11. L'integrazione

Calcolo di integrali definiti e applicazione al calcolo di aree

Dire quali dei seguenti integrali sono definiti, giustificando la risposta

1. **a)** $\int_{-1}^{1} \sqrt{x}\, dx$ **; b)** $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ **; c)** $\int_{-1}^{1} ln\ |x|\ dx$ **; d)** $\int_{-2}^{-1} sin\ x\ dx$ **; e)** $\int_{1}^{2} sin^{-1}\ x\ dx$

Solamente d). Infatti il dominio di a) è [0; + ∞); quello di b) e c): $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; quello di e) [–1; 1]

2. **a)** $\int_{10}^{11} tan^{-1}\ x\ dx$ **; b)** $\int_{0}^{2} tan\ x\ dx$ **; c)** $\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} dx$ **; d)** $\int_{-1}^{1} x \cdot cot\ x\ dx$

Solamente a) e c). Infatti il dominio di b) è $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi\}$; quello di c) [0; + ∞)

Calcolare i seguenti integrali definiti

3. **a)** $\int_{1}^{2} \left(e^x - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx$ **;b)** $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} sin\ x\ + cos\ x\ \ dx$ **; c)** $\int_{-1}^{1} x + 2\ ^3\ dx$

a) $\left[e^x + \frac{1}{x} + 3\sqrt[3]{x} \right]_1^2 = e^2 + \frac{1}{2} + 3\sqrt[3]{2} - e + 1 + 3 = e^2 - e + 3\sqrt[3]{2} - \frac{7}{2}$;

b) $\left[-cos\ x\ + sin\ x\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$; c) $\left[\frac{x+2\ ^4}{4} \right]_{-1}^{1} = \frac{81-1}{4} = 20$

4. **a)** $\int_{0}^{2} x^2 + 1\ ^2\ dx$ **; b)** $\int_{0}^{3} \frac{x^2+x+1}{x+1} dx$ **; c)** $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - x}{\sqrt{x}} dx$

a) $\left[\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x \right]_0^2 = \frac{32}{5} + \frac{16}{3} + 2 = \frac{206}{15}$;

b) $\int_{0}^{3} \left(\frac{x^2-1}{x+1} + 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx = \int_{0}^{3} \left(x \cancel{-1+1} + \frac{1}{x+1} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + ln\ (x+1) \right]_0^3 = \frac{9}{2} + ln\ 4$;

c) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} 1 + x^{-1/6} - x^{1/2}\ \ dx = \left[x + \frac{6\sqrt[6]{x^5}}{5} - \frac{2\sqrt{x^3}}{3} \right]_{1/2}^{1} = 1 + \frac{6}{5} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} - \frac{6}{5\sqrt[6]{32}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2} - 18\sqrt[6]{2} + 31}{30}$

5. **a)** $\int_{-2}^{-1} \frac{3x^3 + 2x^2 - x}{x} dx$ **; b)** $\int_{\pi/3}^{\pi/4} \frac{sin\ 2x}{cos\ x} dx$ **; c)** $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{cos\ 2x}{sin^2\ x} dx$ **; d)** $\int_{0}^{1} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$

a) $\left[x^3 + x^2 - x \right]_{-2}^{-1} = -1 + 1 + 1 + 8 - 4 - 2 = 3$; b) $\int_{\pi/3}^{\pi/4} \frac{2sin\ x\ \cancel{cos\ x}}{\cancel{cos\ x}} dx = \left[-2cos\ x \right]_{\pi/3}^{\pi/4} = -\sqrt{2} + 1$;

c) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\frac{1}{sin^2\ x} - 2 \right) dx = \left[-cot\ x\ - 2x \right]_{\pi/4}^{\pi/2} = -\pi + 1 + \pi/2 = 1 - \pi/2$;

d) $\left[ln\ e^x + e^{-x}\ \right]_0^1 = ln\left(e + \frac{1}{e} \right) - ln\ 2\ = ln\left(\frac{e^2+1}{2} \right) - 1$

6. **a)** $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{cos\ x\ - cos\ 5x}{sin\ 2x} dx$ **; b)** $\int_{0}^{\pi/2} \frac{sin\ x\ - cos\ x}{sin\ x\ + cos\ x} dx$ **; c)** $\int_{1}^{\sqrt{2}} \frac{x^2-1}{x^2+1} dx$

a) $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{2\sin 3x \cancel{\sin 2x}}{\cancel{\sin 2x}}dx = \left[-\frac{2}{3}\cos 3x\right]_{\pi/6}^{\pi/4} = \frac{2}{3}$; b) $\left[-\ln\left[\sin x + \cos x\right]\right]_0^{\pi/2} = 0$;

c) $\int_1^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{2}{x^2+1}\right)dx = \left[x - 2\tan^{-1} x\right]_1^{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 2\tan^{-1}\sqrt{2} - 1 + \pi/2$

7. **a)** $\int_{-1}^{1} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x}^2 dx$ **; b)** $\int_0^1 \frac{2^x + 4^{-x}}{2^x}dx$ **; c)** $\int_{-1}^{1} \frac{x^4 + x^2 - 1}{x^2+1}dx$

a)

$$\int_{-1}^{1} e^x - 2e^{-x} + e^{-3x}\ dx = \left[e^x + 2e^{-x} - \frac{e^{-3x}}{3}\right]_{-1}^{1} = e + 2e^{-1} - \frac{e^{-3}}{3} - e^{-1} - 2e + \frac{e^3}{3} = \frac{e^3 - 3e + 3e^{-1} - e^{-3}}{3};$$

b) $\int_0^1 1 + 2^{-3x}\ dx = \left[-\frac{2^{-3x}}{3\ln 2}\right]_0^1 = -\frac{1}{24\ln 2} + \frac{1}{3\ln 2} = \frac{7}{24\ln 2}$;

c) $\int_{-1}^{1}\left(\frac{x^4-1}{x^2+1} + \frac{x^2}{x^2+1}\right)dx = \int_{-1}^{1}\left(x^2 \cancel{-1+1} - \frac{1}{x^2+1}\right)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \tan^{-1} x\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{4-3\pi}{6}$

8. **a)** $\int_{-2}^{-1} x^2\ x^3 - 1\ ^4 dx$ **; b)** $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin^4 x \cdot \cos x\ dx$ **; c)** $\int_1^2 2x - 1\ \sqrt{x^2 - x}\, dx$

a) $\left[\frac{x^3 - 1\ ^5}{15}\right]_{-2}^{-1} = \frac{59017}{15}$; b) $\left[\frac{\sin^5 x}{5}\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{20}$; c) $\left[\frac{2\sqrt{x^2 - x\ ^3}}{3}\right]_1^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

9. **a)** $\int_0^{\pi} x^3 \cdot \sin x^4\ dx$ **; b)** $\int_{-1}^{1} e^{2x} \cdot e^{3x} - 1\ dx$ **; c)** $\int_{-\sqrt{3}}^{1} \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2}dx$

a) $\left[-\frac{\cos x^4}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{1 - \cos \pi^4}{4}$; b) $[e^{5x}/5 - ½\, e^{2x}]_{-1}^{1} = e^5/5 - ½e^2 - e^{-5}/5 + ½e^{-2}$; c) $[½\{\tan^{-1}(x)\}^2\ ]_{-\sqrt{3}}^{1} =$ $½\,[\pi^2/16 - \pi^2/9] = -7\pi^2/288$

10. **a)** $\int_{-\pi/4}^{-\pi/6} \left[\sin x + \cos x\right] \cdot \csc x\ dx$ **; b)** $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ **; c)** $\int_{-\sqrt{3}}^{0} \frac{x^2-2}{x^2+1}dx$

a) $\int_{-\pi/4}^{-\pi/6}\left[1 + \frac{\cos x}{\sin x}\right]dx = [x + \ln\{|\sin(x)|\}\ ]_{-\pi/4}^{-\pi/6} = -\pi/6 + \ln(½) + \pi/4 - \ln(\sqrt{2}/2) = \pi/12 + \ln(½) - ½\ln(2)$ $- \ln(½) = \pi/12 - \ln(\sqrt{2})$; b) $[-(1-x^2)^{½}]_{-1/2}^{1/2} = -(1 - ¼)^{½} + (1 - ¼)^{½} = 0$;

c) $\int_{-\sqrt{3}}^{0}\left(1 - \frac{3}{x^2+1}\right)dx = [x - 3\tan^{-1}(x)\,]_{-\sqrt{3}}^{0} = \sqrt{3} - \pi$

11. **a)** $\int_{-\sqrt{2}/2}^{1/2} \frac{\left[\sin^{-1} x\right]^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$ **; b)** $\int_1^e \frac{e^{\ln(x)+1}}{x}dx$ **; c)** $\int_0^1 \frac{1}{x^2+12x+36}\ dx$ **; d)** $\int_2^3 \frac{4x}{x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1}dx$

a) $[\{\sin^{-1}(x)\}^3/3\,]_{-\sqrt{2}/2}^{1/2} = \pi^3/648 + \pi^3/192 = 35\pi^3/5184$; b) $[e^{\ln(x)+1}\,]_1^e = e^2 - e$;

c) $[-1/(x+6)\,]_0^1 = -1/7 + 1/6 = 1/42$; d) $2\int_2^3 \frac{2x}{x^2-1\ ^3}dx = [-(x^2-1)^{-2}\,]_2^3 = -1/64 + 1/9 = 55/576$

12. **a)** $\int_{e}^{e^2} \frac{1}{x \cdot ln(x^3)} dx$ **; b)** $\int_{-1}^{1} x \cdot \sqrt{x^2-1}\, dx$ **; c)** $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x^3 \cdot \sqrt[5]{x^4+1}\, dx$ **; d)** $\int_{\pi^3/27}^{\pi^3} \frac{cos\left(\sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

a) $\frac{1}{3}\int_{e}^{e^2} \frac{1/x}{ln(x)} dx = [ln\{ln(x)\}/3\,]_e^{e^2} = ln(2)/3 = ln\ \sqrt[3]{2}$; b) $[(x^2-1)^{3/2}/3\,]_{-1}^{1} = 0$; c) $[5(x^4+1)^{6/5}/24\,]_{-1}^{1} = 0$;

d) $\left[3sin\left(\sqrt[3]{x}\right)\right]_{\pi^3/27}^{\pi^3} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$

13. **a)** $\int_{-1}^{0} \frac{x}{x^2+9} dx$ **; b)** $\int_{e^{\pi/4}}^{e^{\pi/3}} \frac{sin\left[ln(x)\right]}{x} dx$ **; c)** $\int_{-\pi/3}^{\pi/2} sin(x) \cdot e^{cos(x)} dx$

a) $[½ln(x^2+9)\,]_{-1}^{0} = ½\ ln(9/10) = ln\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$; b) $[-cos\{ln(x)\}\,]_{e^{\pi/4}}^{e^{\pi/3}} = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$;

c) $[-e^{cos(x)}\,]_{-\pi/3}^{\pi/2} = \sqrt{e}-1$

14. **a)** $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2 \cdot sin(x)\, dx$ **; b)** $\int_{0}^{\pi} e^x \cdot cos(x)\, dx$ **; c)** $\int_{-1}^{1} x^2 \cdot e^x dx$ **; d)** $\int_{1}^{\sqrt{e}} ln(x^2)\, dx$

a) $\left[-x^2 \cdot cos(x)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2x \cdot cos(x)\, dx = \left[2x \cdot sin(x)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2sin(x)\, dx = \left[2cos(x)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0$;

b) $\left[e^x \cdot cos(x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \cdot sin(x)\, dx = -e^{\pi} - 1 - \left[e^x \cdot sin(x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \cdot cos(x)\, dx = -e^{\pi} - 1 - \int_0^{\pi} e^x \cdot cos(x)\, dx$,

quindi: $\int_0^{\pi} e^x \cdot cos(x)\, dx = \frac{-e^{\pi}-1}{2}$;

c) $\left[x^2 \cdot e^x\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} 2x \cdot e^x dx = e - e^{-1} - \left[2x \cdot e^x\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} 2e^x dx = e - e^{-1} - 2e + 2e^{-1} + \left[2e^x\right]_{-1}^{1} = e - 5e^{-1}$;

d) $\left[2x \cdot ln(x)\right]_1^{\sqrt{e}} - \int_1^{\sqrt{e}} 2\, dx = \sqrt{e} - [2x]_1^{\sqrt{e}} = \sqrt{e} - 2\sqrt{e} + 2 = 2 - \sqrt{e}$

15. **a)** $\int_{-1/2}^{\sqrt{3}/2} x \cdot sin^{-1}(x)\, dx$ **; b)** $\int_{1}^{ln(2)} x \cdot e^{2x} dx$ **; c)** $\int_{e^{-1}}^{e} ln(x)\, dx$ **; d)** $\int_{-\sqrt{3}/2}^{1} sin^{-1}\ x\ dx$

a) $\left[\frac{x^2 \cdot sin^{-1}(x)}{2}\right]_{-1/2}^{\sqrt{3}/2} - \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{7\pi}{48} + \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{\sqrt{3}/2}\left(\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx =$

$= \frac{7\pi}{48} + \frac{1}{2}\left[\frac{x\sqrt{1-x^2} - sin^{-1}(x)}{2}\right]_{-1/2}^{\sqrt{3}/2} = \frac{7\pi}{48} + \frac{\sqrt{3}-\pi}{8} = \frac{6\sqrt{3}+\pi}{48}$;

b) $\left[\frac{x \cdot e^{2x}}{2}\right]_1^{ln(2)} - \frac{1}{4}\int_1^{ln(2)} 2e^{2x} dx = 2ln(2) - \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}\left[e^{2x}\right]_1^{ln(2)} = 2ln(2) - \frac{e^2}{2} - 1 + \frac{e^2}{4} = \frac{ln(256) - e^2 - 4}{4}$;

c) $\left[x \cdot ln(x)\right]_{e^{-1}}^{e} - \int_{e^{-1}}^{e} dx = e + e^{-1} - [x]_{e^{-1}}^{e} = e + e^{-1} - e + e^{-1} = 2e^{-1}$;

d) $\left[x \cdot sin^{-1}\ x\ \right]_{-\sqrt{3}/2}^{1} - \int_{-\sqrt{3}/2}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}\pi}{6} + \left[\sqrt{1-x^2}\right]_{-\sqrt{3}/2}^{1} = \frac{3-\sqrt{3}\ \pi}{6} - \frac{1}{2} = \frac{3-\sqrt{3}\ \pi - 3}{6}$

16. **a)** $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}/3} tan^{-1}(x)\ dx$ **; b)** $\int_{0}^{\pi/2} e^x \cdot sin(x)\ dx$ **; c)** $\int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{ln(x)}{x^2} dx$ **; d)** $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x \cdot (x-1)^2} dx$

a)

$$\left[x\cdot tan^{-1}(x)\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}/3}-\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}/3}\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{\sqrt{3}\pi}{18}-\frac{\sqrt{3}\pi}{3}-\frac{1}{2}\left[ln\left(1+x^2\right)\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}/3}=-\frac{5\sqrt{3}\pi}{18}-\frac{1}{2}\left[ln\left(\frac{4}{3}\right)-ln(4)\right]=-\frac{5\sqrt{3}\pi}{18}+ln\left(\sqrt{3}\right);$$

b) $\left[e^x\cdot sin(x)\right]_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}e^x\cdot cos(x)\ dx=e^{\pi/2}-\left[e^x\cdot cos(x)\right]_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}e^x\cdot sin(x)\ dx=e^{\pi/2}+1-\int_0^{\pi/2}e^x\cdot sin(x)\ dx$,

si ha quindi: $\int_0^{\pi/2}e^x\cdot sin(x)\ dx=\frac{e^{\pi/2}+1}{2}$;

c) $\left[-\frac{ln(x)}{x}\right]_{\sqrt{e}}^{e}+\int_{\sqrt{e}}^{e}\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{e}+\frac{1}{2\sqrt{e}}+\left[-\frac{1}{x}\right]_{\sqrt{e}}^{e}=-\frac{1}{e}+\frac{\sqrt{e}}{2e}-\frac{1}{e}+\frac{\sqrt{e}}{e}=\frac{3\sqrt{e}-4}{2e}$;

d) Si ha: $\int\frac{1}{x\cdot(x-1)^2}dx=\int\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}\right)dx=\frac{1}{1-x}-ln\left(\frac{|x-1|}{|x|}\right)+c$, pertanto avremo:

$$\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x\cdot(x-1)^2}dx=\left[\frac{1}{1-x}-ln\left(\frac{|x-1|}{|x|}\right)\right]_{-2}^{-1}=\frac{1}{2}-ln(2)-\frac{1}{3}+ln\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{6}+ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

17. **a)** $\int_0^1\frac{x}{x^2-5x+6}dx$ **; b)** $\int_0^1\frac{x^2+1}{x^2-x-2}dx$ **; c)** $\int_{-1}^1\frac{x+1}{x^2-7x+10}dx$ **; d)** $\int_1^2\frac{1}{x^2\cdot(x+1)}dx$

a) $\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x-5+5}{x^2-5x+6}dx=\left[ln\left(\sqrt{\frac{(x^2-5x+6)|x-3|^5}{|x-2|^5}}\right)\right]_0^1=ln(8)-ln\left(\frac{27}{4}\right)=ln\left(\frac{32}{27}\right)$;

b) $\int_0^1\left(1+\frac{x+3}{x^2-x-2}\right)dx=\left[x+ln\left(\sqrt[3]{\frac{|x-2|^5}{(x+1)^2}}\right)\right]_0^1=1+ln\left(\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right)-ln\left(\sqrt[3]{32}\right)=1-\frac{7}{3}ln(2)$;

c) $\int_{-1}^1\frac{x+1}{x^2-7x+10}dx=\left[ln\left(\frac{(x-5)^2}{|x-2|}\right)\right]_{-1}^1=ln(16)-ln(12)=ln\left(\frac{4}{3}\right)$;

d) $\int_1^2\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x+1}\right)dx=\left[-\frac{1}{x}+ln\left(\frac{|x+1|}{|x|}\right)\right]_1^2=-\frac{1}{2}+ln\left(\frac{3}{2}\right)+1-ln(2)=\frac{1}{2}+ln\left(\frac{3}{4}\right)$

Usando il metodo di sostituzione calcolare i seguenti integrali definiti

18. **a)** $\int_0^1(x-1)\sqrt{x+1}\,dx$ **; b)** $\int_0^1\frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}dx$ **; c)** $\int_0^1\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}dx$

a) $t=\sqrt{x+1},x=t^2-1,dx=2tdt,x=0\Rightarrow t=1,x=1\Rightarrow t=\sqrt{2}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\int_1^{\sqrt{2}}2t^2\left(t^2-2\right)dt=\left[\frac{2t^5}{5}-\frac{4t^3}{3}\right]_1^{\sqrt{2}}=\frac{8\sqrt{2}}{5}-\frac{8\sqrt{2}}{3}-\frac{2}{5}+\frac{4}{3}=\frac{14-16\sqrt{2}}{15};$$

b) $t=\sqrt{x},x=t^2,dx=2tdt,x=0\Rightarrow t=0,x=1\Rightarrow t=1\Rightarrow\int_0^1 2\frac{t^3-t^2}{t^2+t}dt=\int_0^1 2\frac{t^2-t}{t+1}dt=$

$$=\int_0^1 2\left(t-2+\frac{2}{t+1}\right)dt=\left[(t-2)^2+4ln(x+1)\right]_0^1=1+ln(16)-4=ln(16)-3;$$

$$t=\sqrt[6]{x}, x=t^6, dx=6t^5dt, x=0\Rightarrow t=0, x=1\Rightarrow t=1\Rightarrow \int_0^1 6\frac{t^{11}+t^8}{t^2+1}dt=$$

c) $$=6\int_0^1\left(t^9-t^7+t^6+t^5-t^4-t^3+t^2+t-1-\frac{t-1}{t^2+1}\right)dt=$$

$$=6\left[\frac{t^{10}}{10}-\frac{t^8}{8}+\frac{t^7}{7}+\frac{t^6}{6}-\frac{t^5}{5}-\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}-t+ln\left(\sqrt{t^2+1}\right)-tan^{-1}(x)\right]_0^1=\frac{3\left(70\pi-93-140ln(2)\right)}{140}$$

19. **a)** $\int_0^{\pi/3}\frac{dx}{5+4cos(x)}$ **; b)** $\int_1^2 x^2\sqrt{x-1}\,dx$ **c)** $\int_{-3}^3\sqrt{9-x^2}\,dx$

a) $$cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2}, t=tan\left(\frac{x}{2}\right), dx=\frac{2dt}{1+t^2}, x=0\Rightarrow t=0, x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow t=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow$$
$$\int_0^{\sqrt{3}/3}\frac{dt}{t^2+9}=\left[\frac{1}{3}tan^{-1}\left(\frac{t}{3}\right)\right]_0^{\sqrt{3}/3}=\frac{\pi}{18};$$

b) $$t=\sqrt{x-1}, x=t^2+1, dx=2tdt, x=1\Rightarrow t=0, x=2\Rightarrow t=1\Rightarrow \int_0^1 2t^2\left(t^2+1\right)^2dt=\left[\frac{2t^3\left(15t^4+42t^2+35\right)}{105}\right]_0^1=\frac{184}{105}$$

c) $$x=3sin(t), t=sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right), dx=3cos(t)dt, x=-3\Rightarrow t=-\frac{\pi}{2}, x=3\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\int_{-\pi/2}^{\pi/2}9cos^2(t)dt=\left[\frac{9sin(2t)+18t}{4}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{9\pi}{2}$$

20. **a)** $\int_0^1\frac{e^x-1}{e^{2x}+1}dx$ **; b)** $\int_{-1}^1\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}+1}dx$ **; c)** $\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{x+1}}dx$

a) $$t=e^x, x=ln(t), dx=\frac{dt}{t}, x=0\Rightarrow t=1, x=1\Rightarrow t=e\Rightarrow\int_1^e\frac{t-1}{t^3+t}dt=$$
$$=\left[ln\left(\sqrt{\frac{t^2+1}{t^2}}\right)+tan^{-1}(t)\right]_1^e=ln\left(\sqrt{\frac{e^2+1}{e^2}}\right)+tan^{-1}(e)-\frac{\pi}{4}-1;$$

b) $$t=\sqrt[3]{x}, x=t^3, dx=3t^2dt, x=0\Rightarrow t=0, x=1\Rightarrow t=1\Rightarrow\int_0^1\frac{3t^4}{t+1}dt=$$
$$=\left[ln\left((t+1)^3\right)+\frac{t\left(3t^3-4t^2+6t-12\right)}{4}\right]_0^1=ln(8)-\frac{7}{4};$$

c) $$\int_1^{\sqrt{2}}\frac{2\cancel{t}\left(t^2-1\right)^3}{\cancel{t}}dt=\left[\frac{2t\left(5t^6-21t^4+35t^2-35\right)}{35}\right]_1^{\sqrt{2}}=\frac{32-18\sqrt{2}}{35}$$

Calcolare i seguenti integrali definiti al variare del parametro n, numero naturale.

21. **a)** $\int_0^{\pi}sin(nx)\,dx$ **; b)** $\int_0^1 e^{nx}dx$ **; c)** $\int_0^1 sin^{-1}\left(\frac{x}{n}\right)dx$

a) $$[-cos(nx)/n\,]_0^{\pi}=-cos(n\pi)/n+1/n=\begin{cases}\frac{-1+1}{n}=0 & n\ pari\\ \frac{1+1}{n}=\frac{2}{n} & n\ dispari\end{cases};$$

b) $[e^{nx}/n]_0^1 = (e^n - 1)/n$

c) $[-cos(nx)/n]_0^{\pi} = -cos(n\pi)/n + 1/n = \left[x \cdot sin^{-1}\left(\frac{x}{n}\right) + \sqrt{n^2 - x^2}\right]_0^1 = sin^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) + \sqrt{n^2 - 1} - n$

22. Geometricamente, cosa rappresenta l'integrale 19c?

Dato che $y = \sqrt{9 - x^2}$, si ottiene dall'equazione $x^2 + y^2 = 9$, tenuto conto del significato geometrico dell'integrale definito è l'area di un semicerchio di raggio 3.

23. Se una funzione *f*(*x*) pari è continua in [–*a*; *a*], quanto vale $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$, in termini di una primitiva *F*(*x*) di *f*(*x*)?

Abbiamo visto che se una funzione è pari la sua derivata è dispari, quindi anche la sua primitiva è dispari, pertanto: $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = [F(x)]_{-a}^{a} = F(a) - F(-a) = F(a) + F(a) = 2\,F(a)$.

24. Come il precedente per *f*(*x*) dispari.

Stavolta la sua primitiva è pari, pertanto: $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = [F(x)]_{-a}^{a} = F(a) - F(-a) = F(a) - F(a) = 0$.

25. Sapendo che *f*(*x*) è integrabile in [0, 4] e $\int_0^4 f(x)\,dx = 10$, calcolare $\int_0^2 f(2x)\,dx$.

Sostituendo: $t = 2x$, $x = ½t$, $dx = ½dt$, $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = 2 \Rightarrow t = 4$. Chiaramente un'uguaglianza non dipende dal nome simbolico della variabile, quindi: $\int_0^2 f(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^4 f(t)\,dt = \frac{10}{2} = 5$.

26. Sapendo che *f*(*x*) è integrabile in [0, 4] e $\int_3^6 f(x)\,dx = 6$, calcolare $\int_1^2 f(3x)\,dx$.

Come prima: $t = 3x$, $x = t/3$, $dx = dt/3$, $x = 1 \Rightarrow t = 3$, $x = 2 \Rightarrow t = 6 \Rightarrow \int_1^2 f(3x)\,dx = \frac{1}{3}\int_3^6 f(t)\,dt = \frac{6}{3} = 2$

27. Se $\int_a^b f(x)\,dx > 0, b > a$, possiamo dire che esso rappresenta l'area del trapezoide associato alla *f*(*x*) in [*a*; *b*]? Giustificare la risposta.

No, ciò si ha solo se è $f(x) > 0$, $\forall x \in [a; b]$.

28. $\int_a^b f(x)\,dx > 0, b > a$ è condizione necessaria o sufficiente affinché rappresenti l'area del trapezoide associato alla *f*(*x*) in [*a*; *b*]? Giustificare la risposta.

Necessaria ma non sufficiente, per quanto abbiamo detto prima.

29. Spiegare il seguente paradosso: $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = -1 - 1 = -2$, ma ovviamente deve essere $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} > 0$.

Non è corretta la procedura perché $x = 0$ è un punto di discontinuità.

Applicare, se possibile, il teorema della media integrale alle seguenti funzioni, nell'intervallo indicato, determinando l'ascissa del valore medio. Con ∅ indichiamo che il teorema non è applicabile

30. a) $f(x) = x^3 + 1, x \in [0; 1]$; b) $f(x) = x^2 - x + 1, x \in [-1; 1]$

a) $c^3 + 1 = \int_0^1 (x^3 + 1)\,dx \Rightarrow c^3 + 1 = [¼x^4 + x]_0^1 \Rightarrow c^3 + 1 = 5/4 \Rightarrow c^3 = ¼ \Rightarrow c = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$.

b) $c^2 - c + 1 = \int_{-1}^{1}\left(x^2 - x + 1\right)dx \Rightarrow c^2 - c + 1 = [x^3/3 - ½x^2 + x]_{-1}^{1} \Rightarrow c^2 - c + 1 = 8/3 \Rightarrow c = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{6}$, dei due valori solo $\frac{3-\sqrt{21}}{6} \in [-1;1]$

31. **a)** $f(x) = \frac{x+1}{x}, x \in [0;1]$; **b)** $f(x) = \frac{x+1}{x}, x \in [1;3]$

a) Il teorema non è applicabile perché in $x = 0$ vi è una discontinuità.

b) $\frac{c+1}{c} = \frac{1}{2}\int_{1}^{3}\frac{x+1}{x}dx \Rightarrow \frac{c+1}{c} = \frac{1}{2}\left[x + ln(x)\right]_{1}^{3} \Rightarrow \frac{c+1}{c} = 1 + \frac{1}{2}ln(3) c = \frac{2}{ln(3)}$

32. **a)** $f(x) = ln(x), x \in [1; e]$; **b)** $f(x) = sin^{-1}(x), x \in [0; 1]$

a) $ln(c) = [x\, ln(x) - x]_1^e/(e-1) \Rightarrow ln(c) = 1/(e-1) \Rightarrow c = \sqrt[e-1]{e}$.

b) $sin^{-1}(c) = \left[x \cdot sin^{-1}(x) + \sqrt{1-x^2}\right]_0^1 \Rightarrow sin^{-1}(c) = \pi/2 - 1 \Rightarrow c = sin(\pi/2 - 1) = cos(1)$

33. **a)** $f(x) = tan(x), x \in [0; 2]$; **b)** $f(x) = cos(x), x \in [-\pi/2; \pi/2]$

a) Il teorema non è applicabile perché in $x = \pi/2$ vi è una discontinuità.

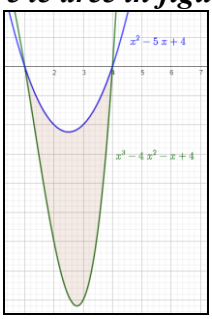
b) $cos(c) = 1/\pi[sin(x)]_{-\pi/2}^{\pi/2} \Rightarrow cos(c) = 2/\pi \Rightarrow c = cos^{-1}(2/\pi)$.

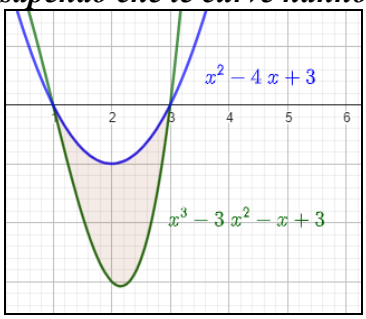
34. **a)** $f(x) = \lfloor x \rfloor, x \in [-1; 1]$; **b)** $f(x) = \lfloor x \rfloor, x \in [¼; ½]$

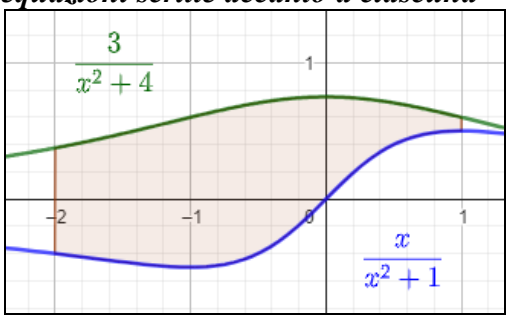
a) Il teorema non è applicabile perché in $x = 0$ vi è una discontinuità.

b) $\lfloor c \rfloor = 0 \Rightarrow ¼ \le c \le ½$, anche perché è una funzione costante.

Calcolare le aree in figura, sapendo che le curve hanno le equazioni scritte accanto a ciascuna

35. **a)** 

b) 

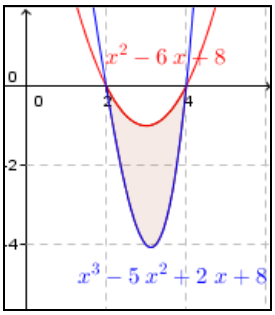
c) 

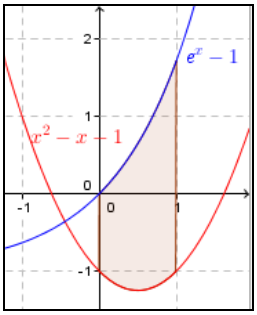
a) L'area è nelle ordinate negative, quindi l'integrale verrebbe negativo:

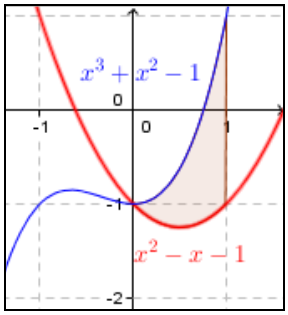
$$\int_{1}^{4}\left(x^2 - 5x + 4 - x^3 + 4x^2 + x - 4\right)dx = \int_{1}^{4}\left(-x^3 + 5x^2 - 4x\right)dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{5}{3}x^3 - 2x^2\right]_{1}^{4} = \frac{45}{4}$$

b) $$\int_{1}^{3}\left(x^2 - 4x + 3 - x^3 + 3x^2 + x - 3\right)dx = \int_{1}^{3}\left(-x^3 + 4x^2 - 3x\right)dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_{1}^{3} = \frac{8}{3}$$

c) $$\int_{-2}^{1}\left(\frac{3}{x^2+4} - \frac{x}{x^2+1}\right)dx = \left[\frac{3}{2}tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) - ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right]_{-2}^{1} = \frac{3}{2}tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{3\pi}{8} + ln\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$$

36. **a)** 

b) 

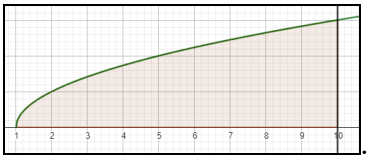
c) 

a) $$\int_{2}^{4}\left(x^2 - 6x + 8 - x^3 + 5x^2 - 2x - 8\right)dx = \int_{2}^{4}\left(-x^3 + 6x^2 - 8x\right)dx = \left[-\frac{x^4}{4} + 2x^3 - 4x^2\right]_{2}^{4} = 4$$

b) $\int_0^1 \left(e^x \cancel{-1} - x^2 + x \cancel{+1}\right) dx = \left[e^x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{6e-5}{6}$

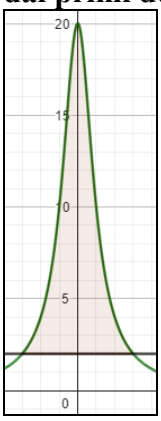
c) $\int_0^1 \left(x^3 + \cancel{x^2} \cancel{-1} \cancel{-x^2} + x \cancel{+1}\right) dx = \int_0^1 \left(x^3 + x\right) dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{4}$

37. Calcolare l'area della regione delimitata dal grafico della funzione $y = \sqrt{x-1}$, dalla retta $x = 10$ e dall'asse x.

In figura l'area da determinare: 

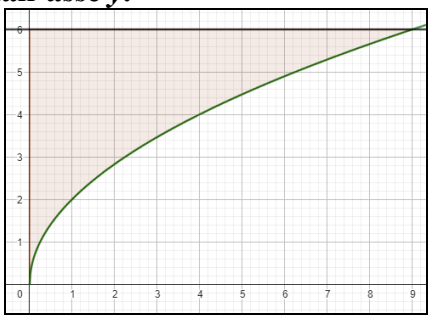
. $\int_1^{10} \sqrt{x-1}\, dx = \int_0^3 2t^2\, dt = \left[\frac{2t^3}{3}\right]_0^3 = 18$

38. Calcolare l'area della regione delimitata dal grafico della funzione $y = \frac{20}{1+x^2}$, dalla retta $y = 2$ e dai primi due quadranti.



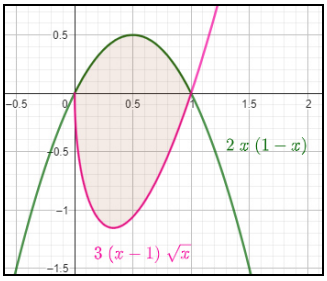
Determiniamo le ascisse dell'intersezione fra la funzione e la retta: $2 = \frac{20}{1+x^2} \Rightarrow 1 + x^2 = 10 \Rightarrow x = \pm 3$, quindi l'area richiesta è: $\int_{-3}^{3} \frac{20}{1+x^2} dx = \left[20 tan^{-1}(x)\right]_{-3}^{3} - 12 = 40 tan^{-1}(3) - 12 \approx 38$. 12 è l'area del rettangolo sotteso da $y = 2$ sull'asse x.

39. Calcolare l'area della regione delimitata dal grafico della funzione $y = 2\sqrt{x}$, dalla retta $y = 6$ e dall'asse y.



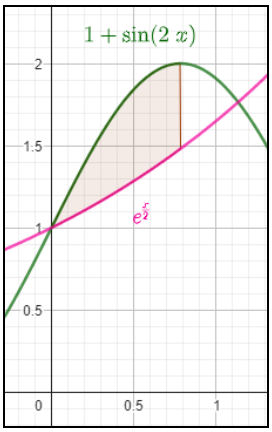
troviamo l'ascissa dell'intersezione fra la funzione e la retta: $2\sqrt{x} = 6 \Rightarrow x = 9$. Quindi: $6 \cdot 9 - \int_0^9 2\sqrt{x}\, dx = 54 - \left[\frac{4}{3}\sqrt{x^3}\right]_0^9 = 54 - 36 = 18$

40. Determinare l'area delimitata dalle funzioni $f(x) = 2x(1 - x)$; $g(x) = 3(x - 1)\sqrt{x}$ in [0; 1].



$$\int_0^1 \left(2x-2x^2-3x\sqrt{x}+3\sqrt{x}\right)dx=\left[x^2-\frac{2x^3}{3}-\frac{6}{5}\sqrt{x^5}+2\sqrt[3]{x}\right]_0^1=\frac{17}{15}$$

41. Determinare l'area delimitata dalle funzioni $f(x) = 1 + sin(2x)$ e $g(x) = e^{x/2}$ in $[0; \pi/4]$.

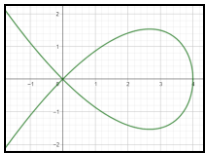


$$\int_0^{\pi/4}\left(1+sin(2x)-e^{\frac{x}{2}}\right)dx=\left[x-\frac{cos(2x)}{2}-2e^{\frac{x}{2}}\right]_0^{\pi/4}=\frac{\pi}{4}-2e^{\frac{\pi}{8}}+\frac{1}{2}-2=\frac{10+\pi-8e^{\frac{\pi}{8}}}{4}\approx 0,32$$

42. Calcolare l'area di un'ellisse di semiassi lunghi *a* e *b*.

Ovviamente consideriamo l'ellisse canonica di equazioni: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow y=\frac{b\sqrt{a^2-x^2}}{a}$, pertanto l'area richiesta è: $2\cdot\int_{-a}^{a}\left(\frac{b\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right)dx=\frac{b}{a}\left[a^2sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+x\sqrt{a^2-x^2}\right]_{-a}^{a}=\pi ab$

43. Calcolare l'area del cappio formato dall'intersezione fra $y=\frac{x\sqrt{4-x}}{2}$ e la sua simmetrica rispetto all'asse delle ascisse.



$$2\int_0^4\frac{x\sqrt{4-x}}{2}dx=\left[2\frac{(x-4)(3x+8)\sqrt{4-x}}{15}\right]_0^4=\frac{128}{15}$$

44. CAS Un serbatoio di un piccolo condominio contiene 3000 litri di acqua. Ogni giorno esso riceve acqua da mezzanotte a mezzogiorno secondo la legge $f(t)=125t\cdot sin^2\left(\frac{t}{6}\right)$, mentre i condomini prelevano acqua durante tutto il giorno secondo la legge $g(t) = 235sin^2(t/3)$ ogni ora. a) Quanta acqua vi sarà nel serbatoio a mezzogiorno? b) Il serbatoio si svuoterà prima della mezzanotte? c) Se la risposta è negativa, per quanto tempo, dopo mezzogiorno, si può evitare di immettere acqua nel serbatoio senza che esso si svuoti, rimanendo inalterata la legge $g(t)$?

a) Nel serbatoio entrano $\int_0^{12}125t\cdot sin^2\left(\frac{t}{6}\right)dt=125\left[\frac{t^2-36cos^2(t/6)-6t\cdot sin(t/3)}{4}\right]_0^{12}\approx 7133$ litri che si sommano ai 3000 già presenti, per un totale di 10133 litri, ne vengono prelevati un numero di li-

tri pari a: $\int_0^{12} 235 sin^2\left(\frac{t}{3}\right)dt = 235\left[\frac{2t-3sin(2t/3)}{8}\right]_0^{12} \approx 1236$, quindi a mezzogiorno vi saranno circa 8897 litri.

b) Nelle successive 12 ore non vi sarà immissione di acqua ma saranno prelevati altri 1236 litri, quindi il serbatoio non si svuota, ma a mezzanotte ci saranno circa 7661 litri.

c) Perciò se non immettiamo più acqua avremo: $470x - 705sin(2x/3) = 4 \cdot 8897$, che risolta con metodi numerici, fornisce circa 77 ore ulteriori.

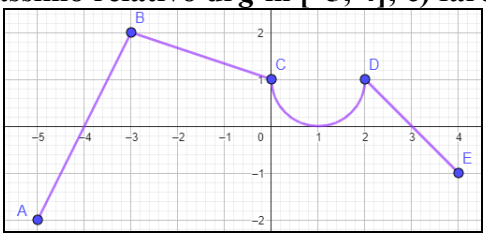
45. Consideriamo la funzione $y = x^n$, con $n > 1$. a) Calcolare l'area delimitata dalla funzione e dall'asse x per $0 \le x \le 1$, al variare di n. b) Fare lo stesso per l'area del triangolo determinato dalla retta tangente al grafico della funzione nel punto (1; 1), dall'asse x e da $x = 1$. c) Infine calcolare l'area ottenuta come sottrazione delle precedenti due e determinare per quale n essa è massima e il valore di tale area massima.

a) $\int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$;

b) La retta tangente ha equazione: $y - 1 = n(x - 1)$, che incontra l'asse delle x in $(1 - 1/n; 0)$. Quindi abbiamo un triangolo di base lunga $1/n$ e altezza 1, quindi area $1/(2n)$;

c) Dobbiamo massimizzare: $f(n) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n} = \frac{n-1}{2n(n+1)} \Rightarrow f'(n) = \frac{1-n^2+2n}{2n^2(n+1)^2}$, che ha massimo per $n = 1+\sqrt{2}$, il massimo è $\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$.

46. Sia il grafico di una funzione $f(x)$, formata dai segmenti AB, BC e DE, con $A \equiv (-5; -2)$, $B \equiv (-3; 2)$, $C \equiv (0; 1)$, $D \equiv (2; 1)$, $E \equiv (4; -1)$ e dal semicerchio di estremi CD tangente all'asse x. Consideriamo la funzione $g(x) = \int_{-3}^{x} f(t)\,dt$, a) determinare $g(0)$ e $g'(0)$; b) trovare le ascisse dei punti di massimo relativo di g in [–5; 4]; c) fare lo stesso per i flessi.

a) 

$g(0) = \int_{-3}^{0} f(t)\,dt = \frac{2+1}{2}\cdot 3 = \frac{9}{2}$; $g'(x) = f(x) \Rightarrow g'(0) = f(0) = 1$;

b) $g'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x = -4 \vee 1 \vee 3$. Ora in –4 la f passa dal segno negativo al positivo, quindi la g ha un punto di minimo relativo; in 1 la f rimane positiva, quindi la g ha un punto di flesso a tangente orizzontale; in 3, passa dal segno positivo al negativo, quindi la g ha un punto di massimo relativo;

c) Vediamo se ci sono flessi a tangente obliqua. Si ha: $g''(x) = f'(x)$. La f cambia crescenza per $x = -3$, che quindi è un punto di flesso.

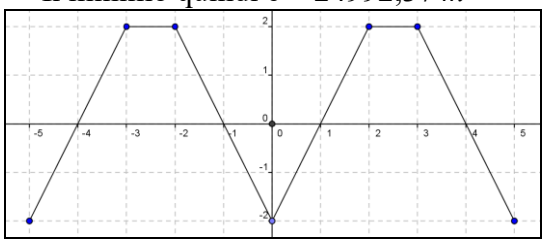
47. CAS La marea toglie sabbia alla costa secondo la seguente legge: $f(t) = 2 + 5sin(4\pi/25t)$, il comune ha perciò deciso di reintegrare la sabbia persa aggiungendola con una speciale pompa secondo la legge $g(t) = \frac{15t}{1+3t}$. Entrambe le funzioni calcolano metri cubi di sabbia per ore. Sappiamo che all'inizio della nostra osservazione in una zona di spiaggia vi sono 2500 metri cubi di sabbia. Vogliamo sapere a) Quanti metri cubi di sabbia vengono rimossi dalla marea nelle prime 6 ore; b) il tasso di variazione della quantità di sabbia sulla spiaggia dopo 4 ore; c) dopo quante ore, nelle prime 6, la quantità di sabbia sulla spiaggia sarà al minimo, e quanto sarà questo minimo.

a) $\int_0^6 \left[2+5sin\left(\frac{4\pi}{25}t\right)\right]dt = \left[\frac{8\pi t - 125cos(4\pi t/25)}{4\pi}\right]_0^6 \approx 31{,}816$;

b) $\dfrac{\int_0^4 \left[\dfrac{15t}{1+3t} - 2 - 5sin\left(\dfrac{4\pi}{25}t\right)\right]dt}{2500} \approx -0,26\%$

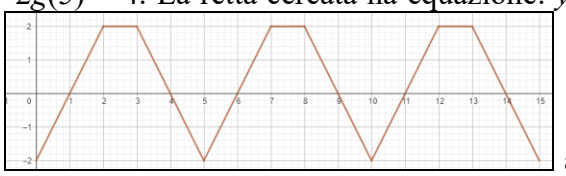
c) Dobbiamo trovare il minimo di $25000 + \int_0^x \left[\dfrac{15t}{1+3t} - 2 - 5sin\left(\dfrac{4\pi}{25}t\right)\right]dt$, per $0 \le x \le 6$, la derivata di questa funzione è $\dfrac{15x}{1+3x} - 2 - 5sin\left(\dfrac{4\pi}{25}x\right)$, che usando un procedimento numerico vale ≈ 5,12 ore;

Il minimo quindi è ≈ 24992,37 m^3

48.  **In figura vi è il grafico di una funzione *f*(*x*). Consideriamo $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. a) Determinare *g*(4), *g*'(4), *g*''(4). b) Per *x* = 1, *g*(*x*) ha un estremo relativo? Giustificare la risposta. c) Supposto che *f*(*x*) sia una funzione periodica di periodo 5, di cui mostriamo due periodi, sapendo che *g*(5) = 2, determinare *g*(10) e scrivere l'equazione della tangente al grafico di *g* per *x* = 108.**

a) $g(4) = \int_0^4 f(t)\,dt = -1 + \dfrac{1+3}{2}\cdot 2 = 3$; $g'(4) = f(4) = 0$; $g''(4) = f'(4) = -2$, perché la derivata di una retta è essa stessa, il coefficiente angolare del segmento considerato vale appunto 4/ (–2) = –2;

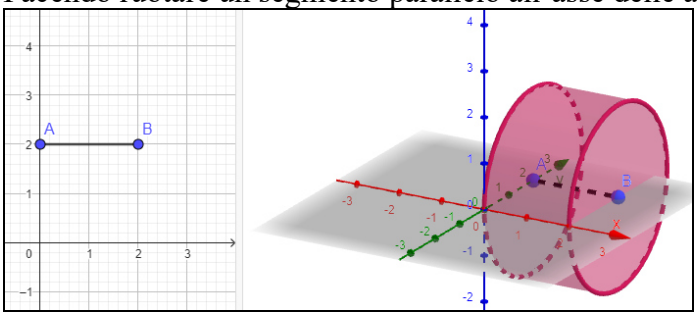
b) Si ha $g'(1) = f(1) = 0$, e la *f* passa dal negativo al positivo, quindi la *g* passa dalla decrescenza alla crescenza. Infine in $x = 1$ vi è un minimo relativo;

c) $g(10) = 2g(5) = 4$. La retta cercata ha equazione: $y - g(108) = g'(108)(x - 108)$. Come mostrato in figura:  abbiamo che $g(108) = 21 \cdot 2 + g(3) = 42 + 2 = 44$; $g'(108) = g'(3) = 2$, perciò: $y - 44 = 2(x - 108) \Rightarrow y = 2x - 172$.

Volume di alcuni solidi di rotazione e lunghezza di alcune curve piane

1. Usando il calcolo integrale come possiamo calcolare il volume di un cilindro retto?

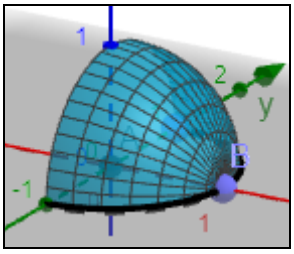
Facendo ruotare un segmento parallelo all'asse delle ascisse lungo quanto l'altezza



2. Usando il calcolo integrale calcolare il volume di un cilindro di raggio 1 e altezza 2.

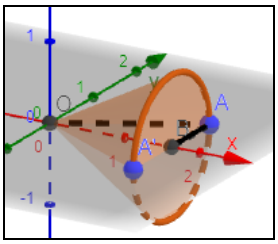
Tenuto conto di quanto detto: $V = \pi \cdot \int_0^2 (1)^2\,dx = \pi \cdot [x]_0^2 = 2\pi$

3. Facendo ruotare un quarto di circonferenza di estremi (1; 0) e (0; 1) attorno all'asse *x* determinare il volume di una semisfera di raggio 1.



$$V=\pi\cdot\int_0^1\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2dx=\pi\cdot\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{2}{3}\pi$$

4. Usando il calcolo integrale come possiamo calcolare il volume di un cono retto?

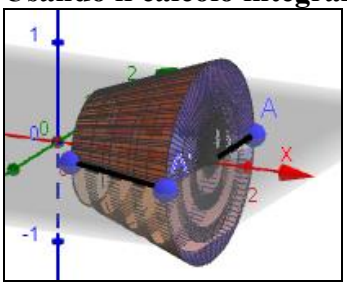


Facciamo ruotare un segmento passante per l'origine lungo quanto l'apotema e di pendenza che determina l'angolo di apertura del cono

5. Usando il calcolo integrale calcolare il volume di un cono retto di raggio 1 e altezza 2.

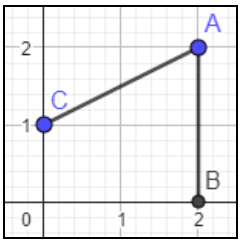
L'apotema appartiene alla retta di equazione $y=x/2$, quindi: $V=\pi\cdot\int_0^2\left(\frac{x}{2}\right)^2dx=\pi\cdot\left[\frac{x^3}{12}\right]_0^2=\frac{2}{3}\pi$.

6. Usando il calcolo integrale come possiamo calcolare il volume di un tronco di cono retto?



Facciamo ruotare un segmento non passante per l'origine e non parallelo agli assi, lungo quanto l'apotema.

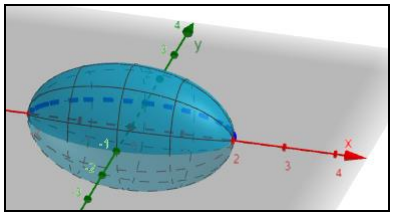
7. Usando il calcolo integrale calcolare il volume di un tronco di cono di raggi di base lunghi 1 e 2 e altezza 2.



L'apotema appartiene alla retta di equazione $\frac{y-1}{2-1}=\frac{x}{2}\Rightarrow y=\frac{x+2}{2}$, quindi:

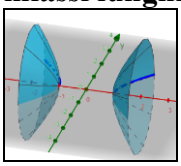
$$V=\pi\cdot\int_0^2\left(\frac{x+2}{2}\right)^2dx=\pi\cdot\left[\frac{(x+2)^3}{12}\right]_0^2=\frac{64-8}{12}\pi=\frac{14}{3}\pi.$$

8. Calcolare il volume di un ellissoide di rivoluzione, facendo ruotare l'ellisse canonica di semiassi lunghi 2 e 1.



L'ellisse ha equazione: $\frac{x^2}{4}+y^2=1\Rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$ Quindi il volume è: $V=\pi\cdot\int_{-2}^{2}\frac{4-x^2}{4}dx=\pi\cdot\left[x-\frac{x^3}{12}\right]_{-2}^{2}=\frac{8}{3}\pi$

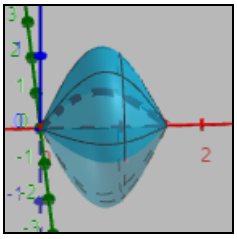
9. Calcolare il volume di un iperboloide di rivoluzione, facendo ruotare l'iperbole canonica di semiassi lunghi 2 e 1.



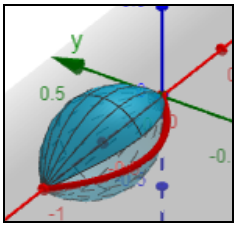
Data la simmetria: $V = 2\pi \cdot \int_1^2 \left(x^2 - 1\right) dx = 2\pi \cdot \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^2 = \frac{8}{3}\pi$

Determinare il volume ottenuto facendo ruotare le seguenti funzioni attorno all'asse delle ascisse, nell'intervallo indicato

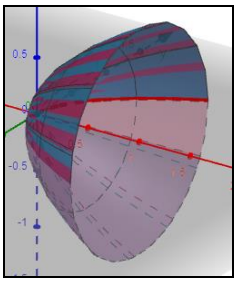
10. a) $y = sin(2x)$, $x \in [0; \pi/2]$; b) $y = x^2 + x$, $x \in [-1; 0]$; c) $y = \sqrt{x}, x \in [0;1]$**; d)** $y = \frac{1}{\sqrt{x}}, x \in [1;2]$

a) 

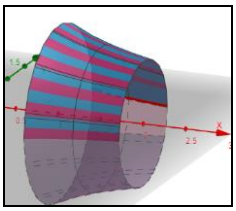
$V = \pi \cdot \int_0^{\pi/2} sin^2(2x)\, dx = \pi \cdot \left[\frac{x}{2} - \frac{sin(4x)}{8}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{4}$;

b) 

$V = \pi \cdot \int_{-1}^{0} \left(x^2 + x\right)^2 dx = \pi \cdot \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} = \frac{\pi}{30}$;

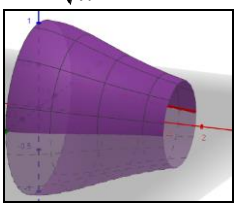
c) 

$V = \pi \cdot \int_0^1 x\, dx = \pi \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$;

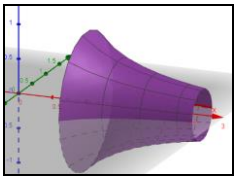
d) 

$V = \pi \cdot \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \pi \cdot \left[ln(x)\right]_1^2 = ln\left(2^{\pi}\right)$

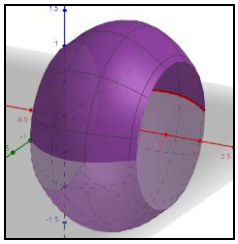
11. a) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, x \in \left[0; \sqrt{3}\right]$**; b) $y = 1/x$, $x \in [1; e]$**

a) 

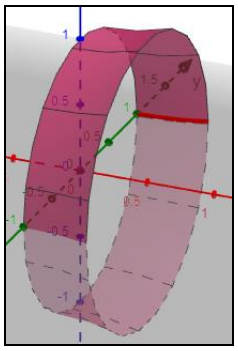
$V = \pi \cdot \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1} dx = \pi \cdot \left[tan^{-1}(x)\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{\pi^2}{3}$;

b)  $V=\pi\cdot\int_1^e \frac{1}{x^2}dx=\pi\cdot\left[-\frac{1}{x}\right]_1^e=\pi\cdot\left(1-e^{-1}\right)$

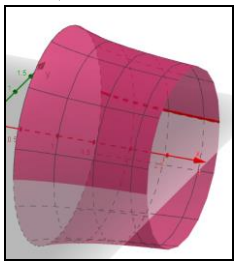
12. **a)** $y=sin(x)+cos(x), x\in[0;\pi/2]$ **b)** $y=\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^2}}, x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$

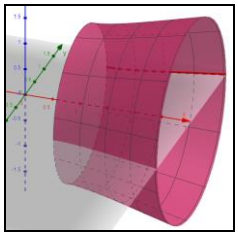
a) 

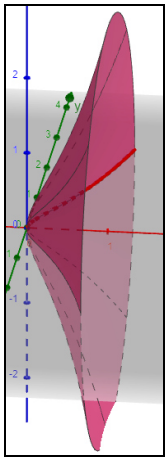
$$V=\pi\cdot\int_0^{\pi/2}\left[sin(x)+cos(x)\right]^2dx=\pi\cdot\int_0^{\pi/2}\left[1+sin(2x)\right]dx=\pi\cdot\left[x-\frac{cos(2x)}{2}\right]_0^{\pi/2}=\pi\cdot\frac{\pi+2}{2};$$

b)  $V=\pi\cdot\int_0^{1/2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\pi\cdot\left[sin^{-1}(x)\right]_0^{1/2}=\frac{\pi^2}{6}$

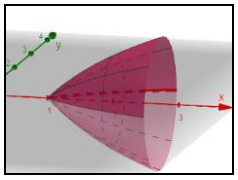
13. **a)** $y=\sqrt{\frac{x+1}{x}}, x\in[1;e]$**; b)** $y=\sqrt{\frac{x^2+1}{x}}, x\in\left[1;e^2\right]$**; c)** $y=\sqrt{x}\cdot e^x, x\in[0;1]$

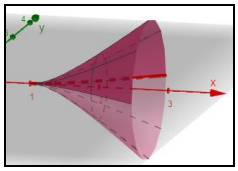
a)  $V=\pi\cdot\int_1^e\frac{x+1}{x}dx=\pi\cdot\left[x+ln(x)\right]_1^e=\pi e;$

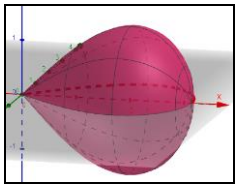
b)  $V=\pi\cdot\int_1^{e^2}\frac{x^2+1}{x}dx=\pi\cdot\left[\frac{x^2}{2}+ln(x)\right]_1^{e^2}=\pi\frac{e^4+3}{2};$

c)  $V=\pi\cdot\int_0^1 xe^{2x}\,dx=\pi\cdot\left[\frac{(2x-1)e^{2x}}{4}\right]_0^1=\pi\frac{e^2+1}{4}$

14. **a)** $y=\sqrt{ln(x)}, x\in[1;e]$ **; b)** $\boldsymbol{y=ln(x), x\in[1;e]}$**; c)** $y=\sqrt{x\cdot sin(x)}, x\in[0;\pi]$

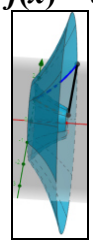
a)  $V=\pi\cdot\int_1^e ln(x)\,dx=\pi\cdot\left[x\cdot ln(x)-x\right]_1^e=\pi$;

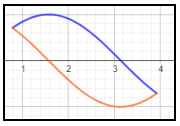
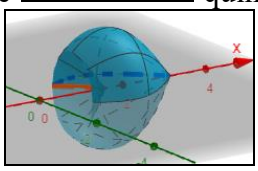
b)  $V=\pi\cdot\int_1^e ln^2(x)\,dx=\pi\cdot\left[x\cdot\left\{ln^2(x)-2ln(x)+2\right\}\right]_1^e=\pi(e-2)$;

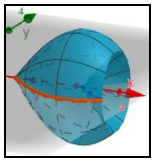
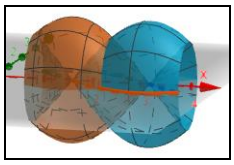
c)  $V=\pi\cdot\int_0^\pi x\cdot sin(x)\,dx=\pi\cdot\left[sin(x)-x\cdot cos(x)\right]_0^\pi=\pi^2$

Determinare il volume ottenuto facendo ruotare le seguenti regioni comprese tra le funzioni indicate, attorno all'asse delle ascisse, nell'intervallo indicato

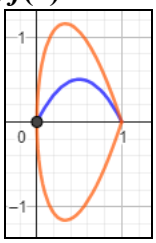
15. **a)** $\boldsymbol{f(x)=e^x, g(x)=e^{-x}, [0;1]}$**; b)** $\boldsymbol{f(x)=sin(x), g(x)=cos(x), [\pi/4;5\pi/4]}$

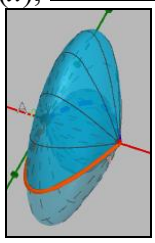
a)  $V=\pi\cdot\int_0^1\left(e^{2x}-e^{-2x}\right)dx=\pi\cdot\left[\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}\right]_0^1=\frac{e^2+e^{-2}-2}{2}\pi$

b) La regione è la seguente  quindi prima calcoliamo il volume generato dalla parte che giace nel I quadrante,  $V=\pi\cdot\int_{\pi/4}^{\pi} sin^2(x)\,dx-\pi\cdot\int_{\pi/4}^{\pi/2} cos^2(x)\,dx=\frac{\pi^2+2\pi}{4}$. Poi

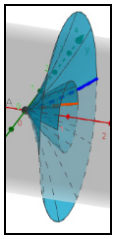
quella nel secondo:  che ha ovviamente lo stesso volume. Quindi infine il solido è il seguente,  e il suo volume è ½π(π + 2).

16. a) $f(x) = 2x(1 - x)$, $g(x) = 3(x - 1)\sqrt{x}$, [0; 1]; b) $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = ln(x + 1)$, [0; 1]

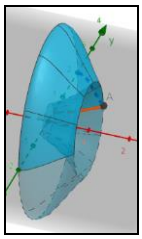
a) Dato che la simmetrica di $g(x)$ contiene $f(x)$, 

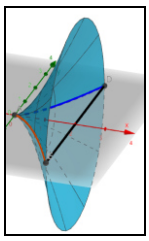
il volume è dato solo dalla rotazione della 

g: $V = \pi\int_0^1\left[3(x-1)\sqrt{x}-2\right]^2 dx = \frac{159}{20}\pi$;

b)  $V = \pi\cdot\int_0^1\left[\left(x^2+x\right)^2 - ln^2(x+1)\right]dx = \frac{120ln(2)-60ln^2(2)-29}{30}\pi$

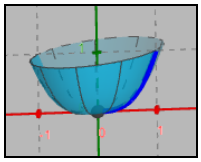
17. a) $f(x) = \frac{2}{1+x^2}$, $g(x) = e^{x-1}$, [0; 1]; b) $f(x) = x\sqrt{x}$, $g(x) = -x\sqrt{x}$, [0; 2]

a)  $V = \pi\cdot\int_0^1\left[\frac{4}{\left(x^2+1\right)} - e^{2x-2}\right]dx = \frac{\pi+1+e^{-2}}{2}\pi$;

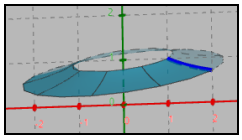
b)  Essendo le curve simmetriche una dell'altra, basta considerare solo la rotazione di una di esse: $V = \pi\cdot\int_0^2 x^3\,dx = \pi\cdot\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 4\pi$

Calcolare i volumi dei solidi ottenuti facendo ruotare le seguenti curve attorno all'asse delle ordinate

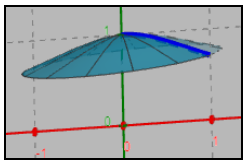
18. a) $y = x^3$, $x \in [0; 1]$; b) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \in [1; 2]$; c) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ $x \in [0; 1]$

a) 

$$V=\pi\cdot\int_0^1\left(\sqrt[3]{x}\right)^2dx=\pi\cdot\left[\frac{3x^{5/3}}{5}\right]_0^1=\frac{3\pi}{5}$$

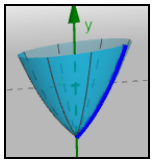
b) 

$$x=\frac{1}{y^2}\Leftrightarrow y=\frac{1}{x^2},x=1\Rightarrow y=1,x=2\Rightarrow y=\frac{1}{\sqrt{2}}.V=\pi\cdot\int_{1/\sqrt{2}}^1\frac{1}{x^4}dx=\pi\cdot\left[-\frac{1}{3x^3}\right]_{1/\sqrt{2}}^1=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}\pi$$

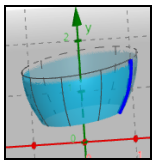
c) 

$$y^2=\frac{1}{x^2+1}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}\Leftrightarrow y=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.V=\pi\cdot\int_{1/\sqrt{2}}^1\frac{1-x^2}{x^2}dx=\pi\cdot\left[-\frac{1}{x}-x\right]_{1/\sqrt{2}}^1=\frac{3\sqrt{2}-4}{2}\pi$$

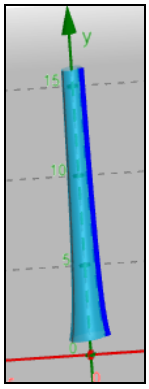
19. **a) $y=e^x$, $x\in[0;1]$; b) $y=sin^{-1}(x^2)$,** $x\in\left[\sqrt{2}/2,1\right]$**; c) $y=1/x^4$, $x\in[½;1]$**

a) 

$$V=\pi\cdot\int_1^e ln^2(x)dx=\pi\cdot\left[x\left\{ln^2(x)-2ln(x)+2\right\}\right]_1^e=(e-2)\pi$$

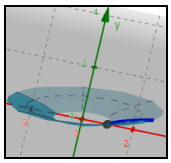
b) 

$$V=\pi\cdot\int_{\pi/6}^{\pi/2}\left(\sqrt{sin(x)}\right)^2dx=\pi\cdot\left[-cos(x)\right]_{\pi 6}^{\pi 2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$$

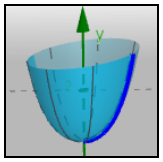
c) 

$$V=\pi\cdot\int_1^{16}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^2dx=\pi\cdot\left[2\sqrt{x}\right]_1^{16}=6\pi$$

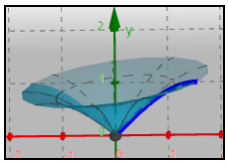
20. **a)** $y=ln\left(\sqrt{x}\right),x\in\left[e;e^2\right]$**; b)** $y=e^{x^2},x\in[0;1]$

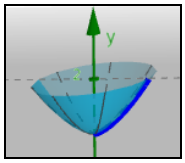
a) 

$$V=\pi\cdot\int_{1/2}^1\left(e^{2x}\right)^2dx=\pi\cdot\left[\frac{e^{4x}}{4}\right]_{1/2}^1=\frac{e^2\left(e^2-1\right)\pi}{4}$$

b)  $V=\pi\cdot\int_1^e\left(\sqrt{ln(x)}\right)^2dx=\pi\cdot\left[x\cdot ln(x)-x\right]_1^e=\pi$

21. a) $y = sin(x)$, $x \in [0; \pi/2]$; b) $y=x\sqrt{x}+1$, $x \in [0; 1]$

a)  $V=\pi\cdot\int_0^1\left[sin^{-1}(x)\right]^2dx=\pi\cdot\left[x\cdot\left[sin^{-1}(x)\right]^2+2sin^{-1}(x)\sqrt{1-x^2}-2x\right]_0^1=\frac{\pi^3-8\pi}{4}$

b)  $V=\pi\cdot\int_1^2\left(\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)^2dx=\pi\cdot\left[\frac{3(x-1)^{5/3}}{5}\right]_1^2=\frac{3\pi}{5}$

22. Data la regione delimitata dal grafico della funzione $y=\sqrt{x-1}$, dalla retta $x = 5$ e dall'asse x, determinare il volume del solido generato dalla rotazione della detta regione attorno la retta a) $y = 3$; b) $x = 3$.

a) Trasliamo verso il basso in modo da portare $y = 3$ sull'asse x, la funzione perciò diventa: $y=\sqrt{x-1}-3$ e il volume è: $V=\pi\cdot\int_1^5\left(\sqrt{x-1}-3\right)^2dx=\pi\cdot\left[\frac{-8\sqrt{(x-1)^3}+x^2+16x-17}{2}\right]_1^5=12\pi$

b) Stavolta trasliamo a sinistra in modo da portare $x = 3$ sull'asse y: $y=\sqrt{x+2}$ e il volume è: $V=\pi\cdot\int_{-2}^2 x\sqrt{x+2}\,dx=\pi\cdot\left[\frac{2(3x-4)\sqrt{(x+2)^3}}{15}\right]_{-2}^2=\frac{32}{15}\pi$

Calcolare i volumi dei solidi ottenuti facendo ruotare le seguenti curve attorno all'asse delle ordinate, usando i risultati del teorema 7

Livello 2

23. a) $y = x^3$, $x \in [1; 2]$; b) $y = x^4$, $x \in [0; 3]$; c) a) $y = sin(x)$, $x \in [0; \pi]$

a) $V=2\pi\cdot\int_1^2 x^4\,dx=2\pi\cdot\left[\frac{x^5}{5}\right]_1^2=\frac{62}{5}\pi$;

b) $V=2\pi\cdot\int_0^3 x^5\,dx=2\pi\cdot\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^3=243\pi$;

c) $V=2\pi\cdot\int_0^\pi x\cdot sin(x)\,dx=2\pi\cdot\left[sin(x)-x\cdot cos(x)\right]_0^\pi=2\pi^2$

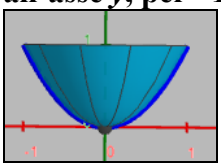
24. a) $y = cos(x^2)$, $x \in [0 ; \pi/6]$; b) $y = ln(x^2 + 2)$, $x \in [2; 4]$; c) a) $y=\frac{x^2+2}{x-1}$, $x \in [2; 3]$

a) $V=2\pi\cdot\int_0^{\pi/6}x\cdot cos(x^2)\,dx=\pi\cdot\left[sin(x^2)\right]_0^{\pi/6}=\pi\cdot sin\left(\frac{\pi^2}{36}\right)$

b) $V=2\pi\cdot\int_2^4 x\cdot ln(x^2+2)\,dx=\pi\cdot\left[(x^2+2)\left[ln(x^2+2)-1\right]\right]_2^4=6\left[ln(972)-2\right]\pi$

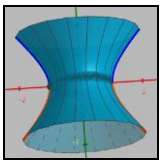
c) $V=2\pi\cdot\int_2^3\frac{x^3+2x}{x-1}\,dx=\pi\cdot\left[\frac{18ln(x-1)+2x^3+3x^2+18x}{3}\right]_2^3=\frac{18ln(2)+71}{3}\pi$

25. Calcolare il volume di un paraboloide, facendo ruotare la parabola canonica $y = x^2$, attorno all'asse y, per $-1 \le x \le 1$.



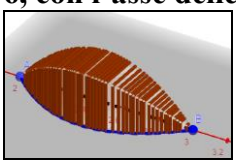
$$V = 2\pi \cdot \int_0^1 x^3\,dx = 2\pi \cdot \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

26. Calcolare il volume di un iperboloide a una falda, facendo ruotare l'iperbole canonica $x^2 - y^2 = 1$, attorno all'asse y, per $-2 \le x \le 2$.



Data la simmetria: $V = 4\pi \cdot \int_1^2 x \cdot \sqrt{x^2 - 1}\,dx = 4\sqrt{3}\pi$

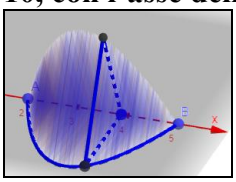
27. Calcolare il volume del solido avente per base la regione intersezione della parabola $y = x^2 - 5x + 6$, con l'asse delle ascisse e le cui sezioni perpendicolari all'asse delle x sono quadrati.



Il lato del quadrato generico misura $|x^2 - 5x + 6|$, quindi la sua area misura: $(x^2 - 5x + 6)^2$, perciò il volume richiesto misura:

$$V = \int_2^3 \left(x^2 - 5x + 6\right)^2 dx = \left[\frac{6x^5 - 75x^4 + 370x^3 - 900x^2 + 1080x}{30}\right]_2^3 = \frac{1}{30}$$

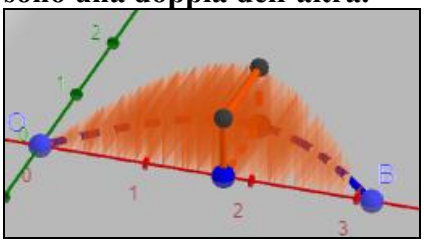
28. Calcolare il volume del solido avente per base la regione intersezione della parabola $y = x^2 - 7x + 10$, con l'asse delle ascisse e le cui sezioni perpendicolari all'asse delle x sono triangoli equilateri.

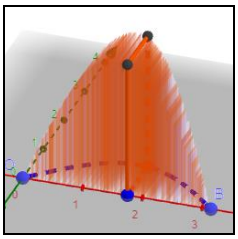


Il lato del triangolo equilatero generico misura $|x^2 - 7x + 10|$, quindi la sua area misura: $\frac{1}{4}(x^2 - 7x + 10)^2\sqrt{3}$, perciò il volume richiesto misura:

$$V = \int_2^5 \frac{\left(x^2 - 7x + 10\right)^2 \sqrt{3}}{4} dx = \left[\sqrt{3}\,\frac{2x^5 - 35x^4 + 230x^3 - 700x^2 + 1000x}{40}\right]_2^5 = \frac{81}{40}\sqrt{3}$$

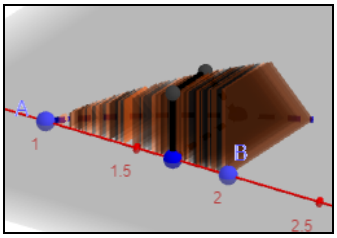
29. Calcolare il volume del solido avente per base una delle regioni intersezioni della sinusoide con l'asse delle ascisse e le cui sezioni perpendicolari all'asse delle x sono rettangoli le cui dimensioni sono una doppia dell'altra.





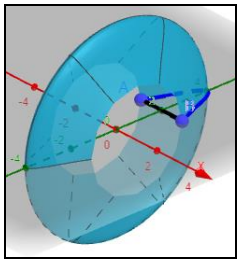
Ci sono due possibilità, a seconda che il lato maggiore sia quello sul piano o quello a esso perpendicolare, come mostrato nelle due figure. Ma naturalmente i volumi sono uguali. Pertanto abbiamo: $V = \int_0^{\pi} 2sin^2(x)\,dx = \left[\frac{2x - sin(2x)}{2}\right]_0^{\pi} = \pi$.

30. Calcolare il volume del solido avente per base la regione intersezione della curva $y = ln(x)$, con l'asse delle ascisse e la retta $x = 2$, le cui sezioni perpendicolari all'asse delle x sono trapezi rettangoli, la cui base maggiore poggia sul piano Oxy, mentre base minore e altezza sono lunghe quanto metà della base maggiore.

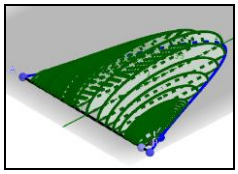


La base maggiore misura $ln(x)$, quella minore e l'altezza ½ $ln(x)$, pertanto il volume misura: $V=\int_1^2 \frac{3ln^2(x)}{8}dx=\left[\frac{3x\left[ln^2(x)-2ln(x)+2\right]}{8}\right]_1^2=\frac{3\left[ln^2(2)-ln(4)+1\right]}{4}$

31. Data la regione *R* delimitata dal grafico della funzione $y=\frac{4}{1+x^2}$, dalla retta *y* = 2 e dai primi due quadranti. a) Determinare il volume del solido generato dalla rotazione della detta regione attorno all'asse *x*. b) La regione *R* è base di un solido le cui sezioni con piani perpendicolari all'asse *x* sono semicerchi, determinare il volume di tale solido.

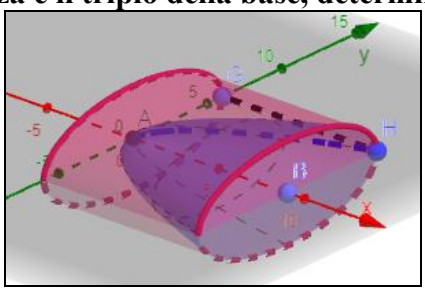
a) 

$$\pi\int_{-1}^{1}\left(\frac{4}{1+x^2}\right)^2dx=\pi\left[8tan^{-1}(x)+\frac{8x}{x^2+1}\right]_{-1}^{1}=4\pi(\pi+2)$$

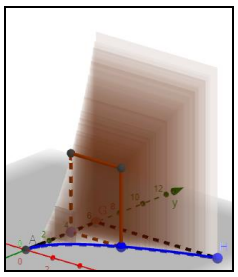
b) 

$$\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{2}{1+x^2}\right)^2dx=\pi\left[tan^{-1}(x)+\frac{x}{x^2+1}\right]_{-1}^{1}=\pi(\pi+2)$$

32. Data la regione *R* delimitata dal grafico della funzione $y=2\sqrt{x}$, dalla retta *y* = 6 e dall'asse *y*. a) Determinare il volume del solido generato dalla rotazione della detta regione attorno all'asse *x*. b) *R* è base di un solido le cui sezioni con piani perpendicolari all'asse *y* sono rettangoli la cui altezza è il triplo della base, determinare il volume di tale solido.

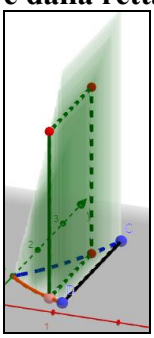
a) 

Il solido è la differenza fra il cilindro di raggio 6 e altezza 9 e il solido generato dalla rotazione dell'arco della funzione attorno all'asse *x*. Quindi il volume cercato misura: $\pi\left[324-\int_0^9\left(2\sqrt{x}\right)^2dx\right]=\pi\left\{324-\left[2x^2\right]_0^9\right\}=162\pi$;

b) 

La base del rettangolo, in funzione dell'ordinata misura: ½y^2, perciò l'altezza misura $3y^2/2$ e l'area del rettangolo: ¾y^4, $0\le y\le 6$. $V=\int_0^6\frac{3y^4}{4}dy=\left[\frac{3y^5}{20}\right]_0^6=\frac{5832}{5}$

33. Calcolare il volume del solido di base la regione intersezione delle curve $y = e^x$, $y = e^{-x}$, dall'asse y e dalla retta $x = 1$, le cui sezioni perpendicolari all'asse delle x sono quadrati.



Il lato del quadrato misura: $e^x - e^{-x}$, il volume:

$$V = \int_0^1 \left(e^x - e^{-x}\right)^2 dx = \left[\frac{e^{2x} - 4x - e^{-2x}}{2}\right]_0^1 = \frac{e^2 - 4 - e^{-2}}{2}$$

Usando il calcolo integrale calcolare le lunghezze delle seguenti curve. Per comodità ricordiamo che

$$\int \sqrt{1+a^2x^2}\,dx = \frac{ln\left(\sqrt{1+a^2x^2}+ax\right)+2ax\sqrt{1+a^2x^2}}{2a};\int \sqrt{a^2-b^2x^2}\,dx = \frac{a^2 sin^{-1}(bx/a)+bx\sqrt{a^2-b^2x^2}}{2b}$$

34. Circonferenza di raggio 1.

Consideriamo la circonferenza $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{1-x^2}$ consideriamo solo un quarto di circonferenza quindi il segno + e l'intervallo [0; 1]. Avremo: $\int_0^1 \sqrt{1+\left[\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1-x^2}\right)\right]^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\,dx =$ $\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}\,dx = [sin^{-1}(x)]_0^1 = \pi/2$. Quindi la circonferenza misura: $4 \cdot \pi/2 = 2\pi$.

35. Curva esponenziale $y = e^x$, $ln\left(\sqrt{3}\right) \le x \le ln\left(\sqrt{8}\right)$

$$\int_{ln(\sqrt{3})}^{ln(\sqrt{8})} \sqrt{1+\left[\frac{d}{dx}\left(e^x\right)\right]^2}\,dx = \int_{ln(\sqrt{3})}^{ln(8)} \sqrt{1+e^{2x}}\,dx \Rightarrow t = \sqrt{1+e^{2x}} \Rightarrow x = \frac{ln\left(t^2-1\right)}{2}, dx = \frac{t}{t^2-1}dt, x = ln\left(\sqrt{3}\right) \Rightarrow t = 2; x = ln\left(\sqrt{8}\right) \Rightarrow t = 3,$$

quindi dobbiamo calcolare $\int_2^3 \frac{t^2}{t^2-1}dt = \left[t + ln\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\right]_2^3 = 3 + ln\sqrt{\frac{1}{2}} - 2 - ln\sqrt{\frac{1}{3}} = 1 + ln\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

36. Arco di parabola $y = x^2$ in [–1; 1].

$$2\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx = 2\cdot\left[\frac{ln\left(\sqrt{1+4x^2}+2x\right)+2x\sqrt{1+4x^2}}{4}\right]_0^1 = \frac{ln\left(\sqrt{5}+2\right)+2\sqrt{5}}{2} = ln\left(\sqrt{5+\sqrt{2}}\right)+\sqrt{5}$$

37. Segmento di estremi $A \equiv (1; 2)$ e $B \equiv (3; 5)$.

La retta per AB ha equazione: $\frac{y-2}{3} = \frac{x-1}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$, quindi il segmento misura:

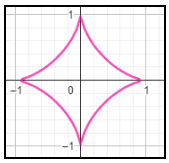
$$\Rightarrow \int_1^3 \sqrt{1+\frac{9}{4}}\,dx = \left[\frac{\sqrt{13}}{2}x\right]_1^3 = \frac{2\sqrt{13}}{2} = \sqrt{13}.$$

38. Arco di parabola $y = ax^2$, $0 \le x \le 1$.

$$\int_0^1 \sqrt{1+4a^2x^2}\,dx = \left[\frac{ln\left(\sqrt{1+4a^2x^2}+2ax\right)+2ax\sqrt{1+4a^2x^2}}{4a}\right]_0^1 = \frac{ln\left(\sqrt{1+4a^2}+2a\right)+2a\sqrt{1+4a^2}}{4a}.$$

39. Arco della curva $y = ln(x)$ in $\left[\sqrt{8};\sqrt{15}\right]$

$$\int_{\sqrt{8}}^{\sqrt{15}} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx = \left[ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)+\sqrt{1+x^2}\right]_{\sqrt{8}}^{\sqrt{15}} = ln\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)+1$$

40. Asteroide:  **di equazione** $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$.

$$y=\sqrt{\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^3} \Rightarrow 4\int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{-\sqrt{1-x^{2/3}}}{x^{1/3}}\right)^2}\,dx = 4\int_0^1 \frac{1}{x^{1/3}}\,dx = 4\left[\frac{3x^{2/3}}{2}\right]_0^1 = 6$$

41. Segmento di estremi $A \equiv (x_A; y_A)$ e $B \equiv (x_B; y_B)$.

La retta per AB ha equazione: $\frac{y-y_A}{y_B-y_A}=\frac{x-x_A}{x_B-x_A} \Rightarrow y=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}x+\frac{x_Ay_B-x_By_A}{x_B-x_A}$, quindi il segmento misura: $\Rightarrow \int_{x_A}^{x_B}\sqrt{1+\left(\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}\right)^2}\,dx = \left[\frac{\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}}{|x_A-x_B|}\right]_{x_A}^{x_B} = \sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$.

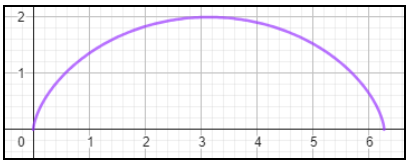
42. Arco di circonferenza di estremi $A \equiv (-3; 1)$ e $B \equiv (1; 3)$ e centro in (0; 0). Attenzione a determinare gli estremi di integrazione.

La circonferenza ha equazione: $x^2 + y^2 = 9$ (si verifica che A e B sono suoi punti), quindi $y=\sqrt{9-x^2}$, l'intervallo da considerare non è [–3; 1], ma [x; 1], in cui x è un valore per cui si ha: $x^2 + 1^2 = 9$ $\Rightarrow x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Quindi l'arco misura:

$$\int_{-2\sqrt{2}}^{1}\sqrt{1+\frac{d}{dx}\left(\sqrt{9-x^2}\right)^2}\,dx = 3\int_{-2\sqrt{2}}^{1}\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \left[3sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)\right]_{-2\sqrt{2}}^{1} = 3\left[sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)+sin^{-1}\left(\frac{-2\sqrt{2}}{3}\right)\right]$$

43. Arco di circonferenza di estremi i punti di ascissa x_A e x_B, centro in (0; 0) e raggio 1, $-1 \le x_A < x_B \le 1$.

$$\int_{x_A}^{x_B}\sqrt{1+\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}\,dx = \int_{x_A}^{x_B}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left[sin^{-1}(x)\right]_{x_A}^{x_B} = sin^{-1}(x_B)-sin^{-1}(x_A).$$

44.  **Arco di cicloide di equazione:** $\begin{cases} x=t-sin(t) \\ y=1-cos(t) \end{cases}, t\in[0;2\pi]$.

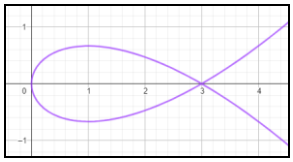
$$\int_0^{2\pi}\sqrt{[1-cos(t)]^2+sin^2(t)}\,dt = \int_0^{2\pi}\sqrt{2-2cos(t)}\,dt = 2\int_0^{2\pi} sin(t/2)\,dt = \left[-4cos(t/2)\right]_0^{2\pi} = 4+4=8$$

45. Arco di parabola di equazione: $\begin{cases} x=t \\ y=t^2-t+1 \end{cases}, t\in\left[\frac{1}{2};\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right]$.

$$\int_{1/2}^{(1+\sqrt{3})/2}\sqrt{1+(2t-1)^2}\,dt = \int_{1/2}^{(1+\sqrt{3})/2}\sqrt{4t^2-4t+2}\,dt = \left[ln\left(\sqrt[4]{\sqrt{4x^2-4x+2}+2x-1}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{2x-1}{4}\sqrt{4x^2-4x+2}\right]_{1/2}^{(1+\sqrt{3})/2} = ln\left(\sqrt[4]{\sqrt{3}+2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

46. Cappio racchiuso dalla curva di equazione $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t - t^3/3 \end{cases}$



$$2\cdot\int_0^3 \sqrt{(2t)^2+\left(1-t^2\right)^2}\,dt = 2\cdot\int_0^3 \sqrt{t^4+2t^2+1}\,dt = 2\cdot\int_0^3 \left(t^2+1\right)dt = 2\left[\frac{t^3}{3}+t\right]_0^3 = 6$$

Integrali impropri e generalizzati

Stabilire quali delle seguenti funzioni sono integrabili in senso generalizzato negli intervalli indicati, per quelle che lo sono calcolarne il valore

1. a) $f(x) = ln(x)$ in [0; 1]; b) $f(x) = 1/(x^2 - 1)$ in [–1; 1]; c) $f(x) = 1/sin(x)$ in [0; 1]

a) $\lim_{a\to 0^+}\int_a^1 ln(x)\,dx = \lim_{a\to 0^+}\left[x\cdot ln(x)-x\right]_a^1 = -1$;

b) $\lim_{a\to -1^+}\lim_{b\to 1^-}\int_a^b \frac{1}{x^2-1}\,dx = \lim_{b\to 1^-} ln\left(\sqrt{\frac{1-b}{b+1}}\right) - \lim_{a\to -1^+} ln\left(\sqrt{\frac{1-a}{a+1}}\right) = -\infty$

c) $\lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{1}{sin(x)}\,dx = \lim_{a\to 0^+}\left[ln\left(\frac{sin(x)}{1+cos(x)}\right)\right]_a^1 = +\infty$

2. a) $f(x) = ln(x)/x$ in [0; 1]; b) $f(x) = x \cdot ln(x)$ in [0; 1]; c) $f(x) = 1/(x - 2)^2$ in [1; 3]

a) $\lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{ln(x)}{x}\,dx = \lim_{a\to 0^+}\left[\frac{ln^2(x)}{2}\right]_a^1 = -\infty$;

b) $\lim_{a\to 0^+}\int_a^1 x\cdot ln(x)\,dx = \lim_{a\to 0^+}\left[x^2\,\frac{ln\left(x^2\right)-1}{4}\right]_a^1 = -\frac{1}{4}$;

c) $\lim_{a\to 2^-}\int_1^a \frac{1}{(x-2)^2}\,dx + \lim_{a\to 2^+}\int_a^3 \frac{1}{(x-2)^2}\,dx = \lim_{a\to 2^-}\left[\frac{1}{2-x}\right]_1^a + \lim_{a\to 2^+}\left[\frac{1}{2-x}\right]_a^3 = +\infty$

3. a) $f(x) = sin(2x)/sin(x)$ in [0; π]; b) $f(x) = cos(2x)/cos^2(x)$ in [0; π]; c) $f\ x = \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$ in [0; 1]

a) $\lim_{a\to 0^+}\lim_{b\to \pi^-}\int_a^b \frac{sin(2x)}{sin(x)}\,dx = \lim_{a\to 0^+}\lim_{b\to \pi^-}\int_a^b 2cos(x)\,dx = \lim_{a\to 0^+}\lim_{b\to \pi^-}\left[2sin(x)\right]_a^b = 0$;

b) $\int_0^\pi \left[2-\frac{1}{cos^2(x)}\right]dx = \lim_{a\to \pi/2^-}\int_0^a \left[2-\frac{1}{cos^2(x)}\right]dx + \lim_{a\to \pi/2^+}\int_a^\pi \left[2-\frac{1}{cos^2(x)}\right]dx =$;

$= \lim_{a\to \pi/2^-}\left[2x-tan(x)\right]_0^a + \lim_{a\to \pi/2^+}\left[2x-tan(x)\right]_a^\pi = -\infty$

c) $\lim_{a\to 1^-}\int_0^a \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \lim_{a\to 1^-}\left[\frac{sin^{-1}(x)}{2}\right]_0^a = \frac{\pi}{4}$

4. a) $f(x) = 1 + tan(x)$ in [0; 2]; b) $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ in [0; 1]; c) $f\ x = \frac{1}{x\cdot ln\ x}$ in [0; 1]

a) $\lim\limits_{a\to\pi/2^-}\int_0^a\left[1+tan(x)\right]dx+\lim\limits_{a\to\pi/2^+}\int_a^2\left[1+tan(x)\right]dx=\lim\limits_{a\to\pi 2^-}\left[-ln\left[cos(x)\right]+x\right]_0^a+$;

$+\lim\limits_{a\to\pi 2^+}\left[-ln\left[-cos(x)\right]+x\right]_a^2=+\infty-\infty$

b) $\lim\limits_{a\to 0^+}\int_a^1\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=\lim\limits_{a\to 0^+}\left[2e^{\sqrt{x}}\right]_a^1=2(e-1)$;

c) $\lim\limits_{a\to 0^+}\lim\limits_{b\to 1^-}\int_a^b\frac{1}{x\cdot ln(x)}dx=\lim\limits_{a\to 0^+}\left[x\cdot ln(x)-x\right]_a^1=-1$

5. **a)** $f(x)=\frac{sin\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}$ **in [0; π²/4]; b)** $f\ x\ =\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ **in [–1; 0]; c)** $f\ x\ =\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$ **in [–½; 0]**

a) $\lim\limits_{a\to 0^+}\int_a^{\pi^2/4}\frac{sin\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}dx=\lim\limits_{a\to 0^+}\left[-2cos\left(\sqrt{x}\right)\right]_a^{\pi^2/4}=2$

b) $\lim\limits_{a\to 0^-}\int_{-1}^a\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx=\lim\limits_{a\to 0^+}\left[sin^{-1}\left(e^x\right)\right]_{-1}^a=\frac{\pi}{2}-sin^{-1}\left(\frac{1}{e}\right)=cos^{-1}\left(\frac{1}{e}\right)$

c) $\lim\limits_{a\to -\frac{1}{2}^+}\int_a^0\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}dx=\lim\limits_{a\to -\frac{1}{2}^+}\left[\frac{sin^{-1}(2x)}{2}\right]_a^0=\frac{\pi}{4}$

Stabilire quali delle seguenti funzioni sono integrabili in senso improprio negli intervalli indicati, per quelle che lo sono calcolarne il valore

6. **a) *f*(*x*) = *ln*(*x*), [1; +∞); b)** $f\ x\ =\frac{x^2}{x^2+1}$**, (–∞; +∞); c)** $f\ x\ =\frac{1}{x^2+2x+2}$**, [0; +∞)**

a) $\int_1^{+\infty}ln(x)dx=\lim\limits_{a\to+\infty}\left[x\cdot ln(x)\right]_1^a=+\infty$;

b) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{x^2+1}dx=\lim\limits_{a\to+\infty}\left(a+tan^{-1}(a)\right)-\lim\limits_{a\to-\infty}\left(a+tan^{-1}(a)\right)=+\infty$;

c) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}dx=\lim\limits_{a\to+\infty}\left[tan^{-1}(x+1)\right]_0^a=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$

7. **a)** $f\ x\ =\frac{x}{x^2+2x+3}$**, [0; +∞); b)** $f\ x\ =\frac{x}{x^2+1}$**, (–∞; +∞); c) *f*(*x*) = *ln*(*x*)/*x*, [1; +∞)**

a) $\int_0^{+\infty}\frac{x}{x^2+2x+3}dx=\lim\limits_{a\to+\infty}\left[ln\left(\sqrt{x^2+2x+3}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}tan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^a=+\infty$ No;

b) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{x^2+1}dx=\lim\limits_{a\to+\infty}\left[ln\left(\sqrt{a^2+1}\right)\right]-\lim\limits_{a\to-\infty}\left[ln\left(\sqrt{a^2+1}\right)\right]=+\infty-\infty$;

c) $\int_1^{+\infty}\frac{ln(x)}{x}dx=\lim\limits_{a\to+\infty}\left[\frac{ln^2(x)}{2}\right]_1^a=+\infty$

8. **a)** $f\ x\ =\frac{ln\ x}{x^2}$**, [1; +∞]; b)** $f(x)=\frac{x\cdot sin(1/x)-cos(1/x)}{x}$**, [1; +∞); c)** $f(x)=\frac{1}{x\cdot ln(x^2)}$**, [2; +∞)**

a) $\int_1^{+\infty}\frac{ln(x)}{x^2}dx=\lim\limits_{a\to+\infty}\left[-\frac{ln(x)}{x}-\frac{1}{x}\right]_1^a=1$;

b) $\int_1^{+\infty}\frac{x\cdot sin(1/x)-cos(1/x)}{x}dx=\lim\limits_{a\to+\infty}\left[x\cdot sin(1/x)\right]_1^a=1-sin(1)$;

c) $\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x \cdot ln(x^2)} dx = \lim_{a \to +\infty} \left[ln\left[\sqrt{ln(x)} \right] \right]_2^a = +\infty$

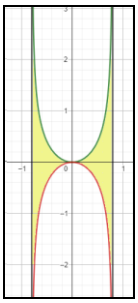
9. a) $f(x) = xe^{x+1}$, $(-\infty; 0]$; b) $f(x) = x^2e^x$, $(-\infty; 0]$; c) $f(x) = x^2e^x$, $[0; +\infty)$

a) $\int_{-\infty}^{0} xe^{x+1}\, dx = \lim_{a \to -\infty} \left[(x-1)e^{x+1} \right]_a^0 = -e$;

b) $\int_{-\infty}^{0} x^2e^x\, dx = \lim_{a \to -\infty} \left[(x^2 - 2x + 2)e^x \right]_a^0 = 2$;

c) $\int_{0}^{+\infty} x^2e^x\, dx = \lim_{a \to +\infty} \left[(x^2 - 2x + 2)e^x \right]_0^a = +\infty$

10. Determinare l'area della regione compresa tra le funzioni $f(x) = \pm \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}, -a \le x \le a$.

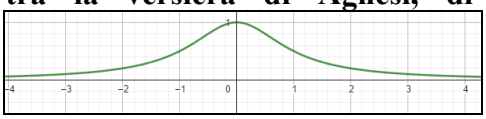


$$4\int_{-a}^{0} \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = 4 \cdot \lim_{b \to -a^+} \left[\frac{a^2 sin^{-1}(x/a) - x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} \right]_b^0 = a^2\pi$$

11. Determinare l'area della regione compresa tra la funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, il suo asintoto verticale e la retta $x = 1$.

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \lim_{a \to 0^+} \left[\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} \right]_a^0 = \frac{3}{2}$$

12. Determinare l'area della regione compresa tra la versiera di Agnesi, di equazione $f(x) = \frac{a^3}{x^2 + a^2}, a > 0$ e il suo asintoto orizzontale.



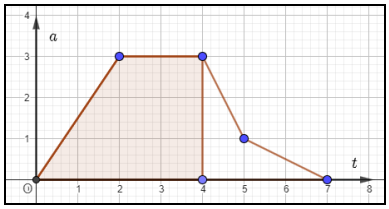
$$2\int_{0}^{+\infty} \frac{a^3}{x^2 + a^2} dx = 2 \lim_{b \to +\infty} \left[a^2 tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \right]_0^b = a^2\pi$$

13. Con riferimento al problema precedente determinare il volume del solido generato dalla rotazione della curva attorno all'asintoto.

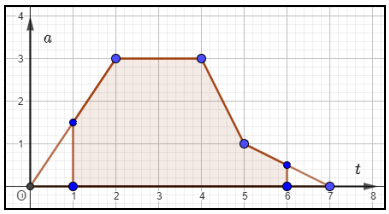
$$2\pi \int_{0}^{+\infty} \left(\frac{a^3}{x^2 + a^2} \right)^2 dx = 2\pi \lim_{b \to +\infty} \left[\frac{a^3}{2} tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{a^4 x}{2(x^2 + a^2)} \right]_0^b = \frac{a^3\pi^2}{2}$$

$E = mc^2$ L'angolo della MateFisica

1. Con riferimento al grafico mostrato in precedenza, determina la velocità del punto materiale a) dopo 4 *s*; b) quanto varia fra 1 *s* e 6 *s*.

a) 

$v(4) = (½ \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3)\ m/s = 9\ m/s$;

b) 

il tratto che va da $t = 5$ a $t = 7$, ha equazione $x + 2y - 7 = 0$, quindi l'ordinata del punto di ascissa 6 è ½, analogamente si calcola l'ordinata del punto di ascissa 1: 3/2. Quindi: $v(6) - v(1) = [11 + ½ \cdot 3/2 \cdot 1 - ½ \cdot 1 \cdot 3/2]\ m/s = 11\ m/s$

2. **Usando gli integrali determinare il lavoro svolto dalla forza gravitazionale passando *h* a 0.**

$$W = \int_0^h mg\,dx = mg \cdot [x]_0^h = mgh$$

3. **Usando gli integrali determinare il lavoro svolto da una forza elastica che espande o comprime una molla di un tratto Δ*x*.**

$$W = \int_0^{\Delta x} kx\,dx = k \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\Delta x} = \frac{1}{2}k(\Delta x)^2$$

4. **Determinare il modulo del lavoro svolto dalla forza bidimensionale *F* ≡ (4*x N*; *y*² N), quando si sposta dalla posizione (–1*m*; 3*m*) alla posizione (2*m*; 1*m*).**

$$W = \int_{-1}^{2} 4x\,dx + \int_3^1 y^2\,dy = \left(\left[2x^2\right]_{-1}^{2} + \left[\frac{y^3}{3}\right]_3^1\right)J = \left(8 - 2 + \frac{1}{3} - 9\right)J = -\frac{8}{3}J \approx -2{,}7J$$

5. **Una forza elastica ha componenti *F* ≡ (–2*x N*; 0 N), determinare il lavoro che compie quando comprime la molla da *x* = 4 *cm* a *x* = 2 *cm*. La costante elastica della molla è *k* = 250 *N/m*.**

$$W = \int_2^4 -500x\,dx = -500\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^4 J = -500 \cdot (8-2)J = -3000J$$

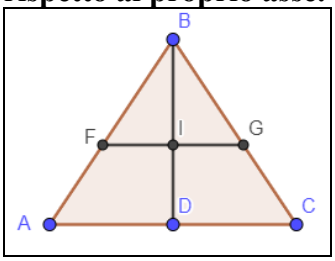
6. **Una particella posta in uno spazio tridimensionale è soggetta a una forza *F* ≡ (1,4 *N*; 3,2*y* N; –2,1*z*² *N*), determinare il lavoro svolto quando essa si sposta dalla posizione (1 *m*; 0 *m*; 2 *m*) alla posizione (2 *m*; 1 *m*; 0 *m*).**

$$W = \int_1^2 1{,}4\,dx + \int_0^1 3{,}2y\,dy + \int_0^2 2{,}1z^2\,dz = \left([1{,}4x]_1^2 + \left[1{,}6y^2\right]_0^1 + \left[0{,}7z^3\right]_0^2\right)J = (2{,}8 - 1{,}4 + 1{,}6 + 5{,}6)J = 8{,}6J$$

7. **Determinare il momento di inerzia di una circonferenza di massa *m* e raggio *r*, che ruota rispetto a un asse che passa per il suo centro perpendicolare al piano della circonferenza.**

$$I = \int r^2 dm = mr^2$$

8. **Determinare il momento di inerzia di un cono retto di massa *m*, raggio *r* e altezza *h*, che ruota rispetto al proprio asse.**



La distanza dall'asse di rotazione è variabile e si ottiene per similitudine dei triangoli *CDB* e *GIB*: $\overline{GI} = \frac{r}{h}\overline{ID}$, sia $\overline{ID} = dx \Rightarrow dV = \pi\overline{GI}^2 dx = \pi\left(\frac{r}{h}\right)^2 dx \Rightarrow dm = \pi\frac{r^2}{h^2}\rho x^2 dx$, infine: $I = \int_0^h \frac{1}{2}\pi\frac{r^4}{h^4}\rho x^4 dx = \left[\frac{1}{2}\pi\frac{r^4}{h^4}\rho\frac{x^5}{5}\right]_0^h = \frac{1}{10}\pi\rho\frac{r^4 h^{\cancel{5}}}{\cancel{h^4}} = \frac{1}{10}\pi\rho r^4 h = \frac{1}{10}\cancel{\pi}\frac{3m}{\cancel{\pi}\cancel{r^2}\cancel{h}}r^{\cancel{4}^2}\cancel{h} = \frac{3}{10}mr^2$

9. Determinare il campo elettrico generato da un disco carico di raggio *R* a distanza *z* dal disco lungo il suo asse centrale, a partire dalla relazione $dE = \frac{z\sigma r dr}{2\varepsilon_0 \left(z^2 + r^2\right)^{3/2}}$, in cui σ è la densità superficiale di carica.

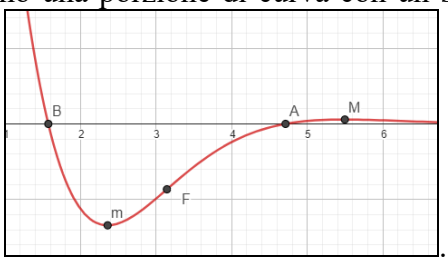
$$E = \int_z^R \frac{z\sigma r dr}{2\varepsilon_0 \left(z^2 + r^2\right)^{3/2}} = \left[-\frac{z\sigma}{2\varepsilon_0 \sqrt{z^2 + r^2}} \right]_z^R = -\frac{z\sigma}{2\varepsilon_0 \sqrt{z^2 + R^2}} + \frac{\sigma \cancel{z}}{2\varepsilon_0 \cancel{z} \sqrt{2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right)$$

10. Determinare il lavoro svolto durante un'espansione isoterma di 2,3 moli di un gas perfetto, che si espande alla temperatura costante di 36°, passando da un volume di 3,4 *l* a 5,2 *l*.

$$W = \int_{3,4}^{5,2} \frac{2,3 \cdot 8,31 \cdot 309}{V} dV = 5907 \left[ln\left(V\right) \right]_{3,4}^{5,2} = 2,5kJ$$

11. (Liceo scientifico suppletiva 1991/92) Studiare la funzione $y(x) = cos(x) \cdot e^{-x}$ per $x \geq 0$. Essa, in opportune unità di misura, rappresenti la corrente elettrica di scarica di un condensatore attraverso una impedenza, essendo *x* il tempo. In tal caso la carica *Q* inizialmente presente sulle armature del condensatore è data da $Q = \int_0^\infty y \ x \ dx$. Calcolare il valore di *Q*.

È definita nei reali non negativi; passa per (0; 1), e per (π/2 + *k*π; 0), ha l'asse *x* come asintoto orizzontale, $y'(x) = -[cos(x) + sin(x)] \cdot e^{-x}$; $y'(x) = 0 \Rightarrow x = ¾\pi + k\pi$; $y''(x) = 2sin(x) \cdot e^{-x} \Rightarrow y''(¾\pi + k\pi) > 0$ per *k* pari e < 0 per *k* dispari, quindi in $x = ¾\pi + 2k\pi$ vi sono minimi e per $x = ¾\pi + (2k + 1)\pi$ vi sono massimi, per $x = k\pi$ vi sono flessi. Vediamo una porzione di curva con un sistema dimetrico, in cui l'unità di misura s u *x* è 1/20 di quella su *y*.



$$Q = \int_0^\infty cos \ x \ e^{-x} dx = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{sin \ x - cos \ x}{2} e^{-x} \right] = \frac{1}{2}$$

12. (Liceo scientifico suppletiva 1992/93) a) Data la funzione $f\left(x\right) = \left| \frac{sin\left(x\right)}{k - cos\left(x\right)} \right|$, determinare il valore di *k* in modo che la funzione abbia un massimo per $x = \pi/3$. b) Supponendo che la funzione rappresenti il valore numerico dell'intensità (espressa in Newton) di una forza che agisce lungo l'asse delle ascisse (ove *x* rappresenti il valore numerico della distanza in metri), calcolare il lavoro fatto dalla forza quando il suo punto di applicazione si sposta dalla posizione $x = 0$ a $x = \pi$.

a) $f'\left(x\right) = \frac{\left|k \, cos\left(x\right) - 1\right|}{\left[k - cos\left(x\right)\right]^2}$; $f'(\pi/3) = 0 \Rightarrow ½k - 1 = 0 \Rightarrow k = 2$, si verifica che effettivamente si ha un massimo.

b) $W = \int_0^\pi \frac{sin \ x}{2 - cos \ x} dx = \left[ln \ 2 - cos \ x \ \right]_0^\pi = ln \ 3$ $[x_m = 5\pi/3; x_M = \pi/3; L = ln(3)]$

13. (Simulazione 28/02/19) a) Supponendo che la funzione $q(t) = ate^{bt}$ rappresenti, per $t \geq 0$, la carica elettrica (misurata in *C*) che attraversa all'istante di tempo *t* (misurato in *s*) la sezione di un certo conduttore, determinare le dimensioni fisiche delle costanti *a* e *b* sopra indicate. b) Assumendo $a = 4$ e $b = -12$, esprimere l'intensità di corrente $i(t)$ che fluisce nel conduttore all'istante *t*; c) determinare il valore massimo ed il valore minimo di tale corrente e a quale valore essa si assesta col trascorrere del tempo. d) Indicando, per $t_0 \geq 0$, con $Q(t_0)$ la carica totale che attraversa la sezione del conduttore in un dato intervallo di tempo $[0; t_0]$, determinare a quale valore tende $Q(t_0)$ per t_0 che tende a +∞. e) Supponendo che la resistenza del conduttore sia $R = 3\Omega$, scrivere (senza poi effettuare il calcolo), un integrale che fornisca l'energia dissipata nell'intervallo di tempo [0;

t_0].

a) $a = q(t)/t\, e^{-bt} \Rightarrow [a] = [C]/[s] = [A]$; $b = ln[q(t)/(at)]/t \Rightarrow [b] = [s^{-1}]$.

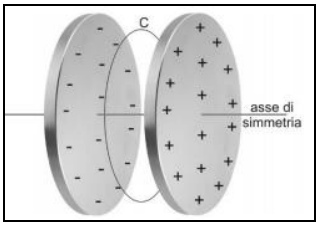
b) $i(t) = D(4te^{-12t}) = 4e^{-12t}(1 - 12t)$;

c) $i'(t) = 96e^{-12t}(6t - 1)$; $i'(t) = 0 \Rightarrow t = 1/6$ per questo valore si ha un minimo: $m \equiv (0{,}17\ s; -0{,}54\ A)$. Il massimo si ha in $M \equiv (0\ s; 4\ A)$; mentre il valore si assesta $\lim_{t\to\infty} i(t) = \lim_{t\to\infty} 4e^{-12t} = 0$;

d) $\lim_{t\to\infty} q(t) = \lim_{t\to\infty} 4te^{-12t} = 0$

e) $12\int_0^{t_0} e^{-t}\cdot(2-t)^2\, dt$

14. (Esame di stato 2018/19) Un condensatore piano è formato da due armature circolari di raggio *R*, poste a distanza *d*, dove *R* e *d* sono espresse in metri (*m*). Viene applicata alle armature una differenza di potenziale variabile nel tempo e inizialmente nulla. All'interno del condensatore si rileva la presenza di un campo magnetico $\vec{B}$. Trascurando gli effetti di bordo, a distanza *r* dall'asse di simmetria del condensatore, l'intensità di $\vec{B}$, espressa in tesla (T), varia secondo la legge: $|\vec{B}| = \frac{kt}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}r$, con $r \le R$ dove *a* e *k* sono costanti positive e *t* è il tempo trascorso dall'istante iniziale, espresso in secondi (s).



a) Dopo aver determinato le unità di misura di *a* e *k*, spiegare perché nel condensatore è presente un campo magnetico anche in assenza di magneti e correnti di conduzione. Qual è la relazione tra le direzioni di $\vec{B}$ e del campo elettrico $\vec{E}$ nei punti interni al condensatore? b) Si consideri, tra le armature, un piano perpendicolare all'asse di simmetria. Su tale piano, sia *C* la circonferenza avente centro sull'asse e raggio *r*. Determinare la circuitazione di $\vec{B}$ lungo *C* e da essa ricavare che il flusso di $\vec{E}$, attraverso la superficie circolare delimitata da *C*, è dato da $\Phi(\vec{E}) = \frac{2k\pi r^2}{\mu_0\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{\sqrt{t^2+a^2}} + \frac{1}{a}\right)$. c) Calcolare la d.d.p. tra le armature del condensatore. A quale valore tende $|\vec{B}|$ al trascorrere del tempo? Giustificare la risposta dal punto di vista fisico.

a) Si ha: $k = |\vec{B}|\frac{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}{tr}$. Poiché a^2 è sommato a t^2, vuol dire che i termini sono omogenei, quindi *a* si misura in secondi. L'unità di misura di *k* è $[T]\cdot\frac{\sqrt{[s]^6}}{[s]\cdot[m]} = [T]\cdot\frac{[s]^3}{[s]\cdot[m]} = [T]\cdot\frac{[s]^2}{[m]} =$

$= \frac{[kg]}{[s]^2\cdot[A]}\cdot\frac{[s]^2}{[m]} = \frac{[kg]}{[m]\cdot[A]}$. La variazione del campo elettrico produce una corrente, quindi un campo magnetico. Le linee del campo elettrico all'interno del condensatore sono parallele, escono dall'armatura carica positivamente ed entrano nell'armatura con carica negativa; le linee del campo magnetico indotto sono circonferenze concentriche centrate sull'asse di simmetrica e giacenti su piani perpendicolari a questo. Campo elettrico e magnetico sono pertanto ortogonali tra di loro in ogni punto e in ogni istante.

b) Abbiamo $\Gamma(B) = \oint_C B dl$, in cui *C* è la circonferenza di cui abbiamo parlato nel punto precedente. Pertanto: $\Gamma(B) = 2\pi r\cdot B(r)$. D'altro canto per il Teorema di Ampére si ha anche $\Gamma(B) = \mu_0\cdot\sum i_i$, in cui consideriamo le correnti concatenate. In questo caso vi è l'unica corrente $i = \varepsilon_0\frac{d\Phi(E)}{dt}$.

Abbiamo perciò:

$$2\pi r\cdot B(r)=\mu_0\varepsilon_0\frac{d\Phi(E)}{dt}\Rightarrow\frac{d\Phi(E)}{dt}=\frac{2\pi r\cdot B(r)}{\mu_0\varepsilon_0}\Rightarrow\Phi(E)=\int_0^t\frac{2\pi r^2}{\mu_0\varepsilon_0}\cdot\frac{kt}{\sqrt{\left(t^2+a^2\right)^3}}r\,dt=$$

$$=\frac{\pi r^2k}{\mu_0\varepsilon_0}\cdot\int_0^t 2t\cdot\left(t^2+a^2\right)^{-3/2}dt=\left[\frac{\pi r^2k}{\mu_0\varepsilon_0}\cdot\frac{\left(t^2+a^2\right)^{-3/2+1}}{-3/2+1}\right]_0^t=\left[\frac{\pi r^2k}{\mu_0\varepsilon_0}\cdot\frac{\left(t^2+a^2\right)^{-1/2}}{-1/2}\right]_0^t=$$

$$=\left[\frac{-2\pi r^2k}{\mu_0\varepsilon_0\sqrt{t^2+a^2}}\right]_0^t=\frac{-2\pi r^2k}{\mu_0\varepsilon_0\sqrt{t^2+a^2}}+\frac{2\pi r^2k}{\mu_0\varepsilon_0 a}=\frac{2\pi r^2k}{\mu_0\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}}\right)$$

che coincide con quanto richiesto

c) Nei condensatori sappiamo che vale la relazione: $\Delta V=-E\cdot d$, determiniamo quindi il valore del campo elettrico: $E=\frac{\Phi(E)}{S}=\frac{\Phi(E)}{\pi r^2}=\frac{2k}{\mu_0\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}}\right)\Rightarrow\Delta V=-\frac{2kd}{\mu_0\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}}\right)$. Infine: $\lim_{t\to\infty}\left|\vec{B}\right|=\lim_{t\to\infty}\frac{kt}{\sqrt{\left(t^2+a^2\right)^3}}r=0$, applicando il principio di sostituzione degli infiniti. Fisicamente il campo elettrico tende a stabilizzarsi, quindi non produce una corrente di spostamento e pertanto non vi è neanche campo magnetico.

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi.

1. **Sapendo che *f*(*x*) è integrabile in [*a*; *b*] e $\int_{k\cdot a}^{k\cdot b}f(x)\,dx=p$, calcolare $\int_a^b f(k\cdot x)\,dx$.**

$$kx=t\Rightarrow x=\frac{t}{k},dx=\frac{dt}{k},x=a\Rightarrow t=ka,x=b\Rightarrow t=kb\Rightarrow\frac{1}{k}\int_{ka}^{kb}f(t)\,dt=\frac{p}{k}\ [1/k]$$

2. **Sia *f*(*x*), integrabile e periodica di periodo T. Dimostrare che $\int_0^T f\ x\ dx=\int_a^{a+T}f\ x\ dx,\forall a\in\mathbb{R}$.**

Dato che *f*(*x*) è periodica di periodo *T*, in ogni intervallo di ampiezza *T*, abbiamo lo stesso trapezoide.

3. **Determinare una relazione fra $\int_0^{\pi/2}sin^n(x)dx,n\in\mathbb{N}$ e $\int_0^{\pi/2}sin^{n-2}(x)dx,n\in\mathbb{N}$**

$$\int_0^{\pi/2}sin^n(x)dx=\int_0^{\pi/2}-sin^{n-1}(x)d(cos(x))=\left[-sin^{n-1}(x)cos(x)\right]_0^{\pi/2}+(n-1)\int_0^{\pi/2}sin^{n-2}(x)cos^2(x)dx=$$

$$=(n-1)\int_0^{\pi/2}\left[sin^{n-2}(x)-sin^n(x)\right]dx\Rightarrow\int_0^{\pi/2}sin^n(x)dx=\frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2}sin^{n-2}(x)dx$$

4. **Determinare una relazione fra $\int_0^{\pi/4}cos^n(x)dx,n\in\mathbb{N}$ e $\int_0^{\pi/4}cos^{n-2}(x)dx,n\in\mathbb{N}$**

$$\int_0^{\pi/4}cos^n(x)dx=\int_0^{\pi/4}cos^{n-1}(x)d(sin(x))=\left[cos^{n-1}(x)sin(x)\right]_0^{\pi/4}+(n-1)\int_0^{\pi/4}cos^{n-2}(x)sin^2(x)=$$

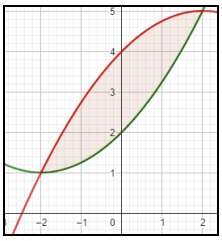
$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n+(n-1)\int_0^{\pi/4}\left[cos^{n-2}(x)-cos^n(x)\right]dx\Rightarrow\int_0^{\pi/4}cos^n(x)dx=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n+\frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/4}cos^{n-2}(x)dx$$

Temi assegnati agli esami di stato

1. **(Liceo scientifico 1966/67) In un piano, riferito ad un sistema cartesiano ortogonale *Oxy*, si con-**

siderino le parabole di equazione: $y = mx^2 + x + 3 - 4m$ (1), essendo m un parametro diverso da zero. a) Fra le parabole di equazione (1) si studino quelle aventi per vertice $A \equiv (-2; 1)$ o $B \equiv (2; 5)$ e si provi che esse sono fra loro simmetriche rispetto al punto medio C del segmento AB. b) Si calcoli l'area della regione finita limitata dalle due parabole di cui al punto a).

a) Il vertice della generica parabola è $\left(-\frac{1}{2m}; \frac{-16m^2+12m-1}{4m}\right)$, quindi deve essere: $-\frac{1}{2m} = -2 \Rightarrow$ $m = ¼$, verifichiamo che anche l'ordinata coincide: $\frac{-16/16+12/4-1}{4/4} = 1$, mentre per l'altra parabola: $-\frac{1}{2m} = 2 \Rightarrow m = -¼$, anche l'ordinata è corretta. Quindi le due parabole hanno equazioni rispettive: $y = ¼x^2 + x + 2$ e $y = -¼x^2 + x + 4$. Si ha: $C \equiv (0; 3)$, quindi l'equazione della simmetria è: $\begin{cases} x' = -x \\ y' = 6 - y \end{cases}$ applicandola alla prima equazione: $6 - y = ¼x^2 - x + 2 \Rightarrow y = -¼x^2 + x + 4$.



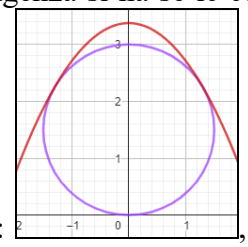
b) Dobbiamo determinare l'area in figura: che vale:

$$\int_{-2}^{2}\left(-\frac{x^2}{4}+\cancel{x}+4-\frac{x^2}{4}-\cancel{x}-2\right)dx=\left[-\frac{x^3}{6}+2x\right]_{-2}^{2}=\frac{16}{3}$$

2. (Liceo scientifico 1969/1970) Data la funzione $y = x^4/24 - x^3/6 + x^2/6$, si determini l'area del rettangoloide, relativo al grafico, avente per base l'intervallo di estremi $x = 0$, $x = 2$.

$$\int_0^2\left(\frac{x^4}{24}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{6}\right)dx=\left[\frac{x^5}{120}-\frac{x^4}{24}+\frac{x^3}{18}\right]_0^2=\frac{2}{45}$$

3. (Liceo scientifico suppletiva 1972/73) In un riferimento cartesiano ortogonale xOy siano date la parabola di equazione $y = -2x^2/3 + 27/8$ e la circonferenza $x^2 + y^2 - 2ky = 0$, essendo k un parametro reale. a) Delle predette circonferenze si consideri quella che risulta tangente alla parabola e appartiene al semipiano $y \geq 0$; b) si scrivano le equazioni delle rette tangenti comuni alla parabola stessa e alla circonferenza, e si dica qual è l'ampiezza dell'angolo formato dalle due tangenti. c) Si calcoli, infine, l'area della regione finita del piano compresa fra la parabola e la circonferenza trovata.

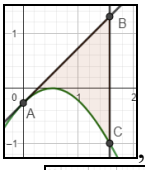
a) La tangenza si ha se le curve hanno in comune due punti doppi, dato che la situazione è come in figura:  , con la circonferenza che è interna, tangente internamente o secante alla parabola. Quindi il sistema: $\begin{cases} y = -\frac{2x^2}{3} + \frac{27}{8} \\ x^2 + y^2 - 2ky = 0 \end{cases} \Rightarrow 256x^4 + 96(8k - 21)x^2 - 243(16k - 27) = 0$, deve essere tale che l'equazione biquadratica abbia 2 soluzioni opposte, quindi deve essere: $\Delta/4 = 2k^2 + 3k - 9 = 0 \Rightarrow k = -3 \vee k = 3/2$, delle due quella che sta nel semipiano positivo delle y si ha per $k = 3/2$ ed è: $x^2 + y^2 - 3y = 0$.

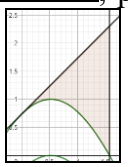
b) Le tangenti alla parabola in $(a; -2a^2/3 + 27/8)$ hanno equazione $y = \frac{-4a}{3}x + \frac{16a^2+81}{24}$ e dato che

i punti di tangenza sono: $\left(\pm\frac{3\sqrt{3}}{4};\frac{9}{4}\right)$, le equazioni richieste sono: $y=\pm\sqrt{3}x+\frac{9}{2}$. L'angolo formato dalle tangenti è tale che si ha: $\alpha=tan^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{3}}{1-3}\right)=tan^{-1}\sqrt{3}=60°$.

c) $\int_{-3\sqrt{3}/4}^{3\sqrt{3}/4}\left(-\frac{2x^2}{3}+\frac{27}{8}-\frac{\sqrt{9-4x^2}+3}{2}\right)dx=\left[-\frac{9}{8}sin^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right)-\frac{x\sqrt{9-4x^2}}{4}-\frac{2x^3}{9}+\frac{15x}{8}\right]_{-3\sqrt{3}/4}^{3\sqrt{3}/4}=\frac{27\sqrt{3}-12\pi}{16}$

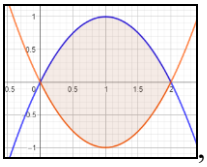
4. (Liceo scientifico 1973/74) Assegnata la funzione $y = sin(x) + \sqrt{3}\,cos(x) - 2$ ($-\pi \le x \le \pi$), si conduca la retta tangente alla curva nel punto A di ascissa $x = 0$, e tracciata la retta $x = \pi/2$ si calcoli l'area della regione piana limitata dalla retta, dalla tangente in A e dalla curva.

Determiniamo la tangente: $y = x - 2 + \sqrt{3}$, la regione di cui vogliamo determinare l'area è quella in figura: 

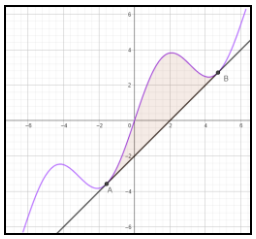
, per semplificare trasliamo tutto secondo il vetotore (1; 0), in modo daootenere la figura: 
per cui l'area vale: $\int_0^{\pi/2}\left[x\cancel{-2}+\sqrt{3}-sin(x)-\sqrt{3}cos(x)\cancel{+2}\right]dx=$

$=\left[\frac{x^2}{2}+\sqrt{3}x+cos(x)-\sqrt{3}sin(x)\right]_0^{\pi/2}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{\sqrt{3}\pi}{2}-\sqrt{3}-1$.

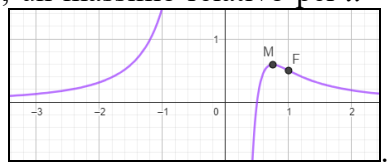
5. (Liceo scientifico 1974/75) In un riferimento cartesiano ortogonale xOy sono date le parabole C' e C'' rispettivamente di equazione: $y = -x^2 + 2ax$, $y = x^2/a^4 - 2x/a^3$, $a > 0$; si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalle due parabole e si determini il valore di a per cui tale area risulta minima.

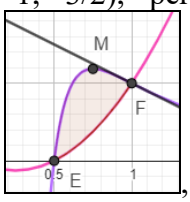
L'area da calcolare è simile alla seguente, in cui $a = 1$, 
, entrambe la parabole passano per l'origine, ma anche per $-x^2 + 2ax = x^2/a^4 - 2x/a^3 \Rightarrow (2a; 0)$, pertanto l'area si calcola nel modo seguente: $\int_0^{2a}\left(-x^2+2ax-\frac{x^2}{a^4}+\frac{2x}{a^3}\right)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+ax^2-\frac{x^3}{3a^4}+\frac{x^2}{a^3}\right]_0^{2a}=\frac{4\left(a^4+1\right)}{3a}$. Determiniamo il minimo: $\frac{d}{da}\frac{4\left(a^4+1\right)}{3a}=0\Rightarrow\frac{4\left(3a^4-1\right)}{3a^2}=0\Rightarrow a=\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$, dato che è $a > 0$. Si verifica facilmente che è effettivamente un minimo.

6. (Liceo scientifico 1975/76) Data la funzione $y = x + 2sin(x)$, $-2\pi \le x \le 2\pi$, si determinino le coordinate dei punti comuni alla curva e alla retta di equazione $y = x - 2$ e si calcoli l'area della regione di piano delimitata dalla curva e dalla retta nell'intervallo indicato.

La regione di cui vogliamo calcolare l'area è mostrata in figura : 
Determiniamo le intersezioni: $x + 2sin(x) = x - 2 \Rightarrow sin(x) = -1 \Rightarrow x = -\pi/2 \vee 3\pi/2$. Pertanto l'area si calcola nel modo seguente: $\int_{-\pi/2}^{3\pi/2}\left[\cancel{x}+2sin(x)-\cancel{x}+2\right]dx=\left[-2cos(x)+2x\right]_{-\pi/2}^{3\pi/2}=3\pi+\pi=4\pi$

7. (Liceo scientifico 1975/76) In un sistema di assi coordinati cartesiani si studi la funzione $y=\frac{2x-1}{2x^3}$ e se ne disegni il grafico. Si determinino i coefficienti dell'equazione $y = ax^2 + bx$ in modo che la parabola da essa rappresentata passi per il flesso e per l'ulteriore punto d'intersezione della curva con la tangente inflessionale e si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalle due curve.

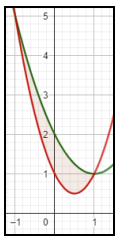
Si trova che la curva ha asintoti: $x = 0$ e $y = 0$, un massimo relativo per $x = ¾$, un flesso a tangente obliqua per $x = 1$, e il grafico è quello in figura: 

. La tangente inflessionale è: $y = –½x + 1$ e incontra la curva in (1; ½) e (–1; 3/2), per cui deve essere: $\begin{cases} a+b=1/2 \\ a-b=3/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1/2 \end{cases}$. Quindi la regione è questa in figura: 

, e la sua area vale:

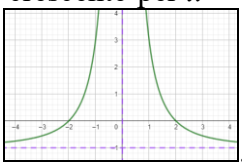
$$\int_{1/2}^{1}\left[\frac{2x-1}{2x^3}-x^2+\frac{x}{2}\right]dx=\left[\frac{-4x^5+3x^4-12x+3}{12x^2}\right]_{1/2}^{1}=\frac{7}{48}$$

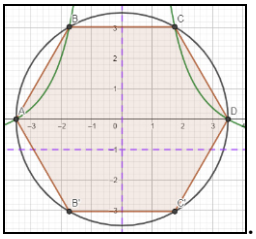
8. (Liceo scientifico suppletiva 1975/76) In un sistema di assi cartesiani si considerino le parabole rappresentate dalle equazioni: $y = x^2 – 2x + 2$, $y = 2x^2 – 2x + 1$, si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalla due curve.

L'area da determinare è quella in figura: 
e vale:

$$\int_{-1}^{1}\left(x^2\cancel{-2x}+2-2x^2\cancel{+2x}-1\right)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_{-1}^{1}=\frac{4}{3}$$

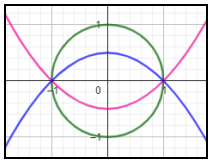
9. (Liceo scientifico 1982/83) Si studi la funzione $y = a^2/x^2 – 1$ e se ne disegni il grafico. Si determinino le intersezioni della curva da essa rappresentata con la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = a^2$ e si trovi il valore di a per cui dette intersezioni sono vertici di un esagono regolare. In questo caso particolare si calcolino le aree delle regioni finite di piano delimitate dalle due curve.

La funzione è definita per $x \neq 0$; incontra l'asse x in $(\pm a; 0)$; ha $x = 0$ come asintoto verticale e $y = –1$ come asintoto orizzontale; è costante se $a = 0$; $y' = –2a^2/x$, quindi la funzione è crescente per $x < 0$ e decrescente per $x > 0$. Non ha estremi relativi, il suo grafico è simile al seguente 
. Si ha: $\begin{cases} y=\frac{a^2}{x^2}-1 \\ x^2+y^2=a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\pm\frac{\sqrt{2\left(\sqrt{4a^2+1}-1\right)}}{2} \\ y=\frac{\sqrt{4a^2+1}-1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=\pm a \\ y=0 \end{cases}$. Gli altri due vertici dell'esagono sono ovviamente i simmetrici rispetto all'asse x dei primi due, cioè: $\left(\pm\frac{\sqrt{2\left(\sqrt{4a^2+1}-1\right)}}{2};\frac{1-\sqrt{4a^2+1}}{2}\right)$ Basta quindi im-

porre che due sementi consecutivi siano uguali perché l'esagono sia equilatero. Deve quindi essere $\left(\frac{\sqrt{2\left(\sqrt{4a^2+1}-1\right)}}{2}-a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{4a^2+1}-1}{2}\right)^2=\left(\sqrt{2\left(\sqrt{4a^2+1}-1\right)}\right)^2 \Rightarrow a=0 \vee a=\pm 2\sqrt{3}$, il valore nullo ovviamente non è accettabile.  . L'area cercata misura:

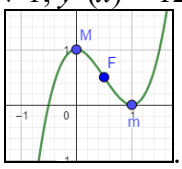
$$2\int_{-2\sqrt{3}}^{-\sqrt{3}}\left(\sqrt{12-x^2}-\frac{12}{x^2}+1\right)dx=\left[x\sqrt{12-x^2}+2x+\frac{24}{x}+6sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{6}x\right)\right]_{-2\sqrt{3}}^{-\sqrt{3}}=\frac{4\pi-5\sqrt{3}}{2}$$

10. (Liceo scientifico 1982/83) Una parabola passante per gli estremi di un diametro di una circonferenza di raggio *r* ha le tangenti in tali punti perpendicolari fra loro e l'asse del diametro come asse di simmetria. Si scrivano, in un sistema di assi cartesiani opportunamente scelto, le equazioni della parabola e della circonferenza e si calcolino le aree delle regioni finite di piano delimitate dalle due curve.

Per facilitare consideriamo la circonferenza $x^2 + y^2 = r^2$, come estremi del diametro consideriamo $(\pm r; 0)$. Se la parabola ha equazione $y = ax^2 + bx + c$, dato che passa per $(\pm r; 0)$ diventa: $\begin{cases} ar^2+br+c=0 \\ ar^2-br+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{c}{r^2} \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow y=-\frac{c}{r^2}x^2+c \Rightarrow y'=\frac{2c}{r^2}x$, dato che le tangenti sono perpendicolari deve essere: $y'(r)=\frac{2c}{r}, y'(-r)=-\frac{2c}{r} \Rightarrow -\frac{4c^2}{r^2}=-1 \Rightarrow c=\pm\frac{r}{2}$, perciò ci sono due distinte parabole di equazioni: $y=\pm\frac{1}{2r}x^2\mp\frac{r}{2}$.  l'area comunque è uguale e si trova nel modo seguente:

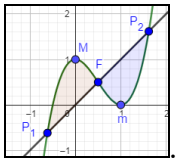
$$\frac{\pi r^2}{2}-\int_{-r}^{r}\left(-\frac{1}{2r}x^2+\frac{r}{2}\right)dx=\frac{\pi r^2}{2}-\left[\frac{r}{2}x-\frac{x^3}{6r}\right]_{-r}^{r}=\frac{\pi r^2}{2}-\frac{2r^2}{3}=\frac{3\pi-4}{6}r^2$$

11. (Liceo scientifico 1983/84) a) Si studi la funzione $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ e se ne disegni il grafico. b) Si individui la traslazione di assi: $x = X + a$, $y = Y + b$, che rende la curva simmetrica rispetto all'origine e si scriva l'equazione della curva trasformata. c) Si determinino le coordinate dei punti in cui la curva data incontra la bisettrice del primo e del terzo quadrante e si calcoli l'area di una delle regioni finite di piano delimitate dalla curva e dalla bisettrice stessa.

a) La funzione è definita sui reali e non ha asintoti; $y'(x) = 6x^2 - 6x$, $y'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee 1$; $y''(x) = 12x - 6$, $y''(0) = -6 < 0$, $y''(1) = 6 > 0 \Rightarrow M \equiv (0; 1)$, $m \equiv (1; 0)$; $F \equiv (½; ½)$, il grafico è:  .

b) Dal grafico si nota che è sufficiente traslare la curva in modo che sia $F \equiv O$, quindi sarà $a = b = ½$ e la nuova curva avrà equazione: $Y = 2X^3 - 3X/2$;

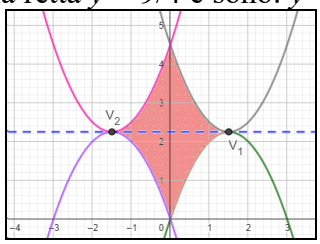
c) $x = 2x^3 - 3x^2 + 1 \Rightarrow x = ½ \vee x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \Rightarrow F$ e $\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2};\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)$, l'area da calcolare è una delle

due mostrate in figura, che ovviamente sono equivalenti: 

.

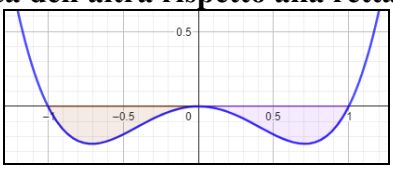
Si ha: $\int_{1/2}^{(1+\sqrt{5})/2}\left(x-2x^3+3x^2-1\right)dx=\frac{25}{32}$

12. (Liceo scientifico 1984/85) In un sistema di assi coordinati cartesiani si consideri la parabola di equazione $y = 3x - x^2$. Si scrivano l'equazione della parabola a essa simmetrica rispetto all'asse delle ordinate e le equazioni delle due parabole a esse simmetriche rispetto alla retta congiungente i loro vertici. Si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalle quattro parabole.

La prima equazione si trova facilmente: $y = -3x - x^2$, i due vertici sono: $V_1 \equiv (3/2; 9/4)$ e $V_2 \equiv (-3/2; 9/4)$, quindi le parabole da trovare sono simmetriche rispetto alla retta $y = 9/4$ e sono: $y = x^2 - 3x + 9/2$ e $y = x^2 + 3x + 9/2$, L'area da determinare è quella in figura: 

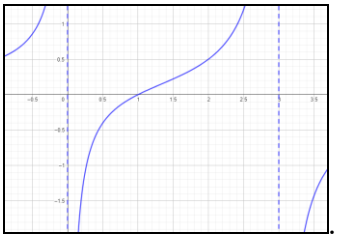
e si trova nel modo seguente, tenuto conto delle simmetrie: $4\cdot\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{9}{4}-\int_{-3/2}^{0}\left(-x^2-3x\right)dx\right]=\frac{9}{2}$. [,; A = 9/2, $2p = 5\cdot\sqrt{2}$]

13. (Liceo scientifico 1985/86) Il grafico della funzione $y = x^4 - x^2$ delimita, insieme alla retta $y = 0$, due regioni finite del piano, contenute rispettivamente nel terzo e nel quarto quadrante; si dimostri che l'una è la simmetrica dell'altra rispetto alla retta $x = 0$ e si calcoli l'area di una di esse.

La situazione è la seguente: 

facilmente si ha la simmetria che dipende dal fatto che è la stessa funzione ad essere simmetrica rispetto all'asse y. L'area misura: $\int_{-1}^{0}\left(x^2-x^4\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$.

14. (Liceo scientifico PNI 1989/90) Si studi la funzione $f(x)=\frac{1-x}{x^2-3x}$ e si dica se per essa è valido il teorema della media integrale nell'intervallo [1; 2], giustificando l'affermazione. In caso di risposta affermativa si determini internamente a detto intervallo il valore c della variabile indipendente di cui il teorema stesso assicura l'esistenza quando la funzione è continua.

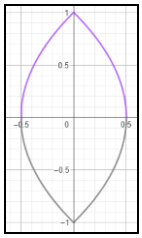
La funzione è definita per $x \neq 0, 3$; ha asintoti verticali $x = 0$ e $x = 3$; $f'(x)=\frac{x^2-2x+3}{\left(x^2-3x\right)^2}\Rightarrow f'(x)>0,\forall x\in Ide$, il grafico è: 
. In [1; 2] la funzione è continua, quindi integrabile, possiamo applicare il teorema. Si ha:

$$\int_1^2\frac{1-x}{x^2-3x}=\frac{1-c}{c^2-3c}\Rightarrow\frac{1-c}{c^2-3c}=\left[ln\left(\sqrt[3]{x(x-3)^2}\right)\right]_1^2\Rightarrow\frac{1-c}{c^2-3c}=ln\left(\sqrt[3]{2}\right)\Rightarrow$$

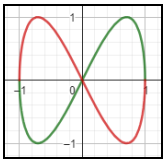
$$\Rightarrow c=\frac{3\left[ln(2)-1\right]+\sqrt{9ln^2(2)-ln(64)+9}}{ln(4)}\approx 1,5$$

15. (Liceo scientifico 1990/91) In un piano cartesiano ortogonale Oxy si consideri il punto $A \equiv (2x; 0)$.

Si trovi il luogo *L* del punto *B* ≡ (*x*; *y*) tale che il triangolo *OAB* abbia perimetro 2*p* e si determini l'area della regione finita di piano delimitata dal luogo stesso.

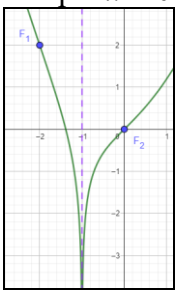
Si ha: $2p = |2x| + \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow p = |x| + \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = p^2 - 2p|x| + x^2 \Rightarrow y^2 = p^2 - 2p|x| \Rightarrow y = \pm\sqrt{p^2 - 2p|x|}$, la situazione è la seguente (per $p = 1$):  e l'area, date le simmetrie, misura: $4\int_0^{p/2} \sqrt{p^2-2px}\,dx = 4\left[\frac{(2x-p)\sqrt{p^2-2px}}{3}\right]_0^{p/2} = \frac{4}{3}p^2$.

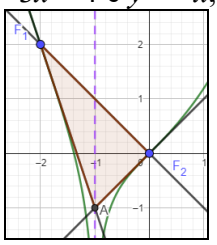
16. (Liceo scientifico 1992/93) Sia $\begin{cases} x = sin(t) \\ y = sin(2t) \end{cases}$. a) Esprimere *y* in funzione di *x* e rappresentare le funzioni *y* = ± *f*(*x*) in uno stesso sistema di riferimento, individuando simmetrie e caratteristiche del grafico trovato. b) Calcolare l'area racchiusa dalla figura trovata. (L'integrale proposto è di facile esecuzione se si pone $\sqrt{1-x^2} = z$)

a) $y = 2sin(t)cos(t) = \pm 2x\sqrt{1-sin^2(t)} = \pm 2x\sqrt{1-x^2}$. Le curve sono simmetriche rispetto all'origine; hanno insieme di esistenza: [–1; 1], non hanno asintoti; $y' = \pm\frac{2-4x^2}{\sqrt{1-x^2}}; y'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, che rappresentano un massimo e un minimo per ciascuna delle due funzioni, ma ovviamente dove una ha massimo l'altra ha minimo e viceversa. Inoltre si ha: $y'' = \pm\frac{6x-4x^3}{(x^2-1)\sqrt{1-x^2}}; y''(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x \pm\sqrt{\frac{3}{2}}\,(NA)$, quindi l'origine è un flesso. infine i grafici sono i seguenti: 

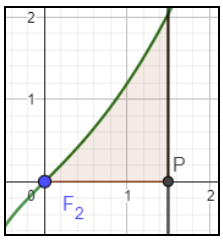
b) Viste le simmetrie: $4\int_0^1 2x\sqrt{1-x^2}\,dx = 4\left[-\frac{2\sqrt{(1-x^2)^3}}{3}\right]_0^1 = \frac{8}{3}$

17. (Liceo scientifico 1993/94) Nel piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali *Oxy*, è assegnata la curva *k* di equazione: *y* = *x*²/2 + *ln*(|*x* + 1|). a) Disegnarne un andamento approssimato dopo aver verificato, fra l'altro, che essa ha due flessi. b) Calcolare l'area del triangolo formato dalla retta congiungente tali flessi e dalle tangenti inflessionali. c) Calcolare inoltre l'area *R* della regione piana delimitata da *k*, dall'asse *x* e dalla retta di equazione 2*x* – 3 = 0.

a) Ide = $x \neq -1$; $x = -1$ è asintoto verticale; passa per l'origine e incontra l'asse *x* in un ulteriore punto di ascissa compresa tra –2 e –1; $y' = x + 1/|x + 1|$ che non si annulla mai; $y'' = 1 - 1/(x + 1)^2 = (x^2 + 2x)/(x+1)^2$, che si annulla per $x = 0 \vee 2$, dove vi sono appunto due flessi: $F_1 \equiv (-2; 2)$, $F_2 \equiv (0; 0)$; Il grafico è il seguente: 

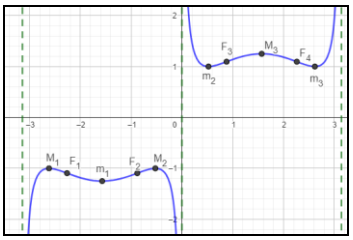
b) Le tangenti hanno equazioni: $y = -3x - 4$ e $y = -x$, che si incontrano in $A \equiv (-1; -1)$, pertanto l'area del triangolo, mostrato in figura, 

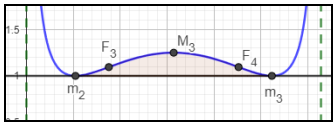
è $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 2$

c) 

$\int_0^{3/2}\left[\frac{x^2}{2} + ln(x+1)\right]dx = \left[(x+1)ln(x+1) + \frac{x^3}{6} - x\right]_0^{3/2} = \frac{5}{2}ln\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{15}{16}$

18. (Liceo scientifico 1994/95) In un piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali *Oxy*, è assegnata la curva *K* di equazione: $y = sin(x) + \frac{1}{4sin(x)}$, con $-\pi < x < \pi$. a) Disegnarne l'andamento e stabilire, in particolare, se la curva ha flessi. b) Calcolare l'area della regione piana delimitata da *K* e dalla retta di equazione *y* = 1. N.B. Per il calcolo di una primitiva della funzione *y* = 1/*sin*(*x*), si suggerisce di porre *t* = *tan*(*x*/2).

a) Per l'Ide dobbiamo eliminare $x = 0$, che è un asintoto verticale; $x = -\pi$ è asintoto verticale destro e $x = \pi$, asintoto verticale sinistro; $y' = \frac{cos(x)\left[4sin^2(x) - 1\right]}{4sin^2(x)}$; $y' = 0 \Rightarrow x = \pm\pi/2 \vee x = \pm\pi/6 \vee x = \pm 5\pi/6$; $y'' = -\frac{4sin^4(x) + sin^2(x) - 2}{4sin^3(x)} \Rightarrow$; $y''[\pi/2] < 0$, $y''[\pi/2] < 0$, $y''[-\pi/2] > 0$, $y''[\pi/6] > 0$, $y''[-\pi/6] < 0$, $y''[5\pi/6] > 0$, $y''[-5\pi/6] < 0 \Rightarrow M_1 \equiv (-5\pi/6; -1)$, $M_2 \equiv (-\pi/6; -1)$, $M_3 \equiv (\pi/2; 5/4)$, $m_1 \equiv (-\pi/2; -5/4)$, $m_2 \equiv (\pi/6; 1)$, $m_3 \equiv (5\pi/6; 1)$; $x_{F_{1,2}} = \pm sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{33}-1}{8}}\right), x_{F_{3,4}} = \pi \pm sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{33}-1}{8}}\right)$. Il grafico è il seguente: 

b) Dato che gli ultimi due minimi hanno ordinata 1, l'area da determinare è 

e si calcola: $\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\left[sin(x) + \frac{1}{4sin(x)}\right]dx - \frac{2}{3}\pi = \left[ln\left[\sqrt[8]{\frac{1-cos(x)}{1+cos(x)}}\right] - cos(x)\right]_{\pi/6}^{5\pi/6} - \frac{2}{3}\pi = \sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi + ln\left(\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}\right)$

19. (Liceo scientifico 1999/00) Sia *f*(*x*) una funzione reale di variabile reale, continua su tutto l'asse reale, tale che: [1] $\int_0^1 f(x)\,dx = 2$ e $\int_0^2 f(x)\,dx = -5$. a) Di ciascuno dei seguenti integrali: $\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)dx$, $\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx$, $\int_2^4 f\left(\frac{x}{2}\right)dx$, $\int_0^1 f(2x)\,dx$, dire se le condizioni [1] sono sufficienti per calcolarne il valore e in caso di risposta affermativa qual è questo. b) Posto: *f*(*x*) = *ax*³ + *bx* + *c*, dove *a*, *b*, *c* sono parametri reali con *a* ≠ 0, determinare le curve di equazione *y* = *f*(*x*) che soddisfano alle

condizioni [1]. c) Dimostrare che ognuna delle curve trovate ha uno ed un solo punto di flesso che è centro di simmetria per la curva medesima. d) Determinare quella, tra tali curve, che ha il flesso nel punto di ordinata –4. e) Fra le curve suddette determinare, infine, quelle che hanno punti estremanti e quelle che non ne hanno.

a) Sostituendo $t = x/2$, $dt = dx/2$, i nuovi estremi: [0; ½] $\Rightarrow \int_0^{1/2} 2f(t)\,dt = -10$ non si può calcolare;

$$\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx = 2\int_0^1 f(t)\,dt = 4; \quad \int_2^4 f\left(\frac{x}{2}\right)dx = 2\int_1^2 f(t)\,dt = 2\left[\int_0^2 f(t)\,dt - \int_0^1 f(t)\,dt\right] = 2(-5-2) = -14;$$

posto $t = 2x$, $dt = 2dx$, i nuovi estremi: [0; 2] $\Rightarrow \int_0^1 f(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 f(t)\,dt = -\frac{5}{2}$.

b) Si ha: $\int(ax^3+bx+c)\,dx = \frac{ax^4}{4}+\frac{bx^2}{2}+cx \Rightarrow \int_0^1(ax^3+bx+c)\,dx = \frac{a}{4}+\frac{b}{2}+c; \int_0^2(ax^3+bx+c)\,dx = 4a + 2b + 2c \Rightarrow \begin{cases} a/4+b/2+c=2 \\ 4a+2b+2c=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{2c-13}{3} \\ b=\frac{37-14c}{6} \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{2c-13}{3}x^3+\frac{37-14c}{6}x+c$;

c) $f'(x) = (2c-13)x^2+\frac{37-14c}{6}$;, $f''(x) = 2(2c-13)x$. quindi vi è un solo flesso: $F \equiv (0; c)$. Applicando la simmetria: $x' = -x$, $y' = 2c - y$, si verifica facilmente che la curva trasformata è quella di partenza;

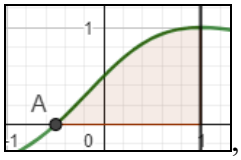
d) Ovviamente è $c = -4$;

e) $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{14c-37}{6(2c-13)}}$ e il radicando è non negativo se $k < 13/12 \vee k > 37/14$.

20. (Liceo scientifico 2001/02) La funzione reale di variabile reale *f*(*x*), continua per ogni *x*, è tale che: $\int_0^2 f(x)\,dx = a$, $\int_0^6 f(x)\,dx = b$, dove *a* e *b* sono numeri reali. Determinare, se esistono, i valori *a*, *b* per cui risulta: $\int_0^3 f(2x)\,dx = ln(2)$ e $\int_1^3 f(2x)\,dx = ln(4)$.

Abbiamo: $\int_0^3 f(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^6 f(t)\,dt = ln(2) \Rightarrow b = 2ln(2) = ln(4)$, per determinare a, osserviamo che $\int_1^3 f(2x)\,dx = \int_0^3 f(2x)\,dx - \int_0^1 f(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^6 f(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^2 f(t)\,dt = \frac{b-a}{2}$, da cui otteniamo: ½ [$ln(4) - a$] = $ln(4) \Rightarrow a = ln(¼)$.

21. (Liceo scientifico 2002/03) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico della funzione $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+2}$, dall'asse *x* e dalla retta di equazione *x* = 1.

L'area da calcolare è quella in figura, 

, dobbiamo perciò determinare l'ascissa di A: $x = -½$, pertanto l'area misura:

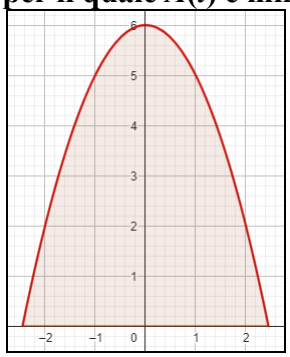
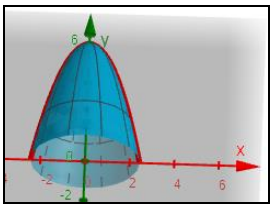
$$\int_{-1/2}^1 \frac{2x+1}{x^2+2}\,dx = \left[ln(x^2+2)+\frac{\sqrt{2}}{2}tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)\right]_{-1/2}^1 = \frac{\sqrt{2}\left[tan^{-1}(\sqrt{2}/2)+tan^{-1}(\sqrt{2}/4)\right]+ln(16/9)}{2}$$

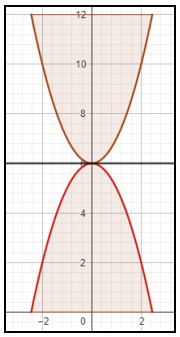
22. (Liceo scientifico PNI 2002/03) Dare un esempio di solido il cui volume è dato da $\int_0^1 \pi \cdot x^3\,dx$.

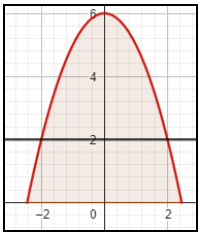
Da quel che sappiamo sui solidi di rotazione attorno all'asse x si ha: $\int_0^1 \pi x^3\,dx = \int_0^1 \pi\left(\sqrt{x^3}\right)^2 dx$, quindi

la funzione è $y=\sqrt{x^3}$

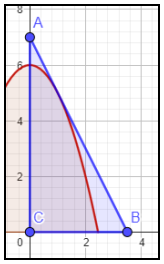
23. (Liceo scientifico 2004/05) Nel primo quadrante del sistema di riferimento O*xy*, ortogonale e monometrico, si consideri la regione *R*, finita, delimitata dagli assi coordinati e dalla parabola λ d'equazione: $y = 6 - x^2$. a) Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di *R* attorno all'asse *y*. b) Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di *R* attorno alla retta $y = 6$. c) Si determini il valore di *k* per cui la retta $y = k$ dimezza l'area di *R*. d) Per $0<t<\sqrt{6}$ sia *A*(*t*) l'area del triangolo delimitato dagli assi e dalla tangente a λ nel suo punto di ascissa *t*. Si determini *A*(1). e) Si determini il valore di *t* per il quale *A*(*t*) è minima.

a) La regione *R* considerata è quella evidenziata in figura  Il volume da calcolare è invece quello illustrato di seguito.  Dobbiamo considerare la simmetrica della parabola rispetto alla prima bisettrice degli assi, ossia la curva di equazione $x = 6 - y^2$. In questo caso perciò il volume sarà pari a $\pi\int_0^6\left(\sqrt{6-y}\right)^2 dy=\pi\left[6y-\frac{y^2}{2}\right]_0^6=18\pi$.

b) Ruotando attorno alla retta $y = 6$, che è tangente alla parabola nel suo vertice, avremo il ribaltamento della regione come mostrato in figura.  Per semplificare i calcoli, conviene traslare la parabola in modo tale che la retta $y = 6$ divenga la retta $y = 0$ e applicare la ben nota formula. $\pi\int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}}\left(-x^2\right)^2 dx=\pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}}=\frac{72\sqrt{6}}{5}\pi$.

c) Dobbiamo stabilire per quale *k* le due aree evidenziate sono uguali  Cominciamo a determinare l'ascissa positiva dell'intersezione fra l'arco di parabola e la retta. $x=\pm\sqrt{6-k}$. Natu-

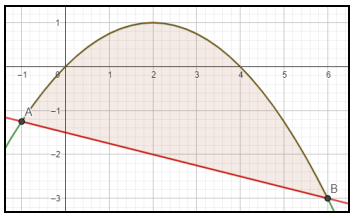
ralmente scegliamo solo uno dei due rami, per esempio quello positivo. Quindi la condizione richiesta equivale alla seguente equazione: $\int_0^{\sqrt{6+k}}\left(6-x^2-k\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{6}}\left(6-x^2\right)dx \Rightarrow k=6-3\sqrt[3]{2}$ dato che nel primo caso determiniamo l'area come differenza fra l'area sottesa dall'arco di parabola e l'area del rettangolo di dimensioni pari alle coordinate del punto intersezione.

d) L'equazione della generica tangente all'arco di parabola in un suo punto di ascissa t è $y = -2tx + t^2 + 6$, le sue intersezioni con gli assi coordinati sono: $(0; t^2 + 6)$, $\left(\frac{t^2+6}{2t};0\right)$, che per $t = 1$, diventano (0; 7) e (7/2; 0), quindi il triangolo di cui si deve calcolare l'area è quello in figura 

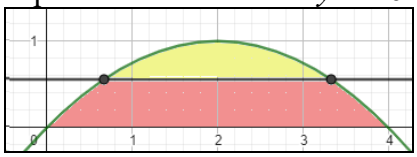
e la sua area misura: ½ · 7 · 7/2 = 49/4.

e) In generale invece l'area misura: $A(t)=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2+6}{2t}\cdot\left(t^2+6\right)=\frac{\left(t^2+6\right)^2}{4t}$, il cui minimo è una soluzione dell'equazione: $A'(t)=0\Rightarrow\frac{3\left(t^2+6\right)\left(t^2-2\right)}{4t^2}\Rightarrow t=\sqrt{2}$, si verifica che effettivamente è un minimo.

24. (Liceo scientifico PNI 2004/05) Nel piano *Oxy* sono date le curve λ e *r* d'equazioni: λ: $x^2 = 4(x - y)$ e *r*: $4y = x + 6$. a) Si determini l'area della regione finita di piano racchiusa da λ e dalla retta *s*, simmetrica di *r* rispetto all'asse *x*. b) Si determini il valore di *c* per il quale la retta $y = c$ divide a metà l'area della regione *S* del I quadrante compresa tra λ e l'asse *x*. c) Si determini il volume del solido di base S le cui sezioni ottenute con piani ortogonali all'asse *x* sono quadrati.

a) La simmetrica rispetto l'asse x si trova semplicemente cambiando il segno della y, quindi è $x - 4y + 6 = 0$. Troviamo le intersezioni fra le due curve: (6; –3) e (–1; –5/4). L'area da calcolare è quella in figura 

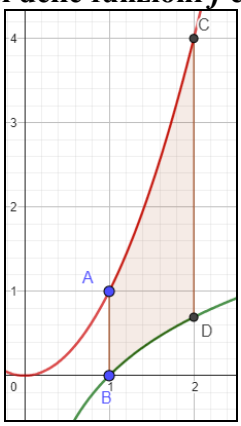
$\frac{1}{4}\int_{-1}^{6}\left[4x-x^2+x+6\right]dx=\frac{343}{24}$

b) Cominciamo a determinare le ascisse delle intersezioni fra la parabola e la retta $y = c$. $x=2\left(1\pm\sqrt{1-c}\right)$. Le aree uguali devono essere quelle in figura 
Calcoliamole: $\frac{1}{4}\int_{2\left(1-\sqrt{1-c}\right)}^{2\left(1+\sqrt{1-c}\right)}\left(4x-x^2-4c\right)dx=\frac{1}{8}\int_0^4\left(4x-x^2\right)\Rightarrow\frac{8\sqrt{\left(1-c\right)^2}}{3}=\frac{4}{3}\Rightarrow c=\frac{2-\sqrt[3]{2}}{2}$

c) Il solido richiesto è $\pi\int_0^4\left(\frac{4x-x^2}{4}\right)^2dx=\frac{32}{15}\pi$

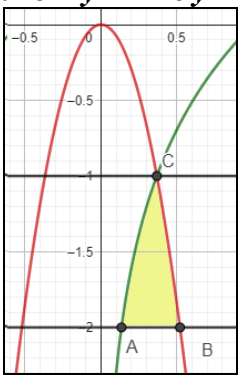
25. (Liceo scientifico 2005/06) Si considerino le funzioni $f(x) = ln(x)$ e $g(x) = x^2$. Si calcoli l'area della

parte di piano delimitata dai grafici delle funzioni *f* e *g* e dalle rette *x* = 1 e *x* = 2.

Rappresentiamo graficamente l'area. 

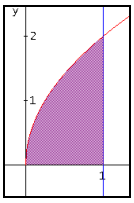
Calcoliamola. $\int_1^2 \left[x^2 - ln(x)\right] dx = \frac{10}{3} - ln(4)$

26. (Liceo scientifico PNI 2005/06) Si considerino le funzioni *f*(*x*) = *ln*(*x*) e *g*(*x*) = –*e*²*x*². Si calcoli, l'area della parte di piano delimitata dai grafici delle funzioni *f* e *g* (con *x* > 0) nella striscia di piano determinata dalle rette d'equazioni *y* = –1 e *y* = –2.

Rappresentiamo graficamente l'area. 

Conviene traslare le curve in modo che *AB* giaccia sull'asse *x*, quindi dobbiamo traslare del vettore(0; 2), ottenendo: $f_1(x) = ln(x)\ 2$ e $g_1(x) = 2 - e^2x^2$. Determiniamo le ascisse di A_1, B_1 e C_1: $x_A = e^{-2}, x_B = \sqrt{2}\, e^{-1}$ e $x_C = e^{-1}$. Adesso calcoliamo l'area.

$$\int_{e^{-2}}^{e^{-1}} \left[ln(x) + 2\right] dx + \int_{e^{-1}}^{\sqrt{2}e^{-1}} \left[2 - e^2x^2\right] dx = \frac{4\sqrt{2} - 5}{3e} + \frac{1}{e^2}.$$

27. (Liceo scientifico 2006/07) La regione *R* delimitata dal grafico di $y = 2\sqrt{x}$, dall'asse *x* e dalla retta di equazione *x* = 1 (in figura) 

è la base di un solido *S* le cui sezioni, ottenute tagliando *S* con piani perpendicolari all'asse *x*, sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di *S*.

Il volume del solido *S* è la somma di infiniti triangoli equilateri la cui base è lunga $2\sqrt{x}$. Poiché l'area di un triangolo equilatero di lato lungo *t* è $\frac{t^2}{4}\sqrt{3}$, in questo caso sarà $\frac{\left(2\sqrt{x}\right)^2}{4}\sqrt{3} = \sqrt{3}x$, il volume è somma di queste infinite aree, cioè $\int_0^1 \sqrt{3}x\, dx = \left[\frac{\sqrt{3}}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

28. (Liceo scientifico 2006/07) Se *f*(*x*) è una funzione reale dispari (ossia il suo grafico cartesiano è simmetrico rispetto all'origine), definita e integrabile nell'intervallo [–2, 2], che dire del suo integrale esteso a tale intervallo?

Ovviamente vale zero, dato che possiamo scrivere

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{2} f(x)\,dx = \int_{0}^{2} f(-x)\,dx + \int_{0}^{2} f(x)\,dx = \int_{0}^{2} -f(x)\,dx + \int_{0}^{2} f(x)\,dx = 0$$

Del resto, per il significato geometrico dell'integrale definito, avremo due aree uguali, che però come numeri risultano opposti, dato che una delle due è interamente nel semipiano negativo delle *y* e l'altra nel semipiano positivo.

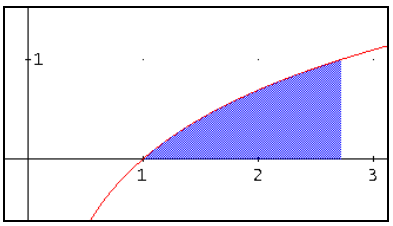
29. (Liceo scientifico 2006/07) Si calcoli l'integrale indefinito $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ e, successivamente, si verifichi che il risultato di $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ è in accordo con il suo significato geometrico.

L'integrale è ben noto e può calcolarsi per esempio con la sostituzione $x = sin(t)$, $\int_{sin^{-1}(0)}^{sin^{-1}(1)} cos^2(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1+cos(2t)}{2}\,dt = \left[\frac{t}{2}+\frac{sin(2t)}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$, che rappresenta l'area di un quarto di cerchio di raggio 1.

30. (Liceo scientifico PNI 2006/07) Si calcoli $\int_0^t \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$; successivamente se ne trovi il limite per $t \to \infty$ e si interpreti geometricamente il risultato.

$\int_0^t \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \left[tan^{-1}(e^x)\right]_0^t = tan^{-1}(e^t) - \frac{\pi}{4}$. E $\lim_{t\to\infty}\left[tan^{-1}(e^t)-\frac{\pi}{4}\right] = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$, geometricamente è l'area sottesa dalla curva e dal semiasse positivo delle ascisse.

31. (Liceo scientifico PNI 2006/07) La regione del piano racchiusa tra il grafico della funzione $y = ln(x)$ e l'asse x, con $1 \le x \le e$, è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x sono tutte rettangoli aventi l'altezza tripla della base. Si calcoli il volume di S.

La regione a cui ci si riferisce è disegnata in figura 

Il volume del solido S è perciò la somma di infiniti rettangoli la cui base è lunga $ln(x)$ e la cui altezza è lunga 3 $ln(x)$, quindi l'area è 3 $ln^2(x)$. Infine il volume è somma di queste infinite aree, cioè è $\int_1^e 3ln^2(x)\,dx = \left[3x\left\{ln^2(x)-ln(x^2)+2\right\}\right]_1^e = 3(e-2)$.

32. (Liceo scientifico 2007/08) Si determini un polinomio $P(x)$ di terzo grado tale che si abbia: $P(0) = P'(0) = 0$, $P(1) = 0$ e $\int_0^1 P(x)\;dx = 1/12$.

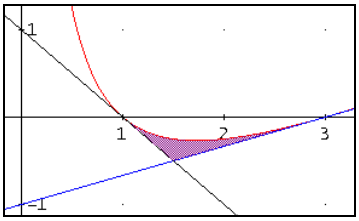
Cerchiamo un polinomio $P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$. Applichiamo i dati: $\begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ a+b+c+d=0 \\ a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}+\frac{d}{4}=\frac{1}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=1 \\ d=-1 \end{cases}$

Infatti abbiamo:

$$P'(x) = b+2cx+3dx^2; \int_0^1 P(x)\;dx = \left[ax+\frac{b}{2}x^2+\frac{c}{3}x^3+\frac{d}{4}x^4\right]_0^1 = a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}+\frac{d}{4}$$

33. (Liceo scientifico PNI 2007/08) Si calcoli l'area Ω della parte di piano delimitata dalla funzione $y = x/2 - 2 + 3/(2x)$ e dalle tangenti a essa nei punti $A \equiv (1; 0)$, $B \equiv (3; 0)$. Verificato che è $\Omega = 3 \cdot [ln(3) - 1]/2$ si illustri una procedura numerica per il calcolo approssimato di $ln(3)$.

Determiniamo le equazioni delle tangenti in A e in B. Calcoliamo intanto la derivata della funzione: $y' = \frac{1}{2} - \frac{3}{2x^2}$. Le tangenti sono perciò: $t_A : y = -(x-1); t_B : y = \frac{1}{3} \cdot (x-3)$. La regione di cui calcolare l'area è quella in figura:

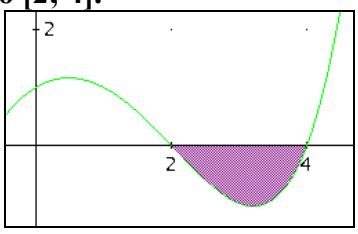


L'intersezione delle tangenti è: $\begin{cases} y = -(x-1) \\ y = \frac{1}{3} \cdot (x-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$. Quindi l'area è: $-\int_1^{3/2} \left(1 - x - \frac{x}{2} + 2 - \frac{3}{2x}\right) dx - \int_{3/2}^{3} \left(\frac{x-3}{3} - \frac{x}{2} + 2 - \frac{3}{2x}\right) dx = \frac{3}{2} \cdot [ln(3) - 1]$

Possiamo usare lo sviluppo in serie di $ln(1 + x)$ che però converge solo per $0 < x < 1$, perciò scriviamo: $ln(3) = ln\left(e \cdot \frac{3}{e}\right) = ln(e) + ln\left(\frac{3}{e}\right) = 1 + ln\left(1 + \frac{3}{e} - 1\right) = 1 + v\left(1 + \frac{3-e}{e}\right)$. Ora $ln(1+x) = \sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n}$. Quindi $ln(3) = 1 + ln\left(1 + \frac{3-e}{e}\right) = 1 + \sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\left(\frac{3-e}{e}\right)^n}{n}$. Sviluppando fino a $n = 3$, abbiamo: $ln(3) \approx 1 + \left(\frac{3-e}{e}\right) - \frac{\left(\frac{3-e}{e}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{3-e}{e}\right)^3}{3} = -e^3 \frac{5e^3 - 54e^2 + 81e - 54}{6} \approx 1{,}09863$, che è preciso fino al quarto decimale.

34. (Liceo scientifico PNI 2007/08) Data la funzione $h(x) = 2^x - x^2$, si calcoli l'area racchiusa tra il grafico di h e l'asse x sull'intervallo [2; 4].

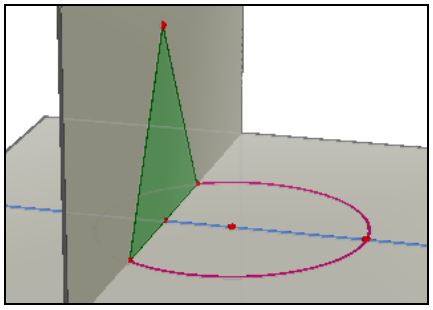
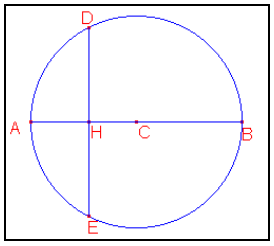
Dobbiamo calcolare l'area in figura:



cioè

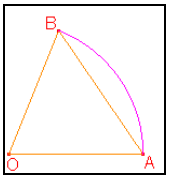
$$-\int_2^4 \left(2^x - x^2\right) dx = -\left[\frac{2^x}{ln(2)} - \frac{x^3}{3}\right]_2^4 = \frac{56}{3} - \frac{12}{ln(2)}.$$

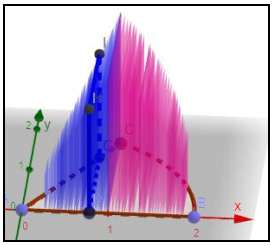
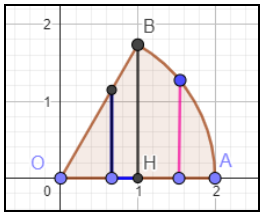
35. (Liceo scientifico PNI 2007/08) Un solido ha per base un cerchio di raggio 1. Ogni sezione del solido ottenuta con un piano perpendicolare ad un prefissato diametro è un triangolo equilatero. Si calcoli il volume del solido.

Ecco la figura  dobbiamo determinare la misura del lato del triangolo in funzione del raggio. 

Si ha: $\overline{DE} = 2 \cdot \sqrt{\overline{AH} \cdot \overline{HB}} = 2 \cdot \sqrt{x \cdot (2-x)}$, con $0 < x < 2$.

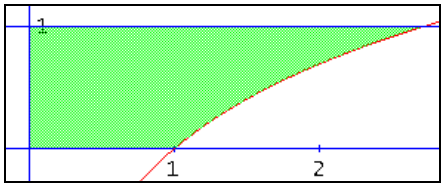
L'area dei triangoli equilateri è perciò: $\dfrac{\left[2 \cdot \sqrt{x \cdot (2-x)}\right]^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} \cdot x \cdot (2-x)$. Pertanto il volume richiesto è $\int_0^2 \sqrt{3}x(2-x)\ dx = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

36. (Liceo scientifico 2008/09) È assegnato il settore circolare *AOB* di raggio 2 e ampiezza π/3. Il settore *AOB* è la base di un solido *W* le cui sezioni ottenute con piani ortogonali ad *OA* sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di *W*. 

Visualizziamo il solido W  Come si vede abbiamo a che fare con una piramide a base quadrata e un solido misto con la base quadrata in comune con la piramide. Il triangolo *AOB* è equilatero. Per calcolare il volume usiamo il metodo degli indivisibili. Portiamo tutto in un sistema di riferimento cartesiano e determiniamo le aree dei quadrati sezione. 

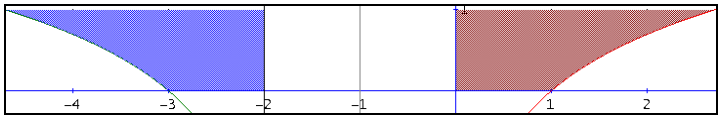
Come si nota, l'avevamo già visto nella figura tridimensionale, abbiamo due tipi di quadrati, quelli i cui lati hanno un vertice che va da *O* ad *H*, il cui lato è perciò, detta *x* la distanza del punto variabile su *OH*, $\sqrt{3}x$, quindi il generico quadrato ha area $3x^2$, con $0 \le x \le 1$. Invece i quadrati i cui vertici vanno da *H* ad *A*, hanno il vertice sull'arco *AB*, appartenente alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 4$, quindi la lunghezza del lato del quadrato è $y = \sqrt{4 - x^2}$. Perciò il quadrato ha area $(4 - x^2)$ con $1 \le x \le 2$. Infine il volume cercato è: $\int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 \left(4 - x^2\right) dx = \left[\dfrac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[4x - \dfrac{x^3}{3}\right]_1^2 = \dfrac{8}{3}$

37. (Liceo scientifico 2008/09) Sia *D* la regione del primo quadrante delimitata dagli assi coordinati, dalla funzione *f*(*x*) = *ln*(*x*) e dalla retta *y* = 1. a) Si calcoli l'area di *D*. b) Si calcoli il volume del solido generato da *D* nella rotazione completa attorno alla retta d'equazione *x* = −1.

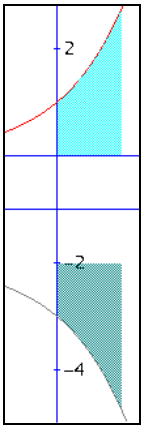
a) Visualizziamo D 

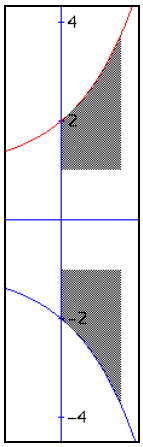
L'area si calcola facilmente con l'uso degli integrali, considerandola come somma del quadrato di lato 1 e della differenza fra il rettangolo di base $(e-1)$ e altezza 1 e l'area sottesa da *Gf.* $1+\left(e-1-\int_1^e ln(x)\,dx\right)=e-1$

b) Ruotando attorno alla data retta otteniamo quanto mostrato in figura, come sezione.



Per potere applicare la ben nota formula per il calcolo del volume la rotazione dovrebbe avvenire rispetto all'asse delle x. Quindi dobbiamo ruotare il tutto o meglio considerare i simmetrici rispetto alla prima bisettrice. In questo modo la funzione diventa e^x per $0 < x < 1$. Quindi il volume del solido equivalente a quello richiesto è quello mostrato in figura, in cui l'asse di rotazione è $y = -1$.

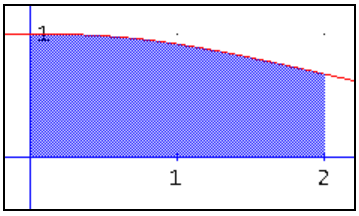




Adesso trasliamo in modo da ruotare attorno all'asse x, e la curva diventa $e^x + 1$. Il volume è perciò differenza fra la rotazione di $e^x + 1$ e il cilindro di raggio e altezza 1.

$$\pi\int_0^1\left(e^x+1\right)^2 dx-\pi=\pi\frac{e^2+4e-5}{2}.$$

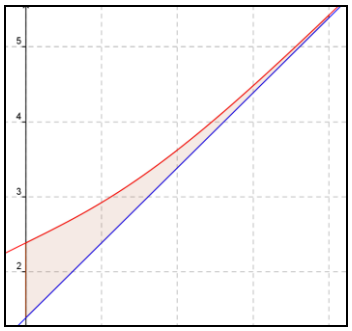
38. (Liceo scientifico PNI 2008/09) Si calcoli $\int_0^2\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)e^{-x}\,dx$ e se ne dia l'interpretazione geometrica.

$\int_0^2 \left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)e^{-x}\,dx = \left[\left(-\frac{x^2}{2}-2x-3\right)e^{-x}\right]_0^2 = 3-9e^{-2}$. Geometricamente è il valore dell'area evidenziata in figura. 

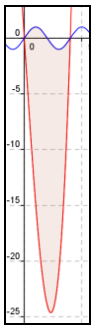
39. (Liceo scientifico PNI 2008/09) Siano 0 < *a* < *b* e $x \in [-b,b]$. Si provi che $\int_{-b}^{b} |x-a|\,dx = a^2+b^2$.

$$\int_{-b}^{a}(a-x)\,dx+\int_{a}^{b}(x-a)\,dx = \left[-\frac{(a-x)^2}{2}\right]_{-b}^{a}+\left[\frac{(x-a)^2}{2}\right]_{a}^{b} = ½[(a+b)^2+(b-a)^2] = a^2+b^2$$

40. (Liceo scientifico PNI 2010/11) Sia *f* la funzione definita sull'insieme ℝ dei numeri reali da $f(x)=x+2+ln(4)-\frac{2e^x}{e^x+1}$. Posto $I(\beta)=\int_0^{\beta}\left[f(x)-x-ln(4)\right]dx$, si calcoli $\lim_{\beta\to+\infty} I(\beta)$. Qual è il significato geometrico del risultato ottenuto?

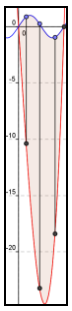
Viene richiesto il calcolo di un integrale generalizzato, esteso a un intervallo infinito, ossia il calcolo di. $I(\beta)=\int_0^{\beta}\left[f(x)-x-ln(4)\right]dx=\int_0^{\beta}\left(2-\frac{2e^x}{e^x+1}\right)dx=\left[2x-2ln\left(e^x+1\right)\right]_0^{\beta}=2\beta-ln\left[\left(\frac{e^{\beta}+1}{2}\right)^2\right]$, da cui: $\lim_{\beta\to\infty}\left\{2\beta-ln\left[\left(\frac{e^{\beta}+1}{2}\right)^2\right]\right\}=ln(4)$, che rappresenta l'area della porzione di piano determinata dall'asse *y*, da *x* = β, da *r* e da Γ, cioè la regione evidenziata in figura 

41. (Liceo scientifico PNI 2010/11) Per il progetto di una piscina, un architetto si ispira alle funzioni *f* e *g* definite, per tutti gli *x* reali, da: $f(x) = x^3 - 16x$, $g(x) = sin(\pi x/2)$. L'architetto rappresenta la superficie libera dell'acqua nella piscina con la regione *R* delimitata dai grafici di *f* e *g* sull'intervallo [0; 4]. a) Si calcoli l'area di *R*. b) In ogni punto di *R* a distanza *x* dall'asse *y*, la misura della profondità dell'acqua nella piscina è data da $h(x) = 5 - x$. quale sarà il volume d'acqua nella piscina? c) Quanti litri d'acqua saranno necessari per riempire la piscina se tutte le misure sono espresse in metri?

a) Dobbiamo calcolare l'area colorata in figura: 

Quindi

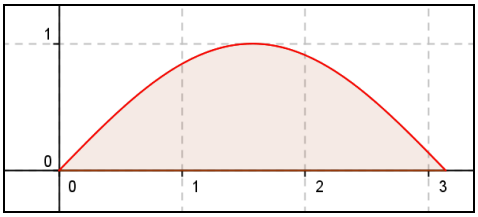
$$\int_0^4 \left[sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) - x^3 + 16x \right] dx = \left[-\frac{2}{\pi} cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{x^4}{4} + 8x^2 \right]_0^4 = 64$$

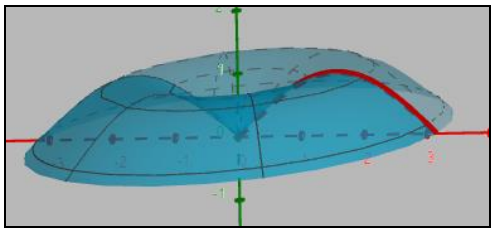
b) Il quesito è molto interessante e deve essere opportunamente interpretato. Consideriamo le zone della piscina che hanno la stessa profondità, sono tutte quelle che hanno la stessa ascissa, ossia i segmenti simili a quelli tracciati in figura.  Quindi il volume si può trovare come somma delle aree di infiniti rettangoli di base $(5 - x)$ e altezza $f(x) - g(x)$. Quindi

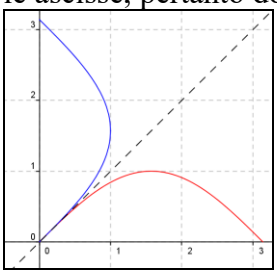
$$\int_0^4 (5-x)\left[sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) - x^3 + 16x \right] dx = \frac{8(344\pi + 15)}{15\pi} \approx 186,01$$

c) Quindi circa 186000 litri di acqua.

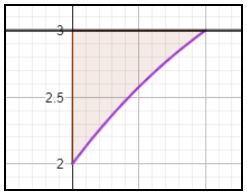
42. (Liceo scientifico PNI 2010/11) Sia *R* la regione delimitata, per $x \in [0; \pi]$, dalla curva $y = sin(x)$ e dall'asse *x* e sia *W* il solido ottenuto dalla rotazione di R attorno all'asse *y*. Si calcoli il volume di *W*.

La regione *R* è quella in figura 

Ruotando attorno all'asse delle ordinate si ottiene una figura simile alla seguente  Per potere applicare la ben nota formula del calcolo dei volumi però la rotazione deve avvenire attorno all'asse delle ascisse, pertanto dobbiamo effettuare una simmetria attorno alla prima bisettrice della funzione data.


Ovviamente in questo modo non otteniamo una funzione, ma due, e ciò dipende dal fatto che $sin(x)$ non è invertibile per $x \in [0, \pi]$. Quindi dobbiamo considerare due funzioni inverse: $f_1(x) = sin^{-1}(x), f_2(x) = \pi - sin^{-1}(x)$, entrambe definite per $x \in [0,1]$. Il volume cercato è perciò dato da $\pi \int_0^1 \left\{ \left[\pi - sin^{-1}(x)\right]^2 - \left[sin^{-1}(x)\right]^2 \right\} dx = \left[-\pi^2 \left[2\sqrt{1-x^2} - 2x \cdot cos^{-1}(x) \right] \right]_0^1 = 2\pi^2$

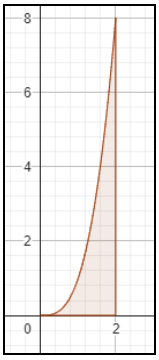
43. (Liceo scientifico 2010/11) Si calcoli l'area della regione di piano del primo quadrante delimitata da $f(x) = (x - 1)e^{-x/3} + 3$, dall'asse *y* e dalla retta $y = 3$.

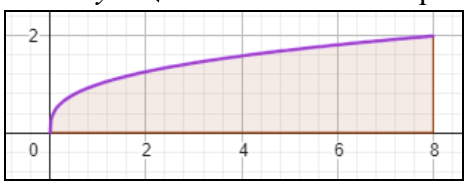
L'area da determinare è quella in figura 

che si calcola:

$$3-\int_0^1\left[(x-1)e^{-x/3}+3\right]dx=3\left[(-3x-6)e^{-x/3}+3x\right]_0^1=9e^{-1/3}-6$$

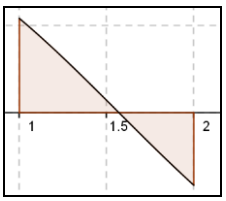
44. (Liceo scientifico 2010/11) Sia *R* la regione delimitata dalla curva *y* = *x*³ e dall'asse *x* e dalla retta *x* = 2 e sia *W* il solido ottenuto dalla rotazione di *R* attorno all'asse *y*. Si calcoli il volume di *W*.

La regione *R* è quella in figura 

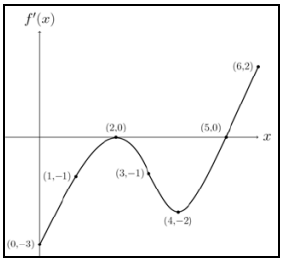
Per potere applicare la ben nota formula del calcolo dei volumi però la rotazione deve avvenire attorno all'asse delle ascisse, pertanto dobbiamo effettuare una simmetria attorno alla prima bisettrice della funzione data, ottenendo: $y=\sqrt[3]{x}$. Ovviamente in questo modo cambiano anche gli estremi, che adesso sono $0 \le x \le 8$. 

Il volume è quindi differenza fra il volume del cilindro di raggio 2 e altezza 8 e del volume generato dalla rotazione della funzione inversa. $32\pi-\pi\int_0^8 x^{2/3}\,dx=32\pi-\pi\cdot\left[\frac{3x^{5/3}}{5}\right]_0^8=\frac{64\pi}{5}$

45. (Liceo scientifico 2010/11) Si trovi l'area della regione delimitata dalla curva *y* = *cos*(*x*) e dall'asse *x* da *x* = 1 a *x* = 2 radianti.

La regione è quella in figura 

l'area: $\int_1^{\pi/2} cos(x)\,dx-\int_{\pi/2}^{2} cos(x)\,dx=\ [sin(x)]_1^{\pi/2}\ -\ [sin(x)]_{\pi/2}^{2}=2-sin(1)-sin(2)$

46. (Liceo scientifico PNI 2011/12) 

Della funzione *f*, definita per $0 \le x \le 6$, si sa che è dotata di derivata prima e seconda e che il grafico della sua derivata *f* '(*x*), disegnato a lato, presenta due tangenti orizzontali per *x* = 2 e *x* = 4. Si sa anche che *f* (0) = 9, *f* (3) = 6 e *f* (5) = 3. a) Si trovino le ascisse dei punti di flesso di *f* motivando le risposte in modo esauriente. b) Per quale valore di *x* la funzione *f* presenta il suo minimo assoluto? Sapendo che $\int_0^6 f'\ t\ dt=-5$ per quale valore di *x* la funzione *f* presenta il suo massimo assoluto? c) Sia *g* la funzione definita da *g*(*x*) = *x f* (*x*). Si trovino le equazioni delle rette tangenti ai grafici di *f* e di *g* nei rispettivi punti di

ascissa $x = 3$ e si determini la misura, in gradi e primi sessagesimali, dell'angolo acuto che esse formano.

a) I punti di flesso si trovano per i valori per cui si annulla la derivata seconda della funzione. Quindi sono i punti di estremo relativo del grafico della derivata prima, cioè sono i punti di ascissa 2 e 4.

b) La funzione in [0; 6] è continua perché derivabile, quindi per il Teorema di Weierstrass è ivi dotata di minimo e massimo assoluti. Tali valori si cercano confrontando quello che succede agli estremi e negli eventuali punti di estremo relativo. Agli estremi sappiamo che si ha $f(0) = 9$, mentre non sappiamo quanto vale $f(6)$. Dal grafico della derivata prima vediamo che essa si annulla per $x = 2$, dove abbiamo già visto che c'è un flesso e perciò non ci interessa, e per $x = 5$. Poiché lo stesso grafico mostra che in un intorno sinistro di 5 la derivata prima è negativa e in un intorno destro positiva, possiamo dire che per $x = 5$ vi è un punto minimo relativo e sappiamo che $f(3) = 5$. Vediamo anche che in [5; 6] la derivata prima è positiva, quindi la funzione cresce in tale intervallo, perciò $f(6)$ non può essere di minimo assoluto. Allora il minimo assoluto lo dobbiamo cercare fra $f(0) = 9$ e $f(3) = 5$. Infine il minimo assoluto si ha per $x = 3$. Per determinare il massimo assoluto dovremmo sapere cosa accade in $f(6)$. Da $\int_0^6 f'\ t\ dt = -5$, possiamo dire che $\int_0^6 f'\ t\ dt = \left[f\ t\right]_0^6 = f(6) - f(0)$, quindi $f(6) = f(0) - 5 = 9 - 5 = 4$. Infine, il massimo assoluto si ottiene per $x = 6$.

c) Le tangenti cercate hanno equazione $y - f(3) = f'(3)\,(x - 3) \Rightarrow y - 6 = -(x - 3) \Rightarrow y = -x + 9$, abbiamo ricavato $f'(3)$ dal grafico proposto. Per la seconda tangente teniamo conto che si ha $g(x) = x \cdot f(x) \Rightarrow g'(x) = f(x) + x \cdot f'(x)$ quindi è $y - g(3) = g'(3)\,(x - 3) \Rightarrow y - 3f(3) = [f(3) + 3f'(3)](x - 3) \Rightarrow y - 18 = (6 - 3)(x - 3) \Rightarrow y = 3x + 9$. L'angolo formato da due rette di coefficienti angolari m e m' è $tan^{-1}\left(\frac{m-m'}{1+m\cdot m'}\right) = tan^{-1}\left(\frac{-1-3}{1-3}\right) = tan^{-1}\ 2\ \approx 63°26'6''$.

47. (Liceo scientifico 2012/13) Sia f la funzione definita, per tutti gli x reali, da $f(x) = \frac{8}{4+x^2}$. Si consideri la regione R compresa tra $f(x)$ e l'asse x sull'intervallo [0; 2]. a) Si provi che R è equivalente a un cerchio di raggio 1 e si provi altresì che la regione compresa tra $f(x)$ e tutto l'asse x è equivalente a quattro volte il detto cerchio. b) La regione R, ruotando attorno all'asse y, genera il solido W. Si scriva, spiegandone il perché, ma senza calcolarlo, l'integrale definito che fornisce il volume di W.

a) Dobbiamo calcolare $\int_0^2 \frac{8}{4+x^2}\,dx = \int_0^2 \frac{2}{1+(x/2)^2}\,dx = 4\int_0^2 \frac{1/2}{1+(x/2)^2}\,dx = 4[tan^{-1}(x/2)]_0^2 = 4[tan^{-1}(1) - tan^{-1}(0)] = 4(\pi/4 - 0) = \pi$, che coincide con l'area di un cerchio di raggio 1. Poi deve calcolarsi l'integrale generalizzato

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{8}{4+x^2}\,dx = \lim_{h\to\infty}\int_{-h}^{h} \frac{2}{1+(x/2)^2}\,dx = \lim_{h\to\infty} 4\left[tan^{-1}(x/2)\right]_{-h}^{h} = \lim_{h\to\infty} 4\left[tan^{-1}\left(\frac{h}{2}\right) - tan^{-1}\left(-\frac{h}{2}\right)\right] = 4\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = 4\pi\,.$$

b) Per determinare il volume in una rotazione attorno all'asse y, dobbiamo effettuare la simmetria rispetto alla prima bisettrice, ottenendo $x = \frac{8}{4+y^2} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{8}{x} - 4}$. Ovviamente in questo modo scambiamo anche gli estremi di integrazione, così da $0 \le x \le 2$ si ha: $y = \frac{8}{4+x^2} \Rightarrow \frac{8}{4+2^2} \le y \le \frac{8}{4+0^2} \Rightarrow 1 \le y \le 2$. Dobbiamo tenere conto però che stiamo ruotando la regione R, quindi dobbiamo aggiungere anche la rotazione del segmento di estremi (2; 0) (2; 1), che fornisce un cilindro di raggio di base 2 e altezza 1. Quindi il volume cercato si trova

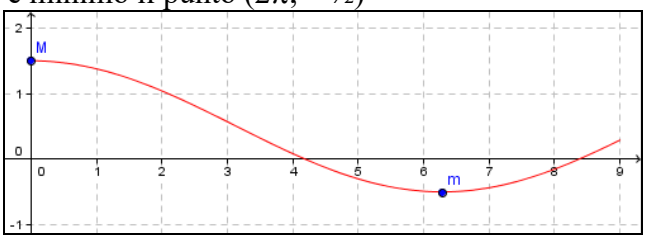
$$\pi\cdot 2^2\cdot 1 + \pi\cdot\int_1^2\left(\sqrt{\frac{8}{x}-4}\right)^2 dx = 4\pi + \pi\int_1^2\left(\frac{8}{x}-4\right)dx = 4\pi + \pi\cdot\left[8ln(x) - 4x\right]_1^2 = 4\pi + \pi\,[8ln(2) - 8 - 8ln(1) + 4] = 4\pi ln(4).$$

48. (Liceo scientifico 2012/13) La funzione f è definita da $f(x) = \int_0^x \left[cos\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2}\right]dt$ per tutti i numeri

reali x appartenenti all'intervallo chiuso [0; 9]. a) Si calcolino $f'(\pi)$ e $f'(2\pi)$. b) Si tracci, in un sistema di coordinate cartesiane, il grafico di $f'(x)$ e da esso si deduca per quale o quali valori di x, $f(x)$ presenta massimi o minimi. Si tracci altresì l'andamento di $f(x)$ deducendolo da quello di $f'(x)$. c) Si trovi il valor medio di $f'(x)$ sull'intervallo $[0; 2\pi]$. d) Sia R la regione del piano delimitata da Σ e dall'asse x per $0 \le x \le 4$; R è la base di un solido W le cui sezioni con piani ortogonali all'asse x hanno, per ciascun x, area $A(x) = 3sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$. Si calcoli il volume di W.

a) Per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha che $f'(x) = cos(x/2) + ½$ e quindi $f'(\pi) = cos(\pi/2) + ½ = ½$ e $f'(2\pi) = cos(\pi) + ½ = –1 + ½ = –½$.

b) Tracciare $f'(x) = cos(x/2) + ½$ è banale, poiché abbiamo una cosinusoide di periodo 4π traslata di ½ e quindi i massimi si hanno per $cos(x/2) = 1$, cioè per $x/2 = 2k\pi \Rightarrow x = 4k\pi$, e i minimi per $cos(x/2) = –1$, cioè per $x/2 = \pi + 2k \Rightarrow x = 2\pi + 4k\pi$. Quindi, tenuto conto che è $0 \le x \le 9$ è massimo il punto (0; 3/2) e minimo il punto $(2\pi; – ½)$

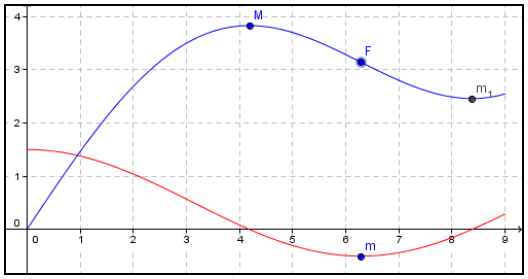


La $f(x)$ ha estremi relativi dove la $f'(x)$ si annulla, cioè per $cos(x/2) = –½ \Rightarrow x/2 = 2/3\pi \vee x/2 = 4/3\pi \Rightarrow x = 4/3\pi\ \pi \vee x = 8/3\pi$. In particolare, tenuto conto del grafico, nel primo punto si ha un massimo relativo perché la $f'(x)$ è prima positiva e poi negativa, analogamente nel secondo punto vi è un minimo relativo. Essi sono quindi

$$\left(\frac{4}{3}\pi;\int_0^{4/3\pi}\left[cos(t/2)+1/2\right]dt\right)\equiv\left(\frac{4}{3}\pi;\left[2sin\left(\frac{t}{2}\right)+\frac{1}{2}t\right]_0^{4/3\pi}\right)\equiv\left(\frac{4}{3}\pi;\left[2sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\right]\right)\equiv$$

$$\equiv\left(\frac{2}{3}\pi;\sqrt{3}+\frac{2}{3}\pi\right);\left(\frac{8}{3}\pi;\int_0^{8/3\pi}\left[cos(t/2)+1/2\right]dt\right)\equiv\left(\frac{8}{3}\pi;\left[2sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3}\pi\right]\right)\equiv\left(\frac{8}{3}\pi;-\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi\right)$$

Nel minimo della derivata prima la funzione ha nulla la derivata seconda, quindi è un punto di flesso: $\left(2\pi;\int_0^{2\pi}\left[cos(t/2)+1/2\right]dt\right)\equiv\left(2\pi;\left[2sin(\pi)+\frac{1}{2}\cdot 2\pi\right]\right)\equiv(2\pi;\pi)$. Il grafico perciò è il seguente



c) Applichiamo il teorema di Lagrange $f''(c)=\frac{f'(2\pi)-f'(0)}{2\pi}=\frac{-\frac{1}{2}-0}{2\pi}=-\frac{1}{4\pi}$, da cui $-\frac{1}{2}\cdot sin\left(\frac{c}{2}\right)=-\frac{1}{4\pi}\Rightarrow sin\left(\frac{c}{2}\right)=\frac{1}{2\pi}\Rightarrow c=2\cdot sin^{-1}\left(\frac{1}{2\pi}\right)$ e quindi il valore medio è $f'\left[2\cdot sin^{-1}\left(\frac{1}{2\pi}\right)\right]=cos\left[sin^{-1}\left(\frac{1}{2\pi}\right)\right]+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{4\pi^2-1}+\pi}{2\pi}\approx 1,49$.

d) Il volume cercato si ottiene con il metodo degli indivisibili di Cavalieri, ossia integrando le aree in [0, 4]: $\int_0^4 3\cdot sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)dx=\frac{12}{\pi}\left[-cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right]_0^4=\frac{12}{\pi}\left[-cos(\pi)+cos(0)\right]=\frac{12}{\pi}\cdot(1+1)=\frac{24}{\pi}$

49. (Liceo scientifico PNI 2012/13) Sia la funzione $f(x)=\frac{8}{1+e^{2-x}}$, si calcoli l'area della regione di piano delimitata da $f''(x)$ e dall'asse x sull'intervallo [0; 2].

Dobbiamo calcolare $\int_0^2 f''(x)\,dx=\left[f'(x)\right]_0^2=f'(2)-f'(0)=2-f'(0)=2-\frac{8e^2}{\left(e^2+1\right)^2}$.

50. (Liceo scientifico PNI 2012/13) Sia f la funzione definita per tutti gli x positivi da $f(x)=x^3\,ln(x)$. Sia R la regione delimitata da essa e dall'asse x sull'intervallo aperto a sinistra (0, 1]. Si calcoli l'area di R, illustrando il ragionamento seguito, e la si esprima in mm^2 avendo supposto l'unità di misura lineare pari a 1 *decimetro*.

Abbiamo a che fare con l'integrale improprio $\int_0^1 x^3\cdot ln(x)\,dx$, che si integra per parti, tenendo conto che la funzione in (0, 1) è negativa.

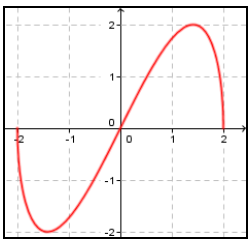
$$-\int_0^1 x^3\cdot ln(x)\,dx=\lim_{h\to 0^+}\int_h^1 -x^3\cdot ln(x)\,dx=\lim_{h\to 0^+}\left\{\left[-\frac{x^4}{4}\cdot ln(x)\right]_h^1+\int_h^1\frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}\,dx\right\}=$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\left\{\frac{h^4}{4}\cdot ln(h)+\left[\frac{x^4}{16}\right]_h^1\right\}=\lim_{h\to 0^+}\left\{\frac{h^4}{4}\cdot ln(h)+\frac{1}{16}-\frac{h^4}{16}\right\}=\frac{1}{16}$$

Ora 1/16 = 0,0625 dm^2 = 625 mm^2.

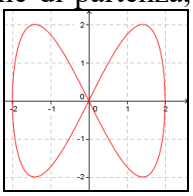
51. (Liceo scientifico 2013/14) Un solido ha per base la regione R delimitata dal grafico di $f(x)=e^{1/x}$ e dall'asse x sull'intervallo [–2; –1]. In ogni punto di R di ascissa x, l'altezza del solido è data da $h(x)=1/x^2$. Si calcoli il volume del solido.

Applichiamo il consueto metodo degli indivisibili, sommando le infinite aree di rettangoli di base $f(x)$ ed altezza $h(x)$, cioè $\int_{-2}^{-1}\frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx=-\int_{-2}^{-1}e^{1/x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx=-\left[e^{1/x}\right]_{-2}^{-1}=-\frac{1}{e}+\frac{1}{\sqrt{e}}=\frac{\sqrt{e}-1}{e}$.



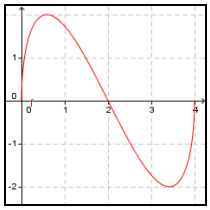
52. (Liceo scientifico 2013/14) A lato è disegnato il grafico Γ della funzione $x\cdot\sqrt{4-x^2}$. Si disegni la curva d'equazione $y^2=x^2(4-x^2)$ e si calcoli l'area della parte di piano da essa racchiusa.

Si osservi che la curva si ottiene innalzando al quadrato membro a membro la funzione di partenza, pertanto otteniamo la curva data e la sua simmetrica rispetto a x, cioè la curva seguente:



L'area, viste le simmetrie, si ottiene semplicemente come

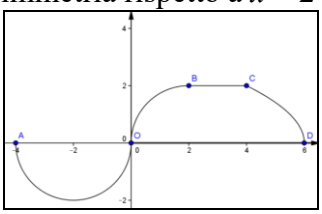
$$4\cdot\int_0^2 x\cdot\sqrt{4-x^2}\,dx=-2\cdot\int_0^2 -2x\cdot\sqrt{4-x^2}\,dx=-2\cdot\left[\frac{2\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}{3}\right]_0^2=\frac{32}{3}$$



53. (Liceo scientifico PNI 2013/14) Sia $f(x)=(2-x)\cdot\sqrt{4x-x^2}$. A lato è disegnato il grafico Γ di *f*(*x*). a) Si calcoli l'area della regione compresa tra Γ e l'asse *x*. b) Sia *h*(*x*) = *sin*(*f*(*x*)), qual è il valore di $\int_0^4 h(x)\,dx$?

a) $2\cdot\int_0^2(2-x)\cdot\sqrt{4x-x^2}\,dx=\int_0^2(4-2x)\cdot(4x-x^2)^{1/2}\,dx=\left[\frac{2\cdot(4x-x^2)^{3/2}}{3}\right]_0^2=\frac{2\cdot\sqrt{4^3}}{3}=\frac{16}{3}$;

b) L'integrale richiesto, vista la simmetria rispetto a $x = 2$ è nullo.



54. (Liceo Scientifico PNI 2013/14) Il grafico di *g*(*x*), disegnato a lato, passa per i punti *A* ≡ (–4; 0), *O* ≡ (0; 0), *B* ≡ (2; 2), *C* ≡ (4; 2), *D* ≡ (6; 0) e consiste della semicirconferenza di diametro *AO*, dell'arco, quarto di circonferenza, di estremi *O* e *B*, del segmento *BC* e dell'arco *CD* di una parabola avente per asse di simmetria l'asse *x*. a) Posto $f(x)=\int_{-4}^{x}g(t)\,dt$, si calcolino *f* (–4), *f* (0), *f* (1), *f* (2), *f* (4), *f* (6). b) Per quali valori di *x* ∈ [–4; 6], $f(x)$ è positiva, negativa o nulla? E per quali *x* è positiva, negativa o nulla la funzione derivata seconda *f* "(*x*)? c) La funzione presenta un massimo e un minimo assoluti? Qual è l'andamento di *f*(*x*)?

a) Per risolvere il quesito basta calcolare le aree dei trapezoidi e tenere conto che l'integrale da –4 a 0 è un numero negativo, quindi si ha: $f(-4)=\int_{-4}^{-4}g(t)\,dt=0; f(0)=\int_{-4}^{0}g(t)\,dt=-2\pi$; mentre $f(1)=\int_{-4}^{1}g(t)\,dt=-2\pi+\int_0^1\sqrt{-t^2+4t}\,dt$, per calcolare l'integrale facciamo nel seguente modo: $\int_0^1\sqrt{-t^2+4t-4+4}\,dt=\int_0^1\sqrt{4-(t-2)^2}\,dt$, adesso usiamo il metodo di sostituzione, ponendo $t - 2 = 2\cos(z)$, $dt = -2\sin(z)\,dz$ e i nuovi estremi sono $\cos^{-1}[(0 - 2)/2] = \pi$ e $\cos^{-1}[(1 - 2)/2] = 2\pi/3$. Quindi $\int_{\pi}^{2\pi/3}\sqrt{4-4\cos^2(z)}\cdot(-2\sin(z))\,dz=\int_{2\pi/3}^{\pi}4\cdot\sin^2(z)\,dz=\left[2x-\sin(2x)\right]_{2\pi/3}^{2\pi}=4\pi-\frac{4\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4\pi-3\cdot\sqrt{3}}{6}$.

Abbiamo considerato l'ultimo integrale come noto. Infine $f(1)=-2\pi+\frac{4\pi-3\cdot\sqrt{3}}{6}=\frac{-8\pi-3\cdot\sqrt{3}}{6}$.

$f(2)=\int_{-4}^{2}g(t)\,dt=-2\pi+\pi=-\pi; f(4)=\int_{-4}^{4}g(t)\,dt=-\pi+4$. Rimane l'ultimo valore:

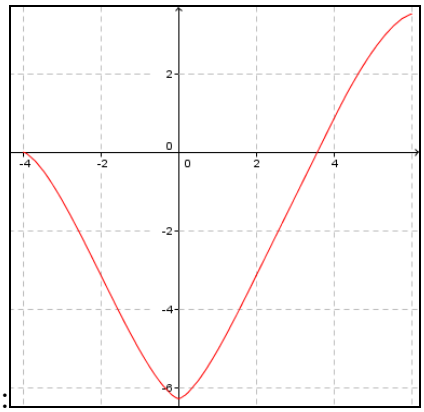
$$f(6)=\int_{-4}^{6}g(t)\,dt=-\pi+4+\int_4^6\sqrt{12-2t}\,dt=-\pi+4-\frac{1}{2}\cdot\int_4^6-2\cdot(12-2t)^{1/2}\,dt=$$

$$=-\pi+4-\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{3}\left[(12-2t)^{3/2}\right]_4^6=-\pi+4+\frac{8}{3}=\frac{20-3\pi}{3}$$

b) Per quanto visto la *f*(*x*) è negativa certamente in [– 4; 0] e poi fintanto che l'area dei trapezoidi che appartengono al primo quadrante non supera l'area del semicerchio, cioè 2π. Sfruttando i calcoli già fatti vediamo che, dei valori calcolati, il primo positivo è *f*(4). Quindi il valore in cui *f*(*x*) = 0 è compreso tra 2 e 4. Poiché *f*(2) = –π e il tratto da 2 a 4 è ricoperto da rettangoli di altezza 2, basta imporre che si abbia 2*z* = π, cioè *z* = π/2, per ottenere *x* = 2 + π/2 come zero di *f*(*x*). Infine si ha *f*(*x*) positiva in (2 + π/2; 6], negativa in (–4; 2 + π/2) e nulla per *x* = 0 e *x* = 2 + π/2. Da $f(x)=\int_{-4}^{x}g(t)\,dt$ segue *f* '(*x*) = *g*(*x*), *f*"(*x*) = *g*'(*x*). Quindi bisogna studiare *g*'(*x*). Dal grafico ve-

diamo che $g(x)$ è costante in (2; 4), quindi ha derivata nulla, abbiamo calcolato che anche $g'(2) = 0$, mentre $g'(4)$ non esiste. $g(x)$ cresce in (–2; 2), quindi ha derivata positiva, tranne per $x = 0$ dove non è derivabile. Infine $g(x)$ decresce in (–4; –2) e in (4; 6), quindi ha derivata negativa.

c) Il grafico proposto è quello della derivata di $f(x)$, che perciò decresce in (–4; 0) e cresce in (0; 6). 0 è punto di minimo relativo e quindi anche assoluto. Il massimo assoluto si ha ovviamente nell'estremo destro, cioè per $x = 6$. Il grafico è il seguente:

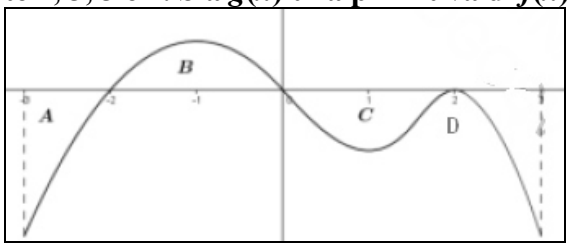


55. (Liceo scientifico 2014/15) Il grafico della funzione $f(x)=\sqrt{x}\,(x\in\mathbb{R}, x\geq 0)$ divide in due porzioni il rettangolo *ABCD* avente vertici *A* ≡ (1; 0), *B* ≡ (4; 0), *C* ≡ (4; 2) e *D* ≡ (1; 2). Calcolare il rapporto tra le aree delle due porzioni.

Ecco la figura: Dobbiamo calcolare: $\dfrac{6-\int_1^4\sqrt{x}\,dx}{\int_1^4\sqrt{x}\,dx}=\dfrac{6}{\int_1^4\sqrt{x}\,dx}-1=\dfrac{6}{\left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_1^4}-1=$

$=\dfrac{\cancel{6}^{\,3}}{\frac{\cancel{2}}{3}\cdot(8-1)}-1=\dfrac{9}{7}-1=\dfrac{2}{7}$, o 7/2 se consideriamo il rapporto inverso.

56. (Liceo scientifico 2014/15) La funzione derivabile $y = f(x)$ ha, per $x \in [-3; 3]$, il grafico Γ disegnato in figura. Γ presenta le tangenti orizzontali per $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$. Le aree delle regioni *A*, *B*, *C* e *D* sono rispettivamente 2, 3, 3 e 1. Sia $g(x)$ una primitiva di $f(x)$ tale che $g(3) = -5$.



a) Nel caso $f(x)$ fosse esprimibile con un polinomio, quale potrebbe essere il suo grado minimo? Illustra il ragionamento seguito. b) Individua i valori di $x \in [-3; 3]$, per cui $g(x)$ ha un massimo relativo e determina i valori di x per i quali $g(x)$ volge la concavità verso l'alto. c) Calcola $g(0)$ e, se esiste, il $\lim_{x\to 0}\dfrac{1+g(x)}{2x}$. d) Sia $h(x) = 3f(2x + 1)$, determina il valore di $\int_{-2}^{1} h(x)\,dx$.

a) Tenuto conto che ha almeno tre estremi relativi, vuol dire che $f'(x)$ è almeno di grado 3, quindi $f(x)$ almeno di grado 4.

b) Dato che $g'(x) = f(x)$, il segno di $g'(x)$ è quello di $f(x)$. Pertanto gli estremi relativi di $g(x)$ sono quelli in cui $f(x)=0$ e in particolare il massimo si ha per $x = 0$, nel cui intorno sinistro è $g'(x) > 0$ e nel cui intorno destro è $g'(x) < 0$. Per lo steso ragionamento si ha un minimo relativo per $x = -2$ e un flesso a tangente orizzontale per $x=2$. Per la concavità di $g(x)$ dobbiamo considerare il segno di $g''(x) = f'(x)$. Dal grafico si nota che $f'(x) > 0$ in (–3; –1) e in (1; 2) che sono perciò gli intervalli in cui $g(x)$ volge la concavità verso l'alto.

c) Da quanto detto $g(x)=\int_{-3}^{x} f(t)\,dt+k$, dato che $g'(x)=f(x)$ e per il teorema fondamentale del calcolo integrale che dice che $D\left[\int_{-3}^{x} f(t)\,dt\right]=f(x)$. Dai dati abbiamo $g(3)=-5 \Rightarrow \int_{-3}^{3} f(t)\,dt+k=-5$, sempre dai dati sappiamo che $\int_{-3}^{3} f(t)\,dt=-2+3-3-1=-3$, quindi $-3+k=-5 \Rightarrow k=-2$ e $g(0)=\int_{-3}^{0} f(x)\,dx-2=-2+3-2=-1$. Sempre usando il teorema citato abbiamo, usando il teorema di De L'Hopital: $\lim_{x\to 0}\frac{1+g(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)}{2}=\frac{g'(0)}{2}=\frac{f(0)}{2}=0$.

d) $\int_{-2}^{1} h(x)\,dx=\int_{-2}^{1} 3\cdot f(2x+1)\,dx$, ponendo $2x+1=t \Rightarrow x=\frac{t-1}{2} \Rightarrow dx=\frac{dt}{2}$ e gli estremi di integrazione si trasformano in $-2 \Rightarrow -4+1=-3$ e $1 \Rightarrow 2+1=3$. Quindi $\int_{-2}^{1} h(x)\,dx=3\cdot\int_{-3}^{3} f(t)\frac{dt}{2}=\frac{3}{2}\cdot(-3)=-\frac{9}{2}$.

57. (Liceo scientifico 2015/16) Con riferimento a quanto svolto nel box Lavoriamo insieme. a) Determina il valore di *k* che consente di soddisfare i requisiti richiesti relativamente all'angolo ϑ e al volume del serbatoio. b) Al fine di realizzare l'indicatore graduato, determina l'espressione della funzione *V*(*z*) che associa al livello *z* del gasolio (in metri) la percentuale di riempimento *V* del volume da riportare sull'indicatore stesso. c) Quando consegni il tuo progetto, l'amministratore obietta che essendo il serbatoio alto un metro, il valore *z* del livello di gasolio, espresso in centimetri, deve corrispondere alla percentuale di riempimento: cioè, ad esempio, se il gasolio raggiunge un livello *z* pari a 50 *cm* vuol dire che il serbatoio è pieno al 50%; invece il tuo indicatore riporta, in corrispondenza del livello 50 *cm*, una percentuale di riempimento 59,7%. Illustra gli argomenti che puoi usare per spiegare all'amministratore che il suo ragionamento è sbagliato; mostra anche qual è, in termini assoluti, il massimo errore che si commette usando il livello *z* come indicatore della percentuale di riempimento, come da lui suggerito, e qual è il valore di *z* in corrispondenza del quale esso si verifica.

a) Deve essere $f'(0)^+=tan(180°-\vartheta)=-tan(\vartheta)$, da cui $-tan(\vartheta)\le -tan(10°) \Rightarrow tan(\vartheta)\ge tan(10°)$, e dato che $\vartheta \ge 10°$. Il volume del serbatoio si trova con il metodo degli indivisibili di Cavalieri, moltiplicando per *L* l'area del profilo, cioè $2\cdot\int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{k}}\,dx$. Quindi le condizioni da imporre sono le seguenti:

$$\begin{cases} f'(0)^+\le -tan(10°) \\ 2\cdot\int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{k}}\,dx\cdot 8\ge 13 \\ k\in\mathbb{N}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{k}\le -tan(10°) \\ 16\cdot\left[-\frac{(1-x)^{\frac{1}{k}+1}}{\frac{1}{k}+1}\right]_0^1\ge 13 \\ k\in\mathbb{N}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k\le cot(10°) \\ \frac{k}{k+1}\ge\frac{13}{16} \\ k\in\mathbb{N}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k\le 5 \\ k\ge\frac{13}{3} \\ k\in\mathbb{N}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k\le 5 \\ k\ge 4 \\ k\in\mathbb{N}\end{cases} \Rightarrow k=5.$$

La spiegazione dell'implicazione $k\le cot(10°) \Rightarrow k\le 5$, dipende dal fatto che $cot(10°)\approx 5{,}7$ e *k* è un numero naturale.

b) Stavolta il volume lo dobbiamo determinare in funzione dell'altezza *z*, quindi sempre usando il principio di Cavalieri, si trova integrando l'area della generica sezione rettangolare perpendicolare ad *AB*, nell'intervallo [0; *z*]. Il rettangolo sezione ha sempre una dimensione lunga *L* = 8, e l'altra uguale al doppio dell'ascissa del punto intersezione di una generica parallela all'asse *x* con la *f*(*x*), deve cioè essere, detta *t* la generica ordinata, $(1-x)^{\frac{1}{5}}=t \Rightarrow 1-x=t^5 \Rightarrow x=1-t^5$, quindi il volume del gasolio alla generica altezza *z* è $V'(z)=2\cdot\int_0^z (1-t^5)\cdot 8\,dt=16\cdot\left[t-\frac{t^6}{6}\right]_0^z=\frac{8}{3}z\cdot(6-z^5)$. Dato

che $V(z)$ deve essere la percentuale di gasolio, sarà $V(z)=\frac{V'(z)}{V'(1)}=\frac{\cancel{\frac{8}{3}}z\cdot(6-z^5)}{\cancel{\frac{8}{3}}\cdot(6-1)}=\frac{1}{5}z\cdot(6-z^5)$.

Verifichiamo che $V(0,5)$ = 59,7%. $V(0,5)=\frac{1}{5}0,5\cdot(6-0,5^5)\approx 0,597$.

c) L'errore consiste nel fatto che le varie sezioni perpendicolari non sono rettangoli di uguale area, quindi non vi è diretta proporzionalità fra z e il volume, quindi neanche con la percentuale di volume. Considerando z come valore percentuale, l'errore commesso è $E(z)=\frac{1}{5}z\cdot(6-z^5)-z=\frac{z-z^6}{5}$, il cui massimo si ha per $E'(z)=0, E''(z)<0\Rightarrow\frac{1-6z^5}{5}=0\Rightarrow z=\sqrt[5]{\frac{1}{6}}, E''\left(\sqrt[5]{\frac{1}{6}}\right)=-30\cdot\left(\sqrt[5]{\frac{1}{6}}\right)^4<0$. Il questo caso il valore percentuale corretto è circa 82%, mentre $\sqrt[5]{\frac{1}{6}}\approx 70\%$.

58. (Liceo scientifico 2015/16) Nella figura è rappresentato il grafico Γ della funzione continua *f*: [0; +∞)→ℝ, derivabile in]0; +∞), e sono indicate le coordinate di alcuni suoi punti.

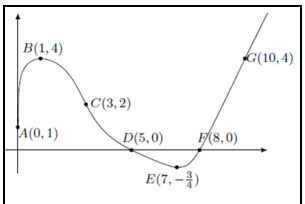


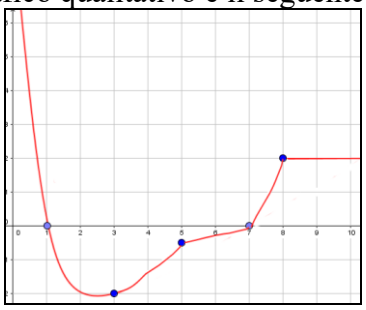
Figura 1

È noto che Γ è tangente all'asse *y* in *A*, che *B* ed *E* sono un punto di massimo e uno di minimo, che *C* è un punto di flesso con tangente di equazione 2*x* + *y* − 8 = 0. Nel punto *D* la retta tangente ha equazione *x* + 2*y* − 5 = 0 e per *x* ≥ 8 il grafico consiste in una semiretta passante per il punto *G*. Si sa inoltre che l'area della regione delimitata dall'arco *ABCD*, dall'asse *x* e dall'asse *y* vale 11, mentre l'area della regione delimitata dall'arco *DEF* e dall'asse *x* vale 1. a) In base alle informazioni disponibili, rappresenta indicativamente i grafici delle funzioni $y=f'(x), F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$. Quali sono i valori di *f* ′(3) e *f* ′(5)? Motiva la tua risposta. b) Rappresenta, indicativamente, i grafici delle seguenti funzioni: $y=|f'(x)|$; $y=|f(x)|'$; $y=\frac{1}{f(x)}$ specificando l'insieme di definizione di ciascuna di esse. c) Determina i valori medi di *y* = *f*(*x*) e di *y* = |*f*(*x*)| nell'intervallo [0; 8], il valore medio di *y* = *f* ′(*x*) nell'intervallo [1; 7] e il valore medio di *y* = *F*(*x*) nell'intervallo [9; 10]. d) Scrivi le equazioni delle rette tangenti al grafico della funzione *F*(*x*) nei suoi punti di ascisse 0 e 8, motivando le risposte.

a) Tenuto conto delle informazioni possiamo dire:
- $\lim_{x\to 0^+} f'(x)=+\infty$ (x = 0 è tangente alla $f(x)$ in x = 0 e $\lim_{x\to 0^+} f(x)=1>0$);
- $f'(x)>0$ per $x\in(0;1)\cup(7;+\infty)$ (in questi intervalli la $f(x)$ è crescente);
- $f'(x)<0$ per $x\in(1;7)$ (in questo intervallo la $f(x)$ è decrescente);
- $f'(1)=f'(7)=0$ (per tali ascisse la $f(x)$ ha estremi relativi);
- $f''(1)<0$, $f''(7)>0$ (per tali ascisse la $f(x)$ ha rispettivamente massimo e minimo relativo);
- $f'(3)=-2, f'(5)=-½$ (i valori dei coefficienti angolari della tangenti alla $f(x)$ nei dati punti);
- $f''(3)=0$ (per x = 3, $f(x)$ ha un punto di flesso)
- $f(x)=\frac{4-0}{10-8}x-16=2x-16, x\geq 8$ (Equazione della retta per F e G), da cui $f'(x)=2$ per $x\geq 8$.

- $\int_0^5 f(x)\,dx = 11$; $\int_5^8 f(x)\,dx = -1$ (Dalle informazioni sulle due aree).

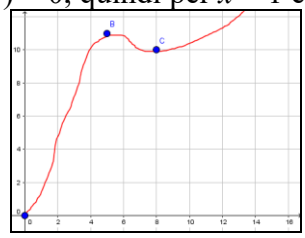
Quindi possiamo dire che il grafico di $f'(x)$ ha l'asse y come asintoto verticale destro; un minimo relativo in (3; – 2); incontra l'asse x nei punti di ascissa 1 e 7; vale 2 per $x \geq 8$. Pertanto, tenuto conto delle altre informazioni il suo grafico qualitativo è il seguente:



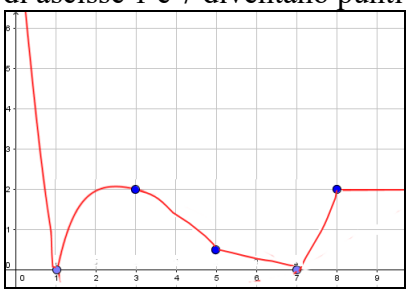
Passiamo alla funzione $F(x)$, per essa abbiamo:

- $F'(x) = f(x)$ (Teorema fondamentale del calcolo integrale);
- Da cui $F'(5) = F'(8) = 0$. e poiché $F''(5) = f'(5) = -1/2 < 0$, e $F''(8) = f'(8) = 2 > 0$, abbiamo rispettivamente massimo e minimo;
- $F(5) = 11$ (dall'area di $ABCD$), $F(8) = \int_0^8 f(t)\,dt = \int_0^5 f(t)\,dt + \int_5^8 f(t)\,dt = 11 - 1 = 10$;
- $F(0) = 0$;
- $F''(1) = f'(1) = 0$, $F''(7) = f'(7) = 0$, quindi per $x = 1$ e $x = 7$ flessi.

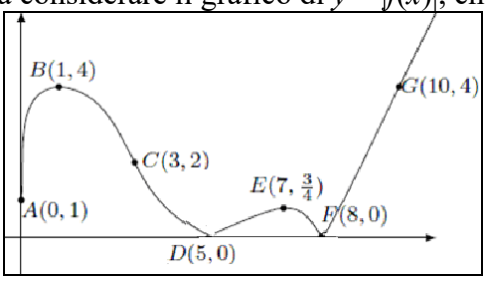
Il grafico qualitativo è il seguente:



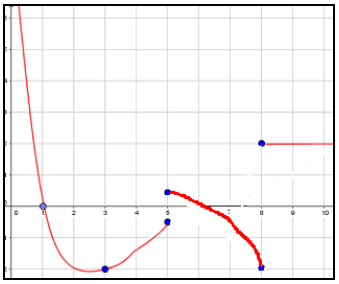
b) Per la prima basta prendere il grafico della $f'(x)$ e fare il simmetrico solo della sua parte negativa, in questo modo ovviamente i punti di ascisse 1 e 7 diventano punti angolosi.



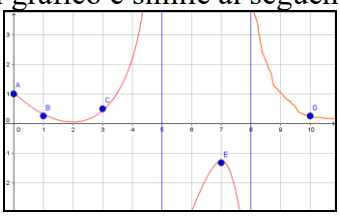
Per la seconda conviene prima considerare il grafico di $y = |f(x)|$, che ovviamente è il seguente:



A questo punto, per quel che riguarda i tratti (0; 5) e (8; +∞) abbiamo lo stesso grafico di $f'(x)$, i punti di ascisse 5 e 8 sono ovviamente di discontinuità di prima specie, dato che sono punti angolosi per la $|f(x)|$. Quindi non è difficile capire che il grafico cercato è il seguente.



Infine per $y=\dfrac{1}{f(x)}$, i punti dati per $f(x)$ hanno la stessa ascissa e ordinata reciproca, il che implica che in corrispondenza dei punti D e F ci sono due asintoti verticali. Ovviamente il punto B diverrà un minimo relativo e il punto E un massimo relativo. Questo perché $D\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)=-\dfrac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}$, quindi la derivata si annulla per gli stessi valori di $f'(x)$, ma assume valori di segno opposto. Infine la semiretta $y = 2x - 16$, ha reciproca che tende a zero al tendere di x all'infinito, quindi l'asse x è asintoto orizzontale destro. Infine il grafico è simile al seguente.



c) Basta applicare il teorema sulla media integrale. Abbiamo perciò:

$$\frac{1}{8-0}\cdot\int_0^8 f(x)\,dx=\frac{1}{8}\cdot 10=\frac{5}{4};\ \frac{1}{8-0}\cdot\left[\int_0^5 f(x)\,dx-\int_5^8 f(x)\,dx\right]=\frac{1}{8}\cdot(11+1)=\frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{7-1}\cdot\int_1^7 f'(x)\,dx=\frac{1}{6}\cdot\left[f(x)\right]_1^7=\frac{1}{6}\cdot\left[f(7)-f(1)\right]=\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{3}{4}-4\right)=-\frac{19}{24}$$

$$\frac{1}{10-9}\cdot\int_9^{10} F(x)dx=\int_9^{10}\int_0^x f(t)\,dt\,dx=\int_9^{10}\left[\int_0^8 f(t)\,dt+\int_8^x f(t)\,dt\right]dx=$$

$$\mathrm{E}=\int_9^{10}\left[10+\int_8^x(2t-16)\,dt\right]dx=\int_9^{10}\left[10+\left[t^2-16t\right]_8^x\right]dx=\int_9^{10}\left(10+x^2-16x-64+128\right)dx=$$

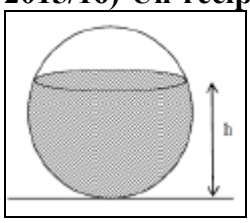
$$=\int_9^{10}\left(x^2-16x+74\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}-8x^2+74x\right]=\frac{1000}{3}-800+740-243+648-666=\frac{37}{3}$$

d) Applichiamo l'equazione della generica tangente a una funzione derivabile in un suo punto: $y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$. Da cui: $y - F(0) = F'(0)\cdot(x - 0) \Rightarrow y = x$, poiché $F(0)=\int_0^0 f(t)dt=0, F'(0)=f(0)=1$; $y - F(8) = F'(8)\cdot(x - 8) \Rightarrow y = 10$, poiché $F(8)=\int_0^8 f(t)dt=10, F'(8)=f(8)=0$.

59. (Liceo scientifico 2015/16) È noto che $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$. Stabilire se il numero reale *u*, tale che $\int_{-\infty}^{u} e^{-x^2}\,dx=1$ è positivo oppure negativo. Determinare inoltre i valori dei seguenti integrali, motivando le risposte: $A=\int_{-u}^{u} x^7e^{-x^2}\,dx;\ B=\int_{-u}^{u} e^{-x^2}\,dx;\ C=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5x^2}\,dx$.

Per la ovvia simmetria della funzione abbiamo: $\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,dx=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}<1$, quindi per arrivare ad 1, dobbiamo "invadere" il semipiano delle ascisse positive, cioè $u > 0$. Abbiamo inoltre $A=\int_{-u}^{u} x^7e^{-x^2}\,dx=0$ perché

funzione simmetrica rispetto all'origine in un intervallo simmetrico, per cui le due aree, nei due semipiani delle ordinate positive e negative, sono uguali, ma come numeri sono opposti. $B=\int_{-u}^{u} e^{-x^2}\,dx=\int_{-\infty}^{u} e^{-x^2}\,dx-\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx-\int_{-\infty}^{u} e^{-x^2}\,dx\right]=1-\left(\sqrt{\pi}-1\right)=2-\sqrt{\pi}$. Ed infine si ha: $C=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5x^2}\,dx=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt=\sqrt{\frac{\pi}{5}}$, avendo operato la sostituzione $t=\sqrt{5}x$, che non muta gli estremi di integrazione, essendo proporzionale alla variabile x.

60. (Liceo scientifico 2015/16) Un recipiente sferico con raggio interno *r* è riempito con un liquido fino all'altezza *h*. 

Utilizzando il calcolo integrale, dimostrare che il volume del liquido è dato da: $V=\pi(rh^2-h^3/3)$.

Il volume richiesto è somma del volume della semisfera e del segmento sferico a due basi, una delle quali è il cerchio massimo. Dato che è richiesto il calcolo integrale non sfruttiamo la nota formula per il volume della semisfera. Determiniamo entrambi i volumi con il metodo degli indivisibili di Cavalieri, considerando la generica sezione circolare parallela alla superficie libera del liquido, il cui raggio misura $\sqrt{r^2-t^2}$, dove t è la distanza della sezione stessa dal cerchio massimo. Pertanto il volume cercato è

$$V=\pi\cdot\int_0^r\left(r^2-t^2\right)dt+\pi\cdot\int_0^{h-r}\left(r^2-t^2\right)dt=\pi\cdot\left(\left[r^2t-\frac{t^3}{3}\right]_0^r+\left[r^2t-\frac{t^3}{3}\right]_0^{h-r}\right)=$$

$$=\pi\cdot\left(r^3-\frac{r^3}{3}+r^2\cdot(h-r)+\frac{(h-r)^3}{3}\right)=\pi\cdot\left(rh^2-\frac{h^3}{3}\right)$$

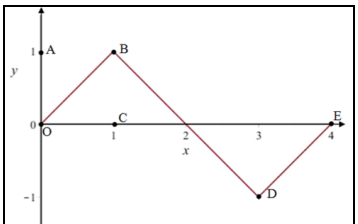
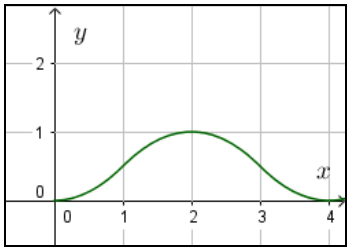
61. (Liceo scientifico 2016/17) Consideriamo la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, periodica di periodo $T=4$ il cui grafico, nell'intervallo [0; 4], è il seguente: 

Figura 1
a) Rappresenta, per $x\in[0;4]$, il grafico della funzione: $h(x)=\int_0^x f(t)\,dt$. b) Determina infine il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse *y* della porzione di piano compresa tra il grafico della funzione *h* per $x\in[0;3]$ e l'asse delle *x*.

a) $$h(x)=\int_0^x f(t)\,dt=\begin{cases}\int_0^x t\,dt=\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x=\frac{x^2}{2} & x\in[0;1]\\ \int_0^1 t\,dt+\int_1^x(-t+2)\,dt=\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1-\left[\frac{(-t+2)^2}{2}\right]_1^x=\frac{1}{2}-\frac{(-x+2)^2}{2}+\frac{1}{2}=\frac{-x^2+4x-2}{2} & x\in(1;3)\\ \int_0^1 t\,dt+\int_3^x(t-4)\,dt=\frac{1}{2}+\left[\frac{(t-4)^2}{2}\right]_3^x=\frac{1}{2}+\frac{(x-4)^2}{2}-\frac{1}{2}=\frac{x^2-8x+16}{2} & x\in[3;4]\end{cases}.$$

Il cui grafico è unione di archi di parabole:



b) Ruotando attorno all'asse y otteniamo dei cilindri cavi di raggi x e $x + dx$ e altezza $h(x)$, quindi il volume è $dV = \pi \cdot \left[(x+dx)^2 - x^2 \right] \cdot h(x) = \pi \cdot \left[2xdx + (dx)^2 \right] \cdot h(x)$, possiamo trascurare $(dx)^2$ perché infinitesimo di ordine superiore a dx e quindi $dV = 2\pi \cdot x \cdot h(x)dx \Rightarrow V = \int_0^3 2\pi \cdot x \cdot h(x)dx$, pertanto si ha: $V = 2\pi \cdot \left[\int_0^1 x \cdot \left(\frac{x^2}{2} \right) dx + \int_1^3 x \cdot \left(1 + \frac{(2-x)^2}{2} \right) dx \right] = \frac{83}{12}\pi$

62. (Liceo scientifico 2016/17) Definito il numero *E* come: $E = \int_0^1 xe^x\,dx$ dimostrare che risulta: $\int_0^1 x^2e^x\,dx = e - 2E$, ed esprimere $\int_0^1 x^3e^x\,dx$, in termini di *e* ed *E*.

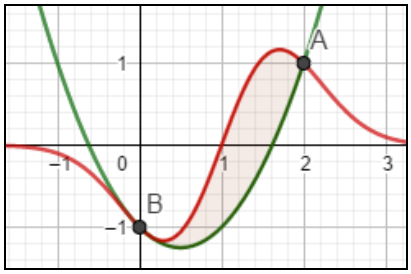
Applicando il metodo di integrazione per parti abbiamo: $\int_0^1 x^2e^x\,dx = \left[x^2e^x \right]_0^1 - 2\int_0^1 xe^x\,dx = e - 2E$.

Analogamente si ha: $\int_0^1 x^3e^x\,dx = \left[x^3e^x \right]_0^1 - 3\int_0^1 x^2e^x\,dx = e - 3 \cdot (e - 2E) = 6E - 2e$.

63. (Liceo scientifico 2017/18) Determinare *a* in modo che $\int_a^{a+1} (3x^2+3)\,dx$ sia uguale a 10.

Abbiamo $\int_a^{a+1} (3x^2+3)\,dx = 10 \Rightarrow \left[x^3 + 3x \right]_a^{a+1} = 10 \Rightarrow (a+1)^3 + 3a + 3 - a^3 - 3a - 10 = 0$, da cui, semplificando: $3a^2 + 3a - 6 = 0$, cioè $a^2 + a - 2 = 0$, le cui soluzioni sono facilmente $a = 1$, $\vee$ $a = -2$.

64. (Liceo scientifico 2018/19) Determinare l'area della regione piana *S* delimitata dai grafici delle funzioni $f(x) = x^2 - x - 1$ e $g(x) = (x-1) \cdot e^{2x-x^2}$.



L'area di cui si chiede il valore è quella mostrata in figura. e vale

$$\int_0^2 \left[(x-1)e^{2x-x^2} - (x^2 - x - 1) \right] dx = -\frac{1}{2}\int_0^2 \left[-2(x-1)e^{2x-x^2} - x^2 + x + 1 \right] dx = \left[-\frac{1}{2}e^{2x-x^2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right]_0^2 =$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{8}{3} + 2 + 2 + \frac{1}{2} = \frac{4}{3}.$$

65. (Liceo scientifico 2018/19) Per $a > 0$, si consideri la funzione f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(t) = \frac{-t}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}$. a) Verificare che la funzione $F(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}} - \frac{1}{a}$ è la primitiva di *f* il cui grafico passa per l'origine. b) Studiare la funzione *F*, individuandone eventuali simmetrie, asintoti, estremi. Provare che *F* presenta due flessi nei punti di ascisse $t = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}a$ e determinare le pendenze delle rette tangenti al grafico di *F* in tali punti. c) Con le opportune motivazioni, dedurre il grafico di *f* da quello di *F*, specificando cosa rappresentano le ascisse dei punti di flesso di *F* per la funzione *f*. d) Calcolare l'area della regione compresa tra il grafico di *f*, l'asse delle ascisse e le rette parallele all'asse delle ordinate passanti per gli estremi della funzione. e) Fissato $b > 0$, cal-

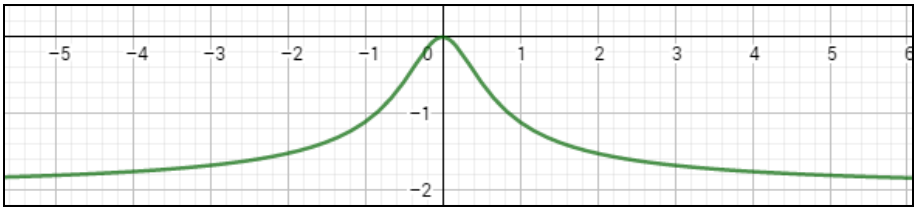
colare il valore di $\int_{-b}^{b} f(t)\,dt$**.**

a) Abbiamo: $\int \frac{-t}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}dt = -\frac{1}{2}\int 2t\cdot(t^2+a^2)^{-3/2}\,dt = -\frac{1}{2}\cdot\frac{(t^2+a^2)^{-3/2+1}}{-3/2+1}+c =$

$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{(t^2+a^2)^{-1/2}}{-1/2}+c = \frac{1}{\sqrt{(t^2+a^2)}}+c$, e per $t = 0$, abbiamo: $0 = \frac{1}{\sqrt{(a^2)}}+c \Rightarrow c = -\frac{1}{a}$, ossia quanto richiesto.

b) $F(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}} - \frac{1}{a}$, ha dominio $\mathbb{R}$, è sempre non positiva, perché il primo addendo positivo è non maggiore, in valore assoluto, del secondo addendo negativo. È una funzione pari: $F(t) = F(-t)$. Non ha asintoti verticali; ma ha un asintoto orizzontale: $\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}} - \frac{1}{a}\right) = -\frac{1}{a}$. Abbiamo visto che la sua derivata è $f(t) = \frac{-t}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}$, che quindi si annulla solo per $t = 0$. Per il quale valore si ha un punto di massimo relativo, dato che il segno della derivata dipende solo da t, e la funzione è crescente per $t < 0$ e descrescente per $t > 0$. L'ordinata del massimo è 0. Quindi il massimo è l'origine. A causa dell'asintoto orizzontale e della simmetria, ha ovviamente due flessi. Calcoliamone le ascisse: $F''(t) = f'(t) = \frac{-\sqrt{(t^2+a^2)^3} + t\cdot 3/2\cdot\sqrt{(t^2+a^2)}\cdot 2t}{(t^2+a^2)^3} = \sqrt{(t^2+a^2)}\cdot\frac{-t^2-a^2+3t^2}{(t^2+a^2)^3} =$

$= \frac{2t^2-a^2}{\sqrt{(t^2+a^2)^5}}$ che effettivamente si annulla per $t = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}a$. Il grafico, ovviamente dipendente da a, è simile al seguente:

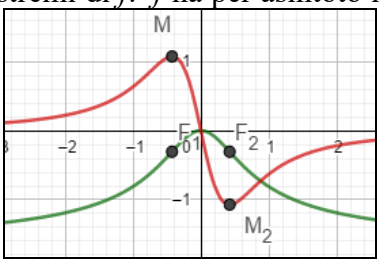


Determiniamo le pendenze delle rette tangenti al grafico di F nei punti precedenti:

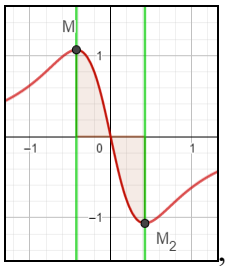
$$F'\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}a\right) = f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}a\right) = \frac{\mp\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\sqrt{\left(\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2+a^2\right)^3}} = \mp\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{2}+a^2\right)^3}} = \mp\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\sqrt{\frac{3}{2}a^3}} = \mp\frac{2\sqrt{3}}{9a^2}$$

c) Essendo $f(t)$ la derivata di $F(t)$, possiamo dire che laddove la F ha estremo relativo, ossia per $x = 0$, la f incontra l'asse x. Analogamente dove la F cresce, la f è positiva e dove decresce negativa. Dove la F ha i flessi la f ha estremi relativi, in particolare curvatura verso l'alto di F implica f crescente, lo stesso per la concavità verso il basso. Quindi in corrispondenza del primo flesso di F, f ha un massimo e in corrispondenza del secondo flesso invece vi è un minimo. Abbiamo già determinato

le ascisse dei detti estremi di *f*. *f* ha per asintoto l'asse della ascisse. Il grafico è il seguente, unitamente a quello di *F*.



d) L'area da determinare è quella in figura.

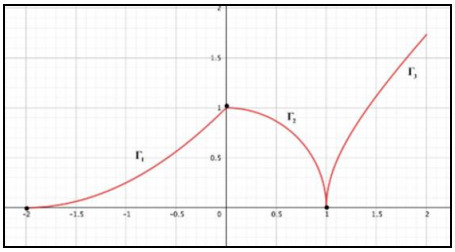


, che si trova calcolando il seguente integrale: $2\int_{-\sqrt{2}a/2}^{0}\frac{-t}{\sqrt{\left(t^2+a^2\right)^3}}dt=-\int_{-\sqrt{2}a/2}^{0}2t\left(t^2+a^2\right)^{-3/2}dt=\left[-\frac{\left(t^2+a^2\right)^{-1/2}}{-1/2}\right]_{-\sqrt{2}a/2}^{0}=2\left(\frac{1}{a}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}a}\right)=$

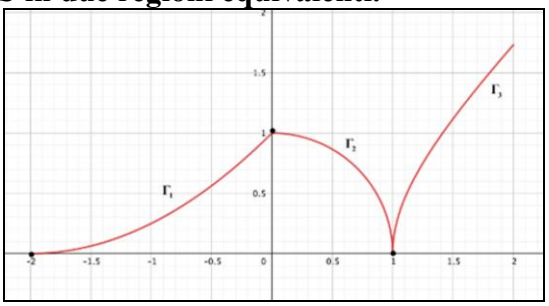
$=2\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}a}$.

e) Infine $\int_{-b}^{b}f(t)dt=0$, data la simmetria della funzione.

66. (Liceo Scientifico 2022/23) Il grafico in figura è rappresentativo della funzione continua $f(x)=\begin{cases}1/4(x+2)^2 & -2\le x\le 0\\ \sqrt{1-x^2} & 0\le x\le 1\\ \sqrt{x^2-1} & x\ge 1\end{cases}$**. a) A partire da esso, dedurre quello della sua derivata *f'* e individuare gli intervalli di concavità e convessità di *F*(*x*) =** $\int_{-2}^{x}f(t)dt$**.**

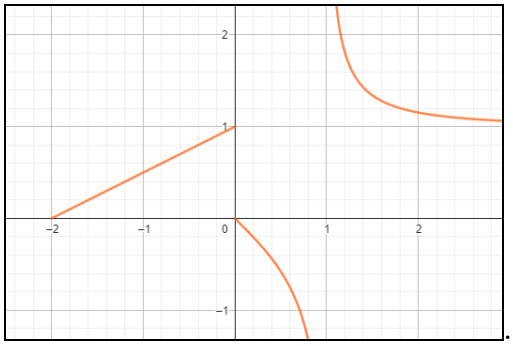


b) Sia *S* la regione limitata del secondo quadrante, compresa tra il grafico Γ1 e gli assi cartesiani. Determinare il valore del parametro reale *k* affinché la retta di equazione *x* = *k* divida *S* in due regioni equivalenti.

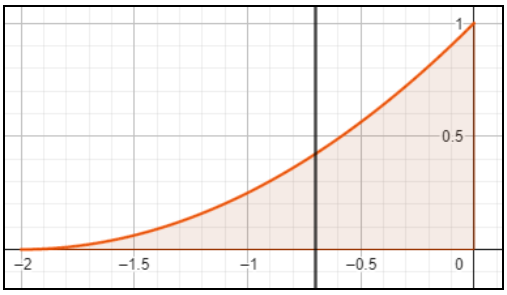


a) Dall'espressione della derivata il grafico è formato da un segmento in [–2; 0] e da due funzioni che sono entrambe strettamente decrescenti, con un asintoto verticale, *x* = 1, e un asintoto orizzontale destro, *y* = 1, dato che $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=1$. Vi è una discontinuità di prima specie in *x* = 0, con salto 1.

Ecco il grafico:



Si ha: $F(x) = f(x) - f(-2)$ e $F''(x) = f'(x)$. Quindi $F''(x) = \begin{cases} 1/2 & -2 < x < 0 \\ \dfrac{-1}{\sqrt{(1-x^2)^3}} & 0 < x < 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{(x^2-1)^3}} & x > 1 \end{cases}$, perciò la funzione volge la concavità verso l'alto (è convessa) per $x < 0$ e $x > 1$, mentre è concava in (0; 1).

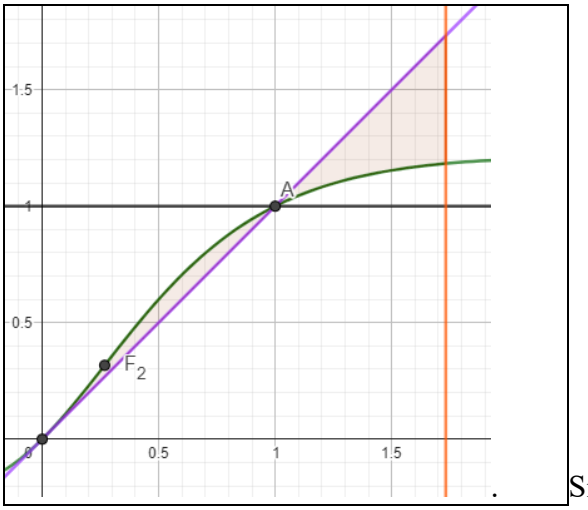
b) 

Deve essere

$$\int_{-2}^{k} \frac{(x+2)^2}{4}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} \frac{(x+2)^2}{4}\,dx \Rightarrow \left[\frac{(x+2)^3}{12}\right]_{-2}^{k} = \frac{1}{2}\left[\frac{(x+2)^3}{12}\right]_{-2}^{0} \Rightarrow \frac{(k+2)^3}{12} = \frac{8}{24} \Rightarrow (k+2)^3 = 4 \Rightarrow$$

$k = \sqrt[3]{4} - 2$.

67. Determinare l'area della regione limitata compresa tra il grafico della funzione $y = \dfrac{x^2+x}{x^2+1}$, la retta ad esso tangente nell'origine e la retta $x = \sqrt{3}$.

Ecco l'area da determinare: 

. Si ha: $\int_0^1 \frac{x^2+x}{x^2+1}\,dx - \frac{1}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}\cdot(\sqrt{3}-1) - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2+x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{x^2+x}{x^2+1}\,dx - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2+x}{x^2+1}\,dx$. Calcoliamo a parte

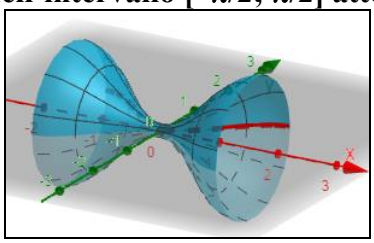
$\int \frac{x^2+x}{x^2+1}dx = \int\left(\frac{x^2+1}{x^2+1}+\frac{x-1}{x^2+1}\right)dx = \int\left(1+\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx = x+ln\sqrt{x^2+1}-tan^{-1}(x)+c$. L'area richiesta quindi vale:

$$\frac{1}{2}+\left[x+ln\sqrt{x^2+1}-tan^{-1}(x)\right]_0^1-\left[x+ln\sqrt{x^2+1}-tan^{-1}(x)\right]_1^{\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{1}{2}+2\cdot\left(1+ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{3}-ln(2)+\frac{\pi}{3}=\frac{15-\pi-6\sqrt{3}}{6}\approx 0,24$$

Quesiti assegnati in gare nazionali o internazionali

1. **(RICE200) Calcolare il volume di una clessidra, ottenuta ruotando il grafico di $y = sin^2(x) + 1/10$, nell'intervallo $[-\pi/2; \pi/2]$ attorno all'asse delle ascisse.**



$$2\pi\int_0^{\pi/2}\left[sin^2(x)+\frac{1}{10}\right]^2dx = 2\pi\left[\frac{-50sin^3(x)cos(x)-19cos(x)-97x}{200}\right]_0^{\pi/2}=\frac{97}{200}\pi^2$$

2. **(RICE2008) Calcolare $\int_{-\infty}^{x} 2^t te^t\ dt$.**

$$\int_{-\infty}^{x} t(2e)^t\ dt = \lim_{a\to-\infty}\left\{\left[\frac{t(2e)^t}{\left[ln(2)+1\right]^2}\right]_a^x-\int_a^x(2e)^t\ dt\right\}=\lim_{a\to-\infty}\left[(2e)^t\frac{\left[ln(2)+1\right]x-1}{\left[ln(2)+1\right]^2}\right]_a^x=(2e)^x\frac{\left[ln(2)+1\right]x-1}{\left[1+ln(2)\right]^2}$$

3. **(HSMC2006) Calcolare $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}\int_0^2 x^n\ dx$.**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^2=\lim_{n\to\infty}\frac{n2^{\cancel{n+1}}}{(n+1)\cancel{2^n}}=2$$

4. **(CC2008) Calcolare $\int_0^1\sqrt{x-x^2}\ dx$.**

$$\int_0^1\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\ dx=\int_0^1\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{2x-1}{2}\right)^2}\ dx\Rightarrow\frac{2x-1}{2}=\frac{1}{2}sin(t)\Rightarrow dx=\frac{1}{2}cos(t)dt,\ t=sin^{-1}(2x-1)$$

e gli estremi divengono: $0\to-\pi/2$, $1\to\pi/2$, l'integrale: $\frac{1}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi2}\sqrt{1-sin^2(t)}cos(t)dt=\frac{1}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi2}cos^2(t)dt$

e perciò: $\frac{1}{4}\left[\frac{sin(2t)+2t}{4}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{\pi}{8}$

5. **(HSMC2009) Calcolare $\int_0^{\pi/3}\frac{dx}{5+4cos(2x)}$.**

Abbiamo: $t=tan(x), dx=\frac{dt}{1+t^2}, cos(2x)=\frac{1-t^2}{1+t^2}, x=0\Rightarrow t=0, x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow t=\sqrt{3}$, da cui sostituendo, l'integrale diviene: $\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{5+4\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{dt}{1+t^2}=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{9+t^2}dt=\frac{1}{3}\left[tan^{-1}\left(\frac{t}{3}\right)\right]_0^{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{18}$.

6. **(HH2012) Se** $\int_1^4 f(x)\,dx = 5, \int_3^4 f(x)\,dx = 7, \int_1^8 f(x)\,dx = 11$**, calcolare** $\int_8^3 f(x)\,dx$**.**

$\int_3^8 f(x)\,dx = \int_1^8 f(x)\,dx - \int_1^3 f(x)\,dx = 11 - \int_1^3 f(x)\,dx = 11 - \left[\int_1^4 f(x)\,dx - \int_3^4 f(x)\,dx\right] =$ 11 – (5 – 7) = 13. E poiché $\int_8^3 f(x)\,dx = -\int_3^8 f(x)\,dx$, il risultato è –13.

7. **(HSMC2000) Suppose *f* is a positive continuous function on the interval [−2; 3] and *A*(*t*) is the area of the region bounded by the graph of *y* = *f*(*x*) and the lines *y* = 0; *x* = −2 and *x* = *t* for *t* between −2 and 3: Compute** $\lim_{t\to 3^-} \frac{A(3)-A(t)}{3-t}$**.**

Supponiamo che f sia una funzione continua e positiva sull'intervallo [−2; 3] *e che A*(*t*) *sia l'area della regione limitata dal grafico di y = f*(*x*) *e dalle rette y* = 0; *x* = −2 *e x = t per t compreso tra* −2 e 3. *Si calcoli* $\lim_{t\to 3^-} \frac{A(3)-A(t)}{3-t}$.

Abbiamo: $A(t) = \int_{-2}^{t} f(x)\,dx$, quindi il $\lim_{t\to 3^-} \frac{A(3)-A(t)}{3-t}$ è una forma indeterminata 0/0. Applichiamo la regola di De L'Hopital: $\lim_{t\to 3^-} \frac{-f(t)}{-1} = f(3)$

8. **(CC2009) Calculate** $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+sin(x)}\,dx$**.**

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+2sin\left(\frac{x}{2}\right)cos\left(\frac{x}{2}\right)}\,dx = \int_0^{\pi/2}\left[sin\left(\frac{x}{2}\right)+cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]dx = 2\left[sin\left(\frac{x}{2}\right)-cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\pi/2} = 2$$

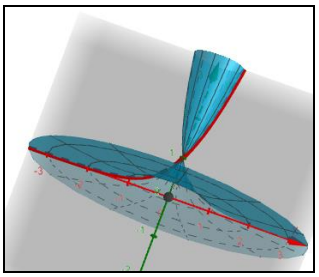
9. **(Rice2009) At RMT 2009 is a man named Bill who has an infinite amount of time. This year, he is walking continuously at a speed of** $\frac{1}{1+t^2}$**, starting at time *t* = 0. If he continues to walk for an infinite amount of time, how far will he walk?**

Agli RMT del 2009 *c'è un uomo di nome Bill che ha a disposizione un tempo infinito. Quest'anno ha camminato con una velocità di* $\frac{1}{1+t^2}$*, iniziando al tempo t* = 0. *Se continua a camminare per un tempo infinito quanto percorrerà?*

Il quesito equivale a calcolare $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \lim_{a\to\infty}\left[tan^{-1}(t)\right]_0^a = \frac{\pi}{2}$

10. **(HH2012) The region in the first quadrant bounded by the graph of** $y = e^{2x}$**, the vertical line** $x = ln(3)$**, and the *x*–axis is revolved about the *y*–axis. Find the volume of the solid that is generated.**

La regione del primo quadrante limitata dal grafico di $y = e^{2x}$*, dalla retta* $x = ln(3)$*, e dall'asse x è ruotata attorno all'asse y. Trova il volume del solido così generato.*



$$V = 2\pi \cdot \int_{-\infty}^{ln(3)} x \cdot e^{2x}\,dx = \lim_{a\to-\infty} 2\pi\left[\frac{2x-1}{4}e^{2x}\right]_a^{ln(3)} = \frac{9\left[ln(9)-1\right]\pi}{2}$$

Quelli che … vogliono sapere di più

Equazioni differenziali

Determinare ordine e grado delle seguenti equazioni differenziali

1. **a)** $y'' + y' - x = 0$; **b)** $xy''^2 + y^{V} - sin(x) = y^3$; **c)** $y^3 + ln(x)y''' - y = x^2$

a) ordine II, grado I; b) ordine IV, grado II; c) ordine III, grado I

2. **a)** $xy + (y')^4 - 2x = 0$; **b)** $y^5 + y^{VI} + x^4 = (y')^3$; **c)** $(y'')^4 + y'' - 3y = x^5$

a) ordine I, grado IV; b) ordine VI, grado I; c) ordine II, grado IV

Verificare se i seguenti sono integrali particolari delle rispettive equazioni differenziali

3. **a)** $y = 2, y' + y - y^2 + 2 = 0$; **b)** $y = (x^2 + 1)^2/x, y' + 3xy - 2x = 0$; **c)** $y = 1/x, xy' - 2y + xy^2 + 2/x = 0$

a) $0 + 2 - 2^2 + 2 = 0$; Sì; b) $\frac{(x^2+1)(3x^2-1)}{x^2} + 3(x^2+1)^2 - 2x \neq 0$; No; c) $-\frac{1}{x} - \frac{2}{x} + \frac{1}{x} + \frac{2}{x} = 0$; Sì

4. **a)** $y = x, xy' - 2y + xy^2 + 2/x$; **b)** $y = x + 1, xy' - cos(y') - y = 0$; **c)** $y = x, xy' - cos(y') - y = 0$

a) $x - 2x + x^3 + 2/x \neq 0$; No; b) $x - cos(1) - x - 1 \neq 0$; No; c) $x - cos(1) - x = 0$; No

5. **a)** $y = x + e, xy' - e^{y'} - y = 0$; **b)** $y = 2x - e^2, xy' - e^{y'} - y = 0$

a) $x - e - x - e = 0$; Sì;b) $2x - e^2 - 2x + e^2 = 0$; Sì

6. **a)** $y = 2cos(2x), y'' + 4y = 0$; **b)** $y = 3cos(2x) - 2sin(2x), y'' + 4y = 0$

a) $-8cos(2x) + 8cos(2x) = 0$; Sì; b) $-12cos(2x) + 8sin(2x) + 12cos(2x) + 8sin(2x) = 0$; Sì

7. **a)** $y = \frac{1}{\sqrt{e^{-x^2} - 1}}, y' - xy - xy^3 = 0$; **b)** $y = 2e^{2x} cos(3x), y'' - 4y' + 13y = 0$

a) $$\frac{xe^{x^2/2}}{\sqrt{\left(e^{-x^2}-1\right)^3}} - \frac{x}{\sqrt{e^{-x^2}-1}} - \frac{x}{\sqrt{\left(e^{-x^2}-1\right)^3}} = \frac{(x-1)e^{x^2/2} - x\left(e^{-x^2}-1\right)}{\sqrt{\left(e^{-x^2}-1\right)^3}} = 0;$$ Sì;

b) $-2e^{2x}[5cos(3x) + 12sin(3x)] - 8e^{2x}[2cos(3x) - 3sin(3x)] + 26e^{2x}cos(3x) = 0$; Sì

8. **a)** $y = e^{2x} - 5/2x, y'' - 2y' + 5 = 0$; **b)** $y = e^{2x} + e^{-2x} - x^3/12 + x^2/4 - x/8 + 1/8, y'' - 4y' - x^2 + 2x = 0$

a) $10(x + 1)e^{2x} - 5(2x + 1)e^{2x} + 5 \neq 0$; No;

b) $4e^{2x} + 4e^{-2x} - ½x + ½ - 8e^{2x} + 8e^{-2x} + x^2 - 2x - 1/8 - x^2 + 2x = 0$; No

9. $p(t) = \frac{Mp_0}{p_0 + (M - p_0)e^{-kt}}$, **per l'equazione di Pearl e Reed:** $p'(t) = k \cdot p(t)\frac{M - p(t)}{M}$.

$$\frac{kMp_0(M-p_0)e^{-kx}}{\left[p_0+(M-p_0)e^{-kt}\right]^2} = \frac{k\cancel{M}p_0}{p_0+(M-p_0)\cdot e^{-kt}}\frac{M - \frac{Mp_0}{p_0+(M-p_0)e^{-kt}}}{\cancel{M}} \Rightarrow \frac{kMp_0(M-p_0)e^{-kx}}{\left[p_0+(M-p_0)e^{-kt}\right]^2} = \frac{kMp_0(M-p_0)e^{-kx}}{\left[p_0+(M-p_0)e^{-kt}\right]^2};$$

Sì

10. $x(t) = A\ cos(\omega t) + B\ sin(\omega t)$, **per l'equazione** $x''(t) = -\omega^2 x(t)$, **dell'oscillatore armonico di pulsazione** ω.

$-A\omega^2 cos(\omega t) - B\omega^2 sin(\omega t) = -\omega^2[A\ cos(\omega t) + B\ sin(\omega t)]$; Sì

Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali a variabili separabili

11. **a)** $y' + xy = 0$; **b)** $y' + ln(x)y^2 = 0$; **c)** $xy' + y^3 = 0$

a) $dy/dx + xy = 0 \Rightarrow dy/y = -x\ dx \Rightarrow \int\frac{dy}{y} = -\int x\,dx \Rightarrow ln|y| = -½x^2 + c \Rightarrow y = \pm e^{c - x^2/2}$

b) $dy/dx + ln(x) \cdot y^2 = 0 \Rightarrow dy/y^2 = -ln(x)dx \Rightarrow$

$$\int\frac{dy}{y^2} = -\int ln(x)dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = x\left[1 - ln(x)\right] + c \Rightarrow y = \frac{1}{x\left[ln(x) - 1\right] + c}$$

c) $x\ dy/dx + y^3 = 0 \Rightarrow dy/y^3 = -dx/x \Rightarrow \int\frac{dy}{y^3} = -\int\frac{dx}{x} \Rightarrow -\frac{1}{2y^2} = -ln(|x|) + c \Rightarrow y = \sqrt{ln(x^2) + c}$, c essendo una costante non ha senso moltiplicarla o sommarla ad altre costanti, anzi può anche essere scritta come $ln(c)$ e così semplifichiamo: $y = \sqrt{ln(cx^2)}$.

12. **a) $e^x y' - y = 0$; b) $y' + e^x y = 0$; c) $(x^2 + 1)y' - 1/y = 0$**

a) $e^x dy/dx - y = 0 \Rightarrow dy/y = e^{-x}dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int e^{-x}dx \Rightarrow ln(|y|) = -e^{-x} + c \Rightarrow y = \pm e^{c-e^{-x}}$

b) $dy/dx + e^x y = 0 \Rightarrow dy/y = -e^x dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int e^x dx \Rightarrow ln(|y|) = -e^x + c \Rightarrow y = \pm e^{c-e^x}$

c) $(x^2 + 1)dy/dx - 1/y = 0 \Rightarrow ydy = dx/(x^2 + 1) \Rightarrow \int ydy = \int \frac{dx}{x^2+1} \Rightarrow$ ½ $y^2 = tan^{-1}(x) + c \Rightarrow$ $y = \pm\sqrt{2tan^{-1}(x)+c}$

13. **a) $\sqrt{1-x^2}\,y' = \frac{x}{sin(y)}$; b) $(1 + x)y' + (1 - x)y = 0$**

a) $\sqrt{1-x^2}\frac{dy}{dx} = \frac{x}{sin(y)} \Rightarrow \int sin(y)dy = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \Rightarrow -cos(y) = \sqrt{1-x^2} + c \Rightarrow y = cos^{-1}\left(\sqrt{1-x^2} + c\right)$;

b) $(1 + x)dy/dx + (1 - x)y = 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{x-1}{x+1}dx \Rightarrow ln(|y|) = x - ln\left[(x+1)^2\right] + c \Rightarrow y = \frac{e^{x+c}}{(x+1)^2}$

14. **a) $(1 + e^x)y' = e^{2x}e^y$; b) $\sqrt{1-x^2}\,y' = \frac{1}{ln(y)}$**

a) $\frac{(1+e^x)dy}{dx} = e^{2x+y} \Rightarrow \int e^{-y}dy = \int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx \Rightarrow -e^{-y} = e^x - ln(1+e^x) + ln(c) \Rightarrow y = ln\left[\frac{1}{ln\left[c(e^x+1)\right] - e^x}\right]$

e dato che $e^x = ln\left(e^{e^x}\right)$, semplifichiamo: $y = ln\left\{ln^{-1}\left[\frac{c(e^x+1)}{e^{e^x}}\right]\right\}$

b) $\frac{\sqrt{1-x^2}dy}{dx} = \frac{1}{ln(y)} \Rightarrow \int ln(y)dy = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow y\left[ln(|y|) - 1\right] = sin^{-1}(x) + c$

15. **a) $y' - ln(x)y = 0$; b) $(x^2 - x)y' = \sqrt{y}$**

a) $dy/dx - ln(x)y = 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int ln(x)dx \Rightarrow ln(|y|) = x\left[ln(x) - 1\right] + c \Rightarrow y = \pm e^{x[1-ln(x)]+c}$;

b) $(x^2 - x)dy/dx = \sqrt{y} \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int \frac{dx}{x^2 - x} \Rightarrow 2\sqrt{y} = ln\left(\frac{|x-1|}{|x|}\right) + ln(c) \Rightarrow y = \frac{1}{4}ln^2\left(c\frac{|x-1|}{|x|}\right)$

16. **$y'/ln(x) = e^{3y} \cdot ln(x)$**

$dy/[dx\ ln(x)] = e^{3y} \cdot ln(x) \Rightarrow$

$$\int e^{-3y}dy = \int ln^2(x)dx \Rightarrow -\frac{e^{-3y}}{3} = x\left[ln^2(x) - ln(x^2) + 2\right] + c \Rightarrow y = ln\left(\sqrt[3]{\frac{c}{\left|-3x\left[ln^2(x) - ln(x^2) + 2\right]\right|^3}}\right)$$

17. **$y'[sin(x) + cos(x)] = [sin(x) - cos(x)]/y^2$**

$dy/dx[sin(x) + cos(x)] = [sin(x) - cos(x)]/y^2 \Rightarrow$ al solito sulla costante possiamo fare ciò che ci pare

$$\int y^2dy = \int \frac{sin(x) - cos(x)}{sin(x) + cos(x)}dx \Rightarrow \frac{y^3}{3} = ln\left(\frac{1}{|sin(x) + cos(x)|}\right) + ln(c) \Rightarrow y = -\sqrt[3]{ln\left(c|sin(x) + cos(x)|^3\right)}$$

18. **$y' = x + y + 1$ (sostituire $t = x + y + 1$ e differenziare in modo opportuno)**

$t = x + y + 1 \Rightarrow dt = dx + dy \Rightarrow dt/dx = 1 + dy/dx$. Ma $dy/dx = x + y + 1 = t \Rightarrow dt/dx = 1 + t \Rightarrow$

$$\int \frac{dt}{1+t} = \int dx \Rightarrow ln(|1+t|) = x + c \Rightarrow |1+t| = e^{x+c} \Rightarrow |x+y| = e^{x+c} - 2 \Rightarrow x + y = \pm e^{x+c} - 2 \Rightarrow y = -x \pm e^{x+c} - 2$$

Risolvere le seguenti equazioni differenziali lineari del primo ordine

19. **a) $y' + y/x = 1$; b) $y' + y/x = x^2$; c) $y' + y = e^{2x}$**

a) $y = e^{-\int 1/x\,dx}\left[\int e^{\int 1/x\,dx}\,dx + c\right] = e^{ln(1/|x|)}\left[\int e^{ln(|x|)}\,dx + c\right] = \frac{1}{x}\left[\int x\,dx + c\right] = \frac{1}{x}\left[\frac{x^2}{2} + c\right] = \frac{x}{2} + c$;

b) $y = e^{-\int 1/x\,dx}\left[\int e^{\int 1/x\,dx}\cdot x^2\,dx + c\right] = \frac{1}{x}\left[\int x^3\,dx + c\right] = \frac{1}{x}\left[\frac{x^4}{4} + c\right] = \frac{x^3}{4} + \frac{c}{x}$;

c) $y = e^{-\int dx}\left[\int e^{\int dx}\cdot e^{2x}\,dx + c\right] = e^{-x}\cdot\left[\int e^{3x}\,dx + c\right] = e^{-x}\cdot\left[\frac{e^{3x}}{3} + c\right] = \frac{e^{2x}}{3} + \frac{c}{e^x}$

20. **a) $y' + y/(x + 1) = sin(x)$; b) $y' + y = x^3$**

a)
$$y = e^{-\int \frac{1}{x+1}dx}\left[\int e^{\int \frac{1}{x+1}dx}\cdot sin(x)\,dx + c\right] = \frac{1}{x+1}\left[\int (x+1)\cdot sin(x)\,dx + c\right] =$$
$$= \frac{1}{x+1}\left[-(x+1)cos(x) + sin(x) + c\right] = -cos(x) + \frac{sin(x) + c}{x+1}$$

b) $y = e^{-\int dx}\left[\int e^{\int dx}x^3\,dx + c\right] = e^{-x}\left[\int x^3 e^x\,dx + c\right] = e^{-x}[(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + c] = x^3 - 3x^2 + 6x - 6 + c\,e^{-x}$

21. **a)** $y' - 2\frac{y}{x} = \frac{1}{x^2+1}$ **; b)** $y' - 4\frac{y}{x} = \frac{x}{x^2+1}$

a) $y = e^{\int 2/x\,dx}\left[\int \frac{e^{-\int 2/x\,dx}}{x^2+1}dx + c\right] = x^2\left[\int \frac{1}{x^2(x^2+1)}dx + c\right] = x^2\left[-\frac{1}{x} - tan^{-1}(x) + c\right] = -x - x^2\left[tan^{-1}(x) + c\right]$

b)
$$y = e^{\int 4/x\,dx}\left[\int \frac{xe^{-\int 4/x\,dx}}{x^2+1}dx + c\right] = x^4\left[\int \frac{1}{x^3(x^2+1)}dx + c\right] =$$
$$= x^4\left[-\frac{1}{2x^2} + ln\left(\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\right) + c\right] = -\frac{x^2}{2} + x^4\left[ln\left(\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\right) + c\right]$$

22. **a) $y' + y/x = e^x$; b)** $y' + \frac{2y}{x} = \frac{1}{x^3+1}$

a) $y = e^{-\int 1/x\,dx}\left[\int e^{\int 1/x\,dx}e^x\,dx + c\right] = \frac{1}{x}\left[\int xe^x\,dx + c\right] = \frac{(x-1)e^x + c}{x}$

b) $y = e^{-\int 2/x\,dx}\left[\int \frac{e^{\int 2/x\,dx}}{x^3+1}dx + c\right] = \frac{1}{x^2}\left[\int \frac{x^2}{x^3+1}dx + c\right] = \frac{1}{x^2}\left[ln\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right) + c\right] = \frac{ln\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right) + c}{x^2}$

Risolvere le seguenti equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti

23. **a) $y'' + y' - 6y = 0$; b) $y'' + 4y' + 4y = 0$; c) $y'' - 7y' + 10y = 0$**

a) $p^2 + p - 6 = 0 \Rightarrow p = -3 \vee 2 \Rightarrow y = ae^{2x} + be^{-3x}$;

b) $p^2 + 4p + 4 = 0 \Rightarrow p = -2$ molteplicità $2 \Rightarrow y = (a + bx)e^{-2x}$;

c) $p^2 - 7p + 10 = 0 \Rightarrow p = 2 \vee 5 \Rightarrow y = a \cdot e^{2x} + b \cdot e^{5x}$

24. **a) $9y'' - 6y' + y = 0$; b) $4y'' + y = 0$; c) $y^{III} - y'' + y' - y = 0$**

a) $9p^2 - 6p + 1 = 0 \Rightarrow p = 1/3$ molteplicità $2 \Rightarrow y = (a + bx)e^{x/3}$;

b) $4p^2 + 1 = 0 \Rightarrow p = \pm ½i \Rightarrow y = a[cos(½x) + i\,sin(½x)] + b[cos(½x) - i\,sin(½x)] \Rightarrow y = (a + b)cos(½x) + i(a - b)sin(½x)$;

c) $p^3 - p^2 + p - 1 = 0 \Rightarrow p = 1 \vee \pm i \Rightarrow y = ae^x + b[cos(x) + i\,sin(x)] + c[cos(x) - i\,sin(x)] \Rightarrow ae^x + (b + c)cos(x) + i\,(b - c)sin(x)$

25. **a) $6y'' - y' - y = 0$; b) $y^{III} - 3y'' + 3y' - y = 0$**

a) $6p^2 - p - 1 = 0 \Rightarrow p = -1/3 \vee ½ \Rightarrow y = ae^{x/2} + be^{-x/3}$;

b) $p^3 - 3p^2 + 3p - 1 = 0 \Rightarrow p = 1$ molteplicità $3 \Rightarrow y = (a + bx + cx^2)e^x$

26. **a) $y'' - 2y = 0$; b) $y^{IV} - 2y'' + y = 0$**

a) $p^2 - 2 = 0 \Rightarrow p = \pm\sqrt{2} \Rightarrow y = a \cdot e^{\sqrt{2}x} + b \cdot e^{-\sqrt{2}x}$;

b) $p^4 - 2p^2 + 1 = 0 \Rightarrow p = \pm 1$ molteplicità $2 \Rightarrow y = (a + bx)e^{x} + (c + dx)e^{-x}$

27. **a) $y'' - 2y' - y = 0$; b) $y^{III} + 2y'' - y' - 2y = 0$**

a) $p^2 - 2p - 1 = 0 \Rightarrow p = 1 \pm \sqrt{2} \Rightarrow y = ae^{(1-\sqrt{2})x} + be^{(\sqrt{2}+1)x}$;

b) $p^3 + 2p^2 - p - 2 = 0 \Rightarrow p = \pm 1 \vee -2 \Rightarrow y = ae^{x} + be^{-x} + ce^{-2x}$

28. **a) $y^{III} - y'' - y' + y = 0$; b) $y^{IV} - 3y^{III} + 3y'' - y' = 0$**

a) $p^3 - p^2 - p + 1 = 0 \Rightarrow p = -1 \vee 1$ (molt. 2) $\Rightarrow y = (a + bx)e^{x} + ce^{-x}$;

b) $p^4 - 3p^3 + 3p^2 - p = 0 \Rightarrow p = 0 \vee 1$ (molt. 3) $\Rightarrow y = a + (b + cx + dx^2)e^{x}$

29. **$y^{IV} + 4y^{III} + 6y'' + 4y' + y = 0$**

$p^4 + 4p^3 + 6p^2 + 4p + 1 = 0 \Rightarrow p = -1$ molt. $4 \Rightarrow y = (a + bx + cx^2 + dx^3)e^{-x}$

30. **$y^{IV} - 16y = 0$**

$p^4 - 16 = 0 \Rightarrow p = \pm 2 \vee \pm 2i \Rightarrow y = ae^{2x} + be^{-2x} + (c + d)cos(2x) + i(c - d)sin(2x)$

31. **$y^{IV} + 2y'' + y = 0$**

$p^4 + 2p^2 + 1 = 0 \Rightarrow p = \pm i$ (molt. 2) $\Rightarrow y = [a + c + (b + d)x]cos(x) + i\,[a - c + (b - d)x]sin(2x)$

32. **$y^{III} - y = 0$**

$$p^3 - 1 = 0 \Rightarrow p = 1 \vee \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} \Rightarrow y = ae^{x} + e^{-x/2}\left[(b+c)cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + i(b-c)sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]$$

33. **$y^{IV} + 16y = 0$**

$p^4 + 16 = 0 \Rightarrow$

$$p = \pm\sqrt{2}(1 \pm i) \Rightarrow y = \left[(a+b)e^{-\sqrt{2}x} + (c+d)e^{\sqrt{2}x}\right]cos\left(\sqrt{2}x\right) - i\left[(a-b)e^{-\sqrt{2}x} + (c-d)e^{\sqrt{2}x}\right]sin\left(\sqrt{2}x\right)$$

34. **$4y^{IV} - 4y^{III} - 3y'' + 2y' + y = 0$**

$4p^4 - 4p^3 - 3p^2 + 2p + 1 = 0 \Rightarrow p = -½ \vee 1$ (molt. 2) $\Rightarrow y = (a + bx)e^{x} + (c + d)e^{-x/2}$

35. **$2y^{IV} + 5y^{III} + 3y'' - y' - y = 0$**

$2p^4 + 5p^3 + 3p^2 - p - 1 = 0 \Rightarrow p = -1$ (molt. 3) $\vee$ ½ $\Rightarrow y = (a + bx + cx^2)e^{-x} + de^{x/2}$

36. **$y^{VIII} + 3y^{VI} + 3y^{IV} + y'' = 0$**

$p^8 + 3p^6 + 3p^4 + p^2 = 0 \Rightarrow p = 0$ (molt. 2) $\vee \pm i$ (molt. 3) $\Rightarrow y = a + bx + [(e + h)x^2 + (d + g)x + c + f]cos(x) + i[(e - h)x^2 + (d - g)x + c - f]sin(x)]$

Risolvere i seguenti problemi di Cauchy

37. **a) $y' - y = 0, y(0) = 1$; b) $y' + y = 0, y(0) = 1$; c) $y' - y^2 = 0, y(0) = 1$**

a) $dy/dx - y = 0 \Rightarrow dy/y = dx \Rightarrow ln(y) = x + c \Rightarrow y(x) = e^{x+c}$. Imponiamo la condizione iniziale: $e^{c} = 1 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow y = e^{x}$;

b) $dy/dx + y = 0 \Rightarrow dy/y = -dx \Rightarrow ln(y) = -x + c \Rightarrow y(x) = e^{c-x}$. Imponiamo la condizione iniziale: $e^{c} = 1 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow y = e^{-x}$;

c) $dy/dx - y^2 = 0 \Rightarrow dy/y^2 = dx \Rightarrow -1/y = x + c \Rightarrow y(x) = \dfrac{1}{c-x} \Rightarrow \dfrac{1}{c} = 1 \Rightarrow \Rightarrow c = 1 \Rightarrow y = \dfrac{1}{1-x}$

38. **a) $y' - x^2y = 0, y(0) = 0$; b) $y' - x^2y = 0, y(0) = 1$; c) $y' - e^{x}y = 0, y(0) = 1$**

a) $dy/y = x^2dx \Rightarrow ln(y) = x^3/3 + c \Rightarrow y(x) = e^{\frac{x^3+c}{3}} \Rightarrow e^{\frac{c}{3}} = 0 \Rightarrow \varnothing$;

b) Abbiamo già risolto l'equazione, quindi imponiamo solo la condizione inziale, ottenendo: $e^{\frac{c}{3}} = 1 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow y = e^{\frac{x^3}{3}}$;

c) $dy/y = e^{x}dx \Rightarrow ln(y) = e^{x} + c \Rightarrow y(x) = e^{e^{x}+c} \Rightarrow e^{c+1} = 1 \Rightarrow c = -1 \Rightarrow y = e^{e^{x}-1}$

39. **a) $y' - y/x = 1, y(1) = 1$; b) $y' + xy = x, y(0) = 0$; c) $y' + y = x^2, y(0) = 0$**

a) $y(x) = e^{\int 1/x\,dx}\left[\int e^{-\int 1/x\,dx}\,dx + c\right] = x\left[\int \frac{1}{x}dx + c\right] = x \cdot ln(cx) \Rightarrow ln(c) = 1 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow y = x\,ln(x)$

b) $y(x)=e^{-\int x\,dx}\left[\int e^{\int x\,dx}x\,dx+c\right]=e^{-x^2/2}\left[\int xe^{x^2/2}\,dx+c\right]=e^{-x^2/2}\left[e^{x^2/2}+c\right]=1+ce^{-x^2/2}\Rightarrow 1+c=0\Rightarrow$ $c=-1\Rightarrow y=1-e^{\frac{x^2}{2}}$

c) $y(x)=e^{-\int dx}\left[\int e^{\int dx}x^2\,dx+c\right]=e^{-x}\left[\int x^2e^x\,dx+c\right]=e^{-x}\left[\left(x^2-2x+2\right)e^x+c\right]=x^2-2x+2+ce^{-x}\Rightarrow 2+c=0\Rightarrow c=-2\Rightarrow y=x^2-2x+2-2e^{-x}$

40. **a) $y''-5y'+6y=0, y(0)=0, y'(0)=1$; b) $y''-2y'+y=0, y(0)=0, y'(0)=1$**

a) $p^2-5p+6=0\Rightarrow p=2\vee 3\Rightarrow y(x)=ae^{2x}+be^{3x}, y'(x)=2ae^{2x}+3be^{3x}\Rightarrow\begin{cases}a+b=0\\2a+3b=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\b=1\end{cases}$ $\Rightarrow y=e^{3x}-e^{2x}$

b) $p^2-2p+1=0\Rightarrow p=1$ (molteplicità 2) $\Rightarrow y(x)=(a+bx)e^x$, $y'(x)=[(a+b)+bx]e^x\Rightarrow$ $\begin{cases}a=0\\a+b=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\b=1\end{cases}\Rightarrow y=xe^x.$

41. **a) $y''+y'=0, y(0)=0, y'(0)=1$; b) $y''+y=0, y(0)=0, y'(0)=1$**

a) $p^2+p=0\Rightarrow p=-1\vee 0\Rightarrow y(x)=ae^{-x}+b, y'(x)=-ae^{-x}\Rightarrow\begin{cases}a+b=0\\-a=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\b=1\end{cases}\Rightarrow y=1-e^{-x};$

b) $p^2+1=0\Rightarrow p=\pm i\Rightarrow y(x)=(a+b)\cos(x)+i(a-b)\sin(x), y'(x)=-(a+b)\sin(x)+i(a-b)\cos(x)$ $\Rightarrow\begin{cases}a+b=0\\(a-b)i=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-i/2\\b=i/2\end{cases}\Rightarrow y=\sin(x)$

42. **a) $y''+y=0, y(0)=1, y'(0)=0$; b) $y''-y=0, y(0)=0, y'(0)=1$**

a) Dal precedente: $y(x)=(a+b)\cos(x)+i(a-b)\sin(x)\Rightarrow\begin{cases}a+b=1\\(a-b)i=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1/2\\b=1/2\end{cases}\Rightarrow y=\cos(x);$

b) $p^2-1=0\Rightarrow p=\pm 1\Rightarrow y(x)=ae^x+be^{-x}, y'(x)=ae^x-be^{-x}\Rightarrow\begin{cases}a+b=0\\a-b=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1/2\\b=-1/2\end{cases}\Rightarrow y=½(e^x-e^{-x})$

43. **$y^{III}-y'=0, y(0)=0, y'(0)=1, y''(0)=0$**

$p^3-p=0\Rightarrow p=0\vee\pm 1\Rightarrow y(x)=a+be^x+ce^{-x}$, $y'(x)=be^x-ce^{-x}$, $y''(x)=be^x+ce^{-x}\Rightarrow$ $\begin{cases}a+b+c=0\\b-c=1\\b+c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\b=1/2\\c=-1/2\end{cases}\Rightarrow y=½(e^x-e^{-x})$

44. **$y^{III}-y''=0, y(1)=1, y'(0)=0, y''(0)=1$**

$p^3-p^2=0\Rightarrow p=0$ (molt. 2) $\vee 1\Rightarrow y(x)=a+bx+ce^x$, $y'(x)=b+ce^x$, $y''(x)=ce^x\Rightarrow$ $\begin{cases}a+b+ce=1\\b+c=0\\c=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2-e\\b=-1\\c=1\end{cases}\Rightarrow y=e^x-x-e+2$

45. **$y^{III}-2y''+y'=0, y(0)=0, y'(0)=1, y''(0)=-1$**

$p^3-2p^2+p=0\Rightarrow p=0\vee 1$ (molt. 2) $\Rightarrow y(x)=a+(b+c)e^x$, $y'(x)=y''(x)=(b+c)e^x\Rightarrow$ senza risolvere il sistema osserviamo che le condizioni sulle derivate si contraddicono.

46. **$y^{IV}-y=0, y(0)=1, y'(0)=1, y''(0)=-1, y^{III}(0)=-1$**

$p^4-1=0\Rightarrow p=\pm 1\vee\pm i\Rightarrow y(x)=ae^x+be^{-x}+(c+d)\cos(x)+i(c-d)\sin(x)$, $y'(x)=ae^x-be^{-x}-(c+d)\sin(x)+i(c-d)\cos(x)$, $y''(x)=ae^x+be^{-x}-(c+d)\cos(x)-i(c-d)\sin(x)$, $y^{III}(x)=ae^x-be^{-x}+(c+d)$

$sin(x) - i(c - d)\ cos(x) \Rightarrow \begin{cases} a+b+c+d=1 \\ a-b+(c-d)i=1 \\ a+b-c-d=-1 \\ a-b-(c-d)i=-1 \end{cases}$, per semplificare sommiamo e sottraiamo le espressioni senza e con i, ottenendo: $\begin{cases} a+b=0 \\ (2c-2d)i=2 \\ 2c+2d=2 \\ 2a-2b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=(1-i)/2 \\ d=(1+i)/2 \end{cases} \Rightarrow y(x) = cos(x) + sin(x)$

$\mathcal{E} = mc^2$ L'angolo della MateFisica

Attività

Nei seguenti quesiti determinare impostando e risolvendo un'equazione differenziale se essa rientra fra quelle trattate nel presente testo

1. **Equazione di Newton nel caso di forza costante $F = K$.**
   $mx''(t) - K = 0 \Rightarrow x'(t) = \int \frac{K}{m} dt = \frac{K}{m} t + c \Rightarrow x(t) = \int \left(\frac{K}{m} t + c \right) dt = \frac{K}{m} \frac{t^2}{2} + ct + c_1 = \frac{K}{2m} t^2 + v_0 t + x_0.$
   Abbiamo indicato le costanti con i simboli della velocità e dello spazio iniziale.
2. **Caduta senza attrito da un'altezza x_0, con velocità iniziale v_0.**
   $mx''(t) - mg = 0 \Rightarrow x'(t) = \int g dt = gt + v_0 \Rightarrow x(t) = \int (gt + v_0) dt = \frac{gt^2}{2} + v_0 t + x_0$.
3. **Caduta con attrito proporzionale alle velocità (μ indica il coefficiente di attrito).**
   $F = -F_a - P \Rightarrow mx''(t) + \mu x'(t) + mg = 0.$
4. **Oscillatore armonico con smorzamento assimilabile all'attrito proporzionale alle velocità.**
   $m\, x''(t) + \mu x'(t) + k\, x(t) = 0.$
5. **Oscillatore armonico forzato da una forza esterna proporzionale a $sin(\omega t)$.**
   $m\, x''(t) + k\, x\,(t) - mF\, sin(\omega t) = 0$
6. **Oscillatore armonico forzato con smorzamento.**
   $m\, x''(t) + \mu x'(t) + k\, x(t) - mF sin(\omega t) = 0$
7. **Diminuzione del principio attivo di un medicinale proporzionale al tempo.**
   $y'(t) = -k\, y(t) \Rightarrow dy/dt = -k\, y \Rightarrow dy/y = -kdt \Rightarrow ln(y) = -kt + c \Rightarrow y(t) = e^{-kt+c}.$
8. **Diminuzione del tasso di decadimento radioattivo al passare del tempo.**
   $y'(t) = -\lambda\, y(t) \Rightarrow dy/dt = -\lambda y \Rightarrow dy/y = -\lambda dt \Rightarrow ln(y) = -\lambda t + c \Rightarrow y(t) = e^{-\lambda t+c}.$
9. **Circuito RL alimentato da tensione costante V e attraversato da corrente $i(t)$.**
   $L\, i'(t) + R\, i(t) - V = 0$
10. **Circuito RLC alimentato da tensione variabile $V(t)$.**
    $L \cdot i''(t) + R \cdot i'(t) + i(t)/C = V'(t)$

Temi assegnati agli esami di stato

1. **(Liceo scientifico 2014/2015) Di quale delle seguenti equazioni differenziali la funzione $y = ln(x)/x$ è soluzione? a) $y'' + 2y'/x = y$ b) $y' + xy'' = 1$; c) $xy' = 1/x + y$ d) $x^2y'' + xy' + 2/x = y$**
   Basta verificare. $y' = [1 - ln(x)]/x^2$; $y'' = [2ln(x) - 3]/x^3$. Quindi:
   a) $[2ln(x) - 3]/x^3 + 2[1 - ln(x)]/x^3 = -1/x^3 \neq ln(x)/x$
   b) $[1 - ln(x)]/x^2 + [2ln(x) - 3]/x^2 = [ln(x) - 2]/x^2 \neq 1$;
   c) $[1 - ln(x)]/x \neq 1/x + ln(x)/x$
   d) $[2ln(x) - 3]/x + [1 - ln(x)]/x + 2/x = ln(x)/x$, che è la soluzione corretta.
2. **(Liceo scientifico 2017/2018) Determinare quali sono i valori del parametro per cui la funzione $y(x) = 2e^{kx+2}$ è soluzione dell'equazione differenziale $y'' - 2y' - 3y = 0$.**

$y'(x) = 2ke^{kx+2}$, $y''(x) = 2k^2e^{kx+2} \Rightarrow 2k^2e^{kx+2} - 4ke^{kx+2} - 6e^{kx+2} = 0 \Rightarrow 2k^2 - 4k - 6 = 0 \Rightarrow k = 3 \vee k = -1$.

Quesiti assegnati in gare nazionali o internazionali

1. **(CL2003) Determinare tutti i numeri reali A per i quali ogni funzione $y = \frac{A}{1+ke^{-3t}}$, con k costante, sia soluzione dell'equazione differenziale $y' = y(3 - y)$, in ogni punto del suo dominio.**

   Si ha: $\frac{A}{1+ke^{-3t}} = \frac{Ae^{3t}}{k+e^{3t}}$, quindi: $\frac{3\cancel{Ae^{3t}}}{\left(k+e^{3t}\right)^2} = \frac{\cancel{Ae^{3t}}}{k+e^{3t}}\left(3 - \frac{Ae^{3t}}{k+e^{3t}}\right) \Rightarrow \frac{\cancel{3k}}{\cancel{\left(k+e^{3t}\right)^2}} = \frac{\cancel{3k} - (A-3)e^{3t}}{\cancel{\left(k+e^{3t}\right)^2}} \Rightarrow 3 - A = 0 \Rightarrow A = 3$, ma anche $A = 0$.

2. **(CL2003) La massa corporea m di Fred verifica l'equazione differenziale $\frac{dm}{dt} = \frac{C-40m}{8000}$, in cui t è misurato in giorni, C è l'apporto energetico misurato in Cal/giorno. Se la massa di Fred è attualmente 100 Kg ed egli ingerisce 3000 Cal/giorno, fra quanti giorni la sua massa sarà 90 Kg?**

   $\int \frac{dm}{C-40m} = \int \frac{dt}{8000} \Rightarrow -\frac{1}{\cancel{40}} ln\left(|C-40m|\right) = \frac{t}{\cancel{8000}^{20}} + c \Rightarrow |C-40m| = Ke^{-t/200}$, determiniamo il valore della costante al tempo $t = 0$: $K = C - 4000$. Adesso imponiamo le condizioni: $t = -200ln[|3000 - 3600|/(3000 - 4000)] \approx 102$

3. **(CL2003) Sapendo che $f''(t) = 6e^{-3t}$ per ogni t e che $f(0) = 0$ e $f'(0) = 4$, determinare $f(t)$.**

   $f'(t) = \int 6e^{-3t}dt = -2e^{-3t} + c; f(t) = \int\left(-2e^{-3t} + c\right)dt = \frac{2}{3}e^{-3t} + ct + k$, determiniamo le due costanti con le condizioni iniziali: $\begin{cases} \frac{2}{3} + k = 0 \\ -2 + c = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 6 \\ k = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow f(t) = 2/3e^{-3t} + 6t - 2/3$

4. **(CL2004) Determinare il valore della costante k in modo che $y = 2x - kx^2$ sia soluzione dell'equazione differenziale $xy' = y - x^2$.**

   $x(2 - 2kx) = 2x - kx^2 - x^2 \Rightarrow kx^2 - x^2 = 0 \Rightarrow (k - 1)x^2 = 0 \Rightarrow k = 1$

5. **(CB2005) Data l'equazione differenziale $y' = -½xy^2$. Determinare il suo integrale particolare che verifica la condizione iniziale $f(-1) = 2$.**

   $\frac{dy}{dx} = -\frac{xy^2}{2} \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{2}\int x\,dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = -\frac{x^2}{4} + c \Rightarrow y = \frac{4}{x^2} + k; 2 = \frac{4}{4} + k \Rightarrow k = 1 \Rightarrow y = \frac{4}{x^2+1}$

6. **(CB2007) Data l'equazione differenziale $y' = ½x + y - 1$, per quali m e b, $y = mx + b$ è soluzione dell'equazione data?**

   $m = ½x + mx + b - 1 \Rightarrow (m + ½)x + b - m - 1 = 0 \Rightarrow m = -½$ e $b + ½ - 1 = 0 \Rightarrow b = ½$.

7. **(CL2002) A bacteria-infested swimming pool was chemically treated this morning, and since then, the bacteria count has been decreasing at rate proportional to the count itself. An hour ago, the count was a third of what it was two hours ago. For safety, the count must be ≤ 1% of what it is now. When will that be?**

   A causa di un infezione batterica una piscina è stata trattata chimicamente questa mattina, e da allora il numero dei batteri è diminuito ad un tasso proporzionale allo stesso numero. Un'ora fa la popolazione era un terzo di ciò che era due ore fa. Per sicurezza la popolazione deve essere ≤ 1% di ciò che è adesso. Fra quanto tempo succederà?

   Indicando con N il numero di batteri al tempo t, deve essere $dN/dt = kN$, con k costante. Risolvendo: $dN/N = kdt \Rightarrow ln(N) = kt + c \Rightarrow N(t) = e^{kt+c}$. Dalle informazioni si ha: $N(-1) = 1/3N(-2) \Rightarrow e^{-k+c} = 1/3e^{-2k+c} \Rightarrow e^k = 1/3$. Del resto $N(0) = e^c$. Così perché sia $N(t) \le e^c/100 \Rightarrow e^{kt+c} \le e^c/100 \Rightarrow e^{kt} \le 1/100 \Rightarrow 1/3^t \le 1/100 \Rightarrow t \ge log_3(100) \approx 4{,}2$ ore.

8. **(CL2006) a) Find the general solution of $y' = y(y - 2)$. b) Find the particular solution that satisfies initial condition $y(0) = 0.5$.**

   Trova la soluzione generale di $y' = y(y - 2)$. Trova la soluzione particolare che soddisfa la condizione ini-

ziale $y(0) = 0.5$.

a) $\dfrac{dy}{y(y-2)} = dx \Rightarrow ln\left(\sqrt{\dfrac{y-2}{y}}\right) = x + c \Rightarrow \dfrac{y-2}{y} = e^{2x+c} \Rightarrow y = \dfrac{2}{1-ce^{2x}}$

b) $\dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{1-c} \Rightarrow c = 3 \Rightarrow y = \dfrac{2}{1-3e^{2x}}$

9. (CL2006) Given that $f''(t) = e^{-2t} + cos(t/2)$ for all t, find an explicit formula for $f(t)$ if $f(0) = f'(0) = 0$.

Dato $f''(t) = e^{-2t} + cos(t/2)$ *per ogni t, trova una formula esplicita per* $f(t)$ *se* $f(0) = f'(0) = 0$.

$$f'(t) = \int\left[e^{-2t} + cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]dt = 2sin\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{e^{-2x}}{2} + c \Rightarrow f(t) = \int\left[2sin\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{e^{-2x}}{2} + c\right]dt = \frac{e^{-2x}}{4} - 4cos\left(\frac{t}{2}\right) + ct + d\,f$$

Imponendo le condizioni iniziali $\begin{cases} -\dfrac{1}{2} + c = 0 \\ \dfrac{1}{4} - 4 + d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = \dfrac{1}{2} \\ d = \dfrac{15}{4} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{e^{-2x}}{4} - 4cos\left(\dfrac{t}{2}\right) + \dfrac{t}{2} + \dfrac{15}{4}$.

10. (CB2006) Consider the differential equation $y' = (y-1)^2\, cos(\pi x)$. There is a horizontal line with equation $y = c$ that satisfies this differential equation. a) Find the value of c. b) Find the particular solution $y = f(x)$ with the initial condition $f(1) = 0$.

Considera l'equazione differenziale $y' = (y-1)^2 cos(\pi x)$. *Esiste una retta orizzontale di equazione* $y = c$ *che la soddisfa.* A) *Trova il valore di c. b) Trova la soluzione particolare* $y = f(x)$ *con la condizione iniziale* $f(1) = 0$.

a) $0 = (c-1)^2 cos(\pi x) \Rightarrow c = 1$;

b) L'integrale generale: $\displaystyle\int \frac{dy}{(y-1)^2} = \int cos(\pi x)\,dx \Rightarrow \frac{1}{1-y} = \frac{sin(\pi x)}{\pi} + c \Rightarrow y = c - \frac{\pi}{sin(\pi x) + \pi}$, da cui: $1 = c \Rightarrow y = 1 - \dfrac{\pi}{sin(\pi x) + \pi}$.

11. (CL 2007) A cup of coffee at 96°C is set on a table in an air-conditioned classroom. It cools to 60°C in 10 minutes, and then to 40°C in another 10 minutes. What is the temperature of the room? (Recall Newton's law of cooling $y'(t) = k \cdot y(t)$, with k a constant, and $y(t)$ the difference of temperature)

Una tazza di caffè a 96°C *è su un tavolo una classe con il condizionatore acceso. Si porta perciò a* 60°C *in* 10 *minuti e poi a* 40°C *in altri* 10 *minuti. Qual è la temperatura della stanza?* (*Ricorda la legge sul raffreddamento di Newton* $y'(t) = k \cdot y(t)$, *per qualche costante k e* $y(t)$ *la differenza di temperatura*)

Sia T la temperatura che vogliamo trovare, sia $c(t)$ la temperatura del caffè al tempo t. Abbiamo $y(t) = c(t) - T = Ae^{kt}$, con A costante. Sappiamo che si ha: $\begin{cases} A = c(0) - T \\ Ce^{10k} = c(10) - T \\ Ce^{20k} = c(20) - T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 96 - T = C \\ 60 - T = Ce^{10k} \\ 40 - T = Ce^{20k} \end{cases} \Rightarrow (96 - T)e^{10k} = 60 - T$ e $(96 - T)e^{20k} = 40 - T \Rightarrow \dfrac{40-T}{96-T} = \left(\dfrac{60-T}{96-T}\right)^2 \Rightarrow 240 = 16T \Rightarrow T = 15$.

12. (CL2012) If $dy/dx = y\, tan(x)$ and $y = 3$ when $x = 0$, then, when $x = \pi/3$, y is?

$\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int tan(x)\,dx \Rightarrow ln(y) = ln\left(\frac{1}{cos(x)}\right) + c \Rightarrow y = \frac{c}{cos(x)}$ è l'integrale generale. Da cui: $c = 3$ per la prima informazione. Quindi: $y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{3}{cos(\pi/3)} = 6$.

Test di Verifica

1. Quali fra i seguenti integrali sono nulli?

A $\int_{-1}^{1} sin(x)\,dx$ **B** $\int_{-1}^{1} sin^2(x)\,dx$ **C** $\int_{-2}^{2} x^3\,dx$ **D** $\int_{-2}^{2} x^4\,dx$ **E** $\int_{-2}^{2} \dfrac{1}{x^3}\,dx$

Sappiamo che l'integrale di funzioni dispari in intervalli simmetrici rispetto all'origine è nullo. Quindi lo sono A, C, E.

2. Quali fra i seguenti integrali sono generalizzati?

A $\int_{-2}^{1}\sqrt{x}\,dx$ **B** $\int_{-2}^{0}sin^{-1}(x)\,dx$ **C** $\int_{0}^{2}\frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$ **D** $\int_{-1}^{1}tan(x)\,dx$ **E** $\int_{-3}^{2}\frac{1}{x^3}dx$

C ed E perché entrambe le funzioni integrande non sono definite in 0

3. Selezionare le affermazioni corrette.

A $\int_{-1}^{1}f(x)\,dx$ **rappresenta l'area racchiusa da $y = f(x)$, $x = -1$, $y = 1$ e $x = 0$** **B** $\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=0$ **se $y = f(x)$ è pari e continua** **C** **Se $y = f(x)$ è integrabile in [1; 2], allora** $\int_{1}^{2}f(x)\,dx=-\int_{2}^{1}f(x)\,dx$

D $\int_{0}^{a}sin(x)\,dx=\int_{2\pi}^{a+2\pi}sin(x)\,dx,\forall a\in\mathbb{R}$ **E** $\left|\int_{1}^{2}f(x)\,dx\right|=\int_{1}^{2}|f(x)|\,dx$ **se $y = f(x)$ è integrabile in [1; 2]**

Sono corrette C e D. Sulla $f(x)$ della A non sappiamo se è positiva nella regione; le funzioni pari in intervalli simmetrici rispetto all'origine non sono mai nulle; la E è come la A.

4. Quali tra le seguenti affermazioni relative alla funzione $f(x)=\int_{x}^{x^2+x}\left(t^2+t+1\right)dt$ **sono corrette?**

A **Ha un punto di minimo per $x = 0$** **B** **È positiva solo per $x > 0$** **C** **L'asse delle ascisse è un asintoto orizzontale** **D** **Non ha asintoti obliqui** **E** **Volge sempre la concavità verso l'alto**

Corrette A ($f'(x) = 2x^5 + 5x^4 + 6x^3 + 3x^2 + 2x$, che si annulla per $x = 0$ $f''(0) > 0$); D perché la funzione è un polinomio di grado superiore al secondo; E $f''(x) > 0$ per ogni x. Sono false le altre

5. Selezionare le scritte corrette.

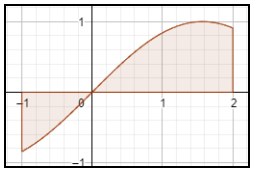
A $\int_{1}^{2}f(x)\,dx+\int_{2}^{3}g(x)\,dx=\int_{1}^{3}\left[f(x)+g(x)\right]dx$ **B** $\int_{1}^{3}f(x)\,dx=2\int_{1}^{\sqrt{3}}t\cdot f\left(t^2\right)dt$

C $\int_{1}^{3}f(x)\,dx=\int_{-3}^{-1}f(x)\,dx$ **D** $\int_{\pi}^{2\pi}sin(ax)\,dx=a\int_{\pi}^{2\pi}sin(x)\,dx$**, per ogni a naturale dispari**

E $\int_{1}^{2}f(x)\,dx=-1\Rightarrow\int_{1}^{2}|f(x)|\,dx=1$

Corrette B e D. La A vale solo se $f(x)$ 0 $g(x)$; La C è insensata, non sapendo niente della funzione integranda; lo stesso per la E

6. In figura abbiamo rappresentato un'area determinata dalla funzione $y = sin(x)$, qual è il modo corretto di calcolare tale area?



A $\int_{-1}^{2}sin(x)\,dx$ **B** $\int_{sin(-1)}^{1}sin(x)\,dx$ **C** $\int_{-1}^{0}sin(x)\,dx+\int_{0}^{2}sin(x)\,dx$

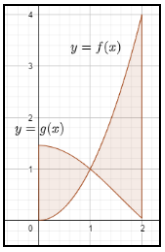
D $\int_{0}^{2}sin(x)\,dx-\int_{-1}^{0}sin(x)\,dx$ **E** **Nessuno dei precedenti**

Corretta: D, la regione negativa ha integrale negativo, quindi cambiamo il segno all'integrale

7. Quale fra i seguenti è il corretto modo di sostituire $\sqrt{x}=t$ **per calcolare** $\int_{1}^{2}\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$**?**

A $\int_{1}^{\sqrt{2}}\frac{2t^3+2t^2}{t-1}dt$ B $\int_{1}^{\sqrt{2}}\frac{t^2+t}{t-1}dt$ C $\int_{1}^{2}\frac{2t^3+2t^2}{t-1}dt$ D $\int_{1}^{2}\frac{t^2+t}{t-1}dt$ E Nessuno dei precedenti

Corretta: A



8. Quale fra i seguenti è il corretto modo di calcolare l'area in figura?

A $\int_0^2 [f(x)-g(x)]dx$ B $\int_0^1 [g(x)-f(x)]dx+\int_1^2 [f(x)-g(x)]dx$

C $\int_0^2 [g(x)-f(x)]dx$ D $\int_0^1 [f(x)-g(x)]dx+\int_1^2 [g(x)-f(x)]dx$

E Nessuno dei precedenti

Corretta: B

9. Quale fra i seguenti è il corretto modo di calcolare il volume generato dalla sinusoide nella sua rotazione attorno all'asse delle ascisse, nell'intervallo [–1; 1]?

A $\pi\cdot\int_{-1}^1 sin(x)dx$ B $2\pi\cdot\int_0^1 sin(x)dx$ C $\int_{-1}^1 sin^2(x)dx$

D $2\pi\cdot\int_{-1}^0 sin^2(x)dx$ E Nessuno dei precedenti

Corretta: D

10. Quale delle seguenti funzioni è integrabile in senso improprio?

A $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ B $\int_{-\infty}^1\frac{1}{x}dx$ C $\int_2^{+\infty}\frac{ln(x)}{x}dx$ D $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}dx$ E Nessuno dei precedenti

Corretta: D $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}dx=\lim_{x\to+\infty}tan^{-1}(x)-\lim_{x\to-\infty}tan^{-1}(x)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$

11. Calcolare $\int_0^2\frac{1}{\sqrt{x}}dx$

$$\int_0^2 x^{-1/2}dx=\left[2\sqrt{x}\right]_0^2=2\sqrt{2}$$

12. Calcolare $\int_1^3 x^2e^{2x}\,dx$

$$\int_1^3 x^2e^{2x}\,dx=\left[\frac{x^2e^{2x}}{2}\right]_1^3-\int_1^3 xe^{2x}\,dx=\frac{9e^6-e^2}{2}-\left[\frac{xe^{2x}}{2}\right]_1^3+\frac{1}{2}\int_1^3 e^{2x}\,dx=3e^6+\left[\frac{e^{2x}}{4}\right]_1^3=\frac{(13e^4-1)e^2}{4}$$

13. Calcolare $\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{sin(x)+1}{cos(x)-1}dx$

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{sin(x)+1}{cos(x)-1}dx=\int_{\sqrt{3}/3}^1-\frac{t^2+2t+1}{2t^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=\int_{\sqrt{3}/3}^1-\frac{t^2+2t+1}{t^2(1+t^2)}dt=\left[ln\left(\frac{t^2+1}{t^2}\right)+\frac{1}{t}\right]_{\sqrt{3}/3}^1=1-\sqrt{3}-ln(2)$$

14. Se *f*(*x*) è *continua* in [*a*; *b*] e *c* ∈ (*a*, *b*), allora si ha $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$**. La regola di integrazione per parti per integrali definiti è** $\int_a^b f(x)\cdot g'(x)dx=[f(x)\cdot g(x)]_a^b-\int_a^b f'(x)\cdot g(x)dx$**.**

15. La regola di integrazione per sostituzione per integrali definiti, sostituendo *x* = *g*(*t*) è $\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx=.\int_a^b f[g(t)]\cdot g'(t)dt$**. Il volume del solido ottenuto dalla rotazione di 2π della funzione *continua y* = *f*(*x*) attorno all'asse delle ascisse, nell'intervallo [*a*; *b*] è** $\pi\cdot\int_a^b[f(x)]^2dx$**.**