intervallo [*a*; *b*], allora la funzione *integrale* $F\ x\ =\int_{x_0}^{x} f\ t\ \ dt$ **è** *derivabile* **in [*a*; *b*] e si ha: *F '*(*x*) =** $f(x)$**,** $\forall$ ***x*** $\in$ **[*a*; *b*].**