12. Incertezza e realtà fisica

12.1 Il calcolo delle probabilità

Richiamiamo le conoscenze

Esprimere sotto forma percentuale le seguenti frazioni

1. **a) 4/25; b) 7/20; c) 12/50; d) 32/75; e) 17/18**
   a) 16/100 = 16%; b) 35/100 = 35%; c) 24/100 = 24%;
   d) 32(4/3)/100 ≈ 42,7%; e) 17/18(50/9) /100 ≈ 94,4%
2. **a) 13/32; b) 31/64; c) 3/40; d) 24/19; e) 15/28**
   a) $13 \cdot 5^5/10^5 = 40{,}625\%$; b) $31 \cdot 5^6/10^6 = 48{,}4375\%$; c) 15/200 = 7,5%;
   d) 24/19(100/19)/100 ≈ 126,3%; e) 15/28(25/7)/100 ≈ 53,6%
3. **Un oggetto di € 25,00 viene scontato del 17% qual è il suo prezzo scontato?**
   Se lo sconto è del 17%, si paga l'83%, quindi: € 25,00 · 0,83 = € 20,75
4. **L'IVA è al 20% e su un certo oggetto vale € 5,30. Quanto costa l'oggetto al netto dell'IVA?**
   Il costo $c = n + 0{,}2n$ (n è il prezzo al netto dell'IVA) $\Rightarrow 0{,}2n =$ € 5,30 $\Rightarrow n =$ € 5,30 · 5 = € 26,50
5. **Quest'anno il prezzo netto dell'oggetto precedente non è aumentato, ma l'IVA è passata al 21%. Quanto costa l'oggetto oggi?**
   € 26,50 · 1,21 = € 32,07 (approssimiamo ai centesimi).
6. **La Benzina il mese scorso costava mediamente € 1,753. Questo mese costa mediamente € 1,778. Qual è stato l'aumento medio mensile?**
   (1,778 – 1,753)/1,753 ≈ 1,4%
7. **Un oggetto ha un prezzo al pubblico di € 19,00. Al netto dell'IVA al 21% quanto costerebbe l'oggetto?**
   $1{,}21p =$ € 19,00 $\Rightarrow p =$ € 19,00/1,21 ≈ € 15,70
8. **Un certo prodotto viene scontato prima del 10% e poi del 20%, ciò equivale a scontare il prodotto in unica soluzione di quanto?**
   Sia p il prezzo iniziale, dopo il primo sconto diventa $0{,}9p$ e successivamente $0{,}9 \cdot 0{,}8p = 0{,}72p$. Quindi lo sconto è del 28%
9. **Un certo prodotto viene scontato prima del 10% e poi di un certo valore x %, se ciò equivale a scontare il prezzo iniziale del 37%, quanto vale x?**
   $p \to 0{,}9p \to 0{,}9(1 - x/100)p \Rightarrow 0{,}9(1 - x/100)p = 0{,}63p \Rightarrow 0{,}9(100 - x) = 63 \Rightarrow x = 27/0{,}9 = 30$
10. **Le azioni di un certo titolo in borsa calano in un giorno del 4%, il giorno successivo di che percentuale devono aumentare perché il valore sia quello del giorno prima?**
    $p \to 0{,}96p \to 0{,}96(1 + x/100)p = p \Rightarrow 96 + 0{,}96x = 100 \Rightarrow x = 4/0{,}96 \approx 4{,}17\%$
11. **Il prezzo della benzina a seguito della crisi petrolifera è aumentato del 12%, dopo qualche tempo, a seguito di una scelta dell'OPEC è diminuito del 12%. Che relazione c'è fra il prezzo prima della crisi e quello dopo la decisione dell'OPEC?**
    $p \to 1{,}12p \to 1{,}12 \cdot 0{,}88p = 0{,}9856p$, quindi è diminuito del (1 – 0,9856) = 1,44%
12. **(Invalsi 2006) In una classe di 25 alunni, i punteggi (abbreviati in tabella con p) ottenuti in un test di matematica risultano distribuiti come indicato nella seguente tabella.**

Punteggio	$0 \le p < 20$	$20 \le p < 40$	$40 \le p < 60$	$60 \le p < 80$	$80 \le p \le 100$
Numero alunni	**1**	**6**	**7**	**8**	**3**

    Qual è la percentuale di alunni che ha ottenuto un punteggio inferiore a 60?
    A) 28% B) 34% C) 56% D) 72%
    Sono 14/25 = 56/100. Risposta corretta C
13. **Siano dati due numeri reali x e y, con $x < y$. In percentuale quanto x è minore di y?**
    $$100 \cdot \frac{y - x}{y}$$
14. **Un prodotto è scontato del p%, successivamente del q%, ciò equivale a scontare il prezzo iniziale di quale percentuale?**

Sia x il prezzo iniziale: $x \to (1 - p/100)x \to (1 - p/100)(1 - q/100)x = [1 - p/100 - q/100 + pq/10000]x$, quindi c'è stata una diminuzione di $p + q - pq/100$

15. La popolazione di una certa città dal 1980 al 1990 è aumentata del *p*%, dal 1990 al 2000 è aumentata del *q*%. Quale è stato l'aumento percentuale dal 1980 al 2000?

Sia x la popolazione iniziale: $x \to (1 + p/100)x \to (1 + p/100)(1 + q/100)x = [1 + p/100 + q/100 + pq/10000]x$, quindi c'è stato un aumento di $p + q + pq/100$

16. Un dato prodotto prima è aumentato del *p*%, poi è diminuito del *p*%. Che relazione c'è fra il prezzo finale e quello iniziale?

$x \to (1 + p/100)x \to (1 + p/100)(1 - p/100)x = [1 - p^2/10000)x$, quindi è diminuito del $p^2/100\%$

17. Nel paesechenonc'è la tassazione ubbidisce alla seguente regola. Fino a € 10000,00 si paga il 15%, per ogni fascia successiva di € 10000,00 l'aliquota (solo per la parte eccedente) aumenta del 5%. Se un contribuente paga € 10916,25, qual è il suo reddito dichiarato?

Per i primi 10000 si pagano 1500, poi 2000, 2500 e così via, quindi in generale si paga $1500 + (1500 + 500) + (1500 + 500 \cdot 2) + \ldots + [1500 + 500n] = 1500(n + 1) + 500 \cdot (1 + 2 + \ldots + n) = 250n^2 + 1750n + 1500$. Stabiliamo quindi il più grande n per cui il nostro contribuente paga l'intera quota. $250n^2 + 1750n + 1500 \leq 10916{,}25 \Rightarrow n \leq 3$. Perciò il reddito è €$(40000 + x)$, $0 \leq x < 10000$. Da cui: $250 \cdot 9 + 1750 \cdot 3 + 1500 + 0{,}35x =$ € $10916{,}25 \Rightarrow x =$ € $5475{,}00$. Quindi il reddito totale è € 45475,00.

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

1. (AHSME 1995) Se *M* = 30% *Q*, *Q* = 20% *P*, e *N* = 50% *P*, allora *M/N* è?
A) 3/250 B) 3/25 C) 1 D) 6/5 E) 4/3

$M = 0{,}3Q = 0{,}3 \cdot 0{,}2\,P = ,06\,P \Rightarrow M/N = 0{,}06/0{,}5 = 6/50 = 3/25$. Risposta corretta B

2. (AHSME 1997) Se *a* è il 50% più grande di *c*, e *b* è il 25% più grande di *c*, allora *a* quanto è più grande di *b*, in percentuale? A) 20% B) 25% C) 50% D) 100% E) 200%

$a = 1{,}5c$, $b = 1{,}25c \Rightarrow a = 1{,}5/1{,}25b = 1{,}2b$. Risposta corretta A

3. (AHSME 1998) Un oratore ha parlato per 60 minuti a una folta platea. Il 20% dei presenti ha ascoltato l'intero discorso, il 10% ha dormito tutto il tempo, metà del resto ha sentito un terzo del discorso e l'altra metà i due terzi. Qual è il numero medio di minuti ascoltato dai presenti? A) 24 B) 27 C) 30 D) 33 E) 36

Sia 100 il numero dei presenti, il che non inficia il ragionamento. Abbiamo la tabella seguente

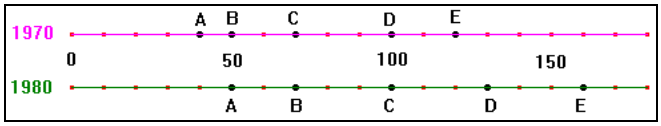
Ascoltatori	Tempo
20	60
10	0
35	20
35	40

Quindi complessivamente sono stati ascoltati 1200 + 700 + 1400 = 3300 minuti da 100 persone. Ciascuno ne ha ascoltati 33. Risposta corretta D

4. (AMC 2001) Nel luogo in cui abita Kristin sul reddito si paga il *p*% di tasse per i primi $28000 e il (*p* + 2)% per la parte che supera i $28000. Kristin nota che lei ha pagato il (*p* + 0,25) % sul totale del suo imponibile. Quanto è questo imponibile?

L'imponibile è $(28000 + x), su cui si pagano $[28000p + x(p + 2)]/100, che deve essere uguale a $(28000 + x)(p + 0{,}25)/100 \Rightarrow x = 4000$, quindi il reddito è $ 32000

5. (AHSME 1988) Nel seguente diagramma indichiamo le popolazioni di cinque città, espresse in migliaia di abitanti, nei due censimenti del 1970 e 1980. Quale delle città ha avuto un maggiore



incremento percentuale nel decennio?

A: 10/40 = ¼ = 25%; B: 20/50 = 40%; C: 30/70 ≈ 43%; D: 30/100 = 30%; E: 40/120 ≈ 33%. Risposta corretta C

6. **(HSMC 2007) John prepara un drink mescolando succhi di mela, arancia e ananas. Per fare ciò usa 2,2 litri in più di succo di mela rispetto al doppio degli altri succhi insieme. La miscela risultante contiene il 70% di succo di mela. Quanti litri di drink ha preparato?**

   Sia x il numero di litri di arancia e ananas, quindi vengono usati $2{,}2 + 3x$ litri, di cui $2{,}2 + 2x$ sono mela, quindi la loro percentuale è $(2{,}2 + 2x)/(2{,}2 + 3x) = 0{,}7 \Rightarrow x = 6{,}6$. Perciò usa $(2{,}2 + 3 \cdot 6{,}6) = 22$ litri

7. **(HSMC 2000) At Pigskins High School 20% of the boys and 80% of the girls attended a football game. If 45% of the student body is female, what percent of the school population attended the game?**

   Alla Pigskins High School il 20% *dei ragazzi e l'*80% *delle ragazze assiste a una partita di calcio. Se il* 45% *di tutti gli studenti è femmina, che percentuale della popolazione assiste alla partita*?

   La popolazione è formata da $f + p = 0{,}45x + 0{,}55x$, con x l'intera popolazione. Alla partita assistono: $0{,}55 \cdot 0{,}2x + 0{,}45 \cdot 0{,}8x = 0{,}47x$, quindi il 47%.

8. **(HSMC 2000) A man has 2 investments: one paying a 6% annual interest and the other paying 5%. The 5% investment is \$680 more than half the 6% one. If the total return after one year is \$102, find the investment at 5%.**

   Un uomo ha 2 *investimenti*: *uno che paga un interesse annuo del* 6% *e l'altro uno del* 5%. *L'investimento del* 5% *è di* \$680 *più di metà dell'altro. Se dopo un anno riceve un totale di* \$102, *quanto ha investito al* 5%?

   L'uomo ha investito $3/2x + 680$ e alla fine dell'anno riceve $0{,}05(680 + x/2) + 0{,}06x = 102 \Rightarrow x = 800$ $\Rightarrow$ quindi al 5% ha investito 1080.

9. **(HSMC 2000) The number n_2 is 25% more than the number n_1, the number n_3 is 20% more than n_2, and n_4 is x % less than n_3. For what value of x is $n_4 = n_1$?**

   Il numero n_2 *è il* 25% *in più del numero* n_1, *il numero* n_3 *è il* 20% *in più di* n_2, *e* n_4 *è* x % *in meno di* n_3. *Per quale valore di* x *si ha* $n_4 = n_1$?

   $n_2 = 1{,}25n_1$; $n_3 = 1{,}2n_2 = 1{,}5n_1$; $n_4 = (1 - x/100)n_3 = 1{,}5(1 - x/100)n_1$. Quindi deve essere $1{,}5(1 - x/100)n_1 = n_1 \Rightarrow x = 100/3$

10. **(HSMC 2002) Increasing x by y % gives 12 whereas decreasing x by y percent gives 8. Find x.**

    Aumentando x *del* y % *si ottiene* 12 *mentre diminuendo* x *del* y% *si ottiene* 8. *Trova* x.

    $$\begin{cases} x(1+y/100)=12 \\ x(1-y/100)=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=10 \\ y=20 \end{cases}$$

11. **(HSMC 2002) A merchant gives a 20% discount on a coat, followed by a 30% discount, followed by a 10% discount. Each new discount is applied to the price of the coat after the previous discount. What single percent discount is equivalent to these three successive discounts? Express your answer as a decimal.**

    Un mercante pratica lo sconto del 20% *su un cappotto, seguito da uno del* 30%, *e poi un ulteriore* 10%. *Ogni nuovo sconto è applicato al prezzo del cappotto dopo il precedente. Che singola percentuale di sconto equivale ai tre sconti successivi? Esprimi la risposta come numero decimale.*

    L'oggetto che costava x alla fine degli sconti costerà $0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}504x$, quindi è stato effettuato uno sconto del 49,6%

12. **(HSMC 2008) Sarah paid \$81 for a dress that had been discounted 25% and then marked down an additional 10%. Taking both discounts into consideration, determine the original price.**

    Sarah paga \$81 *per un abito che è stato scontato del* 25% *e poi riabbassato con un ulteriore* 10%. *Tenuto conto dei due sconti, determinare il prezzo originale.*

    Il prezzo iniziale era x, ed è diventato $0{,}75 \cdot 0{,}9x = \$81 \Rightarrow x = \$120$

13. **(HSMC 2005) Suppose that you own some stock in an Internet company. One day your stock goes up in value by a %, the next day it drops in value by b % and the third day it goes up in value by c %, where a, b and c are all positive integers. The result is that your stock is worth exactly the same as at the beginning of the first day. Find the smallest value of $a + b + c$.**

Supponiamo che possiedi delle azioni in una compagnia Internet. Un giorno le tue azioni aumentano del a %, il giorno successive calano del b % e il terzo giorno aumentano del c %, dove a, b e c sono tutti numeri interi positivi. Come risultato le tue azioni valgono esattamente quanto valevano all'inizio. Trova il minimo valore che può avere a + b + c.

Il prezzo iniziale delle azioni sia p, esse diventano $(1 + a/100)(1 - b/100)(1 + c/100)p = p \Rightarrow (100 + a)(100 - b)(100 + c) = 10^6 = 2^6 5^6$. Poiché I tre fattori sono interi, $100 + a$ e $100 + c$ devono essere maggiori di 100 e $100 - b$ minore di 100. Il più piccolo fattore di 10^6, maggiore di 100 è 125, quindi a e c devono esser minimo 25. Inoltre il più grande fattore di 10^6, minore di 100 è 64, quindi b deve essere minimo 36. Perciò $a + b + c$ minimo è $25 + 36 + 25 = 86$.

14. **(HSMC 2005) In an election, there were two candidates. One of them received 65% of the votes and got 1500 votes more than his competitor. How many people voted?**
In una elezione ci sono due candidati. Uno di loro riceve il 65% *dei voti cioè* 1500 *voti in più del suo avversario. Quanti hanno votato*?
Sia n il numero degli elettori, il primo riceve $0{,}65n$, il secondo $0{,}35n$ e si ha: $0{,}65n = 0{,}35n + 1500 \Rightarrow n = 5000$

Concetto di evento aleatorio e diversi punti di vista della Probabilità

Stabilire quale fra i tre punti di vista probabilistici è più indicato nel trattamento dei seguenti fenomeni. Nelle risposte F = Frequentista, C = Classica, S = Soggettivista

1. **Probabilità che nella prossima estrazione del lotto della ruota di Venezia esca il 12.**
F o C, non ha senso la soggettività
2. **Probabilità che il mio primogenito sia un maschio.**
C o S, non ha senso la frequenza, essendo il primo
3. **Probabilità che la Ferrari vinca il prossimo Gran Premio automobilistico.**
S
4. **Probabilità che il volo Milano – Roma delle 16:00 arrivi con meno di dieci minuti di ritardo.**
F o S, quali sono i casi favorevoli?
5. **Probabilità di ottenere un voto sufficiente nel prossimo compito di matematica.**
S
6. **Probabilità di ricevere una motocicletta in regalo per il prossimo compleanno.**
S
7. **Probabilità che il prezzo della benzina non aumenti più del 10 % nel prossimo anno.**
F o S, quali sono i casi favorevoli o quelli possibili?
8. **Probabilità di fare 14 al totocalcio giocando 4 colonne diverse.**
C
9. **Probabilità di vincere il premio più ricco al "gratta e vinci" acquistando 10 tessere.**
C
10. **Probabilità di selezionare il numero di cellulare di un amico digitando delle cifre a caso.**
C
11. **Probabilità di avere un incidente andando a sciare.**
S
12. **Probabilità di incontrare una diva del cinema sull'aereo.**
S
13. **Probabilità di trovare un biglietto da 100 euro facendo una passeggiata.**
S
14. **Probabilità di avere un poker servito.**
C
15. **Probabilità di ottenere 6 lanciando un dado regolare.**
C
16. **Se un'agenzia di scommesse paga € 1,30 per ogni euro scommesso se accade l'evento E, che probabilità essa assegna all'accadere dell'evento?**
$1/1{,}3 \approx 77\%$
17. **Massimo per una scommessa è disposto a pagare € 6,50 se perde ottenendo € 7,00 se vince. Che**

probabilità egli assegna all'accadere dell'evento?
6,50/7 ≈ 93%

18. **Teresa ritiene che un certo fatto ha la probabilità di accadere del 40%, se perciò scommettesse un euro, quanto vorrebbe ricevere in cambio?**
Dato che rischia 3/5 contro i 2/5 vuole ricevere un premio di 3/2 di quanto ha puntato, perciò € (1 +1,50) = € 2,50

19. **Franco ritiene che un certo fatto ha la probabilità di accadere del 27%, se perciò scommettesse € 5,25, quanto vorrebbe ricevere in cambio?**
€ (5,25 + 5,25 · 73/27) = € 19,44

La concezione frequentista

1. **Nella tabella seguente sono riportati i dati degli stranieri residenti in Italia secondo il censimento ISTAT 2001. Determinare le diverse probabilità frequentiste che uno straniero residente in Italia nel 2001, scelto a caso, appartenesse ad una delle date aree geografiche**

Italia Nord Occidentale	367008
Italia Nord-Orientale	289011
Italia Centrale	224027
Italia Meridionale	75239
Italia Insulare	32078
Italia	**987363**

Italia Nord occidentale: 367008/987363 ≈ 37,17%; Italia Nord Orientale 289011/987363 ≈ 29,27%; Italia Centrale 224027/987363 ≈ 22,69%; Italia Meridionale 75239/987363 ≈ 7,62%; Italia Insulare 32078/987363 ≈ 3,25%

2. **Nel 1997 l'ISTAT ha calcolato che fra il totale dei maschi residenti in Italia, 4334989 avevano un'età compresa tra 0 e 14 anni, 20751462 un'età compresa tra 15 e 64 anni e 8353829 un'età superiore ai 65 anni. Qual è la probabilità che un maschio scelto a caso dall'elenco dell'anagrafe del 1997 risulti avere un'età inferiore ai 15 anni?**
4334989/(4334989 + 20751462 + 8353829) ≈ 12,97%

3. **Nella tabella seguente, dati ISTAT, sono riportati il numero di ricoveri ospedalieri per malattie infettive regolarmente denunciati nel 1997 in Italia. Determinare la probabilità che un paziente ricoverato in un ospedale italiano per una malattia infettiva fosse affetto da a) TBC polmonare; b) Epatite o salmonellosi; c) Malattia infettiva diversa dall'AIDS**

Infezione	Numero infettati
Epatite	13183
Salmonellosi non tifoidale	16020
AIDS	3790
TBC polmonare	3972
TBC extra polmonare	1402

a) 3972/(13183 + 16020 + 3790 + 3972 + 1402) ≈ 10,35% ; b) (13183 + 16020)/38367 ≈ 76,11% ;
c) (38367 – 3790)/38367 ≈ 90,12%

4. **Nella seguente tabella, dati ISTAT, sono riportati i dati relativi al censimento 200l della popolazione delle province del Piemonte, suddivise per sesso. Calcolare la probabilità che un cittadino scelto a caso fra i residenti del Piemonte in quel censimento fosse a) della provincia di Asti; b) un maschio della provincia di Biella; c) una femmina della provincia di Cuneo; d) non della provincia di Torino; e) un maschio**

Capoluogo	Totale	Maschi	Femmine
Torino	2122704	1023748	1098956
Vercelli	176641	84997	91644
Biella	187041	89151	97890
Verbano-Cusio-Ossola	158999	76735	82264
Novara	344010	165379	178631
Cuneo	554992	272303	282689
Asti	207671	100464	107207
Alessandria	414384	198269	216115
Piemonte	**4166442**	**2011046**	**2155396**

a) 207671/4166442 ≈ 4,98%; b) 89151/4166442 ≈ 2,14%; c) 282689/4166442 ≈ 6,78%; d) (4166442 –

2122704)/4166442 ≈ 49,05%; e) 2011046/4166442 ≈ 48,27%

5. Nella tabella seguente, dati ISTAT, sono riportati il numero di morti fra le donne, registrati in Italia nel 1996, suddivise per causa di morte. Determinare la probabilità che una donna morta in Italia nel 1996 sia morta per a) malattia dell'apparato digerente; b) un tumore; c) una malattia

Causa di morte	Numero di morti
Malattie infettive	1262
Tumori escluso seno e utero	65690
Tumori seno e utero	14511
Malattie sistema circolatorio	129886
Malattie ischemiche	34427
Malattie apparato respiratorio	12682
Malattie apparato digerente	12304
Mal definite	4383
Cause violente	11316
Altre	33001

a) 12304/(1262 + 65690 + 14511 + 129886 + 34427 + 12682 + 12304 + 4383 + 11316 + 33001)≈ 3,85%; b) (65690 + 14511)/319462 ≈ 25,11%; c) (319462 – 4383 – 11316 – 33001)/319462 ≈ 84,76%

6. Nella tabella seguente, dati ISTAT, sono riportati il numero di diplomati e laureati nell'A.A. 1997/98 nelle università statali italiane, suddivisi per indirizzi di studio. Determinare la probabilità che uno studente scelto a caso fra quelli diplomati o laureati in una università statale italiana nell'A.A. 1997/98 a) avesse conseguito il titolo in un indirizzo scientifico; b) fosse una femmina diplomata in educazione fisica; c) fosse un maschio laureato in un indirizzo linguistico; d) fosse una femmina laureata in lettere o un maschio in Ingegneria; e) non fosse né un maschio laureato in Agraria, né una femmina laureata in Architettura.

Indirizzo	Totale	Maschi	Femmine
Agrario	2636	1606	1030
Architettura	7234	3700	3534
Chimico–farmaceutico	4411	1704	2707
Economico–statistico	24306	12801	11505
Geo–biologico	5275	1982	3293
Giuridico	18632	8060	10572
Ingegneria	14806	12770	2036
Insegnamento	3838	379	3459
Letterario	12219	2830	9389
Linguistico	8106	679	7427
Medico	10685	4205	6480
Politico–sociale	10094	4212	5882
Psicologico	2678	482	2196
Scientifico	4836	2620	2216
Educazione fisica	2171	1007	1164
T O T A L E	131927	59037	72890

a) 4836/131927 ≈ 3,67%; b) 1164/131927 ≈ 0,88%; c) 679/131927 ≈ 0,51%; d) (9389 + 12770)/131927 ≈ 16,80%; e) (131927 – 1606 – 3534)/131927 ≈ 96,10%

7. Nella tabella seguente, dati ISTAT, sono riportati il numero di impiegati nelle strutture ospedaliere pubbliche italiane nel 1997, suddivisi per qualifica. Determinare la probabilità che un impiegato a caso scelto fra quelli che prestavano servizio in un ospedale italiano nel 1997, fosse a) un medico; b) un tecnico o un amministrativo.

Qualifica	Numero di impiegati
Medici	98637
Personale sanitario ausiliario	306045
Personale tecnico	124337
Personale amministrativo	34383

a) 98637/563402 ≈ 17,51% ; b) (124337 + 34383)/563402 ≈ 28,17%

8. Nella tabella seguente, dati ISTAT, sono riportati il numero di controlli effettuati su alcune colture per stabilire quante di esse avevano residui dannosi di fitofarmaci. Determinare la probabilità che, scegliendo a caso fra quelle esaminate a) un'arancia, risulti dannosa; b) una verdura, sia dannosa; c) una coltura, non sia dannosa; d) una coltura fra quelle dannose, sia una fragola; e) è più probabile scegliere una clementina o una qualsiasi coltura dannosa?

Coltura	Esaminati	Dannosi
Actinidie	70	3
Arance	284	1
Carciofi	257	3
Cavolfiori	69	2
Cavoli broccolo	107	0
Clementine	210	8
Fragole	409	23
Lattughe	654	44
Mele	60	2
Patate	144	1
Pere	101	2
Pesche	493	24
Pomodori	217	5
Radicchi	181	7
Sedani	205	20
Uve da tavola	877	66
TOTALE	4338	211

a) 1/285 ≈ 0,35%; b) (3 + 2 + 0 + 44 + 7 + 20)/(260 + 71 + 107 + 698 + 188 + 225) ≈ 4,91%; c) (4338 – 211)/4549 ≈ 90,72%; d) 23/211 ≈ 10,90%; e) clementine: 210/4549 ≈ coltura dannosa: 211/4549, quindi la seconda.

Probabilità secondo Laplace

***Quando parleremo di dado senza specificare intendiamo quello classico a sei facce, non truccato, con i punteggi da* 1 *a* 6**

1. **Estraiamo un numero a caso dall'insieme *A* = {100; 101; 110; 111; 1000; 1001; 1010; 1100; 1110; 1111}. a) Con quale probabilità contiene più 1 che 0? b) Contiene un numero dispari di 1?**
   a) {101; 110; 111; 1110; 1111}: 5/10 = ½; b) {100; 111; 1000; 1110}: 4/10 = 2/5
2. **Estraiamo un numero a caso dall'insieme *B* = {1; 2; 4; 8; 9; 12; 16; 25; 36}. a) Con quale probabilità esso è un quadrato perfetto? b) È una potenza di 2?**
   a) {1; 4; 9; 16; 25; 36}: 6/9 = 2/3; b) {1; 2; 4; 8; 16}: 5/9
3. **Estraiamo un numero a caso dall'insieme *C* = {12; 123; 131; 132; 124; 125; 152}. a) Con quale probabilità contiene più cifre dispari che cifre pari? b) Più cifre pari che cifre dispari? c) Ha cifre la cui somma è un numero pari? c) Ha cifre il cui prodotto è dispari?**
   a) {123; 131; 132; 125; 152}: 5/7; b) {123; 132; 125; 152}: 4/7; c) {123; 132; 125; 152}: 4/7;
   d) {131}: 1/7
4. **Dall'insieme *D* = {6; 8; 12; 16; 20; 24; 28; 32} estraiamo un numero a caso. Con quale probabilità a) è divisibile per 4? b) È divisibile per 6? c) Ha più di 6 divisori? d) Ha meno di 4 divisori?**
   a) {8; 12; 16; 20; 24; 28; 32}: 7/8; b) {6; 12; 24}: 3/8; c) {24}: 1/8; d) non ce ne sono: 0
5. **In un'urna immettiamo 100 palline indistinguibili al tatto: 50 bianche, 20 nere e 30 rosse. Estraiamo una pallina a caso. Con quale probabilità essa è di colore a) bianco? b) Nero? c) Rosso?**
   a) 50/100 = ½; b) 20/100 = 1/5; c) 30/100 = 3/10
6. **Lanciamo un dado a 12 facce, su ciascuna delle quali è impresso uno dei primi 12 numeri naturali. Con quale probabilità uscirà fuori un numero divisibile per 4?**
   {4; 8; 12}: 3/12 = ¼
7. **Lanciamo un dado a 20 facce. Con quale probabilità uscirà un punteggio rappresentato da un numero a) primo? b) Multiplo di 5?**
   a) {2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19}: 8/20 = 2/5; b) {5; 10; 15; 20}: 4/20 = 1/5
8. **Da un mazzo di carte italiane da 40 estraiamo una carta. Con quale probabilità ha un valore a) compreso tra 2 e 5? b) compreso tra 3 e 6 ed è di bastoni?**
   a) basta considerare un solo seme: 4/10 = 2/5; b) 4/40 = 1/10
9. **Qual è la probabilità di estrarre una figura rossa da un mazzo di 52 carte da poker?**
   Ci sono 4 semi e ogni seme ha 3 figura, quindi 6/52 = 3/26
10. **Qual è la probabilità di ottenere un numero multiplo di 5 come primo estratto nella ruota di Na-**

poli? Se non escono numeri multipli di 5 da 500 settimane come primi estratti nella ruota di Napoli, la precedente probabilità cambia? Giustificare la risposta.
18/90 = 1/5; no, ogni estrazione è indipendente dalle precedenti

11. Con riferimento al precedente quesito, se i numeri fossero 92, la probabilità cambierebbe? E se fossero 95? Giustificare la risposta.
Sì, sarebbe 18/92 = 9/46; No, 19/95 = 1/5

12. Nel gioco della briscola gli assi e i tre sono chiamati carichi, le carte con punteggio 2, 4, 5, 6 e 7 si chiamano lisci. Determinare la probabilità che estraendo a caso una carta da un mazzo regolare di 40, essa sia a) un carico; b) un liscio.
a) Basta considerare un solo seme: 2/10 = 1/5; b) 5/ 10 = ½

13. Nel gioco della briscola l'asso vale 11 punti, il tre 10 punti, il re 4 punti, il cavallo 3 punti, il fante o donna 2 punti. Qual è la probabilità di estrarre una carta da un mazzo regolare di 40, il cui valore sia maggiore o uguale a 3 punti?
4/10 = 2/5

14. Sue Ellen deve pensare a un numero di 3 cifre multiplo di 7; con quale probabilità la sua amica Marianna riuscirà a indovinarlo al primo tentativo?
I multipli di 7 vanno da 105 = 7 · 15 a 999 = 7 · 142, quindi sono 143 – 15 = 128. La probabilità è 1/128

15. Gianluca dice a Federica di essere nato in Gennaio in un giorno il cui valore numerico è pari ma non divisibile per 3. a) Qual è la probabilità che Federica lo indovini al primo tentativo? b) Se Gianluca fosse nato in Aprile o in Febbraio sarebbe cambiato il precedente risultato? Giustificare la risposta.
a) {2; 4; 8; 10; 14; 16; 20; 22; 26; 28}: 1/10; b) no, perché avere 28, 29 o 30 giorni non cambia il risultato, dato che {29; 30; 31} non sono casi favorevoli.

16. In un urna sono posti sei bigliettini con i seguenti nomi di donna: Anna, Barbara, Carla, Dafne, Erica, Federica. Determinare la probabilità che estraendo un bigliettino questo abbia scritto un nome che contenga a) la lettera a; b) solo un tipo di vocale; c) più vocali che consonanti; d) un numero di consonanti doppie del numero di vocali; e) tante vocali quante consonanti.
a) Tutti i nomi l'hanno: 1; b) {Anna, Barbara, Carla}: 3/6 = ½; c) {Erica}: 1/6;
d) Nessun nome lo verifica: 0; e) {Anna, Federica}: 2/6 = 1/3

17. Un numero è scelto a caso nel seguente insieme: {0,25; 0,5; 0,75; 0,8; 1; 2; 2,2; 3; 4; 9,7}. Qual è la probabilità che il suo reciproco sia maggiore di 1?
Dato che sono numeri positivi, se il reciproco è maggiore di 1 il numero è minore di 1, quindi: 4/10 = 2/5

18. A una casa da gioco di Las Vegas chi lanciando due dadi ottiene 7, riceverà la posta che ha puntato moltiplicata per il reciproco della probabilità che ha di effettuare quel lancio. Se Tom ha fatto 7 e ha ricevuto $ 150, quanto aveva puntato?
Si fa 7 in 6 modi: (1; 6), (2; 5), …, (6; 1), su un totale di 36 possibili diversi esiti. Quindi la probabilità è 1/6. Perciò puntando x si ottiene $6x = \$150 \Rightarrow x = \$\ 25$

19. Da un mazzo di 52 carte da poker viene eliminato l'asso di picche, le carte sono mescolate e la carta superiore è eliminata senza guardarla. Qual è la probabilità che tale carta sia un asso?
Sono rimasti 3 assi. 3/51 = 1/17

20. Gianluca deve telefonare a Lucilla, che ha recentemente cambiato numero telefonico, ma non è sicuro dell'ultima cifra di tale numero. Se può effettuare solo due telefonate, qual è la probabilità che riesca a indovinare il numero di Lucilla?
2/10 = 1/5

21. 20 pizze tutte con condimenti diversi devono essere consegnate a 20 diversi indirizzi, purtroppo a causa di un colpo di vento il fattorino perde il foglio con i corretti destinatari. Qual è la probabilità che esattamente 19 persone ricevano la pizza che hanno ordinato?
Ovviamente l'evento è impossibile, dato che se 19 ricevono la pizza corretta, anche il ventesimo deve riceverla.

22. In un'urna vi sono alcune palline bianche, 24 rosse e 40 verdi, se la probabilità di estrarre una pallina bianca è 13/17, quante sono le palline bianche?

$$\frac{b}{b+24+40}=\frac{13}{17}\Rightarrow 17b = 13b + 832 \Rightarrow b = 208$$

23. In un'urna vi sono alcune palline bianche, 25 rosse e 10 verdi, se la probabilità di estrarre una pallina rossa è 5/12, quante sono le palline bianche?

$$\frac{25}{b+35}=\frac{5}{12}\Rightarrow 300 = 5b + 175 \Rightarrow b = 25$$

24. In un'urna vi sono alcune palline bianche, 15 rosse e 20 verdi, se la probabilità di estrarre una pallina verde è 7/15, quante sono le palline bianche?

$\frac{20}{b+35}=\frac{7}{15}\Rightarrow 300 = 7b + 245 \Rightarrow b = 55/7$ che non è un numero intero, quindi i dati sono incoerenti

25. La probabilità di ottenere un numero multiplo di 13 come primo estratto nella ruota di Napoli è la stessa di ottenere un numero multiplo di *k*. Quali valori può assumere *k*?

Nei primi 90 numeri ci sono 6 multipli di 13, da 13 a 78; ci sono anche 6 multipli di 14 (da 14 a 84) e di 15 (da 15 a 90). Tutti gli altri numeri, da 1 a 90, hanno più o meno di 6 multipli.

26. Con riferimento al precedente quesito, esistono numeri interi *k* per cui la probabilità di estrarre un multiplo di *k* coincida con la probabilità di estrarre un multiplo di 8?

Ci sono 11 multipli di 8, da 8 a 88. I numeri minori di 8 hanno più multipli, per esempio 7 ne ha 12, da 7 a 84. I numeri maggiori di 8 ne hanno di meno, 9 per esempio ne ha 10, da 9 a 90. Quindi la risposta è no.

27. Con riferimento al precedente quesito, da un certo valore di *k* minore di 90, la probabilità di estrarre un multiplo di *k* non varia. Quanto vale *k* e qual è la detta probabilità?

Il primo numero che ha un solo multiplo minore o uguale a 90 è 46. Tutti quelli che lo seguono non possono averne più di uno, ossia essi stessi, perché il loro doppio è maggiore di 90.

28. Lanciamo una moneta regolare in aria per due volte successive. Qual è la probabilità che entrambe le volte otteniamo testa?

I casi possibili sono 4: {T, T), (T, C), (C, T), (C, C)} , quindi ¼

29. Lanciando due dadi otteniamo punteggi che vanno da 2 a 12. Per ciascun punteggio determinare la relativa probabilità di ottenerlo.

2.{(1, 1)}: 1/36; 3. {(1, 2), (2, 1)}: 2/36 = 1/18; 4. {(1, 3), (2, 2), (3, 1)}: 3/36 = 1/12; 5. {(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)}: 4/36 = 1/9; 6. {(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)}: 5/36 ; 7. {(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)}: 6/36 = 1/3; 8. {(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)}: 5/36 = 1/6; 9. {(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)}: 4/36 = 1/9; 10. {(4, 6), (5, 5), (6, 4)}: 3/36 = 1/12; 11.{(5, 6), (6, 5)}: 2/36 = 1/18; 12.{(6, 6)}: 1/36

30. Determinare quanti sono i casi possibili ottenibili lanciando due dadi a forma del poliedro regolare indicato. Quale punteggio è il più probabile? Quanto vale questa probabilità? a) Tetraedro; b) Ottaedro; c) Dodecaedro; d) Icosaedro

a) 16, da (1, 1) a (4, 4); il punteggio più probabile è quello centrale, quindi 5, con 4 casi (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1). Probabilità 4/16 = ¼; b) 64, da (1, 1) a (8, 8); il punteggio più probabile è 9, con 8 casi (1, 7), (2, 6), …, (7, 1). Probabilità 8/64 = 1/8; c) 144, da (1, 1) a (12, 12); punteggio più probabile 13, con 12 casi (1, 12), (2, 11), …, (12, 1). Probabilità 12/144 = 1/12; d) 400, da (1, 1) a (20, 20); punteggio più probabile 21, con 20 casi (1, 20), (2, 19), … (20, 1). Probabilità 20/400 = 1/20

31. Tenuto conto del precedente quesito, rispondere nel caso di un ipotetico dado a *n* facce.

In generale i casi sono n^2, da (1, 1) a (n, n); il punteggio più probabile è quello centrale, quindi $n + 1$, con n casi (1, n), (2, n – 1), … (n, 1). Probabilità $n/ n^2 = 1/n$

32. Quanti sono i casi possibili lanciando a) 3 dadi? b) 4 dadi? c) *n* dadi?

a) ogni dado ha 6 possibili risultati, quindi $6^3 = 216$; b) dal precedente $6^4 = 1296$; c) in generale: 6^n

33. In un gioco è richiesto il lancio di due dadi a forma di cubo. Magda ha solo un dado a forma di dodecaedro. Ella dice che non cambia nulla, perché in ogni caso due dadi a forma di cubo e un dado a forma di dodecaedro hanno sempre un totale di 12 facce. Secondo te ha ragione? Giustifica la risposta.

No, perché i casi possibili sono rispettivamente 36 e 144

34. Uno dei primi problemi di probabilità fu presentato a Galileo da un giocatore di dadi, il quale aveva osservato che in un gioco dell'epoca, nel quale si lanciavano 3 dadi, i punteggi 10 e 11 si ottenevano più frequentemente dei punteggi 9 e 12. Calcolare le rispettive probabilità delle due

coppie di eventi.

I casi possibili abbiamo visto che sono 216. 10 come somma di tre numeri inferiori a 7 si ottiene come 1 + 3 + 6 = 1 + 4 + 5 = 2 + 2 + 6 = 2 + 3 + 5 = 2 + 4 + 4 = 3 + 3 + 4, ciascuna di queste somme si ottiene in diversi modi permutando gli addendi, quindi in 3! + 3! + 3 + 3! + 3 + 3 = 27 modi. 11 = 1 + 4 + 6 = 1 + 5 + 5 = 2 + 3 + 6 = 2 + 4 + 5 = 3 + 3 + 5 = 3 + 4 + 4, che equivalgono sempre a 6 + 3 + 6 + 6 + 3 + 3 = 27 modi Perciò la probabilità di ottenere 10 o 11 è 27/216 = 1/8. Invece 9 = 1 + 2 + 6 = 1 + 3 + 5 = 1 + 4 + 4 = 2 + 2 + 5 = 2 + 3 + 4 = 3 + 3 + 3, per 25 modi. Ugualmente 25 modi per 12 = 1 + 5 + 6 = 2 + 4 + 6 = 2 + 5 + 5 = 3 + 3 + 6 = 3 + 4 + 5 = 4 + 4 + 4. In entrambi i casi la probabilità è 25/216

35. Giorgio ha acquistato tutti i biglietti di una lotteria che contengono la lettera G. Sapendo che un biglietto della lotteria è formato da due lettere scelte fra le 26 dell'alfabeto anglosassone e da 3 cifre, determinare la probabilità di Giorgio di vincere il premio.

I casi possibili sono $26^2 \cdot 10^3$, i casi favorevoli sono: 10^3, quindi la probabilità è $1/26^2 \approx 1{,}48\%$. Più semplicemente dobbiamo considerare la sequenza GG e basta, dato che i numeri di questa sequenza Giorgio li ha tutti.

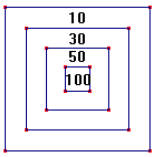
36. Con riferimento al precedente quesito. a) Se i numeri avessero 5 cifre cambierebbe la probabilità? b) Se le lettere fossero 4 cambierebbe la probabilità? Giustificare le risposte.

a) Per quanto detto sui numeri no; b) Stavolta sì, perché la probabilità sarebbe $1/26^4$

37. In un'urna sono posti 100 bigliettini, ciascuno dei quali porta scritto uno dei diversi numeri naturali fra 1 e 100. Si estrae un bigliettino e ci viene detto che esso è un multiplo di *n*. Se sappiamo che la probabilità di effettuare una tale estrazione è 9/100, quanto vale *n*?

Dobbiamo considerare quale numero ha esattamente 9 multipli in [1; 100], facilmente si trova che è 11 (11, 22, …, 99)

38. In figura è rappresentato un bersaglio in cui ciascun settore ha un contorno di forma quadrata. Le dimensioni di ciascun contorno sono, in *cm,* rispettivamente 7, 5, 3 e 1. Si ipotizzi che ogni qualvolta si lancia una freccetta questa colpisca sempre il bersaglio. Determinare la probabilità che lanciando una sola freccetta si ottenga punti a) 50 b) 30



a) I casi possibili è l'area del quadrato maggiore, ossia 49; i casi favorevoli sono la differenza fra l'area del punteggio 50 e quella di 100, cioè 8, quindi la probabilità è 8/49;
b) Stavolta i casi favorevoli sono: 25 – 9 = 16. Probabilità: 16/49

39. Con riferimento al problema precedente, se il punteggio di ciascun settore dovesse essere inversamente proporzionale alla probabilità di ottenerlo, lasciando inalterato il punteggio 10, quanto dovrebbero valere gli altri punteggi?

Calcoliamo le probabilità di ottenere 10: (49 – 25)/49 = 24/49 e 100: 1/49. Pertanto se 10 corrisponde a 1/24, 30 a 1/16, perciò il punteggio dovrebbe essere 24/16 · 10 = 15; 50 dovrebbe essere 24/8 · 10 = 30; e 100 diventa 240.

40. Fra tutti i numeri naturali di tre cifre, si sceglie un numero a caso. a) Qual è la probabilità che sia una potenza di 2? b) Una potenza di 3? c) Una potenza di un numero primo?

a) I casi favorevoli sono: $\{2^7, 2^8, 2^9\}$, quindi la probabilità è 3/900 = 1/300;
b) i casi favorevoli sono: $\{3^5, 3^6\}$, quindi la probabilità è 2/900 = 1/450;
c) i casi favorevoli sono: $\{11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2, 29^2, 31^2\}$, quindi la probabilità è 7/900

41. Lanciando due dadi qual è la probabilità di ottenere un punteggio primo?

La somma deve essere uno degli elementi dell'insieme: {2; 3; 5; 7; 11}, il che si ottiene in (1 + 2 + 4 + 6 + 2) = 15 modi, perciò la probabilità è 15/36 = 5/12

42. Due numeri primi vengono scelti a caso dai primi dieci numeri primi. Qual è la probabilità che la loro somma faccia 24?

L'insieme da cui scegliere è {2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29}, possiamo scegliere due numeri diversi in $\binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ modi, di questi sono favorevoli (5; 19), (7; 17), (11; 13), quindi la probablità è 3/45 = 1/15

43. Un numero è scelto a caso fra i numeri primi minori di 100. Qual è la probabilità che esso contenga il 9 come una delle sue cifre?

I numeri primi minori di 110 sono 25, di questi sono favorevoli: {19; 29; 59; 79; 89; 97}, quindi la probabilità è 6/25

44. Ciascuno dei 1347 studenti di una scuola riceve un tesserino identificativo numerato progressivamente da 1 a 1347. Jasmine è superstiziosa e crede che il 7 le porti sfortuna. a) Con quale probabilità Jasmine riceverà un tesserino non sfortunato? b) Quale fra le dieci cifre è quella con la quale si ha maggiore probabilità di non ricevere un tesserino che la contenga? c) E con quale fra le dieci cifre la probabilità è maggiore?

a) Per determinare quanti sono i casi favorevoli distinguiamo i numeri da 1 a 999 e quelli da 1000 a 1347. Nei primi calcoliamo a parte quelli della fascia 700 – 799, che sono 100. I rimanenti possono contenere il 7 come cifra delle unità 7 o delle decine. Questi ultimi sono 10 per centinaio, gli altri sono anch'essi 10 per centinaio, ma ne contiamo 9 perché se no x77 sarebbe contato due volte. Pertanto abbiamo altri 19 · 9 = 171 numeri. In effetti la stesa cosa vale per i numeri da 1000 a 1299, poiché il 7 può occupare sempre le sole posizioni di cifra delle unità o delle decine, quindi abbiamo altri 19 · 3 = 57 numeri con almeno un 7. Infine consideriamo i numeri {1307; 1317; 1327; 1337; 1347}. Infine abbiamo 100 + 171 + 57 + 5 = 303 casi favorevoli, quindi la probabilità è 303/1347 = 101/449.

b) Ogni cifra si presenta lo stesso numero di volte fino a 999. Passando nella fascia mille, ovviamente lo 0 e l'1 si presenteranno più che le altre cifre, e lo stesso accadrà per il 2 e il 3 arrivando fino a 1339. A quel punto avremo i numeri da 1340 a 1347, in cui non compaiono 8 e 9, che quindi rispetto ai numeri da 4 a 7 si presentano meno volte;

c) Per quanto detto prima è 1, dato che tutti i numeri da 1000 a 1347 la contengono.

45. Scegliamo a caso due distinti numeri dall'insieme dei primi dieci numeri primi, con quale probabilità la loro somma è 24?

Casi favorevoli: {(5; 19), (7; 17), (11; 13)}, quindi la probabilità è 3/ 45 = 1/15

46. Dall'insieme dei primi 10 numeri primi scegliamo a caso un elemento. a) Qual è la probabilità che una delle sue cifre sia 3 o 5? b) Che una delle sue cifre sia il 3 o la sua cifra delle decine sia 1?

a) Casi favorevoli {3, 5, 13, 23}, quindi 4/10 = 2/5; b) Casi favorevoli {3, 11, 13, 17, 19, 23}, quindi 6/10 = 3/5.

47. Claudia e Tom giocano con due dadi e hanno stabilito che chi per primo ottiene 7, riceverà un numero di caramelle uguale al numero di quelle che già possiede moltiplicato per il reciproco della probabilità che ha di effettuare quel lancio. Se Tom ha fatto 7 e ha ricevuto 150 caramelle, quante ne aveva?

La probabilità è 1/6, quindi 150/6 = 25

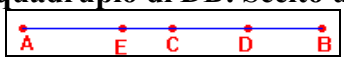
48. Riccardo ha scommesso con un amico che lanciando due dadi riesce a ottenere 8 al primo tentativo; per aumentare la sua probabilità di vincere aggiunge un puntino in una delle facce di uno solo dei due dadi. In quale faccia deve aggiungere il puntino?

Nel dado non truccato la probabilità è 5/36, dato che non può ottenere 8 se in una delle facce esce 1, dovrà aggiungere il puntino proprio a questa faccia, in questo modo avrà una possibilità in più, cioè un altro (2; 6) che lo fa vincere.

49. In un'urna sono posti dei bigliettini con su scritti tutti i numeri naturali non superiori a 100. Sappiamo che vi è 1 bigliettino per ogni numero non superiore a 50, mentre vi sono tre bigliettini che portano scritto lo stesso numero se esso è superiore a 50. Determinare la probabilità che venga estratto un quadrato perfetto.

I quadrati perfetti inferiori a 50 sono {1; 4; 9; 16; 25; 36; 49} per cui vi sono 7 bigliettini, da 50 a 99 ve ne sono altri 3, quindi altri 9 bigliettini, per un totale di 16 su 50 + 3 · 50 = 200 bigliettini totali. Perciò la probabilità è 16/200 = 2/25

50. Il segmento *AB* in figura è il doppio di *AC*, il triplo di *AE* e il quadruplo di *DB*. Scelto un punto a caso su *AB*, qual è la probabilità che appartenga anche a *EC*?



Dai dati se *AB* è lungo 12*x*, *AC* è 6*x*, *AE* 4*x* e *DB* 3*x*, pertanto *EC* è lungo 2*x* e la probabilità è 2/12 = 1/6.

51. Giocando una sola colonna al totocalcio, gli eventi *fare* 14 e *fare zero*, sono equiprobabili? Giustificare la risposta.

No, perché 14 si può fare in un solo modo, mentre 0 in molti di più.

52. Consideriamo i numeri usciti in una certa estrazione sulla ruota di Milano. Quale fra i seguenti

eventi è più probabile: *escono i numeri* 1, 2, 3, 4, 5 oppure *escono i numeri* 13, 41, 25, 78, 61? Giustificare la risposta.
Ogni cinquina è equiprobabile a un'altra.

53. Consideriamo il gioco della roulette e i punteggi usciti in tre giocate successive. Quale fra i seguenti eventi è più probabile: *escono i numeri* 13, 14, 15 oppure *escono i numeri* 13, 12, 11 o *escono i numeri* 13, 13, 13? Giustificare la risposta.
Ogni terna è equiprobabile, dato che la pallina non ha *memoria*, quindi non ricorda e non tiene conto di quale punteggio ha raggiunto in precedenza.

54. In un'urna che contiene 100 palline numerate da 1 a 100, se ne estrae una. Determinare la probabilità che la pallina estratta abbia un'etichetta il cui numero sia multiplo di 13. Determinare nello stesso fenomeno eventi equiprobabili al precedente.
Nei primi 100 naturali vi sono 7 multipli di 13, quindi la probabilità è il 7%. Se restiamo sempre nei multipli, anche i multipli di 14 sono 7, quindi estrarre un multiplo di 14 è equiprobabile al precedente.

55. Si lancia un dado e si valuta il punteggio ottenuto. Determinare quale fra i seguenti eventi relativi al punteggio ottenuto sono equiprobabili all'evento punteggio pari. Punteggio a) *dispari*; b) *multiplo di* 3; c) *primo*; d) *il cui quadrato è maggiore di* 13; e) *il cui quadrato contiene la cifra* 6.
La probabilità è ½, hanno questa probabilità gli eventi a), c) e d). La probabilità di b) è 2/6 = 1/3, quella di e) è 0.

56. Lanciamo due dadi e valutiamo i punteggi ottenuti. Quale punteggio è equiprobabile a 6?
La probabilità che esca 6 è 5/36 ({(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)}). Lo stesso accade per 8 ({(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)})

57. Nel lancio di due dadi quale punteggio è equiprobabile a n ($2 \le n \le 12$)?
I punteggi n e $14 - n$ sono equiprobabili, quindi solo il punteggio 7 non ha eventi equiprobabili.

58. Il signor Gianni ha giocato i numeri 13, 41 e 72 come terno secco, sono però usciti i numeri 13, 41 e 71. Allora il signor Gianni dice di non avere vinto per un punto. Ha ragione a dire così? Giustificare la risposta.
No, perché ha indovinato due numeri su 3 e il terzo ha probabilità 1/88 di essere uguale a quello su cui ha puntato.

59. Lanciando una moneta 6 volte è più probabile ottenere la sequenza TCTCTC oppure TTTCCC? Giustificare la risposta.
Sono equiprobabili, perché l'ordine di uscita non conta, ma solo il fatto che vi siano uno stesso numero di teste e di croci.

60. Consideriamo gli insiemi $X = \{5; 6; 7; 8\}$, $Y = \{4; 5; 7; 9; 11\}$, $W = \{0; 3; 5; 7; 8\}$ e $Z = \{0; 2; 4; 6\}$. Determinare la probabilità che scegliendo due insiemi a caso: a) la loro unione abbia un numero pari di elementi; b) la loro differenza in almeno uno dei due sensi, abbia 3 elementi; c) la loro intersezione abbia 1 elemento; d) la loro differenza simmetrica abbia un numero dispari di elementi.

a) Abbiamo: $|X \cup Y| = 7$, $|X \cup W| = 6$, $|X \cup Z| = 7$, $|Y \cup W| = 8$, $|Y \cup Z| = 8$, $|W \cup Z| = 8$, pertanto la probabilità è 4/6 = 2/3;
b) $|X \setminus Y| = 2$, $|Y \setminus X| = 3$, $|X \setminus W| = 1$, $|W \setminus X| = 2$, $|X \setminus Z| = 3$, $|Y \setminus W| = 3$, $|Y \setminus Z| = 4$, $|Z \setminus Y| = 3$, $|W \setminus Z| = 4$, $|Z \setminus W| = 3$, pertanto la probabilità è 5/6;
c) $|X \cap Y| = 2$, $|X \cap W| = 3$, $|X \cap Z| = 1$, $|Y \cap W| = 2$, $|Y \cap Z| = 1$, $|W \cap Z| = 1$, pertanto la probabilità è 3/6 = ½;
d) $|X \Delta Y| = 5$, $|X \Delta W| = 3$, $|X \Delta Z| = 6$, $|Y \Delta W| = 6$, $|Y \Delta Z| = 7$, $|W \Delta Z| = 7$, pertanto la probabilità è 2/6 = 1/3

61. Da un mazzo di 52 carte da poker estraiamo una carta. Quale fra i seguenti eventi è equiprobabile all'evento la carta ha un valore superiore al 7? La carta a) *è una figura*; b) *è di seme rosso*; c) *ha un valore dispari*; d) *ha un valore la somma delle cui cifre è multipla di* 3; e) *ha un valore il cui quadrato contiene una sola volta la cifra* 1.
La probabilità del primo evento è 6/13, le altre probabilità sono: a): 3/13; b): ½; c): 7/13; d): 4/13: {3; 6; 9; 12}; e): 6/13: {1; 4; 9; 10; 12; 13}. Quindi l'evento e).

62. Data la funzione f: $A = \{-1; -2; -3; -4; -5\} \to B = \{3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ definita dalla legge $f(x) = -x$. Determinare la probabilità che scelto un elemento a caso a) in A esso appartenga al dominio di f; b) in B esso appartenga al codominio di f.

a) Il dominio di f è: {–3; –4; –5}, quindi la probabilità richiesta vale 3/5;

b) Il codominio di f è {3; 4; 5}, quindi la probabilità richiesta vale ½

63. Due panini al prosciutto e due al salame vengono foderati di carta stagnola e messi in un sacchetto. Qual è la probabilità che prendendo due panini a caso, siano entrambi imbottiti allo stesso modo?

I casi possibili sono $\binom{4}{2} = 6$, quelli favorevoli 2, quindi la probabilità è 1/3

64. Lanciamo 3 dadi. Con che probabilità si ottiene un punteggio a) pari; b) divisibile per 5.

a) I punteggi vanno da 3 a 18 e, come nel caso di due dadi sono *accoppiati*, nel senso che 3 ha la stessa probabilità di 18, 4 di 17, e così via, sino a 9 e 10, pertanto i due eventi pari e dispari sono equiprobabili: ½;

b) I casi possibili sono $6^3 = 216$; quelli favorevoli sono il 5 ({(1, 1, 3), (1, 2, 2)} e le loro permutazioni); il 10 ({(1, 3, 6), (1, 4, 5), (2, 2, 6), (2, 3, 5), (2, 4, 4), (3, 3, 4)} e le loro permutazioni); e il 15 ({(3, 6, 6), (4, 5, 6)}, (5, 5, 5) e le loro permutazioni). Per un totale di 6 + 27 + 10 = 43. Quindi la probabilità è: 43/216

65. In un sacchetto sono poste 5 bacchettine di legno, che misurano, in *cm,* rispettivamente 1, 2, 3, 4 e 5. Tiziana estrae a caso tre bacchettine; qual è la probabilità che con esse si possa costruire un triangolo? Suggerimento: tenere conto della disuguaglianza triangolare.

I casi possibili sono $\binom{5}{2} = 10$, quelli favorevoli: {(1, 3, 5), (2, 3, 4), (3, 4, 5), quindi la probabilità è 3/10.

66. La questione è la stessa dell'esercizio precedente, ma le bacchette misurano, in *cm* 3, 3, 4, 5 e 5. Qual è la probabilità che Tiziana formi un triangolo a) isoscele; b) equilatero; c) rettangolo; d) rettangolo e isoscele.

I casi possibili sono 10 per tutti i casi. Per i casi favorevoli si deve tenere conto che bacchette di uguale misura sono in ogni caso bacchette diverse, quindi per esempio le bacchette (3, 4, 5) possono prendere in un solo modo, escluso l'ordine, mentre (3, 3, 5) in 2 modi distinti $(3, 3, 5_1)$ e $(3, 3, 5_2)$, perché le bacchette che misurano 5 sono due distinte. a) (3, 3, 4), $(3_1, 5, 5)$, $(3_2, 5, 5)$, $(3, 3, 5_1)$, $(3, 3, 5_2)$, (4, 5, 5), probabilità: 6/10 = 3/5; b) ovviamente 0; c) $(3_1, 4, 5_1)$, $(3_2, 4, 5_1)$, $(3_1, 4, 5_2)$, $(3_2, 4, 5_2)$. Probabilità 4/10 = 2/5; d) ovviamente 0.

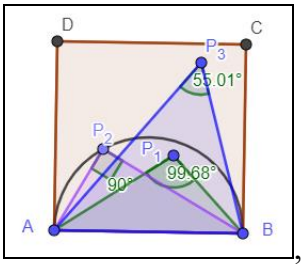
67. Dato uno spazio di eventi finito, è sempre possibile trovare un evento la cui probabilità di accadere è ½? Giustificare la risposta.

No se la cardinalità dello spazio è dispari, ovviamente non possiamo ottenere due sottoinsiemi che completano l'insieme entrambi di cardinalità pari o dispari.

68. Usando le cifre da 1 a 3, due bambini scrivono ciascuno un numero di tre cifre. Determinare la probabilità che a) abbiano scritto lo stesso numero; b) esattamente una cifra sia stata scritta nella stessa posizione; c) almeno una cifra sia scritta nella stessa posizione; d) due cifre siano scritte esattamente nella stessa posizione.

I casi possibili sono: $3^3 = 27$. Quindi le probabilità sono: a) 1/27; b) fissata la cifra nella posizione corretta, le altre due cifre devono essere diverse, quindi se il primo ha scritto *abc*, abbiamo i numeri *axy*, *xby* e *xyc*, dove *x* e *y* sono diversi dalle corrispondenti cifre del primo. E ciò si verifica in 4 modi per ciascun caso. Perciò probabilità: 12/27; c) in questo caso conviene considerare il caso complementare, tutte le cifre sono scritte in ordine diverso, perciò se il primo scrive *abc*, il secondo scrive *xyz*, con *x* diverso da *a*, in 2 modi, *y* da *b* in 2 modi e *z* da *c* in 2 modi; per un totale di $2^3 = 8$ modi. La probabilità è perciò (27 – 8)/27 = 19/27; d) Stavolta una sola cifra deve essere scritta in modo diverso, così per *abc* il secondo deve scrivere *xbc*, *axc* oppure *abx*, il che si effettua in 6 modi. Prbabilità: 6/27.

69. Un punto è scelto a caso all'interno di un quadrato. Qual è la probabilità che il triangolo formato dal punto e dagli estremi di un lato del quadrato sia un triangolo acutangolo?

Come mostrato in figura, 

, solo i punti del tipo P_3, vanno bene, dato che quelli di tipo P_2, ossia sulla semicirconferenza di diametro AB formano angoli rettangoli e quelli interni al semicerchio angoli ottusi. Perciò i casi possibili sono ovviamente l'area del quadrato, diciamo x^2, e quelli favorevoli sono $[x^2 - ½\, \pi(x/2)^2]$, infine la probabilità è $1 - \pi/8$.

70. Tagliamo una cordicella a caso, qual è la probabilità che i due pezzi siano tali che il più lungo sia il triplo del più corto?

Dobbiamo scegliere il punto dove tagliare nel primo quarto, quindi la probabilità è proprio ¼

71. Con riferimento al problema precedente, qual è la probabilità che il pezzo più lungo sia *n* volte il più corto?

Stavolta dividiamo il segmento in $(n + 1)$ parti e dobbiamo scegliere il primo pezzo. Probabilità $1/(n + 1)$

72. Una bacchetta di 2,5 *m* si rompe in due parti, qual è la probabilità che sommando le misure arrotondate all'intero più vicino, dei due pezzi rotti si ottenga 3? Per esempio se i due pezzi misurano 0,43 e 2,07, sommeremo 0 + 2 = 2.

I due pezzi sono lunghi x e $2{,}5 - x$. Se $0 < x < 0{,}5$ allora la somma arrotondata sarà $0 + 2 = 2$; se $0{,}5 \le x < 1$ avremo $1 + 2 = 3$; se $1 \le x < 1{,}5$ avremo $1 + 1 = 2$; se $1{,}5 \le x < 2$ avremo $2 + 1 = 3$; infine se $2 \le x < 2{,}5$ avremo $2 + 0 = 2$. Pertanto abbiamo 2 scelte favorevoli su un totale di 5

73. Scriviamo le lettere della parola PRESTO su sei bigliettini, che estraiamo casualmente uno alla volta, formando così una nuova parola. Con quale probabilità tale parola inizia e finisce per vocale?

I casi possibili sono gli anagrammi della parola, cioè $6! = 720$. I casi favorevoli sono quegli anagrammi che iniziano per E e finiscono per O o viceversa, quindi sono il doppio delle permutazioni delle 4 consonanti rimanenti, cioè 48. Quindi la probabilità è $48/720 = 1/15$

74. Con quale probabilità un numero intero di 10 cifre le ha tutte diverse, ossia una permutazione di 1234567890?

I casi possibili sono $9 \cdot 10^9$, quelli favorevoli sono invece 10!, quindi la probabilità è ≈ 0,40%

75. Il gioco della roulette è equo? Giustificare la risposta.

No, perché puntando su un numero si vince 36 volte la posta, mentre la probabilità è 1/37 o 1/38, seconda che vi sia 0 o anche 00.

76. Con riferimento al quesito precedente, quanto dovrebbe riceversi puntando € 1,00 su un numero, se il gioco fosse equo, nei due casi?

Da quanto detto € 37,00 oppure € 38,00

77. In un gioco testa/croce quante volte dovrebbe pagarsi la posta, perché sia considerato equo?

Dato che la probabilità di vincere è uguale a quella di perdere, ½, il doppio della posta, 2.

78. In un gioco in cui si lancia un dado e si punta sull'uscita di un dato punteggio, quante volte dovrebbe pagarsi la posta, perché sia considerato equo?

Dato che la probabilità di vincere è 1/6, 6 volte la posta

79. In un gioco in cui si lanciano due dadi e si punta sull'uscita del 12, quante volte dovrebbe pagarsi la posta, perché sia considerato equo?

Dato che la probabilità di vincere è 1/36, 36 volte la posta

80. Puntando sull'uscita di un dato punteggio nel lancio di tre dadi regolari, quante volte si paga la posta a) al massimo? b) Al minimo?

Dipende dalla puntata. a) Se puntiamo sull'evento meno probabile, cioè 3 o 18, che hanno probabilità 1/216, 216 volte la posta. b) Puntando sull'evento più frequente, 10 o 11, che hanno probabilità 27/216 = ⅛, 8 volte.

81. Nel gioco del lotto puntando € 1,00 su un numero se ne ricevono € 11,23 in caso di vincita. Quanti se ne dovrebbero ricevere nel caso di gioco equo?

In ogni ruota vengono estratti 5 numeri, quindi dobbiamo considerare la probabilità che il numero su cui puntiamo sia uno di quei 5, quindi i casi favorevoli sono tutte le cinquine che contengono il numero, cioè 89 · 88 · 87 · 86 · 5, ossia le cinquine del tipo *abcdx*, con *x* il numero su cui abbiamo puntato. Moltiplichiamo per 5 perché *x* può occupare una qualunque delle 5 posizioni. Perciò la probabilità è $\frac{\cancel{89\cdot 88\cdot 87\cdot 86}\cdot 5}{90\cdot \cancel{89\cdot 88\cdot 87\cdot 86}}=\frac{5}{90}=\frac{1}{18}$, quindi € 18,00. Potevamo anche ragionare in termini di combinazioni semplici.

82. Se il lotto fosse equo quante volte dovrebbe pagarsi la posta per il terno secco?

I casi favorevoli sono tanti quante le cinquine che contengono i 3 numeri su cui abbiamo puntato, che sono $\binom{87}{2}$, la probabilità è $\binom{87}{2}/\binom{90}{5}=\frac{\cancel{87!}}{\cancel{2!}\cdot\cancel{85!}}\cdot\frac{\cancel{2!}\cdot\cancel{60}^{2}\cdot\cancel{85!}}{\cancel{90}^{3}\cdot 89\cdot 88\cdot\cancel{87!}}=\frac{1}{11748}$, perciò 11748 volte la posta.

83. In un gioco equo in cui in cui si lanciano due dadi la posta viene pagata sei volte, su che punteggio si scommette? E se si paga 8 volte?

Sappiamo che 7 ha probabilità 1/6; Non vi sono punteggi che hanno probabilità ⅛, evento impossibile

84. In un gioco equo in cui si lanciano tre monete regolari quanto viene pagata la posta per l'uscita di 1 testa e 2 croci, indipendentemente dall'ordine?

I casi favorevoli sono le permutazioni di TCC, che sono 3, i casi possibili sono 8, quindi la probabilità è ⅜. Si deve ricevere 8/3 volte la posta.

85. Con riferimento al quesito precedente, su quale evento si paga 4 volte la posta?

Eventi che hanno probabilità ¼ di accadere sono: escono più teste che croci o più croci che teste.

86. In un gioco equo in cui si lanciano cinque monete regolari quanto viene pagata la posta se escono più teste che croci?

I casi favorevoli sono TTTTT, TTTTC e TTTCC, che accadono con probabilità (1 + 5 + 10)/32 = 16/32 = ½. Quindi si riceve 2 volte la posta.

87. Con riferimento al quesito precedente, cambia la risposta se si lanciano a) 6 monete; b) 7 monete?

a) Stavolta i casi favorevoli sono: TTTTTT, TTTTTC e TTTTCC, che accadono con probabilità (1 + 6 + 15)/64 = 11/32. Quindi si riceve 32/11 volte la posta.
b) Stavolta i casi favorevoli sono: TTTTTTT, TTTTTTC e TTTTTCC, TTTTCCC che accadono con probabilità (1 + 7 + 21 + 35)/128 = 64/128 = ½. Quindi si riceve ancora 2 volte la posta, perciò non cambia rispetto al caso 5 monete.

88. Nel gioco della roulette il banco vuole avere un vantaggio del 10%, cioè vuole pagare l'uscita di un numero rosso il 90% di quanto pagherebbe se il gioco fosse equo. Puntando € 5, quanto si dovrebbe ricevere in caso di vincita, nei due casi in cui c'è solo lo 0 o anche 00?

La probabilità che esca rosso nel primo caso è 18/37, nel secondo 9/19, quindi equamente dovrebbe pagarsi 37/18 · € 5 ≈ € 10,28 e 19/9 · € 5 ≈ € 10,56 rispettivamente. Pagando il 90% otteniamo: € 9,25 e € 9,50 rispettivamente.

89. In relazione al precedente quesito, nella realtà il banco paga 2 volte la posta, quindi che vantaggio percentuale ha?

Nel primo caso risparmia (2 – 37/18)/2 ≈ 2,78%; nel secondo (2 – 19/9)/2 ≈ 5,56%

90. Nel gioco del lotto puntando € 1,00 su un numero, ma giocandone tre (che significa che si vince purché ne esca uno almeno dei tre), in caso di vincita se ne ricevono € 3,74 per ciascuno dei numeri estratti. Quanti se ne dovrebbero ricevere nel caso di gioco equo?

I casi favorevoli sono tanti quante le cinquine che contengono uno almeno dei 3 numeri su cui abbiamo puntato. La probabilità che ne esca almeno uno è la complementare dell'evento che non esca nessuno dei 3: $1-\binom{87}{5}/\binom{90}{5}=1-\frac{\cancel{87!}}{\cancel{5!}\cdot\cancel{82!}}\cdot\frac{\cancel{5!}\cdot\cancel{82!}\cdot 83\cdot 84\cdot 85}{90\cdot 89\cdot 88\cdot\cancel{87!}}=\frac{1871}{11748}\approx 16\%$. Perciò circa € 16,00

91. Nel gioco del lotto se si punta su un *estratto determinato*, cioè il numero deve essere estratto in un certo ordine (per esempio puntiamo sul fatto che il 17 sia estratto come terzo numero) si riceve 18,33 volte la posta. Quante volte la posta dovrebbe riceversi in caso di gioco equo?

Rispetto al quesito 81 i casi favorevoli diventano 89 · 88 · 87 · 86, non moltiplichiamo per 5 perché la posizione del numero su cui abbiamo puntato è fissa, quindi la probabilità è 1/5 della precedente. Perciò dobbiamo ricevere 5 volte in più, ossia 90.

92. Se il lotto fosse equo, giocando 3 numeri, quante volte dovrebbe essere pagata la posta se puntassi sull'ambo?

Puntando su 3 numeri gli ambi vincenti possono essere 3, ciascuno dei quali ha probabilità pari a $\binom{88}{3}/\binom{90}{5}=\frac{\cancel{88!}}{\cancel{3!}\cdot\cancel{85!}}\cdot\frac{5\cdot4\cdot\cancel{3!}\cdot\cancel{85!}}{90\cdot89\cdot\cancel{88!}}=\frac{2}{801}\approx0,25\%$, che diventa quini 6/801, perciò la posta dovrebbe essere pagata 133,5 volte

93. Con riferimento al quesito precedente, poiché in realtà viene pagata 83,33 volte la posta, che vantaggio percentuale ha il banco?

1 – 83,33/133,5 ≈ 37,6%

94. Che percentuale della vincita *equa* viene pagata per una quaterna secca, che paga 120000 volte la posta?

La probabilità di vincita è $\frac{86}{\binom{90}{5}}=\frac{86\cdot5!}{90\cdot89\cdot88\cdot87\cdot86}=\frac{1}{511038}$, quindi si dovrebbe ricevere 511038 volte la posta, pagando 120000 il risparmio percentuale è 1 – 120000/511038 ≈ 76,52%.

Probabilità dell'unione di eventi elementari

1. Siano due eventi *A* e *B*, appartenenti allo stesso spazio degli eventi, con *P*(*A*) = 2/7 e *P*(*B*) = 17/21, è richiesto il calcolo di *P*(*A* ∪ *B*). Perché senza conoscere nei dettagli gli eventi *A* e *B*, possiamo dire che gli eventi sono compatibili? Giustificare la risposta.

Perché 2/7 + 17/21 > 1, quindi per forza $P(A \cap B) \neq 0$.

2. Se due eventi hanno probabilità 2/5 e 1/5, possiamo dire che sono a) incompatibili? b) compatibili? Giustificare la risposta.

Poiché 2/5 + 1/5 < 1, può essere sia che $A \cap B \neq \varnothing$, sia che $A \cap B = \varnothing$, quindi in entrambi i casi la risposta è negativa. Per esempio nello spazio degli eventi elementari dell'*estrazione da un sacchetto contenente i primi* 5 *numeri naturali*, gli eventi fossero *estrazione di un punteggio inferiore a* 3, e *estrazione di un punteggio inferiore a* 2, gli eventi sarebbero compatibili; mentre se il secondo evento fosse *estrazione di un punteggio superiore a* 4 sarebbero incompatibili.

3. Se due eventi hanno probabilità 2/5 e 3/5, possiamo dire che sono sicuramente complementari? Giustificare la risposta.

La risposta è ancora una volta negativa, per esempio nello spazio degli eventi elementari precedente, se gli eventi fossero *estrazione di un punteggio inferiore a* 3 e *estrazione di un punteggio inferiore a* 4. Gli eventi non sono complementari eppure hanno le probabilità indicate nel testo.

4. La condizione *P*(*A*) = 1 – *P*(*B*) è necessaria o sufficiente affinché *A* e *B* siano complementari?

È certamente necessaria, ma non sufficiente, come mostra il precedente quesito.

5. Lanciando due dadi non truccati qual è la probabilità di ottenere un numero pari o uno multiplo di 3?

Gli eventi sono compatibili: $P(A \cup B)$ = ½ + 1/3 – 1/6 = 2/3

6. Lanciando due dadi non truccati qual è la probabilità di ottenere un punteggio le cui cifre sono una doppia dell'altra o un numero divisibile per 6?

I casi da considerare sono {12} per il primo, {6, 12} per il secondo quindi sostanzialmente solo il secondo. La probabilità è (5 + 1)/36 = 6/36 = 1/6.

7. Determinare la probabilità che estraendo 1 carta da un mazzo di 52 carte da poker, essa sia una figura o una carta di quadri.

Gli eventi sono compatibili: $P(A \cup B)$ = 3/13 + ¼ – 3/52 = 11/26

8. Determinare la probabilità che estraendo 1 carta da un mazzo di 52 carte da poker, essa sia una carta di quadri o una carta il cui punteggio è superiore a 7.

Gli eventi sono compatibili: $P(A \cup B)$ = ¼ + 6/13 – 6/52 = 31/52

9. Determinare la probabilità che scegliendo a caso un numero fra i primi 50 numeri naturali esso sia pari o multiplo di 5.

Gli eventi sono compatibili: $P(A \cup B) = ½ + 10/50 – 5/50 = 3/5$

10. Determinare la probabilità che scegliendo a caso un numero fra i primi 100 numeri naturali esso sia pari o primo.

Gli eventi sono compatibili: $P(A \cup B) = ½ + 25/100 – 1/100 = 37/50$

11. Da un mazzo di carte italiane da 40 estraiamo una carta, quali fra i seguenti eventi sono compatibili con l'evento *la carta estratta è una figura di spade*? *La carta estratta è* A) *una figura* B) *una carta di denari* C) *ha un valore numerico compreso tra* 3 *e* 7 D) *ha un valore numerico superiore a* 5 E) *è un fante o una donna a seconda della regione*.

Gli eventi A, D, E.

12. Lanciamo un dado a forma di icosaedro, solido regolare con 20 facce, quali fra i seguenti eventi sono compatibili con l'evento *esce un punteggio divisibile per* 4? *Esce un punteggio* A) *dispari* B) *primo* C) *multiplo di* 3 D) *multiplo di* 5 E) *le cui cifre non hanno per somma* 3.

Gli eventi C, D, E.

13. In un campeggio vi sono 200 persone, 120 sono italiane, le altre straniere. 50 degli italiani e 60 degli stranieri sono donne. Scelto un ospite a caso fra ai presenti, con quale probabilità a) è una donna o non è di nazionalità italiana; b) è di nazionalità italiana o un maschio?

Dai dati possiamo dire che le donne sono 110; i maschi 90; gli stranieri 80. Pertanto: a) $P(A \cup B) = (110 + 80 – 60)/200 = 13/20$; b) $P(A \cup B) = (120 + 90 – 70)/200 = 7/10$

14. La probabilità che accada l'evento *A* è 2/3, quella che accada *B* è ¾, con quale probabilità *p* accadono sia *A* che *B*?

Poiché $2/3 + ¾ > 1$, vuol dire che i due eventi sono compatibili, perciò $P(A \cup B) = P(A) + P(B) – P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 2/3 + ¾ – P(A \cup B) = 17/12 – P(A \cup B) \Rightarrow$ Ovviamente $¾ \le P(A \cup B) \le 1 \Rightarrow 17/12 – 1 \le P(A \cap B) \le 17/12 – ¾ \Rightarrow 5/12 \le p \le 2/3$

15. Il 25% di ragazzi di una classe conosce il russo e il 40% il tedesco. Sapendo che la probabilità di scegliere uno studente a caso che parli russo o tedesco è 50%, quale percentuale di ragazzi parla entrambe le lingue?

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) – P(A \cup B) = 0{,}25 + 0{,}40 – 0{,}50 = 0{,}15 = 15\%$

16. Determinare la probabilità che, da un'urna contenente 2000 biglie numerate da 1 a 2000, se ne estragga una il cui numero verifichi una almeno delle seguenti tre proprietà: a) sia un numero divisibile per 5; b) sia un numero divisibile per 8 maggiore di 956; c) sia un numero divisibile per 7 compreso fra 547 e 1256.

Indichiamo con A, B e C rispettivamente i tre eventi. Si ha: $P(A) = 1/5$, dato che c'è un multiplo di 5 nei primi 5, ce ne saranno 400 nei primi 2000; dato che $960 = 8 \cdot 120$ e $2000 = 8 \cdot 250$, $P(B) = (251 – 120)/2000 = 131/2000$; dato che $553 = 7 \cdot 79$ e $1995 = 7 \cdot 285$, $P(C) = (286 – 79)/2000 = 207/2000$. L'evento $A \cap B$ riguarda i multipli di 40 maggiori di 956, e poiché $960 = 40 \cdot 24$ e $2000 = 40 \cdot 50$, $P(A \cap B) = (51 – 24)/2000 = 27/2000$. L'evento $A \cap C$ riguarda i multipli di 35 compresi fra 547 e 1256, e poiché $560 = 35 \cdot 16$ e $1995 = 35 \cdot 57$, $P(A \cap C) = (58 – 16)/2000 = 42/2000$. L'evento $B \cap C$ riguarda i multipli di 56 compresi fra 957 e 1256, e poiché $952 = 56 \cdot 17$ e $1232 = 56 \cdot 22$, $P(B \cap C) = 6/2000$. L'evento $A \cap B \cap C$ riguarda i multipli di 280 compresi fra 957 e 1256, e poiché vi è solo il 1120, $P(A \cap B \cap C) = 1/2000$. Infine: $P(A \cup B \cup C) = (400 + 131 + 207 – 27 – 42 – 6 + 1)/2000 = 664/2000 = 83/250$.

17. Determinare la probabilità che, da un'urna contenente 1750 biglie numerate da 1 a 1750, se ne estragga una il cui numero verifichi una almeno delle seguenti tre proprietà: a) sia un numero divisibile per 4; b) sia un numero divisibile per 6 minore di 1324; c) sia un numero divisibile per 9 compreso fra 123 e 1507.

Indichiamo con A, B e C rispettivamente i tre eventi. Si ha: $P(A) = 437/1750$; $P(B) = 220/1750$; dato che $126 = 9 \cdot 14$ e $1503 = 9 \cdot 167$, $P(C) = (168 – 14)/1750 = 154/1750$. L'evento $A \cap B$ riguarda i multipli di 12 minori di 1324, $P(A \cap B) = 110/1750$. L'evento $A \cap C$ riguarda i multipli di 36 compresi fra 123 e 1507, e poiché $144 = 36 \cdot 4$ e $1476 = 36 \cdot 41$, $P(A \cap C) = (42 – 4)/1750 = 38/1750$. L'evento $B \cap C$ riguarda i multipli di 18 compresi fra 123 e 1323, e poiché $126 = 18 \cdot 7$ e $1314 = 18 \cdot 73$, $P(B \cap C) = (74 – 18)/1750 = 56/1750$. L'evento $A \cap B \cap C$ riguarda i multipli di 36 compresi fra 123 e 1323,

e poiché 144 = 36 · 4 e 1296 = 36 · 36, $P(A \cap B \cap C)$ = 33/1750. Infine: $P(A \cup B \cup C)$ = (437 + 220 + 154 – 110 – 38 – 56 + 33)/1750 = 640/1750 = 64/175.

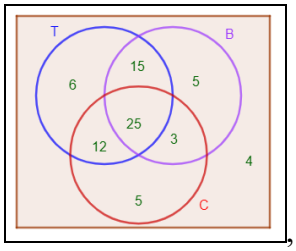
18. Determinare la probabilità che da un'urna contenente 2000 biglie numerate da 1 a 2000, se ne estragga una il cui numero verifichi una sola delle seguenti tre proprietà: a) sia un numero divisibile per 3; b) sia un numero divisibile per 6 maggiore di 831; c) sia un numero divisibile per 9 compreso fra 248 e 1487.

Indichiamo con A, B e C rispettivamente i tre eventi. Si vede facilmente che $B \cup C \subset A$, pertanto $P(A \cup B \cup C) = P(A)$ = 666/2000 = 333/2000.

19. Determinare la probabilità che scegliendo un numero di 3 cifre esso risulti divisibile per 3 o con la cifra delle unità uguale a 2 o con la cifra delle decine uguale a 7.

Indichiamo con A, B e C rispettivamente i tre eventi. Si ha: $P(A)$ = 1/3, perché ogni 3 numeri consecutivi esattamente uno è divisibile per 3 e i numeri di 3 cifre sono 900; dobbiamo contare i numeri del tipo $xy2$, che sono 90 (9 scelte per x e 10 per y), quindi $P(B)$ = 90/900 = 1/10; dobbiamo contare i numeri del tipo $x7y$, che sono ancora 90 (9 scelte per x e 10 per y), quindi $P(C)$ = 1/10. L'evento $A \cap B$ riguarda i multipli di 3 che finiscono per 2, che sono i numeri del tipo $xy2$ con $x + y \in \{1; 4; 7; 10; 13; 16\}$ e sono 1 + 4 + 7 + 10 + 6 + 3 = 31, $P(A \cap B)$ = 31/900. L'evento $A \cap C$ riguarda i multipli di 3 del tipo $x7y$, con $x + y \in \{2; 5; 8; 11; 14; 17\}$ e sono 2 + 5 + 8 + 8 + 5 + 2 = 30, $P(A \cap C)$ = 30/900 = 1/30. L'evento $B \cap C$ riguarda i numeri del tipo $x72$, che sono 9, $P(B \cap C)$ = 9/900 = 1/100. L'evento $A \cap B \cap C$ i numeri del tipo $x72$ multipli di 3, cioè solo {372, 672, 972}, $P(A \cap B \cap C)$ = 3/900 = 1/300. Infine: $P(A \cup B \cup C)$ = (300 + 90 + 90 – 31 – 30 – 9 + 3)/900 = 413/900.

20. I ragazzi di un triennio di una stessa sezione sono 75. Si sa che 48 di essi giocano a basket, 45 a calcio, 58 a tennis, 28 a basket e calcio, 37 a calcio e tennis, 40 a basket e tennis e 25 a tutti e tre gli sport. Qual è la probabilità che scegliendo a caso uno degli studenti, esso pratichi a) uno solo dei tre sport; b)nessuno dei tre sport?

Utilizzando le informazioni fornite costruiamo il seguente diagramma di Venn: 

, dal quale facilmente ricavimo quanto richiesto. La prima probabilità è (6 + 5 + 5)/75 = 16/75; la seconda 4/75.

21. Lanciamo 3 dadi e i punteggi ottenuti li scriviamo uno accanto all'altro a formare un numero di 3 cifre. Qual è la probabilità che tale numero sia un multiplo di 3 o di 5?

Indichiamo con A e B rispettivamente i due eventi. I casi possibili sono 6^3 = 216. I multipli di 3 sono quelli la cui somma delle cifre appartiene all'insieme {3; 6; 9; 12; 15; 18} e sono 1 + 10 + 25 + 25 + 10 + 1 = 72; i multipli di 5 finiscono per 5 e sono quindi 6^2 = 36. Perciò $P(A)$ = 72/216, $P(B)$ = 36/216. L'intersezione è data da {135, 315, 225, 615, 165, 525, 255, 435, 345, 645, 465}, quindi: $P(A \cap B)$ = 10/216. Infine $P(A \cup B)$ = (72 + 36 – 10)/216 = 98/216 = 49/108.

22. In un'urna sono poste 3000 palline, numerate da 1 a 3000. Si eliminano tutte quelle che contengono i numeri da 1 a 242 e i numeri da 2912 a 3000. Si estrae quindi una pallina, determinare la probabilità che essa abbia un numero che sia multiplo di uno almeno fra i numeri 4, 6 o 10.

Indichiamo con A, B e C rispettivamente i tre eventi. Si ha: $P(A)$ = 667/2369 (da 4 · 61 a 4 · 727); $P(B)$ = 445/2369 (da 6 · 41 a 6 · 485); $P(C)$ = 267/2369 (da 10 · 25 a 10 · 291). $A \cap B$ riguarda i multipli di 12 compresi fra 243 e 2911, $P(A \cap B)$ = 222/2369 (da 12 · 21 a 12 · 242). $A \cap C$ riguarda i multipli di 20 compresi fra 243 e 2911. $P(A \cap C)$ = 133/2369 (da 20 · 13 a 20 · 145). L'evento $B \cap C$ riguarda i multipli di 30 compresi fra 243 e 2911, $P(B \cap C)$ = 89/2369 (da 30 · 9 a 30 · 97). $A \cap B \cap C$ riguarda i multipli di 60 compresi fra 243 e 2911, $P(A \cap B \cap C)$ = 44/2369 (da 60 · 5 a 60 · 48). Infine: $P(A \cup B \cup C)$ = (667 + 445 + 267 – 222 – 133 – 89 + 44)/2369 = 979/2669

23. In un'urna sono poste 3000 palline, numerate da 1 a 3000. Si eliminano tutte quelle che contengono i numeri da 123 a 314 e i numeri da 1241 a 2310. Si estrae quindi una pallina, determinare la probabilità che essa abbia un numero che sia multiplo di 8 o multiplo di 12 o multiplo di 18.

Indichiamo con A, B e C rispettivamente i tre eventi. Rimangono 122 + 926 + 690 = 1738 numeri. Si

ha: $P(A) = 298/1738$ (da $8 \cdot 1$ a $8 \cdot 15$, da $8 \cdot 40$ a $8 \cdot 155$ e da $8 \cdot 289$ a $8 \cdot 375$); $P(B) = 145/1738$ (da $12 \cdot 1$ a $12 \cdot 10$, da $12 \cdot 27$ a $12 \cdot 103$ e da $12 \cdot 193$ a $12 \cdot 250$); $P(C) = 96/1738$ (da $18 \cdot 1$ a $18 \cdot 6$, da $18 \cdot 18$ a $18 \cdot 68$ e da $18 \cdot 129$ a $18 \cdot 167$). $P(A \cap B) = 72/1738$ (da $24 \cdot 1$ a $24 \cdot 5$, da $24 \cdot 14$ a $24 \cdot 51$ e da $24 \cdot 97$ a $24 \cdot 125$). $P(A \cap C) = 23/1738$ (solo 72, da $72 \cdot 5$ a $72 \cdot 17$ e da $72 \cdot 33$ a $72 \cdot 41$). $P(B \cap C) = 48/1738$ (da $36 \cdot 1$ a $36 \cdot 3$ da $36 \cdot 9$ a $36 \cdot 34$ e da $36 \cdot 65$ a $36 \cdot 83$). $A \cap B \cap C = A \cap C$, $P(A \cap B \cap C) = 23/1738$. Infine: $P(A \cup B \cup C) = 419/1738$

24. Determinare la probabilità che da un'urna contenente 2000 biglie numerate se ne estragga una il cui numero verifichi esattamente due delle seguenti tre proprietà: sia un numero divisibile per 6; sia un numero divisibile per 7 minore di 856; sia un numero divisibile per 9 compreso fra 125 e 458.

Indichiamo con A, B e C rispettivamente i tre eventi. Dobbiamo calcolare: $P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C) - 3P(A \cap B \cap C)$. $A \cap B$ riguarda i multipli di 42 minori di 856, $P(A \cap B) = 20/2000$. $A \cap C$ i multipli di 18 compresi fra 125 e 458. $P(A \cap C) = 19/2000$ (da $18 \cdot 7$ a $18 \cdot 25$). $B \cap C$ i multipli di 63 compresi fra 125 e 855, $P(B \cap C) = 12/2000$ (da $63 \cdot 2$ a $63 \cdot 13$). $A \cap B \cap C$ riguarda i multipli di 126 compresi fra 125 e 855, $P(A \cap B \cap C) = 6/2000$ (da $126 \cdot 1$ a $126 \cdot 6$). Quindi la probabilità richiesta è $(20 + 19 + 12 - 18)/2000 = 33/2000$

25. Siano date le funzioni $f: x \to -x$ e $g: x \to -2x + 1$, entrambe definite su $M = \{-1, -2, -3, -4, -5\}$ ed a valori in $P = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Determinare la probabilità che a) scelto un elemento a caso in M esso appartenga al dominio di f o a quello di g; b) scelto un elemento a caso in P esso appartenga al codominio di f o a quello di g.

a) $dom(f) \cup dom(g) = \{-3, -4, -5\} \cup \{-1, -2, -3\} = \{-1, -2, -3, -4, -5\} = M$. Quindi la probabilità richiesta è 1;

b) $codom(f) \cup codom(g) = \{3, 4, 5\} \cup \{3, 5, 7\} = \{3, 4, 5, 7\}$. La probabilità è $4/6 = 2/3$

26. Consideriamo gli insiemi $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 4, 5, 6\}$, $C = \{2, 5\}$ $D = \{0, 1, 3, 4\}$ ed $E = \{0, 2, 3\}$. Determinare la probabilità che scegliendo due insiemi a caso la loro unione abbia sei elementi o la loro intersezione sia vuota.

I casi possibili sono $\binom{5}{2} = 10$. Ora si ha: $|A \cup C| = |A \cup E| = |C \cup E| = 4$; $|A \cup D| = |B \cup C| = |D \cup E| = 5$; $|A \cup B| = |B \cup D| = |C \cup D| = 6$; $|B \cup E| = 7$. Mentre $B \cap E = C \cap D = \varnothing$, pertanto la probabilità è $4/10 = 2/5$

27. Consideriamo gli insiemi $A = \{3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 4, 5, 6, 7\}$, $C = \{0, 1\}$ $D = \{1, 4, 6\}$. Determinare la probabilità che scegliendo due insiemi a caso la loro unione abbia sei elementi o la loro differenza simmetrica abbia tanti elementi quanto la loro unione o che la loro intersezione non sia vuota.

I casi possibili sono $\binom{4}{2} = 6$. Ora si ha: $|C \cup D| = 4$; $|A \cup C| = |B \cup D| = 6$; $|A \cup B| = |A \cup D| = |B \cup C| = 7$. $|C \Delta D| = 3$; $|B \Delta D| = 4$; $|A \Delta B| = 5$; $|A \Delta C| = 6$; $|A \Delta D| = |B \Delta C| = 7$. Mentre $A \cap B \neq \varnothing$; $B \cap D \neq \varnothing$; $C \cap D \neq \varnothing$, pertanto la probabilità è 1.

28. Abbiamo colorato alcune bandierine completamente verdi, altre completamente rosse e altre rosse e verdi. Se la probabilità di estrarre una bandiera completamente rossa è 0,48 e quella di estrarre una bandiera rossoverde è 0,24, con quale probabilità estraiamo una bandiera completamente verde?

Dai dati abbiamo: $P[R \setminus (R \cap V)] = 0{,}48$, $P(R \cap V) = 0{,}24$. Ovviamente $P[R \setminus (R \cap V)] = P(R) - P(R \cap V) \Rightarrow P(R) = 0{,}48 + 0{,}24 = 0{,}72$. D'altro canto $P(A \cup B) = 1 = 0{,}72 + P(V) - 0{,}24 \Rightarrow P(V) = 0{,}52$. Infine: $P[V \setminus (R \cap V)] = 0{,}52 - 0{,}24 = 0{,}28$.

29. Esprimere in formula la probabilità che di due eventi A e B se ne verifichi a) esattamente uno; b) al massimo uno.

a) Supposto che gli eventi siano compatibili, sappiamo che $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, se deve verificarsi solo uno dei due vuol dire che non deve verificarsi $P(A \cap B)$, perciò la probabilità cercata è: $P(A) + P(B) - 2\,P(A \cap B)$;

b) Stavolta deve verificarsi solo A o solo B, quindi è l'evento complementare a quello intersezione, cioè $1 - P(A \cap B)$.

Naturalmente nulla cambia se gli eventi fossero incompatibili, tranne che $P(A \cap B) = 0$ e perciò il caso

a) sarebbe $P(A) + P(B)$ e il caso b) la certezza, 1.

30. Esprimere in formula la probabilità che di tre eventi *A*, *B* e *C*, a) si verifichi solo *A*; b) si verifichino *A* o *B* ma non *C*; c) si verifichi almeno uno dei tre.

a) $P(A) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$;

b) $P(A \cup B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

c) $P(A \cup B \cup C)$

31. Stabilire la formula per calcolare $P(A \cup B \cup C \cup D)$.

$P(A) + P(B) + P(C) + P(D) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(A \cap D) - P(B \cap C) - P(B \cap D) - P(C \cap D) + P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap D) + P(A \cap C \cap D) + P(B \cap C \cap D) - P(A \cap B \cap C \cap D)]$

32. Determinare la probabilità che, scegliendo un numero di 3 cifre, esso risulti divisibile per 5 o con la cifra delle decine uguale a 1 o con la cifra delle centinaia uguale a 2 o con la somma delle cifre uguale a 8.

Indichiamo con A, B, C e D rispettivamente i quattro eventi. Si ha: $P(A) = 180/900$; $P(B) = 90/900$ (i numeri $x1y$); $P(C) = 100/900$ (i numeri $2xy$); $P(D) = (8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1)/900 = 36/900$ (consideriamo per esempio $1xy$, perché $x + y = 7$, ci sono 8 scelte, da 70 a 07, e così via per gli altri). $P(A \cap B) = 18/900$ (i numeri $x10$ e $x15$). $P(A \cap C) = 20/900$ (i numeri $2x0$ e $2x5$); $P(A \cap D) = 11/900$ (i numeri $xy0$ con $x + y = 8$ e $xy5$ con $x + y = 3$). $P(B \cap C) = 10/900$ (i numeri $12x$). $P(B \cap D) = 8/900$ (i numeri $1xy$ con $x + y = 7$). $P(C \cap D) = 7/900$ (i numeri $2xy$ con $x + y = 6$). $P(A \cap B \cap C) = 2/900$ (solo 210 e 215). $P(A \cap B \cap D) = 2/900$ (solo 710 e 215). $P(B \cap C \cap D) = 1/900$ (solo 215). $P(A \cap B \cap C \cap D) = P(B \cap C \cap D) = 1/900$. Infine: $P(A \cup B \cup C \cup D) = (180 + 90 + 100 + 36 - 18 - 20 - 11 - 10 - 8 - 7 + 2 + 2 + 1 - 1)/900 = 336/900 = 28/75$.

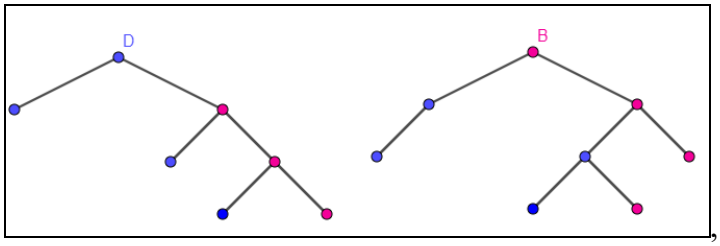
33. In un grosso scatolone sono contenuti calzini rossi e calzini blu in numero non superiore a 1991. Scegliendo due calzini a caso la probabilità che siano entrambi rossi o entrambi blu è 50%, quanti calzini rossi vi sono, al massimo, nello scatolone?

I calzini totali siano $n \le 1991$, di cui r bianchi: $P(rr) + P(bb) = \dfrac{r(r-1) + (n-r)(n-r-1)}{n(n-1)} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 4r^2 - 4rn + n(n-1) = 0 \Rightarrow r = \dfrac{n \pm \sqrt{n}}{2}$. r deve essere un numero intero e per essere il più grande scegliamo il segno +. Ma n deve essere un quadrato perfetto non superiore a 1991, il maggiore è 1936 e in questo caso $r = 990$.

34. Determinare la probabilità che estraendo il primo numero sulla ruota di Milano questo verifichi una almeno delle seguenti proprietà: a) sia multiplo di 3; b) abbia almeno una cifra uguale a 4; c) il prodotto delle sue cifre sia maggiore di 10; d) il suo quadrato sia minore di 50.

Indichiamo con A, B, C e D rispettivamente i quattro eventi. Si ha: $P(A) = 30/90$; $P(B) = 16/90$ (i numeri $4x$ e $x4$, considerando 44 solo una volta); $P(C) = 48/90$ (escludiamo i numeri da 1 a 25, $x0$ ($3 \le x \le 9$), $x1$ ($3 \le x \le 8$), $x2$ ($3 \le x \le 5$), 33); $P(D) = 7/90$ ({1, 2, …, 7}). $P(A \cap B) = 6/90$ ({24, 42, 45, 48, 54, 84}). $P(A \cap C) = 16/90$ (dai multipli di 3 escludiamo {3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 30, 33, 42, 51, 60, 81}); $P(A \cap D) = 2/90$ ({3, 6}). $P(B \cap C) = 13/90$ ({34, 42, …,49, 54, 64, …,84}). $P(B \cap D) = 1/90$ (solo 4). $P(C \cap D) = 0$. $P(A \cap B \cap C) = 5/90$ ({42, 45, 48, 54, 84}). $P(A \cap B \cap D) = 0$. $P(B \cap C \cap D) = 0$. $P(A \cap B \cap C \cap D) = 0$. Infine: $P(A \cup B \cup C \cup D) = (30 + 16 + 48 + 7 - 6 - 16 - 2 - 13 - 1 + 5)/90 = 336/900 = 68/90 = 34/45$.

35. Il cavaliere De Mere e il duca di Brianchon giocano a dadi, al cavaliere mancano due vittorie per aggiudicarsi l'intera posta, al duca tre vittorie. Qual è la probabilità che vinca il cavaliere?

I casi possibili, indicando con D la probabilità che vinca il cavaliere e con B che vinca il duca sono quelli mostrati nel grafico ad albero seguente: 

, quindi dei 8 possibili esiti, 5 sono favorevoli al cavaliere, la probabilità è: 5/8

36. Lanciamo un dado per tre volte di fila, con che probabilità otteniamo almeno un 6?

$1 - (5/6)^3 = 91/216$

37. In un'urna vi sono 2 palline rosse e 3 bianche, estraiamo 2 palline a caso, la probabilità di ottenerne solo una bianca è la stessa di ottenere solo la prima bianca? Se la risposta è negativa calcolare le due probabilità.

No, nel primo caso è $\frac{3}{5}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{4}^2}+\frac{\cancel{2}}{5}\cdot\frac{3}{\cancel{4}^2}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$, nel secondo: $\frac{3}{5}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{4}^2}=\frac{3}{10}$

38. Determinare la probabilità che lanciando 5 monete regolari si ottengano a) esattamente 3 teste; b) 3 teste nei primi 3 lanci e 2 croci negli altri due.

I casi possibili sono $2^5 = 32$. a) I casi favorevoli sono le permutazioni della parola TTTCC, che sono: $\frac{5!}{3!2!}=\frac{5\cdot\cancel{4}^2\cdot\cancel{3!}}{\cancel{2\cdot 3!}}=10$, quindi la probabilità è 10/32 = 5/16; b) Stavolta l'evento è proprio TTTCC senza permutazioni, quindi la probabilità è 1/32, dato che entrambi gli eventi, T o C, hanno probabilità ½ di accadere.

39. Determinare la probabilità che lanciando 8 monete ci siano a) esattamente 3 teste; b) almeno 3 teste; c) al più 3 teste.

I casi possibili sono $2^8 = 256$. a) I casi favorevoli sono le permutazioni della parola TTTCCCCC, che sono: $\frac{8!}{3!5!}=\frac{8\cdot 7\cdot\cancel{6\cdot 5!}}{\cancel{6\cdot 5!}}=56$, quindi la probabilità è 56/256 = 7/32; b) conviene considerare l'evento complementare: al più due teste. La probabilità è 1 – (1 + 8 + 28)/256 = 219/256; c) Basta sommare la precedente somma fra parentesi all'evento 3 teste: 37/256 + 56/256 = 93/256.

40. Lanciamo una moneta regolare per 4 volte, con quale probabilità otteniamo a) almeno due volte testa; b) al massimo tre volte testa?

I casi possibili sono $2^4 = 16$. a) Casi favorevoli: (TTCC), (TTTC) e (TTTT): (6 + 4 + 1)/16 = 11/16; b) consideriamo il caso complementare nessuna testa: 1 – 1/16 = 15/16

41. Lanciamo 6 monete, se la probabilità di ottenere esattamente *k* teste è 15/64, quanto è *k*?

La probabilità è: $\frac{\frac{6!}{k!(6-k!)}}{64}=\frac{15}{64}\Rightarrow\frac{48}{k!(6-k!)}=1\Rightarrow 48 = 24\cdot 2 = 4!\cdot(6-4)!\Rightarrow k=4.$

Per questi esercizi è opportuno l'uso di una calcolatrice o di un software tipo CAS

42. Lanciamo *n* monete, se la probabilità di ottenere esattamente 6 teste è 105/512, quanto è *n*?

La probabilità è: $\frac{\frac{n!}{6!(n-6)!}}{2^n}=\frac{105}{512}$. Dato che $512 = 2^9$, proviamo con $n = 9$. Ma $\frac{9!}{6!3!}=\frac{9\cdot 8\cdot 7}{6}=84$, proviamo allora ad aumentare n di una unità finché non funziona. Troveremo che $n = 10$ va bene. $\frac{\frac{10!}{6!4!}}{2^{10}}=\frac{105}{512}$

43. Lanciamo 7 monete, se la probabilità di ottenere almeno *k* teste è ½, quanto è *k*?

La probabilità è: $1-\frac{1+7+\binom{7}{2}+\ldots+\binom{7}{k-1}}{2^7}=\frac{1}{2}$, si verifica che $k = 4$ va bene.

44. In un'urna vi sono 25 palline rosse e 15 di altri colori, estraiamo 8 palline a caso, con che probabilità sono a) tutte rosse; b) tutte non rosse; c) esattamente 5 di esse rosse.

a) $\frac{\binom{25}{8}}{\binom{40}{8}}=\frac{\frac{25!}{\cancel{8!}17!}}{\frac{40!}{\cancel{8!}32!}}=\frac{\cancel{17!}\cancel{25}\cdot\cancel{24}\cdot 23\cdot\cancel{22}\cdot\cancel{21}\cdot\cancel{20}^{5}\cdot\cancel{19}\cdot\cancel{18}\cdot\cancel{32!}}{\cancel{32!}\cancel{17!}\cdot\cancel{40}\cdot\cancel{39}^{13}\cdot\cancel{38}\cdot 37\cdot\cancel{36}\cdot\cancel{35}\cdot\cancel{34}^{17}\cdot\cancel{33}}=\frac{115}{8177}$;

b) $$\frac{\binom{15}{8}}{\binom{40}{8}}=\frac{\frac{15!}{\cancel{8!}7!}}{\frac{40!}{\cancel{8!}32!}}=\frac{\cancel{7!}\cdot\cancel{15}\cdot\cancel{14}\cdot\cancel{13}\cdot\cancel{12}\cdot\cancel{11}\cdot\cancel{10}\cdot\cancel{9}\cdot\cancel{8}\cdot\cancel{32!}}{\cancel{32!}\cancel{7!}\cdot\cancel{40}\cdot\cancel{39}\cdot\cancel{38}^{19}\cdot 37\cdot\cancel{36}\cdot\cancel{35}\cdot\cancel{34}^{17}\cdot\cancel{33}}=\frac{1}{11951};$$

c) $$\frac{\binom{25}{5}\binom{15}{3}}{\binom{40}{8}}=\frac{\frac{25!}{5!20!}\cdot\frac{15!}{3!17!}}{\frac{40!}{8!32!}}=\frac{11270}{35853}$$

45. In un'urna vi sono 20 palline rosse e 10 di altri colori, estraiamo 5 palline a caso, con che probabilità sono a) la maggior parte rosse; b) la maggior parte non rosse.

a) $$\frac{\binom{20}{3}\binom{10}{2}+\binom{20}{4}\binom{10}{1}+\binom{20}{5}}{\binom{30}{5}}=\frac{6403}{7917};$$ b) $$\frac{\binom{20}{2}\binom{10}{3}+\binom{20}{1}\binom{10}{4}+\binom{10}{5}}{\binom{30}{5}}=\frac{1514}{7917}$$

46. In un'urna vi sono 100 palline numerate da 1 a 100. Estraiamo 5 palline a caso, con che probabilità sono a) tutte pari; b) almeno 2 pari; c) esattamente 2 pari.

a) $$\frac{\binom{50}{5}}{\binom{100}{5}}=\frac{1081}{38412};$$ b) $$1-\frac{\binom{50}{5}+\binom{50}{4}\binom{50}{1}}{\binom{100}{5}}=\frac{7864}{9603};$$ c) $$\frac{\binom{50}{2}\binom{50}{3}}{\binom{100}{5}}=\frac{6125}{19206}$$

Estrazioni con e senza rigenerazione

Sia un'urna con n palline, di cui m bianche e (n – m) nere, si estraggano k palline; determinare la probabilità che accada quanto richiesto. Se non è specificato altrimenti, devono considerarsi le diverse ipotesi con e senza rigenerazione.

1. a) $n = 23$, $m = 15$, $k = 2$, tutte nere; b) $n = 40$, $m = 25$, $k = 3$, tutte bianche

a) con rigenerazione: $(8/23)^2 = 64/529$; senza rigenerazione: $8/23 \Rightarrow 7/22 = 28/253$;

b) $(25/40)^3 = 125/512$; $25/40 \cdot 24/39 \cdot 23/38 = 115/494$

2. a) $n = 27$, $m = 13$, $k = 4$, tutte nere; b) $n = 15$, $m = 3$, $k = 5$, tutte bianche

a) $(14/27)^4 = 38416/531441$; $D_{14,4}/D_{27,4} = 77/1350$;

b) $(3/15)^5 = (1/5)^5$, 0, dato che non ci sono 5 palline bianche

3. a) $n = 32$, $m = 6$, $k = 4$, solo una bianca; b) $n = 18$, $m = 13$, $k = 5$, solo 3 bianche

a) $4 \cdot 6/32 \cdot (26/32)^3 = 6591/16384$; $4 \cdot 6/32 \cdot D_{26,3}/D_{32,3} = 195/496$;

b) $6 \cdot (13/18)^3 \cdot (5/18)^2 = 54925/314928$; $6 \cdot (D_{13,3} \cdot D_{5,2})/D_{18,5} = 143/714$

Negli esercizi seguenti se non è specificato altrimenti, devono considerarsi le diverse ipotesi con e senza rigenerazione

4. In un'urna abbiamo 3 palline numerate da 1 a 3. Estraiamo le palline in successione, con che probabilità le palline vengono estratte a) nell'ordine 123; b) nell'ordine 321; c) in un ordine predefinito?

Non è difficile capire che gli eventi sono equiprobabili, e che la probabilità è 1/6, dato che vi è un solo caso favorevole a fronte di 3! = 6 casi possibili.

5. Con riferimento al precedente quesito. Diciamo che si è verificato un accoppiamento se una delle palline viene estratta in un'estrazione che coincide con il numero che essa riporta, cioè la pallina numero 1 per prima o la numero 2 per seconda o la 3 per terza. Con che probabilità si verifica a) un solo accoppiamento; b) solo 2 accoppiamenti; c) almeno un accoppiamento; d) almeno due?

I casi possibili sono 6, come abbiamo visto. a) I casi favorevoli sono {132; 321; 213}, quindi la probabilità è ½; b) evento impossibile; c) 1 – 2/6 = 2/3, infatti il complementare, cioè nessun accoppiamen-

to, si verifica nei casi {231; 312}; d) da quanto detto almeno 2 significa 3, quindi: 1/6

6. **In un'urna immettiamo tre bigliettini su ciascuno dei quali è scritto uno dei numeri 1, 2, 3. Estraiamo per tre volte un biglietto con rigenerazione registrando il valore scritto. Se la somma dei tre numeri estratti è 6, qual è la probabilità che abbiamo estratto sempre 2?**
   Si ottiene 6 con le terne (1, 2, 3) e (2, 2, 2) permutazioni, quindi i casi possibili sono 3! + 1 = 7. La probabilità è 1/7
7. **Abbiamo 11 palline numerate da 1 a 11 all'interno di un'urna. Ne estraiamo 6 a caso senza rigenerazione, con che probabilità la somma dei numeri ottenuti è dispari?**
   La somma sarà dispari se ci sarà un numero dispari di addendi dispari. Quindi se ne estraiamo 1, 3, 5. Pertanto la probabilità è: $\binom{6}{1}\cdot\frac{6\cdot D_{5,5}}{D_{11,6}}+\binom{6}{3}\cdot\frac{D_{6,3}\cdot D_{5,3}}{D_{11,6}}+\binom{6}{5}\cdot\frac{D_{6,5}\cdot D_{5,1}}{D_{11,6}}=\frac{118}{231}$
8. **Da un'urna con 5 palline bianche, 10 nere, 8 verdi e 6 gialle estraiamo con rigenerazione due palline. Con quale probabilità sono a) dello stesso colore; b) di diverso colore?**
   a) $(5/29)^2 + (10/29)^2 + (8/29)^2 + (6/29)^2 = 225/841$; b) $2 \cdot(50 + 40 + 30 + 80 + 60 + 48)/(29)^2 = 616/841$
9. **Da un'urna con 50 palline, 10 bianche, 20 rosse e 20 nere, si estraggono 3 palline. Determinare la probabilità che esse siano tutte dello stesso colore.**
   Con rigenerazione: $(10^3 + 20^3 + 20^3)/50^3 = 17/125$; Senza rigenerazione: $(D_{10,3} + D_{20,3} + D_{20,3})/D_{50,3} = 6/49$
10. **Da un'urna con 35 palline, 15 rosse, 7 verdi e 13 nere, si estraggono 3 palline. Determinare la probabilità che siano tutte di diverso colore.**
    Con rigenerazione: $3! \cdot 15 \cdot 7 \cdot 13/35^3 = 234/1225$; Senza rigenerazione: $3! \cdot 15 \cdot 7 \cdot 13/D_{35,3} = 39/187$
11. **Da un'urna con 26 palline, 12 bianche e 14 nere, si estraggono 3 palline. Determinare la probabilità che fra di esse ve ne sia almeno una bianca.**
    Con rigenerazione: $1 – 14^3/26^3 = 1854/2197$; Senza rigenerazione: $1 – D_{14,3}/D_{26,3} = 43/50$
12. **In un'urna vi sono 12 biglie indistinguibili al tatto, metà bianche e metà nere. Se ne estraggono 3 senza rigenerazione. Determinare la probabilità che a) siano tutte bianche; b) siano tutte dello stesso colore; c) almeno 2 siano bianche; d) almeno 2 siano dello stesso colore.**
    a) $D_{6,3}/D_{12,3} = 1/11$; b) $2D_{6,3}/D_{12,3} = 2/11$; c) $(3D_{6,2}D_{6,1} + D_{6,3})/D_{12,3} = ½$; d) Ovviamente 1, per il principio dei cassetti, avendo 2 colori e 3 estrazioni, almeno due sono dello stesso colore.
13. **In un'urna vi sono delle biglie indistinguibili al tatto, 3 sono bianche, 7 verdi e 4 rosse. Se ne estraggono 4 senza rigenerazione. Determinare la probabilità che a) siano tutte verdi; b) siano tutte dello stesso colore; c) esattamente 2 siano dello stesso colore**
    a) $D_{7,4}/D_{14,4} = 5/143$; b) $(D_{7,4} + D_{4,4})/D_{14,4} = 36/1001$; c) $6(D_{3,2}D_{11,2} + D_{7,2}D_{7,2} + D_{4,2}D_{10,2})/D_{14,4} = 876/1001$
14. **In un sacchetto sono messe 4 palline numerate, una riporta il numero 1, una il numero 6 e due il numero 9. Qual è la probabilità che, prendendo tre palline con rigenerazione, il numero formato con i tre numeri estratti nell'ordine sia divisibile per 3?**
    I casi possibili sono = 4^3. I casi favorevoli sono quelli in cui le palline hanno tutte lo stesso numero, cioè 11, dato che i casi 111 e 666 accadono una volta, mentre 999 accade 9 volte, dato che il 9 può venire scelto da due palline diverse, quindi abbiamo 3^2 possibilità. Altri casi favorevoli sono i numeri 669 e 996 e relative permutazioni, quindi, sempre tenendo conto del fatto che il 9 è in 2 palline, abbiamo altri $6 + 4 \cdot 3 = 18$ casi. Infine la probabilità cercata vale 27/64.
15. **Alessio ha comprato 1000 batterie per rivenderle. Nel deposito in cui le ha custodite vi è una infiltrazione di umidità, così 100 batterie vengono danneggiate. Alessio non si accorge di ciò pertanto mette in vendita ugualmente anche le batterie danneggiate, che risultano indistinguibili da quelle buone. Gianni va a comprare 4 batterie da Alessio per il suo giocattolo. Sapendo che questo giocattolo funziona solo se tutte le batterie sono perfettamente funzionanti, determinare la probabilità che il giocattolo di Gianni funzioni.**
    Dobbiamo stabilire quante fra le quaterne possibili non contengono nessuna delle 100 batterie danneggiate. In pratica dobbiamo considerare le estrazioni senza rigenerazione di 4 oggetti fra 1000. La probabilità che siano tutte buone è $D_{900,4}/D_{1000,4} \approx 66\%$

Negli esercizi seguenti se non è specificato altrimenti, devono considerarsi le diverse ipotesi con e senza rigenerazione

16. Da un'urna con 20 palline bianche e 15 nere estraiamo tre palline. Con quale probabilità almeno una è nera?

Conviene considerare l'evento complementare. Con rigenerazione: $1 - 20^3/35^3 = 279/343$; Senza rigenerazione: $1 - D_{20,3}/D_{35,3} = 1081/1309$

17. Da un'urna con 24 palline bianche e 18 nere estraiamo quattro palline. Con quale probabilità al massimo due sono bianche?

Con rigenerazione: $(18^4 + 4 \cdot 24 \cdot 18^3 + 6 \cdot 24^2 \cdot 18^2)/42^4 = 6185/28812$. Senza rigenerazione: $(D_{18,4} + 4 \cdot 24 \cdot D_{18,3} + 6 \cdot D_{24,2} \cdot D_{18,2})/D_{42,4} = 10812/18655$

18. Da un'urna con 10 palline bianche, 12 rosse e 14 nere estraiamo tre palline. Con quale probabilità almeno una è bianca?

Basta considerare il caso con 10 palline bianche e 26 non bianche. Con rigenerazione: $1 - 26^3/36^3 = 3635/5832$. Senza rigenerazione: $1 - D_{26,3}/D_{36,3} = 227/357$

19. Da un mazzo di 40 carte da scopa estraiamo 3 carte, con quale probabilità almeno una è un asso?

Con rigenerazione: $1 - (9/10)^3 = 513/1000$; senza rigenerazione: $1 - D_{36,3}/D_{40,3} = 137/494$.

20. Da un mazzo di 40 carte da scopa estraiamo 4 carte, con quale probabilità almeno due sono re?

Con rigenerazione: $1 - (9/10)^4 - 4 \cdot 9^3/10^4 = 523/10000$; senza rigenerazione: $1 - D_{36,4}/D_{40,4} - 4 \cdot D_{36,3}/D_{40,4} = 137/494$

21. Da un mazzo di 52 carte da ramino estraiamo senza rigenerazione 3 carte, con quale probabilità a) sono tutte dello stesso seme; b) almeno due sono di cuori?

a) $4 \cdot D_{13,3}/D_{52,3} = 22/425$; b) $1 - (D_{39,3} + 3 \cdot 13 \cdot D_{39,2})/D_{52,3} = 64/425$

22. In un'urna vi sono delle biglie indistinguibili al tatto, 5 sono bianche, 8 verdi e 10 rosse. Se ne estraggono 3 senza rigenerazione. Determinare la probabilità che a) almeno 2 siano verdi; b) almeno 2 siano dello stesso colore.

a) Terne del tipo (BBN) dove N indica un colore diverso da quello che si ripete due volte e del tipo (BBB): $(3 \cdot 18 \cdot D_{5,2} + D_{5,3})/D_{23,3} = 190/1771$;

b) Terne del tipo (BBN), (VVN), (RRN) e del tipo (BBB), (VVV) e (RRR). $[3 \cdot (18 \cdot D_{5,2} + 15 \cdot D_{8,2} + 13 \cdot D_{10,2}) + D_{5,3} + D_{8,3} + D_{10,3}]/D_{23,3} = 1371/1771$.

23. Da un'urna con 12 palline bianche, 15 rosse e 18 nere estraiamo quattro palline con rigenerazione. Con quale probabilità ve ne sono a) almeno due dello stesso colore; b) esattamente due dello stesso colore; c) almeno due di colore diverso; d) esattamente due di colore diverso.

a) $1 - 3! \cdot 12 \cdot 15 \cdot 18/45^3 = 59/75$; b) $[3 \cdot (12^2 \cdot 31 + 15^2 \cdot 30 + 18^2 \cdot 27) + 12^3 + 15^3 + 18^3]/45^3 = 2623/3375$; c) $[3! \cdot 12 \cdot 15 \cdot 18 + 3 \cdot (12^2 \cdot 31 + 15^2 \cdot 30 + 18^2 \cdot 27)]/45^3 = 2938/3375$; d) $3 \cdot (12^2 \cdot 31 + 15^2 \cdot 30 + 18^2 \cdot 27)/45^3 = 2218/3375$

24. In un'urna vi sono un totale di 50 palline di due diversi colori: bianco e nero. Effettuiamo l'estrazione senza rigenerazione di due palline. Se la probabilità di estrarre due palline bianche supera di 2/35 la probabilità di estrarre due palline di diverso colore, determinare quante sono le palline nere. Di quanto differiscono le due probabilità se l'estrazione avviene con rigenerazione?

Abbiamo b palline bianche e $(50 - b)$ nere. Si deve avere: $\frac{b(b-1)}{50 \cdot 49} = 2 \cdot \frac{b(50-b)}{50 \cdot 49} + \frac{2}{35} \Rightarrow 3b^2 - 101b - 140 = 0 \Rightarrow b = 35$ (unica soluzione accettabile), quindi le nere sono 15. Nel caso con rigenerazione: $2 \cdot 15 \cdot 35/50^2 - 15^2/50^2 = 33/100$

25. Nel 1693 Samuel Pepys scrisse al grande scienziato Newton proponendogli il seguente problema: *è più probabile ottenere almeno un* 6 *lanciando* 6 *dadi oppure ottenere* 2 *volte* 6 *lanciando* 12 *dadi o infine ottenere per* 3 *volte* 6 *lanciando* 18 *dadi*?

Nel primo caso la probabilità vale: $1 - (5/6)^6 = 31031/46656 \approx 66{,}5\%$; nel secondo: $66 \cdot 5^{10}/6^{12} \approx 29{,}6\%$; nel terzo: $816 \cdot 5^{15}/6^{18} \approx 24{,}5\%$. Il primo caso è il più probabile.

26. Quanto vale la probabilità di ottenere almeno *N* volte 6 lanciando 6*N* dadi?

Consideriamo sempre l'evento complementare, ossia ottenere al più $N - 1$ volte 6. In generale ottenere k volte 6 su $6N$ lanci ha probabilità $\binom{6N}{k} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{6N-k}$, quindi la probabilità cercata è pari a:

$$1-\sum_{k=0}^{N-1}\binom{6N}{k}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^k\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{6N-k}$$

Giochiamo alla matematica

Attività

Calcolare quante persone minimo servono perché la probabilità che almeno due di essi compiano il compleanno nello stesso giorno sia rispettivamente almeno del a) 60%; b) 70%; c) 80%; d) 90%.

a) $1-\frac{364\cdot 363\cdot\ldots\cdot(365-k)}{365^k}\geq 0,6\Rightarrow k\geq 27$; b) $1-\frac{364\cdot 363\cdot\ldots\cdot(365-k)}{365^k}\geq 0,6\Rightarrow k\geq 30$;

c) $1-\frac{364\cdot 363\cdot\ldots\cdot(365-k)}{365^k}\geq 0,6\Rightarrow k\geq 35$; d) $1-\frac{364\cdot 363\cdot\ldots\cdot(365-k)}{365^k}\geq 0,6\Rightarrow k\geq 41$

Probabilità condizionata

1. **In una classe vi sono 15 maschi e 12 femmine, solo i maschi giocano a calcio. Qual è la probabilità che uno studente scelto a caso fra quelli che giocano a calcio è maschio?**
   Dato che solo i maschi giocano a calcio, ovviamente la probabilità è 1.
2. **Se *A* è un sottoevento di *B*, quanto vale *P*(*B*|*A*)? Giustificare la risposta.**
   Dato che $A\subseteq B\Rightarrow A\cap B=A$, quindi: $P(B\mid A)=\frac{P(A)}{P(A)}=1$.
3. **Elisabetta ha due figli. a) Con quale probabilità sono entrambi maschi? b) E se si sa che non sono entrambe femmine?**
   a) I casi possibili sono 4: (M; M) (M; F), (F; M) e (F; F), quindi la probabilità è ¼; b) I casi possibili si riducono a 3, quello favorevole è sempre 1, quindi: 1/3
4. **Lanciamo per 3 volte una moneta. a) Con che probabilità otteniamo sempre la stessa faccia? b) E se sappiamo che la prima volta abbiamo ottenuto testa?**
   a) I casi possibili sono $2^3 = 8$, quelli favorevoli 2: TTT e CCC, probabilità: ¼; b) i casi possibili si riducono a 4, i lanci sono TXY, con X, Y che possono essere T o C. un solo caso è favorevole: TTT. La probabilità rimane ¼.
5. **Lanciamo per 3 volte un dado regolare. a) Con che probabilità otteniamo sempre lo stesso punteggio? b) E se sappiamo che la prima volta abbiamo ottenuto un punteggio pari?**
   a) I casi possibili sono 6^3, quelli favorevoli sono 6, quindi la probabilità è 1/36; b) I casi possibili diventano $3\cdot 6^2$, quelli favorevoli solo 3, perciò la probabilità è ancora 1/36.
6. **Dal sacchetto dei numeri della tombola estraiamo tre numeri senza rigenerazione. a) Con che probabilità otteniamo tre numeri pari? b) E se sappiamo che la prima volta abbiamo ottenuto un punteggio minore di 20?**
   a) $\frac{\binom{45}{3}}{\binom{90}{3}}=\frac{\cancel{45}\cdot\cancel{44}\cdot 43}{\cancel{90}^{\,2}\cdot 89\cdot\cancel{88}^{\,2}}=\frac{43}{356}$; b) $\frac{\cancel{9}}{\cancel{90}^{\,10}}\cdot\frac{\cancel{44}}{89}\cdot\frac{43}{\cancel{88}^{\,2}}=\frac{43}{1780}$
7. **Quattro carte sono disposte in fila una accanto all'altra con la faccia nascosta. Due delle carte sono di cuori, le altre di picche. a) Qual è la probabilità che due carte dello stesso seme siano messe una accanto all'altra? b) Quanto vale la precedente probabilità se sappiamo che la seconda carta è di cuori?**
   a) I casi favorevoli sono le permutazioni della parola CCPP, cioè 6, di questi quelli sfavorevoli sono solo 2 (CPCP e PCPC), quindi la probabilità è 2/3; b) I casi possibili diventano quanto quelli delle permutazioni di CPP, cioè 3, i casi favorevoli sono 2 (CCPP, PCCP), quindi la probabilità è ancora 2/3.
8. **Vengono lanciate tre monete bicolori, da una parte bianche e dall'altra nere. a) Determinare la**

probabilità che tutte e tre abbiano la faccia nera rivolta verso l'alto. b) E se sappiamo che una almeno delle tre cade con la faccia nera rivolta verso l'alto?

a) Casi possibili 2^3, un solo caso favorevole. Probabilità: 1/8; b) manca solo il caso BBB, quindi la probabilità diventa 1/7.

9. Da un mazzo formato da 3 carte nere e 4 bianche estraiamo due carte; con quale probabilità le due carte sono nere, dato che la prima lo è certamente?

Dopo la prima estrazione sono rimaste 2 carte nere e 4 bianche, la probabilità di estrarre una carta nera è perciò 2/6 = 1/3.

10. Lanciamo tre dadi; con quale probabilità otteniamo il punteggio 12, dato che il primo dado è truccato e permette solo l'uscita dei punteggi 4 e 5 con uguale probabilità?

I casi possibili sono $2 \cdot 6^2 = 72$. Le combinazioni favorevoli sono $(4, x, y)$ con $x + y = 8$ e $(5, x, y)$ con $x + y = 7$, cioè un totale di $(5 + 6) = 11$, quindi la probabilità è 11/72.

11. In un'urna vi sono biglietti colorati e numerati. Se il 18% dei biglietti è rosso, il 23% ha scritto numeri pari e il 12% sono rossi con numeri pari. Con che la probabilità scelto a caso un biglietto a) è rosso dato che contiene un numero pari; b) contiene un numero pari dato che è rosso?

a) $P(r \mid p) = \dfrac{P(r \cap p)}{P(p)} = \dfrac{0{,}12}{0{,}23} = \dfrac{12}{23}$; b) $P(p \mid r) = \dfrac{P(r \cap p)}{P(r)} = \dfrac{0{,}12}{0{,}18} = \dfrac{12}{18} = \dfrac{2}{3}$

12. a) Determinare la probabilità di ottenere esattamente 3 volte testa, lanciando 5 monete regolari. b) E se si ottiene testa nei primi due lanci? c) E se invece sappiamo che nei primi tre lanci si sono ottenute esattamente due teste?

a) $10/2^5 = 5/16$; b) I casi possibili si riducono a 2^3 (lancio delle ultime 3 monete), i casi possibili sono quante le permutazioni di TCC, cioè 3, quindi probabilità 3/8; c) I casi possibili sono le permutazioni di TTC, cioè 3, moltiplicati per 2^2, gli esiti delle ultime due monete, quindi 12. I casi favorevoli sono quelli le cui ultime due monete sono TC o CT, quindi totale 6. Probabilità: 3/16.

13. Il fornaio ha dimenticato di togliere 50 panini del giorno precedente, prima di inserirne 250 freschi. a) Qual è la probabilità che il primo cliente acquisti 3 panini tutti freschi? b) E se sappiamo che il primo panino è certamente fresco?

a) $\dfrac{\cancel{250}^{5} \cdot 249 \cdot \cancel{248}^{124}}{\cancel{300}^{6} \cdot 299 \cdot \cancel{298}^{149}} = \dfrac{25730}{44551} \approx 40\%$; b) $\dfrac{249 \cdot \cancel{248}^{124}}{299 \cdot \cancel{298}^{149}} = \dfrac{30876}{44551} \approx 69\%$.

14. Con riferimento al problema precedente qual è la probabilità che a) il primo cliente acquisti solo 2 panini freschi? b) E se il primo panino è certamente fresco? E se il primo panino è certamente di ieri?

a) $3 \cdot \dfrac{\cancel{250}^{5} \cdot 249 \cdot \cancel{50}^{25}}{\cancel{300}^{6} \cdot 299 \cdot \cancel{298}^{149}} = \dfrac{31125}{89102} \approx 35\%$; b) $2 \cdot \dfrac{249 \cdot \cancel{50}^{25}}{299 \cdot \cancel{298}^{149}} = \dfrac{12450}{44551} \approx 28\%$;

c) $\dfrac{\cancel{250}^{125} \cdot 249}{299 \cdot \cancel{298}^{149}} = \dfrac{31125}{44551} \approx 70\%$.

15. In un'urna c'è una pallina che sappiamo essere bianca o nera, ma non siamo certi quale sia il suo colore effettivo. Inseriamo nell'urna una pallina bianca. A questo punto estraiamo una pallina e questa è bianca, con quale probabilità la pallina rimasta è bianca?

Dopo avere inserito la pallina bianca sono possibili due casi, o ci sono due palline bianche o una bianca e una nera. In realtà però il primo caso, dato che abbiamo estratto una pallina bianca contempla due sotto casi, a seconda che abbiamo estratto la pallina già presente o quella inserita dopo, quindi i casi effettivi sono 3, di cui due a favore. Probabilità 2/3.

16. Vi sono 4 urne: la prima contiene 7 palline verdi e 4 rosse, la seconda 4 verdi e 2 rosse, la terza 2 verdi e 5 rosse, l'ultima 1 verde e 2 rosse. a) Estraendo da ciascuna urna una pallina qual è la probabilità che le palline estratte siano tutte verdi? b) Quale la probabilità che la seconda pallina estratta sia verde, dato che delle 4 palline estratte 3 sono verdi? c) Qual è la probabilità che 2 siano verdi, dato che la quarta estratta è verde?

a) $7/11 \cdot 4/6 \cdot 2/7 \cdot 1/3 = 4/99$;

b) I casi favorevoli sono: RVVV, VVRV e VVVR, che accadono con probabilità: $(4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 + 7 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1 + 7 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2)/(11 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 3) = 142/693$;

c) I casi favorevoli sono: VRRV, RVRV e RRVV, che accadono con probabilità: $(7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 1 + 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1)/(11 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 3)$ =c) 83/693.

17. Disponiamo 8 carte, quattro rosse e quattro nere, in fila. Determinare la probabilità che a) vi siano almeno due carte dello stesso colore disposte una accanto all'altra; b) tutte le carte rosse siano una accanto all'altra.

a) I casi possibili sono le permutazioni di RRRRNNNN, cioè 8!/(4!4!) = 70. Quelli non favorevoli sono solamente RNRNRNRN e NRNRNRNR, quindi i favorevoli sono 68. Probabilità: 68/70 = 34/35;

b) Indichiamo tutte le 4 carte rosse semplicemente con R, quindi i casi favorevoli sono le permutazioni di RNNNN, cioè 5, quindi la probabilità è 5/70 = 1/14.

18. Risolvere l'esercizio precedente supponendo che due carte nere siano riconoscibili dall'esterno, quindi si sa che sono state disposte al primo e ultimo posto.

a) I casi possibili sono le permutazioni di RRNNNN, nelle quali non è possibile separare tutte le N, quindi la probabilità è 1;

b) I casi possibili sono 6!/(2!4!) = 15, quelli favorevoli sono le permutazioni di RNNNN (indichiamo con R le 2 carte rosse), quindi 5. Probabilità 5/15 = 1/3.

19. In una scatola immettiamo delle monete secondo la seguente regola. Lanciamo una moneta in aria, se esce testa inseriamo 1 euro nella scatola, se esce croce mettiamo 5 euro. Determinare la probabilità che dopo quattro lanci, la scatola contenga a) 12 euro; b) 20 euro; c) 6 euro; d) 16 euro sapendo che nel primo lancio è uscita testa; e) 12 euro sapendo che nei due lanci dispari la moneta non ha avuto lo stesso esito.

a) 12 = 5 + 5 + 1 + 1 è l'unica possibilità, quindi devono uscire 2 T e 2 C. Probabilità: $6 \cdot (½)^4 = 3/8$;

b) 20 = 5 + 5 + 5 + 5 è l'unica possibilità, quindi devono uscire 4 C. Probabilità: $(½)^4 = 1/16$;

c) Non è possibile ottenere 6 come somma di soli 5 e 1, per complessivi 4 addendi. Probabilità 0;

d) 16 = 5 + 11 = 5 + 5 + 5 + 1 è l'unica possibilità, quindi dal secondo lancio devono uscire 2 C e 1 T. Probabilità: $3 \cdot (½)^3 = 3/8$;

e) I casi possibili sono 16 meno i casi del tipo 5X1Y e 1X5Y, con X e Y che valgono 1 o (vel) 5, quindi sono 8. Inoltre 12 = 5 + 5 + 1 + 1 = 5 + 1 + 1 + 5 = 1 + 5 + 5 + 1 = 1 + 1 + 5 + 5, sono gli unici casi ordinati. Quindi: 4/8 = ½.

20. Lanciamo due dadi. Determinare la probabilità che si ottenga 7 dato che a) si ottiene un punteggio dispari; b) si ottiene un punteggio superiore a 6; c) il primo dado mostra un punteggio dispari; d) il secondo dado mostra un punteggio pari; e) il punteggio di uno dei due dadi è dispari; f) i dadi hanno lo stesso punteggio; g) i dadi hanno diversi punteggi.

a) I casi possibili sono: 2 + 4 + 6 + 4 + 2 = 16, quelli favorevoli sono 6. Probabilità: 6/16 = 3/8;

b) I casi possibili sono: 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21, quelli favorevoli sono 6. Probabilità: 6/21 = 2/7;

c) I casi possibili sono: 18, quelli favorevoli sono 3. Probabilità: 3/18 = 1/6;

d) I casi possibili sono: 18, quelli favorevoli sono 3. Probabilità: 1/6;

e) I casi possibili sono: 36 – 9 = 27, quelli favorevoli sono 6. Probabilità: 6/27 = 2/9;

f) Non si può ottenere 7 con dadi con uguale punteggio. Probabilità: 0;

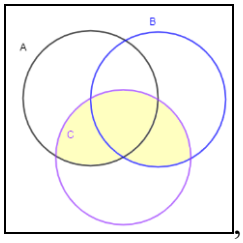
g) I casi possibili sono: 36 – 6 = 30, quelli favorevoli sono 6. Probabilità: 6/30 = 1/5.

21. Di due eventi si sa che $P(A) = 1/3$, $P(B|A) = ½$. Possiamo dire che gli eventi A e B sono incompatibili? Giustificare la risposta.

No. $P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A) = 1/6 \neq \varnothing$

22. Dimostrare che $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C)$.

Abbiamo: $P(A|C)+P(B|C)-P(A\cap B|C)=\dfrac{P(A\cap C)+P(B\cap C)-P(A\cap B\cap C)}{P(C)}$, mentre si ha: $P(A\cup B|C)=\dfrac{P(A\cup B\cap C)}{P(C)}$. Ora dal punto di vista insiemistico $P(A\cup B\cap C)$ è rappresentato dal se-

guente diagramma 

, che facilmente si vede essere equivalente al numeratore dell'altra espressione.

23. Dimostrare che $P(A|B) + P(A^C|B) = 1$. (A^C è l'evento complementare di A).

$$P(A|B)+P(A^C|B)=\frac{P(A\cap B)+P(A^C\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=1$$

24. Dimostrare o mostrare un controesempio del fatto che non è vero che $P(A|B) + P(A|B^C) = 1$.

$P(A|B)+P(A|B^C)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}+\frac{P(A\cap B^C)}{P(B^C)}$, se per esempio è $B \subset A \Rightarrow P(A \cap B) = P(B)$ e $P(A \cap B^C) = P(A \setminus B)$, quindi l'espressione precedente vale: $\frac{P(B)}{P(B)}+\frac{P(A\setminus B)}{1-P(B)}=1+\frac{P(A\setminus B)}{1-P(B)}$ e poiché $P(A \setminus B) \neq 0$, l'uguaglianza è falsa.

25. Dimostrare o mostrare un controesempio del fatto che non è vero che $P(A|B) + P(A^C|B^C) = 1$.

$P(A|B)+P(A^C|B^C)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}+\frac{P(A^C\cap B^C)}{P(B^C)}$, per il teorema di De Morgan: $A^C \cap B^C = (A \cup B)^C$, quindi $P(A^C \cap B^C) = P[(A \cup B)^C] = 1 - P(A \cup B)$, che sempre nell'ipotesi $B \subset A$ diventa $1 - P(A)$ e l'espressione diventa: $1+\frac{1-P(A)}{1-P(B)}\neq 1$, dato che in generale $P(A) \neq 1$.

26. Lanciamo un dado per tre volte, determinare le diverse probabilità che la prima volta che otteniamo 6 è a) al primo lancio; b) al secondo; c) al terzo.

a) ovviamente 1/6; b) indicando con p uscita di 6 e con n uscita di un altro punteggio, dobbiamo determinare la probabilità dell'evento np: $5/6 \cdot 1/6 = 5/36$; c) evento nnp: $5/6 \cdot 5/6 \cdot 1/6 = 25/216$.

27. Con riferimento al problema precedente determinare la probabilità che il 6 si ottenga per la prima volta al n – esimo lancio.

Per quanto visto: $(5/6)^{n-1} \cdot 1/6 = 5^{n-1}/6^n$.

28. Due amici giocano lanciando due dadi regolari finché esca un prodotto dei due punteggi dispari, in questo caso il primo vince 2 euro, mentre se escono tre volte di seguito punteggi il cui prodotto è pari il secondo vince 3 euro. Dal punto di vista del primo, si aspetta di vincere o perdere e quanto?

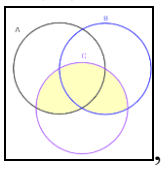
Il primo vince solo se entrambe le facce del dado sono dispari e può vincere al primo, al secondo o al terzo tentativo, dopo di che ha sicuramente perso. La probabilità di ottenere dispari su entrambe le facce è ovviamente $½ \cdot ½ = ¼$. Quindi, indicando con d l'uscita di due punteggi disparì e con p quella di uno almeno dei due pari, abbiamo intanto che $P(d) = ¼$, mentre $P(p) = ¾$. La probabilità di vincere del primo è $P(d) + P(pd) + P(ppd) = ¼ + ¾ \cdot ¼ + ¾ \cdot ¾ \cdot ¼ = 37/64$. Il secondo quindi ha probabilità 27/64 di vincere. Perciò il primo si aspetta di vincere € 74/64 e di perdere € 81/64, perciò alla fine si aspetta di perdere € 7/64.

Eventi dipendenti ed eventi indipendenti

1. Qual è la probabilità che lanciando tre dadi non truccati essi a) mostrino tre numeri diversi; b) non mostrino tutti e tre lo stesso numero

a) La probabilità che il secondo lancio abbia esito diverso dal primo è 5/6, la probabilità che il terzo sia diverso dal primo e dal secondo è 4/6 = 2/3, dato che gli eventi sono indipendenti la probabilità è $5/6 \cdot 2/3 = 5/9$;

b) Dobbiamo aggiungere alla probabilità precedente quella in cui due punteggi sono uguali ma diversi dal terzo, cioè: $3 \cdot 1/6 \cdot 5/6 = 5/12$, quindi $5/9 + 5/12 = 35/36$.

2. **Determinare la probabilità che lanciando un dado ed estraendo una pallina da un'urna che ne contiene dodici numerate da 1 a 12, si ottengano in entrambi i casi due numeri primi.**
   Gli eventi sono indipendenti. Probabilità: ½ · 5/12 = 5/24
3. **Qual è la probabilità che nelle estrazioni del lotto in una certa ruota i primi due estratti siano a) 1 e 2, nell'ordine? b) E se non conta l'ordine?**
   Eventi indipendenti. a) 1/90 · 1/89 = 1/8010; b) in questo caso si considera anche l'evento 21, quindi il doppio del precedente: 1/4005.
4. **Se alla roulette è uscito il rosso per 7 volte di fila, all'ottava giocata la probabilità che esca nero quanto vale?**
   Quanto vale se uscisse qualunque altra giocata, cioè 18/37.
5. **Scegliamo a caso due carte da un mazzo di carte italiane da 40, l'evento *la prima carta estratta è un asso* e l'evento *la seconda carta estratta è un re* sono indipendenti?**
   No, perché la prima probabilità è 1/10, la seconda è anch'essa 1/10, mentre la probabilità dell'evento intersezione, cioè AR, è 1/10 · 4/39 ≠ 1/100.
6. **Scegliamo una carta da un mazzo di carte italiane da 40, la registriamo e poi la rimettiamo nel mazzo. Con che probabilità ripetendo 4 volte l'operazione otteniamo sempre un asso?**
   Eventi indipendenti. $(1/10)^4 = 10^{-4} = 0{,}01\%$.
7. **Con riferimento al precedente esercizio, se estraiamo 4 carte successivamente, senza reimmetterle, quanto vale la probabilità?**
   Eventi non indipendenti. 1/10 · 3/39 · 2/38 · 1/37 = 1/91390 ≈ 0,001%
8. **Qual è la probabilità che scegliendo a caso 4 carte da un mazzo di carte italiane da 40 siano tutte di bastoni? E con rigenerazione?**
   $D_{10,4}/D_{40,4} = 21/9139 \approx 0{,}2\%$; $(¼)^4 = 1/256 \approx 0{,}3\%$
9. **Qual è la probabilità che scegliendo a caso 3 carte da un mazzo di carte da ramino da 52 siano tutte rosse? E con rigenerazione?**
   $D_{26,3}/D_{52,3} = 2/17$; $(½)^3 = 1/8$
10. **Con che probabilità in tre giocate successive alla roulette esce un numero minore di 10?**
    $(10/37)^3 \approx 2\%$
11. **Provare che $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P[C|(A \cap B)]$.**
    $$\cancel{P(A)} \cdot \frac{\cancel{P(A \cap B)}}{\cancel{P(A)}} \cdot \frac{P(A \cap B \cap C)}{\cancel{P(A \cap B)}} = P(A \cap B \cap C)$$
12. **Provare che $P[(A \cup B)|C] = P(A|C) + P(B|C) - P[(A \cap B)|C]$.**
    $\dfrac{P(A \cup B \cap C)}{P(C)} = \dfrac{P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B)}{P(C)}$, il grafico seguente si riferisce al primo numeratore  , che facilmente si vede essere uguale al secondo numeratore.
13. **Con riferimento al bersaglio del box lavoriamo insieme, qual è la probabilità, gettando tre freccette, di totalizzare 150 punti?**
    150 = 50 + 50 + 50 = 100 + 25 + 25 = 25 + 50 + 75, sono gli unici modi per ottenere 150 come somma di tre addendi scelti fra i punteggi presenti nel bersaglio. Abbiamo quindi una probabilità unione di eventi incompatibili ed indipendenti. Si ha: $(16^3 + 3 \cdot 24^2 + 3! \cdot 24 \cdot 16 \cdot 8)/49^3 \approx 21\%$
14. **Una moneta falsata che mostra testa 5 volte su 8, è lanciata 6 volte. Con che probabilità otteniamo a) esattamente 4 volte testa; b) almeno 4 volte testa.**
    a) $\binom{6}{4} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^2 \approx 32\%$; b) $\binom{6}{4} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^2 + \binom{6}{5} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{8}\right) + \binom{6}{6} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^6 \approx 60\%$
15. **Qual è la probabilità che lanciando 5 volte un dado si ottenga esattamente 4 volte il punteggio 1?**
    $$\binom{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{7776}$$

16. Qual è la probabilità che lanciando 4 volte un dado si ottenga esattamente 3 volte un punteggio inferiore a 3?

$$\binom{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{81}$$

17. Una moneta falsata che mostra testa 6 volte su 10, è lanciata 3 volte, con quale probabilità otteniamo due volte testa e una volta croce?

$$\binom{3}{2}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2\cdot\frac{2}{5}=\frac{36}{125}$$

18. Qual è la probabilità che lanciando per 10 volte una moneta regolare si ottengano più teste che croci?

$$\left[\binom{10}{6}+\binom{10}{7}+\binom{10}{8}+\binom{10}{9}+\binom{10}{10}\right]\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{193}{512}$$

19. Una moneta falsata che mostra testa 3 volte su 8, è lanciata 5 volte. Con quale probabilità otteniamo a) sempre testa; b) sempre croce?

a) $\left(\frac{3}{8}\right)^5\approx 0,7\%$; b) $\left(\frac{5}{8}\right)^5\approx 10\%$

20. Lanciamo un dado per tre volte di fila. Con che probabilità otteniamo a) sempre 6; b) sempre lo stesso numero.

a) $\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{216}$; b) Gli eventi sono incompatibili ed indipendenti, quindi 6 volte la precedente: 1/36

21. In una certa nazione si è stabilito che la probabilità che in un parto non gemellare nasca una femmina è del 53%. Calcolare la probabilità che una famiglia che ha due bambini non gemelli li abbia a) entrambi maschi; b) entrambe femmine; c) di sesso diverso.

a) $0,47^2\approx 22,1\%$; b) $0,53^2\approx 28,1\%$; c) $2\cdot 0,47\cdot 0,53\approx 49,8\%$

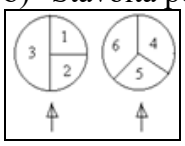
22. La probabilità che in un parto non gemellare nasca una femmina è del 55%, con che probabilità una famiglia con 3 bambini, senza gemelli, ha: a) 3 maschi; b) 2 maschi e 1 femmina; c) 2 femmine e 1 maschio; d) 3 femmine.

Sono eventi indipendenti. a) $0,45^3\approx 9,1\%$; b) $3\cdot 0,45^2\cdot 0,55\approx 33,4\%$; c) $3\cdot 0,45\cdot 0,55^2\approx 40,8\%$; d) $0,55^3\approx 16,6\%$

23. Con riferimento al precedente quesito, con che probabilità una famiglia di 3 figli ha 2 maschi e 1 femmina se il primogenito è a) maschio; b) femmina?

a) Dato che il primogenito è maschio possono capitare solo i casi MMF e MFM: $2\cdot 0,55\cdot 0,45^2\approx 22,3\%$;

b) Stavolta possono succedere solo il caso FMM: $0,55\cdot 0,45^2\approx 11,1\%$

24. 

I due dischi in figura vengono ruotati e i numeri che si fermano sotto la freccia vengono sommati. Un dispositivo evita che la freccia si fermi esattamente al confine fra due zone. Qual è la probabilità che tale somma sia un numero pari? (Nella prima figura le due parti piccole sono uguali fra loro e metà della grande; nella seconda le tre parti sono uguali).

Si ottiene un numero pari in 4 casi su 9, ossia quando i numeri hanno la stessa parità. Gli eventi sono incompatibili ed indipendenti. la probabilità è: $(½ + ¼)\cdot 1/3 + 2\cdot ¼\cdot 1/3 = 5/12$

25. Sul tavolo vi sono tre carte di seme rosso e una di seme nero, Matteo sceglie a caso una carta e la tiene, Dorotea dopo di lui ne sceglie un'altra. Con quale probabilità Dorotea ha scelto la carta nera?

Dobbiamo determinare la probabilità che Dorotea scelga la nera e Matteo una rossa, i due eventi sono ovviamente indipendenti. Matteo non deve aver scelto la carta nera, e lo fa con probabilità $P(M) = ¾$, con questa ipotesi sul tavolo sono rimaste 2 carte rosse e una nera, quindi è $P(D) = 1/3$. Infine $P(M \cap D) = 1/3\cdot ¾ = ¼$.

26. Un giocatore di basket ha una media di successo nei tiri liberi di 0,75, considerando tale valore

come la sua probabilità di fare canestro in un tiro libero, si determini con quale probabilità farà canestro con un tiro libero nell'ipotesi che se dovesse sbagliare il primo avrebbe la possibilità di tirarne un altro?

Indichiamo con A l'evento fare canestro al primo tentativo, con $\neg A$ l'evento complementare, con B l'evento fare canestro al secondo colpo. La probabilità richiesta è somma delle probabilità degli eventi incompatibili $P(A) + P(\neg A \cap B) = ¾ + ¾ \cdot ¼ = 15/16$.

27. In un torneo di tennis Aldo e Bice sono arrivati entrambi in semifinale. Gli accoppiamenti vengono sorteggiati, i 4 concorrenti hanno la stessa probabilità di vincere contro ciascuno degli altri. a) Con che probabilità Aldo e Bice si incontreranno in semifinale? b) Con che probabilità in finale?

a) Ci sono 6 possibili accoppiamenti per le semifinali, di questi 5 non prevedono la sfida Aldo e Bice, quindi vi è probabilità 1/6 che si incontrino.

b) Per andare in finale non si devono incontrare in semifinale, con probabilità 5/6, e ciascuno deve vincere la propria semifinale, con probabilità ½. Quindi la probabilità è $5/6 \cdot ¼ = 5/24$.

28. Se la probabilità che una famiglia con 2 bambini abbia un maschio e una femmina è del 49,7%, con che probabilità uno almeno dei neonati è maschio?

Detta p la probabilità di avere un maschio si ha: $0{,}497 = 2 \cdot p \cdot (1 - p) \Rightarrow p \approx 0{,}46 \vee p \approx 0{,}54$. Quindi ci sono 2 possibilità: $1 - 0{,}54^2 \approx 71\% \vee 1 - 0{,}46^2 \approx 79\%$

29. Gianni lancia 2 monete regolari, Luca ne lancia tre. Qual è la probabilità che Luca ottenga più teste di Gianni?

Indichiamo con G_k, l'evento *Gianni ottiene k teste*, e con L_k, l'evento corrispondente per Luca. Dobbiamo considerare gli eventi $G_0(L_1 + L_2 + L_3) + G_1(L_2 + L_3) + G_2L_3$, la cui probabilità è:

$$\frac{1}{4}\cdot\left[\binom{3}{1}+\binom{3}{2}+\binom{3}{3}\right]\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\cdot\left[\binom{3}{2}+\binom{3}{3}\right]\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\cdot\binom{3}{3}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}\ ¼\cdot\ ½$$

30. Inter e Milan sono ai quarti di finale di Champions League, con che probabilità si incontreranno non importa in che turno? Si suppone che in ogni turno ogni squadra ha probabilità ½ di passare.

La probabilità è somma delle probabilità che si incontrino ai quarti, alla semifinale o alla finale. Ai quarti si incontreranno con probabilità $\frac{1}{\binom{8}{2}} = \frac{1}{28}$. Alle semifinali si incontreranno se non si sono incontrati ai quarti e avranno vinto le loro rispettive partite, che accade con probabilità $27/28 \cdot ¼ = 27/112$ e saranno sorteggiati, che accade con probabilità 1/6, quindi si incontreranno alle semifinali con probabilità $27/112 \cdot 1/6 = 9/224$. Infine si incontreranno in finale se non si incontrano alle semifinali e vincono le rispettive partite, che accade con probabilità $215/224 \cdot ¼ = 215/896$. Perciò la probabilità che si incontrino è $1/28 + 9/224 + 215/896 = 283/896$.

31. Anna dice che domani uscirà con Paolo con il 55% di probabilità se piove e il 30% se non piove. Le previsioni del tempo danno una probabilità del 40% che domani piova. Qual è la probabilità che domani Anna esca con Paolo?

Dobbiamo considerare i due casi incompatibili: piove ed Anna esce con Paolo, non piove ed Anna esce. I singoli eventi sono indipendenti, quindi: $0{,}4 \cdot 0{,}55 + 0{,}6 \cdot 0{,}3 = 0{,}4 = 40\%$

32. In un'urna sono poste 50 palline verdi e 50 blu, indistinguibili al tatto. Prendiamo due palline a caso, se sono entrambe verdi le mettiamo in un contenitore A, se entrambe blu in un contenitore B, diversamente in un contenitore C. Dopo avere estratto in questo modo tutte le palline dall'urna, con che probabilità in A e in B vi saranno lo stesso numero di palline?

In C andranno $2n$ palline, n verdi ed n blu, con $0 \le n \le 50$. Quindi saranno rimaste $50 - n$ palline verdi e $50 - n$ blu che vengono estratte a coppie dello stesso colore. È evidente che ogni volta che estraiamo 2 palline blu, rimangono 2 palline verdi che dovranno essere estratte a coppia, quindi alla fine in A e B vi saranno lo stesso numero di palline, che potrebbero essere anche 0.

Teorema di Bayes e legge dei grandi numeri

1. Supponiamo che esista un test per riconoscere se una persona è o no ammalata di diabete, il quale abbia una efficacia del 98%, cioè solo il 98% di coloro che risultano positivi al test sono effettivamente malati, mentre il 2% no. Se il 3% della popolazione è effettivamente malato di diabete e Martina è stata giudicata positiva al test, con che probabilità è effettivamente malata?

Con A indichiamo l'evento *Martina risulta positiva*, con B_1 l'evento *Martina è malata* e con B_2 l'evento *Martina non è malata*. Dobbiamo calcolare $P(B_1 \mid A) = \dfrac{P(A \mid B_1) \cdot P(B_1)}{P(A \mid B_1) \cdot P(B_1) + P(A \mid B_2) \cdot P(B_2)} =$

$$= \frac{0,98 \cdot 0,03}{0,98 \cdot 0,03 + 0,02 \cdot 0,97} \approx 0,60 = 60\%.$$

2. In una classe vi sono il 30% di ragazze. Il 40% dei maschi ed il 60% delle femmine pratica almeno uno sport. a) Scelto a caso uno studente che pratica uno sport, con quale probabilità, è maschio? b) Scelto a caso uno studente che non pratica alcuno sport, con che probabilità è una femmina?

a) Con A indichiamo l'evento *x pratica uno sport*, con B_1 l'evento *x è maschio* e con B_2 l'evento *x è femmina*. Dobbiamo calcolare $P(B_1 \mid A) = \dfrac{0,4 \cdot 0,7}{0,4 \cdot 0,7 + 0,6 \cdot 0,3} \approx 0,61 = 61\%$;

b) Stavolta A indica l'evento *x non pratica uno sport* $P(B_2 \mid A) = \dfrac{0,4 \cdot 0,3}{0,4 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,7} \approx 0,22 = 22\%$.

3. Negli U.S.A. viene usata talvolta la cosiddetta macchina della verità, per stabilire se un indagato mente o no. Supponiamo che una data macchina abbia un'affidabilità del 92% (cioè riconosce se un indagato mente o dice la verità nel 92% dei casi) e che il 63% degli indagati è colpevole. a) Con quale probabilità una persona riconosciuta colpevole con l'ausilio della macchina della verità lo è realmente? b) Con quale probabilità una persona riconosciuta innocente lo è veramente?

a) Con A indichiamo l'evento *x è riconosciuto colpevole*, con B_1 l'evento *x è colpevole* e con B_2 l'evento *x non è colpevole*. Dobbiamo calcolare $P(B_1 \mid A) = \dfrac{0,92 \cdot 0,63}{0,92 \cdot 0,63 + 0,08 \cdot 0,37} \approx 0,95 = 95\%$;

b) A indica l'evento *x è riconosciuto innocente* $P(B_2 \mid A) = \dfrac{0,92 \cdot 0,37}{0,92 \cdot 0,37 + 0,08 \cdot 0,63} \approx 0,87 = 87\%$.

4. Un'urna contiene 10 palline bianche e 15 nere, una seconda urna contiene 8 bianche e 5 nere. Lanciamo una moneta regolare, se esce testa estraiamo una pallina dalla prima urna, se no dalla seconda. a) Se la pallina è bianca, con quale probabilità è stata estratta dalla prima urna? b) Con quale dalla seconda?

a) Con A indichiamo l'evento *la pallina è bianca*, con B_1 l'evento *è stata estratta dalla prima urna* e con B_2 l'evento *è stata estratta dalla seconda urna*. $P(B_1 \mid A) = \dfrac{\frac{\cancel{10}}{\cancel{25}^{5}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}}{\frac{\cancel{10}}{\cancel{25}^{5}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} + \frac{\cancel{8}^{4}}{13} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}} = \dfrac{13}{33}$;

b) $P(B_2 \mid A) = \dfrac{\frac{\cancel{8}^{4}}{13} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}}{\frac{\cancel{8}^{4}}{13} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} + \frac{\cancel{10}}{\cancel{25}^{5}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}} = \dfrac{20}{33}$.

5. Con riferimento al precedente quesito, stavolta l'urna la scegliamo lanciando un dado regolare, se esce un punteggio inferiore a 5 scegliamo la prima urna, se no la seconda. Quanto valgono adesso le probabilità?

a) $P(B_1 \mid A) = \dfrac{\dfrac{\cancel{10}^{2}}{\cancel{25}^{5}} \cdot \dfrac{2}{3}}{\dfrac{\cancel{10}^{2}}{\cancel{25}^{5}} \cdot \dfrac{2}{3} + \dfrac{8}{13} \cdot \dfrac{1}{3}} = \dfrac{13}{23}$; b) $P(B_2 \mid A) = \dfrac{\dfrac{8}{13} \cdot \dfrac{1}{3}}{\dfrac{8}{13} \cdot \dfrac{1}{3} + \dfrac{\cancel{10}^{2}}{\cancel{25}^{5}} \cdot \dfrac{2}{3}} = \dfrac{10}{23}$

6. In una fabbrica di lampadine vi sono due diversi impianti in funzione. Il primo produce il 25% del totale giornaliero, il secondo il 75%. La percentuale di lampadine difettose sul totale, provenienti dai tre impianti è 1% e 2%. Con quale probabilità una lampadina difettosa scelta a caso, è stata prodotta dal secondo impianto?

Con A indichiamo l'evento *lampadina difettosa*, con B_1 l'evento *prodotta dal primo impianto* e con B_2 l'evento *prodotta dal secondo impianto*. $P(B_2 \mid A) = \dfrac{0,02 \cdot 0,75}{0,02 \cdot 0,75 + 0,01 \cdot 0,25} \approx 0,86 = 86\%$.

7. Nella tabella seguente sono riportati i dati Istat relativi al numero di giornali stampati in Italia e poi suddivisi per aree geografiche, nel 1997. Scelto un giornale scelto a caso, fra quelli pubblicati nel 1997, troviamo che è un quotidiano, determinare la probabilità che sia stato stampato nelle diverse aree geografiche.

Tipologia	Nord Ovest	Nord Est	Centro	Mezzogiorno
Quotidiani	710106	518242	508116	445254
Settimanali	307618	197214	149026	157514

Con A indichiamo l'evento *x è un quotidiano*, con B_i l'evento *x è pubblicato nella zona i*, dove $1 \le i \le 4$, indica le quattro zone geografiche nell'ordine. Costruiamo la seguente tabella con le probabilità necessarie per calcolare $P(B_1 \mid A) = \dfrac{P(A \mid B_1) \cdot P(B_1)}{P(A \mid B_1) \cdot P(B_1) + P(A \mid \neg B_1) \cdot P(\neg B_1)}$, dove con $\neg B_i$ indichiamo tutte le altre aree geografiche diverse da B_i.

Tipologia	Nord Ovest	Nord Est	Centro	Mezzogiorno	Totale
Quotidiani	710106	518242	508116	445254	2181718
Settimanali	307618	197214	149026	157514	811372
P(A|Bi)	0,70	0,72	0,77	0,74	
P(Bi)	0,33	0,24	0,23	0,20	
P(A|NON Bi)	0,74	0,73	0,72	0,73	

$P(B_1 \mid A) = \dfrac{0,7 \cdot 0,33}{0,7 \cdot 0,33 + 0,74 \cdot 0,67} \approx 0,32 = 32\%$; $P(B_2 \mid A) = \dfrac{0,72 \cdot 0,24}{0,72 \cdot 0,24 + 0,73 \cdot 0,76} \approx 0,24 = 24\%$;

$P(B_3 \mid A) = \dfrac{0,77 \cdot 0,23}{0,77 \cdot 0,23 + 0,72 \cdot 0,77} \approx 0,24 = 24\%$; $P(B_4 \mid A) = \dfrac{0,74 \cdot 0,20}{0,74 \cdot 0,20 + 0,73 \cdot 0,80} \approx 0,20 = 20\%$

8. Nella tabella seguente sono riportati i dati Istat relativi al numero di famiglie italiane dei Censimenti 1991 e 2001, suddivise per numero medio di componenti. Scelta una famiglia a caso, troviamo che ha mediamente 3 componenti. a) Determinare la probabilità che faccia parte del censimento 1991. b) Con che probabilità la famiglia scelta è del 2001 se ha mediamente 4 componenti?

Numero Componenti	1	2	3	4	5	6 o più
1991	4099970	4920050	4410961	4228722	1576409	672891
2001	5427621	5905411	4706206	4136206	1265826	369406

a) Con A indichiamo l'evento *numero componenti* 3, con B_1 l'evento *appartiene al censimento* 1991, con B_2 l'evento *censimento* 1991. Il totale delle famiglie censite nel 1991 è 19909003, quelle del 1001: 212810676, quindi: $P(A \mid B_1) = \dfrac{4410961}{19909003} \approx 0,22, P(B_1) = \dfrac{19909003}{19909003 + 212810676} \approx 0,48$,

$P(A \mid B_2) = \dfrac{4706206}{212810676} \approx 0,22, P(B_2) = \dfrac{212810676}{19909003 + 212810676} \approx 0,52$. Infine:

$P(B_1 \mid A) = \dfrac{\cancel{0,22} \cdot 0,48}{\cancel{0,22} \cdot 0,48 + \cancel{0,22} \cdot 0,52} = 0,48$

b) Stavolta A indica l'evento *numero componenti* 4. Pertanto avremo:

$$P(A|B_2)=\frac{4136206}{212810676}\approx 0{,}19, P(A|B_1)=\frac{4228722}{19909003}\approx 0{,}21, P(B_2|A)=\frac{0{,}19\cdot 0{,}48}{0{,}19\cdot 0{,}48+0{,}21\cdot 0{,}52}\approx 0{,}46$$

9. Abbiamo due monete, una regolare e l'altra falsata, che ha probabilità 0,75 che esca testa. Ne scegliamo una a caso e la lanciamo. Con che probabilità a) esce testa? b) è la moneta regolare dato che è uscito croce?

a) La probabilità è data dalla somma fra la probabilità che esca T dato che abbiamo lanciato la prima moneta più quella che esca T dato che abbiamo lanciato la seconda. Quindi: $P(T) = P(T|1)P(1) + P(T|2)P(2) = ½ \cdot ½ + ¾ \cdot ½ = 5/8$;

b) $P(1|C)=\dfrac{P(C|1)\cdot P(1)}{P(C|1)\cdot P(1)+P(C|2)\cdot P(2)}=\dfrac{1/2\cdot 1/2}{1/2\cdot 1/2+1/4\cdot 1/2}=\dfrac{2}{3}$

10. Esprimere il Teorema di Bayes nel caso in cui gli eventi B_i sono 3.

$$P(B_1|A)=\frac{P(A|B_1)\cdot P(B_1)}{P(A|B_1)\cdot P(B_1)+P(A|B_2)\cdot P(B_2)+P(A|B_3)\cdot P(B_3)}$$

11. Un'industria produce lampadine utilizzando tre diversi impianti, che indichiamo con *A*, *B* e *C*, ciascuno dei quali produce lo stesso numero di lampadine. Alla fine della giornata le lampadine vengono poste in uno stesso deposito e risultano indistinguibili. Le percentuali di lampadine difettose provenienti dai diversi impianti sono 2%, 4% e 1% rispettivamente. Determinare la probabilità che, scegliendo una lampadina a caso fra quelle prodotte questa sia difettosa e a) prodotta dall'impianto *B*; b) non sia stata prodotta dall'impianto *A*; c) prodotta dall'impianto C.

a) *D* indica l'evento *lampadina difettosa*, con le iniziali maiuscola gli eventi *appartenere all'impianto con quella iniziale*. Quindi, tenuto conto che gli impianti producono lo stesso numero di lampadine: $P(B|D)=\dfrac{P(D|B)\cdot \cancel{P(B)}}{P(D|A)\cdot \cancel{P(A)}+P(D|B)\cdot \cancel{P(B)}+P(D|C)\cdot \cancel{P(C)}}=\dfrac{P(D|B)}{P(D|A)+P(D|B)+P(D|C)}$

$$=\frac{0{,}04}{0{,}02+0{,}04+0{,}01}=\frac{4}{7}\approx 57\%;$$

b) $P(B\cup C|D)=\dfrac{P(D|B\cup C)}{P(D|A)+P(D|B\cup C)}=\dfrac{0{,}05}{0{,}02+0{,}05}=\dfrac{5}{7}\approx 71\%;$

c) $P(C|D)=\dfrac{P(D|C)}{P(D|A)+P(D|B)+P(D|C)}=\dfrac{0{,}01}{0{,}07}=\dfrac{1}{7}\approx 14\%.$

12. Con riferimento al problema precedente, le percentuali di lampadine difettose prodotte da ciascun impianto siano rispettivamente m_1, m_2 e m_3 (con $m_1 + m_2 + m_3 < 1$). Determinare la probabilità che una lampadina scelta a caso sia difettosa e sia stata prodotta dall'impianto *A*.

Basta sostituire m_i, al rispettivo valore numerico, ottenendo: $\dfrac{m_1}{m_1+m_2+m_3}$.

13. Con riferimento all'esercizio 11, si supponga che il tasso di produzione non sia uguale per tutti gli impianti, ma sia rispettivamente nelle seguenti proporzioni: metà per *A*, un terzo per *B* e un sesto per *C*. Restando inalterata la percentuale di lampadine difettose prodotte da ciascun impianto, determinare la probabilità che trovata una lampadina difettosa questa sia stata prodotta rispettivamente da uno dei tre impianti.

Stavolta non possiamo semplificare: $P(A|D)=\dfrac{P(D|B)\cdot P(A)}{P(D|A)\cdot P(A)+P(D|B)\cdot P(B)+P(D|C)\cdot P(C)}=$

$$\frac{0{,}02/2}{0{,}02/2+0{,}04/3+0{,}01/6}=40\%; P(B|D)=\frac{0{,}04/3}{0{,}025}\approx 53\%; P(C|D)=\frac{0{,}01/6}{0{,}025}\approx 6{,}7\%.$$

14. Rispondere al problema precedente nell'ipotesi che le percentuali di produzione di ciascun impianto siano p_1, p_2 e p_3 (con $p_1 + p_2 + p_3 = 1$) e le rispettive percentuali di lampadine difettose siano m_1, m_2 e m_3 (con $m_1 + m_2 + m_3 < 1$).

Anche in questo caso facilmente si ha: $P(I_i/D)\dfrac{m_i\cdot p_i}{m_1\cdot p_1+m_2\cdot p_2+m_3\cdot p_3}, 1\le i\le 3$

15. Da un'indagine statistica svolta in una università statunitense si è stabilito che il 63% degli studenti è americano, il 24% europeo, il 3% africano e il resto asiatico. Le percentuali di studenti maschi per ciascuna delle precedenti aree geografiche sono rispettivamente del 47%, 62%, 84% e 64%. Con quale probabilità uno studente maschio scelto a caso fra quelli iscritti all'Università, proviene da ciascuno dei continenti?

Applichiamo il teorema di Bayes per 4 elementi. Abbiamo quindi: $P(B_1 \mid A) = \dfrac{0,47 \cdot 0,63}{0,47 \cdot 0,63 + 0,62 \cdot 0,24 + 0,84 \cdot 0,03 + 0,64 \cdot 0,10} \approx 55\%$; $P(B_2 \mid A) = \dfrac{0,62 \cdot 0,24}{0,5341} \approx 28\%$; $P(B_3 \mid A) = \dfrac{0,84 \cdot 0,03}{0,5341} \approx 4,7\%$; $P(B_4 \mid A) = \dfrac{0,64 \cdot 0,10}{0,5341} \approx 12\%$

Intervallo matematico

Attività

1. Mostrare che ogni quaterna di dadi che si ottiene da quelli mostrati aggiungendo o moltiplicando tutte le facce per uno stesso numero, è non transitiva.

Dato che abbiamo aggiunto a ogni faccia lo stesso numero, la situazione si ripete identica a quella vista nel box. Analogamente se moltiplichiamo.

2. Mostrare che la quaterna di dadi *A*: {1, 6, 6, 6, 11, 11}, *B*: {2, 5, 5, 5, 10, 10}, *C*: {4, 4, 4, 8, 9, 9}, *D*: {3, 3, 7, 7, 7, 12} è non transitiva.

B con *C* vince 21/36 volte, *C* vince con *D* 21/36 volte, mentre *D* con *B* vince 22/36 volte

La sfida

1. Dimostrare che il numero di eventi (inclusi quello impossibile e quello certo) che si possono formare su uno spazio di eventi con *N* elementi è pari a 2^N.

In pratica si tratta di determinare la cardinalità dell'insieme delle parti, che proviamo per induzione essere proprio 2^N. Per $n = 1$, $\{a\}$ ha due sottoinsiemi, $\varnothing$ e se stesso. Se $A = \{a_1, a_2 \ldots, a_n\}$ è tale che $|P(A)| = 2^n$, allora $A \cup \{a_{n+1}\}$ è tale che il suo insieme delle parti ha gli stessi elementi di $P(A)$, più i nuovi insiemi che si ottengono aggiungendo a questi il nuovo elemento a_{n+1}, che ovviamente sono altri 2^n, per un totale di $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ elementi.

2. Dimostrare che il numero di modi di suddividere un insieme *A* con *N* elementi in *k* sottoinsiemi ordinati e a due a due disgiunti tali che ciascuno di essi abbia $h_1, h_2, \ldots, h_k$, elementi, con $h_1 + h_2 + \ldots + h_k = N$, è uguale a $\binom{N}{h_1} \cdot \binom{N-h_1}{h_2} \cdot \binom{N-h_1-h_2}{h_3} \cdot \ldots \cdot \binom{N-h_1-h_2-\ldots-h_{k-1}}{h_k}$.

Consideriamo prima $k = 2$, allora dividiamo $A = B \cup (A \setminus B)$, con $A \cap B = \varnothing$, $|B| = h_1$, $|A \setminus B| = N - h_1$. Per costruire i diversi insiemi B dobbiamo scegliere h_1 elementi da A, il che ovviamente si fa in $\binom{N}{h_1}$ modi, a questo punto l'insieme complementare è perfettamente determinato e la formula vale, dato che essa equivale a $\binom{N}{h_1} \cdot \binom{N-h_1}{N-h_1} = \binom{N}{h_1}$. Se $k = 3$, $A = B \cup C \cup [A \setminus (B \cup C)]$, con $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \varnothing$, $|B| = h_1$, $|C| = h_2$, $|A \setminus (B \cup C)| = N - h_1 - h_2$. Dopo avere scelto in $\binom{N}{h_1}$ modi gli insiemi B, sceglieremo in $\binom{N-h_1}{h_2}$ modi gli insiemi C e quindi in $\binom{N-h_1-h_2}{N-h_1-h_2} = 1$ modi i rimanenti insiemi. A questo punto è facile generalizzare ottenendo quanto richiesto.

3. Dimostrare che se lanciamo $2n + 1$ monete, la probabilità che ci siano più teste che croci è ½. Se ne lanciamo $2n$, la risposta cambia? Se sì, quanto diventa?

Se abbiamo $2n + 1$ monete, i casi favorevoli sono: $\underset{2n+1}{T\ldots T}, \underset{2n}{T\ldots T}C, \underset{2n-1}{T\ldots T}CC, \ldots, \underset{n+1}{T\ldots T}\underset{n}{C\ldots C}$, che accadono

con probabilità $\binom{2n+1}{0}+\binom{2n+1}{1}+\binom{2n+1}{2}+\ldots+\binom{2n+1}{n}$, poiché i casi possibili sono 2^{2n+1} e grazie alla simmetria dei coefficienti binomiali, possiamo dire che i casi favorevoli all'evento che ci siano più croci che teste sono uguali, pertanto ciascuno di essi vale 2^{2n}, pertanto la probabilità è appunto ½. Più semplicemente i due eventi complementari sono uguali, quindi ovviamente p = ½. Se le monete fossero in numero pari, invece il risultato cambia perché stavolta *avere più teste che croci non è complementare* all'evento *avere più croci che teste*. Rimane fuori l'evento *avere tante teste quante croci*, che ha probabilità $\binom{2n}{n}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$, quindi $2p+2p+\binom{2n}{n}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}=1 \Rightarrow p=\frac{1}{2}-\binom{2n}{n}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}=1$

4. CAS **In una fabbrica si effettuano delle campionature di controllo, scegliendo a caso alcuni dei prodotti e verificando se sono difettosi; se almeno il 10% del campione verificato è difettoso tutta la produzione viene distrutta. Se su 1000 pezzi prodotti quelli difettosi sono 75 ed effettuiamo il controllo su 100 pezzi scelti a caso, con che probabilità distruggeremo tutta la produzione?**

Dobbiamo stabilire con che probabilità sui 100 pezzi testati almeno 10 sono difettosi. I casi possibili di scegliere i 100 pezzi sono $\binom{1000}{100}$, le sequenze di 100 elementi che hanno esattamente k pezzi difettosi sono $\binom{75}{k}\cdot\binom{925}{100-k}$, quindi le sequenze che contengono almeno 10 pezzi difettosi sono: $\sum_{k=10}^{75}\binom{75}{k}\cdot\binom{925}{100-k}$, pertanto la probabilità cercata è $\dfrac{\sum_{k=10}^{75}\binom{75}{k}\cdot\binom{925}{100-k}}{\binom{1000}{100}}\approx 20,7\%$.

5. **Una moneta ha un difetto di fabbricazione che fa sì che la sua probabilità di ottenere testa lanciandola è di 2/3. Determinare la probabilità che lanciando 50 volte la moneta, si ottengano un numero pari di teste. Se la probabilità è diversa da 2/3, la risposta cambia?**

Si ha: $\sum_{k=1}^{25}\binom{50}{2k}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2k}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{50-2k}=50\%$. La risposta non cambia: $\sum_{k=1}^{25}\binom{50}{2k}\cdot p^{2k}\cdot(1-p)^{50-2k}=50\%$.

6. ***A*, *B* e *C* sono ai vertici di un triangolo equilatero, ciascuno con in mano una pistola. *A* colpisce sempre il bersaglio, *B* colpisce con una probabilità dell'80%, *C* con una del 50%. All'inizio si sorteggia l'ordine con cui ciascuno sparerà a uno solo degli altri due. Ammettendo che ciascuno dei tre adotti la strategia a egli favorevole e che la gara finisca quando solo uno dei tre sopravvive, chi ha più probabilità di uscire vivo?**

Una prima risposta immediata è la seguente. *C* ha più probabilità di sopravvivere perché i due più forti in ogni caso, cercheranno sempre di scontrarsi fra loro. Per una dimostrazione più rigorosa ragioniamo come segue. Sono possibili 6 turnazioni, ossia le permutazioni di *ABC*. Nei due casi in cui *A* è il primo a sparare ovviamente ucciderà *B*, più pericoloso, poi *C* spara ad *A* e ha 50% di probabilità di ucciderlo. Quindi in questa situazione sia *A* che *C* hanno 50% di probabilità di sopravvivere, *B* nessuna. Nei casi in cui esce per primo *B*, questo sparerà ad *A*, se lo uccide, *C* spara a *B* e lo uccide con probabilità ½ mentre viene ucciso con probabilità ½ · 4/5 = 2/5 < ½. Se invece *B* non uccide *A*, nel caso *BAC*, *A* ucciderà *B* e *C* avrà probabilità maggiore di *B* di sopravvivere; nel caso *BCA*, *C* spara ad *A*, se lo uccide di nuovo si ripete il duello *BC* e quindi *C* ha sempre più probabilità di sopravvivere rispetto a *B*. Infine nei casi in cui *C* spara per primo, egli spara ad *A* e di nuovo si ripetono casi già visti.

7. **Con riferimento al quesito precedente, determinare le probabilità di sopravvivenza dei tre.**

Abbiamo visto che nei due casi con *A* sorteggiato per primo, con probabilità 1/3, la sua probabilità di sopravvivenza è data da ½ · 1/3 = 1/6. Negli altri casi. *BAC*: 1/6 · 1/5 · ½ = 1/60; *BCA*: 1/6 · 1/5 · ½ · ½ = 1/120; *CBA*: 1/6 · ½ · 1/5 · ½ = 1/120; *CAB*: 1/6 · ½ · ½ = 1/24. Totale: *P*(*A*) = 29/120.

Passiamo a *B*. Casi: *ABC* e *ACB*, *P*(*B*) = 0; *BAC* e *BCA*: 1/3 · 4/5 · ½ · 4/5 = 8/75; *CBA* e *CAB*: 1/3 · (½ · 4/5 + ½ · 4/5 · ½ · 4/5) = 14/75, abbiamo considerato le possibilità che *C* ammazzi o no *A*. Totale: *P*(*B*) = 22/75;

Infine C. Casi: ABC e ACB: $1/3 \cdot ½ = 1/6$; BAC: $1/6 \cdot (4/5 \cdot ½ + 1/5 \cdot ½) = 1/12$, abbiamo considerato le due possibilità che B uccida o no A; BCA: $1/6 \cdot (4/5 \cdot ½ + 1/5 \cdot ½ \cdot 1/5 \cdot ½ + 1/5 \cdot ½ \cdot ½) = 47/600$; CBA: $1/3 \cdot (½ \cdot 1/5 \cdot ½ + ½ \cdot 4/5 \cdot ½ + ½ \cdot 1/5 \cdot ½) = 1/20$; CAB: $1/6 \cdot (½ \cdot 1/5 \cdot ½ + ½ \cdot ½) = 1/20$. Totale: $P(C) = 257/600$

Temi assegnati agli esami di stato

1. **(Liceo scientifico PNI 1992/93) Un imputato innocente deve essere giudicato da una giuria composta da tre giurati il cui verdetto finale è raggiunto a maggioranza. I tre giurati *A*, *B* e *C* assumono la loro decisione indipendentemente. *A* e *B* hanno probabilità p ($0 < p < 1$) di decidere per l'assoluzione, mentre il giurato *C* decide in base al risultato ottenuto nel lancio di una moneta. a) Si calcoli la probabilità che l'imputato sia assolto. b) Supponendo di sostituire il giurato *C* con un altro giurato *D* che ha probabilità $p' \neq p$ ($0 < p' < 1$) di decidere per l'assoluzione, si verifichi che la probabilità di assoluzione per l'imputato è maggiore che nel caso precedente se e solo se $p' > ½$. c) Qualora gli imputati siano tre e siano giudicati, indipendentemente tra di loro, dalle giurie prima considerate, si esprima la probabilità dei seguenti eventi, E_1: *la giuria composta da A, B, C ne assolve due su tre*, E_2: *la giuria composta da A, B, D ne assolve tre su tre*; E_3: *la giuria composta da A, B, D assolve almeno un imputato*. d) In particolare per $p = ¾$ si determini il valore di p' in modo che sia $P(E_1) = P(E_2)$.**
   a) L'assoluzione si ha con almeno 2 a favore, ossia con probabilità: $½p^2 + ½ \cdot 2p(1 - p) + ½p^2 = p$;
   b) In questo caso la probabilità diventa: $(1 - p')p^2 + 2pp'(1 - p) + p'p^2 = p^2 + 2pp'(1 - p)$, questa probabilità è maggiore di p se $p + 2p'(1 - p) > 1 \Rightarrow 2p' > 1 \Rightarrow p' > ½$;
   c) Abbiamo visto che la probabilità di assoluzione di uno è pari a p, quindi la probabilità di non assoluzione è ovviamente $(1 - p)$, pertanto: $p(E_1) = 3p^2 \cdot (1 - p)$; Da b) si ha: $p(E_2) = [p^2 + 2pp'(1 - p)]^3$; consideriamo E_3 come il complementare dell'evento *non ne assolve nessuno*. $p(E_3) = 1 - [(1 - p)^2p' + 2p(1 - p')(1 - p) + (1 - p')(1 - p)^2]^3 = 1 - p^3 \cdot (2p' - 2pp' + p)^3$;
   d) $27/16 \cdot ¼ = [9/16 + 3/2p'\ ¼]^3 \Rightarrow p' = ½$.
2. **(Liceo scientifico suppletiva PNI 1992/93) Una macchina produce pezzi meccanici. Ogni pezzo prodotto ha una probabilità $0 < p < 1$ di essere funzionante e probabilità $q = 1 - p$ di essere difettoso. a) Presi a caso k pezzi prodotti si esprima la probabilità dei seguenti eventi: E_1: *tutti i k pezzi sono funzionanti*; E_2: *uno solo dei k pezzi è difettoso*; E_3: *almeno uno dei k pezzi è difettoso*. b) Per ogni k si determini p in modo tale che $P(E_1) = P(E_2)$. c) Per $p = 5/6$ si calcoli la probabilità dell'evento E_4: *il primo pezzo difettoso è il* 10° *prodotto dal momento in cui la macchina entra in funzione*. d) Per $p = 9/10$ si calcoli la probabilità dell'evento E_5: *si ha al massimo* 1 *pezzo difettoso nei primi* 10 *prodotti*.**
   a) Data l'indipendenza, facilmente si ha: $P(E_1) = p^k$; $P(E_2) = k \cdot p^{k-1} \cdot (1 - p)$; $P(E_3) = 1 - p^k$;
   b) $p^k = k \cdot p^{k-1} \cdot (1 - p) \Rightarrow p = k \cdot (1 - p) \Rightarrow p = k/(k + 1)$;
   c) In generale $P(E_4) = p^9 \cdot (1 - p)$, che per $p = 5/6$ diventa: $5^9/6^{10}$;
   d) In generale $P(E_5) = p^{10} + 10p^9 \cdot (1 - p)$, che per $p = 5/6$ diventa: $19 \cdot 9^9/10^{10}$.
3. **(Liceo scientifico PNI 1995/96) Paolo e Giovanni sono due amici appassionati di tiro con l'arco: Paolo colpisce il centro del bersaglio nel 75% dei casi, Giovanni nell'80%. Decidono di fare una gara osservando le seguenti regole: lanceranno una moneta per decidere chi tirerà per primo: se esce testa sarà Paolo, se esce croce sarà Giovanni; tireranno a turno e vincerà chi per primo farà centro. Il candidato: a) calcoli la probabilità che Giovanni vinca al quinto tiro; b) calcoli la probabilità che Paolo vinca al quarto tiro; c) se in un certo tiro fissato, ad esempio il quindicesimo, si ottiene centro per la prima volta, calcoli la probabilità che a tirare sia stato Paolo.**
   a) Dato che Giovanni deve vincere al quinto tiro deve iniziare lui, così la probabilità richiesta è data da: $½ \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}25^2 \cdot 0{,}8 = 0{,}001 = 0{,}1\%$;
   b) Stavolta avremo: $½ \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75 = 0{,}375\%$;
   c) Deve iniziare Paolo, quindi: $½ \cdot 0{,}2^7 \cdot 0{,}25^7 \cdot 0{,}75 =$ si in cui inizi $\approx 2{,}9 \cdot 10^{-10}$.
4. **(Liceo scientifico PNI 2001/02) Il seguente è uno dei celebri problemi del *Cavaliere di Mèré* (1610 – 1685), amico di Blaise Pascal: giocando a dadi è più probabile ottenere almeno una volta 1 con 4 lanci di un solo dado, oppure almeno un doppio 1 con 24 lanci di due dadi?**

Il primo evento ha probabilità $1 - (5/6)^4 \approx 51{,}8\%$; il secondo evento: $1 - (35/36)^{24} \approx 49{,}1\%$.

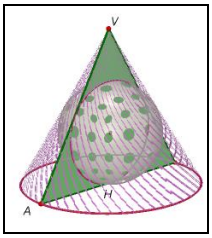
5. **(Liceo scientifico PNI 2001/02) Assumendo che i risultati X, 1, 2, delle 13 partite del Totocalcio siano equiprobabili, calcolare la probabilità che tutte le partite, eccetto una, terminino in parità.**
$13 \cdot (1/3)^{12} \cdot 2/3 \approx 0{,}0016\%$

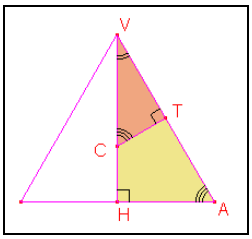
6. **(Liceo scientifico PNI 2002/03) Tre scatole A, B e C contengono lampade prodotte da una certa fabbrica di cui alcune difettose. A contiene 2000 lampade con il 5% di esse difettose, B ne contiene 500 con il 20% difettose e C ne contiene 1000 con il 10% difettose. Si sceglie una scatola a caso e si estrae a caso una lampada. Quale è la probabilità che essa sia difettosa?**
Consideriamo la probabilità di scegliere una data scatola e poi che in quella scatola la lampada scelta sia difettosa. Abbiamo eventi unione: $1/3 \cdot (0{,}05 + 0{,}2 + 0{,}1) \approx 11{,}7\%$.

7. **(Liceo scientifico PNI 2005/06) Un tiratore spara ripetutamente ad un bersaglio; la probabilità di colpirlo è di 0,3 per ciascun tiro. Quanti tiri deve fare per avere probabilità maggiore o uguale di 0,99 di colpirlo almeno una volta?**
Siamo nell'ipotesi di prove ripetute indipendenti, che si interpretano quindi con la binomiale. La probabilità di colpire il bersaglio almeno una volta in n tiri è complementare della probabilità di non colpire mai il bersaglio dopo n tentativi. Cioè $1-\binom{n}{0}0{,}3^0 0{,}7^n > 0{,}99 \Rightarrow n \geq 13$, abbiamo messo il minimo valore intero.

8. **(Liceo scientifico PNI 2006/07) Si scelga a caso un punto *P* all'interno di un triangolo equilatero il cui lato ha lunghezza 3. Si determini la probabilità che la distanza di *P* da ogni vertice sia maggiore di 1.**
L'area di questa zona è ovviamente data dalla differenza fra l'area del triangolo e quella di 3 settori circolari di un cerchio di raggio 1 e angolo 60°, cioè 3/6 = ½ del cerchio, quindi $\frac{3^2}{4}\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}$. La probabilità è perciò $\dfrac{\frac{3^2}{4}\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}}{\frac{3^2}{4}\sqrt{3}} \approx 60\%$.

9. **(Liceo scientifico PNI 2007/08) Siano dati un cono equilatero e la sfera in esso inscritta. Si scelga a caso un punto all'interno del cono. Si determini la probabilità che tale punto risulti esterno alla sfera.**

Ecco la situazione grafica: 

Consideriamo i triangoli simili in figura: 

vale la seguente proporzione: $\overline{AV} : \overline{AH} = \overline{VC} : \overline{CT}$. Esprimiamo in termini del raggio di base del cono: $2r : r = \sqrt{4r^2 - r^2} - R_C : R_C \Rightarrow 2 = \frac{\sqrt{3}r - R_C}{R_C} \Rightarrow 2 = \frac{\sqrt{3}}{R_C}r - 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{R_C}r = 3 \Rightarrow R_C = \frac{\sqrt{3}}{3}r$.

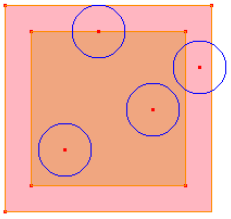
Quindi il volume del cono, che rappresentano i casi possibili, è $\frac{\pi r^2 \cdot \sqrt{3} \cdot r}{3} = \pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot r^3$. Mentre il vo-

lume della sfera, complementare dei casi favorevoli, è $\frac{4}{3}\pi\left[\frac{\sqrt{3}}{3}r\right]^3=\frac{4\pi\sqrt{3}}{27}r^3$. Pertanto la probabilità cercata è $\frac{\pi\frac{\sqrt{3}}{3}r^3-\frac{4\pi\sqrt{3}}{27}r^3}{\pi\frac{\sqrt{3}}{3}r^3}=\frac{9-4}{9}=\frac{5}{9}$.

10. (Liceo scientifico PNI 2007/08) In una classe composta da 12 maschi e 8 femmine, viene scelto a caso un gruppo di 8 studenti. Qual è la probabilità che, in tale gruppo, vi siano esattamente 4 studentesse?

I casi possibili sono tutte i modi di scegliere 8 elementi da un gruppo di 20, senza curarsi dell'ordine di estrazione, cioè $\binom{20}{8}$. I casi favorevoli sono quelli che contengono 4 femmine, scelte da 8 e 4 maschi, scelti da 12, cioè: $\binom{12}{4}\cdot\binom{8}{4}$. La probabilità è perciò: $\frac{\binom{12}{4}\cdot\binom{8}{4}}{\binom{20}{8}}=\frac{1155}{4199}\approx 0,275=27,5\%$

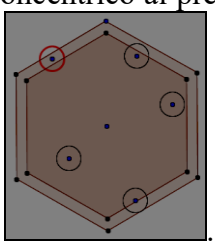
11. (Liceo scientifico PNI 2008/09) Una moneta da 2 euro (il suo diametro è 25,75 *mm*) viene lanciata su un pavimento ricoperto con mattonelle quadrate di lato 10 *cm*. Quale è la probabilità che la moneta vada a finire internamente ad una mattonella (cioè non tagli i lati dei quadrati)?

La regione in cui deve cadere la moneta è quella mostrata in figura  Cioè il centro deve stare all'interno del quadrato più piccolo, il cui lato è la differenza fra quello del quadrato e quello del diametro della moneta. Quindi la probabilità è $(10-2,575)^2/10^2\approx 55\%$.

12. (Liceo scientifico PNI 2010/11) Un test di esame consta di dieci domande, per ciascuna delle quali si deve scegliere l'unica risposta corretta fra quattro alternative. Qual è la probabilità che, rispondendo a caso alle dieci domande, almeno due risposte risultino corrette?

Il problema è di tipo bernoulliano di prove ripetute indipendenti, in cui i due eventi hanno rispettive probabilità 0,25 di successo e 0,75 di insuccesso. Quindi la probabilità cercata è la complementare dell'evento *al più un insuccesso*. Cioè: $1-\binom{10}{10}\left(\frac{3}{4}\right)^{10}-\binom{10}{9}\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{9}=\frac{792697}{1048576}\approx 75,6\%$

13. (Liceo scientifico PNI 2011/12) Una moneta da 1 euro (il suo diametro è 23,25 *mm*) viene lanciata su un pavimento ricoperto con mattonelle esagonali (regolari) di lato 10 *cm*. Quale è la probabilità che la moneta vada a finire internamente ad una mattonella (cioè non tagli i lati degli esagoni)?

Essendo il raggio della moneta inferiore al raggio della circonferenza inscritta nell'esagono (raggio uguale al lato, cioè 10*cm*, la moneta cade all'interno di una mattonella solo se il suo centro cade all'interno di un esagono concentrico al precedente in modo che la "striscia" concentrica sia larga quanto il raggio della moneta.  Quindi la probabilità è il rapporto delle aree dei due esagoni.

L'area di un esagono di lato L è sei volte l'area del triangolo equilatero di lato L, cioè $6\cdot\frac{L^2}{4}\cdot\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}L^2$. Quindi: $\frac{\frac{3\cancel{\sqrt{3}}\,\cancel{(}-R^2\cancel{)}}{\cancel{2}}}{\frac{3\cancel{\sqrt{3}}\,L^2}{\cancel{2}}}=\frac{\cancel{(}-R^2\cancel{)}}{L^2}=\left(1-\frac{R}{L}\right)^2=\left(1-\frac{11,625}{100}\right)^2\approx 78\%$

14. (Liceo scientifico PNI 2011/12) Un'azienda industriale possiede tre stabilimenti: A, B e C. Nello stabilimento A si produce la metà dei pezzi, e di questi il 10% sono difettosi. Nello stabilimento B si produce un terzo dei pezzi, e il 7% sono difettosi. Nello stabilimento C si producono i pezzi rimanenti, e il 5% sono difettosi. Sapendo che un pezzo è difettoso, con quale probabilità esso proviene dallo stabilimento A?

Supponiamo che i pezzi prodotti siano 600, 300 sono prodotti in A e 30 sono difettosi; 200 in B e 14 sono difettosi; 100 in C e 5 sono difettosi. Quindi in totale 49 sono difettosi. La probabilità che uno di questi 49 pezzi sia prodotto da A è perciò 30/49, cioè circa il 61%.

15. (Liceo scientifico PNI 2012/13) In un gruppo di 10 persone il 60% ha occhi azzurri. Dal gruppo si selezionano a caso due persone. Qual è la probabilità che nessuna di esse abbia occhi azzurri?

Due persone da 10 si possono scegliere in $\binom{10}{2}=\frac{10\cdot 9}{2}=45$ diversi modi. 4 dei 10 non hanno gli occhi azzurri, due di questi si scelgono in $\binom{4}{2}=\frac{4\cdot 3}{2}=6$ diversi modi. Quindi la probabilità cercata è 6/45 = 2/15 ≈ 13%.

16. (Liceo scientifico PNI 2013/14) La *zara* è un gioco d'azzardo di origine araba che conobbe particolare fortuna in Italia in epoca medievale – ne parla anche Dante nella *Divina Commedia* – e si giocava con 3 dadi. Si confronti la probabilità di ottenere in un lancio la somma 9 con quella di ottenere 10.

9 si ottiene nei seguenti modi (non considerando le permutazioni) 6 + 2 + 1 = 5 + 2 + 2 = 5 + 3 + 1 = 4 + 4 + 1 = 4 + 3 + 2 = 3 + 3 + 3. Di questi casi quelli con addendi distinti si ottengono in 3! = 6 modi possibili, quelli con due addendi uguali in 3 modi e l'ultimo in 1 solo modo. In totale quindi 9 si ottiene in 6 · 3 + 3 · 2 + 1 = 25. Invece 10 = 6 + 3 + 1 = 6 + 2 + 2 = 5 + 4 + 1 = 5 + 3 + 2 = 4 + 4 + 2 = 4 + 3 + 3, per un totale di 6 · 3 + 3 · 3 = 27. Quindi le due probabilità valgono rispettivamente p_9 = 25/216 e p_{10} = 27/216.

17. (Liceo scientifico PNI 2013/14) 20 palline sono poste in un'urna, 5 per ogni colore: rosso, verde, giallo e bianco. Dall'urna si estraggono a caso, senza reimbussolamento, 3 palline. Si valutino le seguenti probabilità: a) esattamente 1 pallina è rossa; b) le 3 palline sono di colori differenti.

a) La probabilità che sia rossa la prima pallina e no le altre due è 5/20 · 15/19 · 14/18 = 35/228 ≈ 15,4%. Vi sono però i due casi ugualmente probabili che la pallina rossa sia estratta per seconda o per terza. Quindi la probabilità richiesta è 105/228 = 35/76 ≈ 46%.

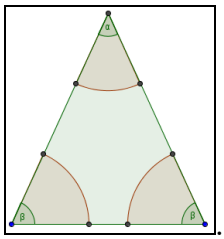
b) Stavolta abbiamo da considerare il caso di tre diversi colori prestabiliti anche nell'ordine di estrazione, che ha probabilità $5^3/(20\cdot 19\cdot 18)$ = 25/1368. I casi in cui possiamo scegliere tre colori su 4 sono $\binom{4}{3}=4$. Quindi la probabilità richiesta è 100/1368 = 25/342 ≈ 7,3%.

18. (Liceo scientifico 2014/15) Lanciando una moneta sei volte qual è la probabilità che si ottenga testa a) al più due volte? b) almeno due volte?

a) Abbiamo a che fare con le cosiddette prove ripetute indipendenti di Bernoulli, e in questo caso se un evento ha probabilità p di accadere e $(1-p)$ di non accadere, la probabilità che in n prove ripetute indipendenti l'evento si verifichi esattamente $k\le n$ volte è $\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$. In questo caso al più due volte significa esattamente 0, 1 o 2 quindi la probabilità cercata è, dato che $p = 1 - p = ½$, $\left[\binom{6}{0}+\binom{6}{1}+\binom{6}{2}\right]\cdot\frac{1}{2^6}=\frac{1+6+15}{64}=\frac{22}{64}=\frac{11}{32}$.

b) Invece almeno 2 volte significa da 2 a 6, conviene quindi calcolare la probabilità come complementare dell'evento al più 1 volta: $1-\left[\binom{6}{0}+\binom{6}{1}\right]\cdot\frac{1}{2^6}=1-\frac{1+6}{64}=1-\frac{7}{64}=\frac{57}{64}$.

19. (Liceo scientifico 2014/15) I lati di un triangolo misurano, rispettivamente, 6 *cm*, 6 *cm* e 5 *cm*. Preso a caso un punto *P* all'interno del triangolo, qual è la probabilità che *P* disti più di 2 *cm* da tutti i tre vertici del triangolo?



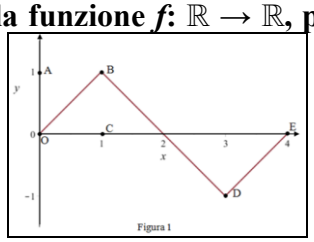
La zona interessata è quella esterna ai tre settori circolari mostrati in figura . La sua area pertanto è data dalla differenza fra l'area del triangolo A e quella dei settori S, quindi la probabilità cercata è $P=\frac{A-S}{A}=1-\frac{S}{A}$. Per calcolare A determiniamo l'altezza relativa alla base: $h=\sqrt{36-\frac{25}{4}}=\frac{\sqrt{119}}{2}$ e quindi $A=\frac{5}{2}\cdot\frac{\sqrt{119}}{2}=\frac{5\cdot\sqrt{119}}{4}$. Per il calcolo dei settori circolari abbiamo: $S=2\cdot\pi\cdot 2^2\cdot\frac{\beta}{2\pi}+\pi\cdot 2^2\cdot\frac{\alpha}{2\pi}=4\beta+2\alpha$. D'altro canto abbiamo anche $A=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{36}^{18}\cdot sin(\alpha)=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{30}^{15}\cdot sin(\beta)$, perciò $\alpha=sin^{-1}\left(\frac{5\cdot\sqrt{119}}{72}\right)\approx 0{,}86, \beta=sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{119}}{12}\right)\approx 1{,}14$.

Torniamo al calcolo della probabilità: $P=1-\frac{4\beta+2\alpha}{\frac{5\cdot\sqrt{119}}{4}}\approx 1-\frac{4\cdot(4{,}56+1{,}72)}{5\cdot\sqrt{119}}\approx 0{,}54$.

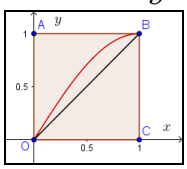
20. (Liceo scientifico 2015/16) Un test è costituito da 10 domande a risposta multipla, con 4 possibili risposte di cui solo una è esatta. Per superare il test occorre rispondere esattamente almeno a 8 domande. Qual è la probabilità di superare il test rispondendo a caso alle domande?

I casi possibili sono tanti quante le disposizioni di 4 oggetti (le opzioni) ciascuno dei quali può ripetersi fino a 10 volte (il totale delle domande), cioè 4^{10}. I casi favorevoli sono dati dalle 3 possibilità in cui si indovinano esattamente 8, 9 o 10 risposte; è meglio considerare i casi complementari, ossia si sbagliano esattamente 0, 1 o 2 risposte. Nel primo caso ovviamente vi è un solo caso a favore. Nel secondo i casi sono dati dalla scelta della domanda da sbagliare (10 possibilità) per i modi in cui la stessa si può sbagliare (3 di 4 risposte sono sbagliate), quindi 3 · 10 = 30 casi. Infine per sbagliare 2 risposte abbiamo $\binom{10}{2}=\frac{10\cdot 9}{2}=45$ modi di scegliere le risposte da sbagliare e 3 · 3 = 9 modi di sbagliare ciascuna coppia di domande. Infine la probabilità cercata è $\frac{1+30+45\cdot 9}{4^{10}}=\frac{436}{4^{10}}\approx 0{,}04\%$.

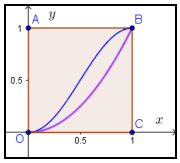
21. (Liceo scientifico 2016/17) Consideriamo la funzione *f*: ℝ → ℝ, periodica di periodo *T* = 4 il cui grafico, nell'intervallo [0; 4], è il seguente:



a) Considera la funzione: *s*(*x*) = *sin*(*bx*), con *b* costante reale positiva; determina *b* in modo che *s*(*x*) abbia lo stesso periodo di *f*(*x*). Dimostra che la porzione quadrata di piano *OABC* in figura 1 viene suddivisa dai grafici di *f*(*x*) e *s*(*x*) in 3 parti distinte e determina le probabilità che un punto preso a caso all'interno del quadrato *OABC* ricada in ciascuna delle 3 parti individuate. b) Considerando ora le funzioni: $f(x)^2$ e $s(x)^2$ discuti, anche con argomentazioni qualitative, le variazioni (in aumento o in diminuzione) dei 3 valori di probabilità determinati al punto precedente.

a) Sappiamo che il periodo di $sin(bx)$ è $\frac{2\pi}{b}$, pertanto deve essere $\frac{2\pi}{b}=4 \Rightarrow b=\frac{\pi}{2}$. Quindi il riferimento grafico è il seguente: 

La probabilità non è altri che il rapporto delle tre aree rispetto all'area del quadrata, che siccome è unitaria, è semplicemente il valore delle aree. Cominciamo dal triangolo *BCO* che ha evidentemente area 1/2 e quindi probabilità relativa 0,5. Calcoliamo adesso l'area della zona racchiusa tra la sinusoide e la diagonale *OB*: $\int_0^1 sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx-\frac{1}{2}=\frac{2}{\pi}\cdot\left[-cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1-\frac{1}{2}=\frac{2}{\pi}\cdot 1-\frac{1}{2}=\frac{4-\pi}{2\pi}\approx 13,7\%$. Infine la terza area vale $1-\frac{2}{\pi}=\frac{\pi-2}{\pi}\approx 36,3\%$.

b) Abbiamo: $f^2(x)=x^2; s^2(x)=sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, il riferimento grafico adesso è: 

e le relative probabilità: $\int_0^1 x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}<\frac{1}{2}; \int_0^1 sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx-\frac{1}{3}=\left[\frac{x}{2}-\frac{sin(\pi x)}{2\pi}\right]_0^1-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}>\frac{4-\pi}{2\pi}$; $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>\frac{\pi-2}{\pi}$.

22. (Liceo scientifico 2016/17) Un dado ha la forma di un dodecaedro regolare con le facce numerate da 1 a 12. Il dado è truccato in modo che la faccia contrassegnata dal numero 3 si presenti con una probabilità *p* doppia rispetto a ciascun'altra faccia. Determinare il valore di *p* in percentuale e calcolare la probabilità che in 5 lanci del dado la faccia numero 3 esca almeno 2 volte.

Diciamo *p'* la probabilità che esca ciascuna delle facce diversa da 3. Dato che la faccia 3 deve avere probabilità doppia rispetto alle altre e dato che alla fine la somma delle probabilità che esca una qualunque delle 12 facce deve valere 1, abbiamo che: $\begin{cases} p=2p' \\ 11p'+p=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=2p' \\ 11p'+2p'=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=\frac{2}{13} \\ p'=\frac{1}{13} \end{cases}$. In percentuale è circa 15,4%.

Lanciare 5 volte uno stesso dado è un evento bernouilliano con 2 eventi di probabilità rispettive 11/13 e 2/13, noi vogliamo che su 5 lanci ci siano almeno 2 successi, dove ciò significa uscita del 3. Quindi avremo: $\binom{5}{2}\cdot\left(\frac{2}{13}\right)^2\cdot\left(\frac{11}{13}\right)^3+\binom{5}{3}\cdot\left(\frac{3}{13}\right)^3\cdot\left(\frac{11}{13}\right)^2+\binom{5}{4}\cdot\left(\frac{2}{13}\right)^4\cdot\left(\frac{11}{13}\right)+\binom{5}{5}\cdot\left(\frac{2}{13}\right)^5=\frac{63832}{371293}\approx 17,2\%$.

23. (Liceo scientifico 2017/18) Devi programmare il funzionamento di una macchina che viene adoperata nella produzione industriale di mattonelle per pavimenti. Le mattonelle sono di forma quadrata di lato 1 (in un'opportuna unità di misura) e in esse viene inserito un disegno mediante una certa funzione. Un cliente decide di ordinare 5.000 mattonelle con il disegno derivato da $a(x) = 1 - x^2$ e 5.000 con quello derivato da $b(x)\ (1 - x)^2$. La verniciatura viene effettuata da un braccio meccanico che, dopo aver depositato il colore, torna alla posizione iniziale sorvolando la mattonella lungo la diagonale. A causa di un malfunzionamento, durante la produzione delle 10.000 mattonelle si verifica con una probabilità del 20% che il braccio meccanico lasci cadere una goccia di colore in un punto a caso lungo la diagonale, macchiando così la mattonella appena prodotta. Fornisci una stima motivata del numero di mattonelle che, avendo una macchia nella parte non colorata, risulteranno danneggiate al termine del ciclo di produzione.

Le funzioni racchiudono aree $\int_0^1\left(1-x^2\right)dx=\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{2}{3}$ e $\int_0^1(1-x)^2\,dx=\left[x-x^2+\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$ 1/3. La

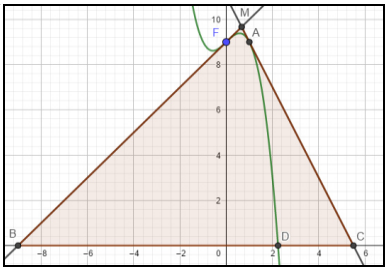
diagonale fa parte della prima bisettrice, $y = x$, pertanto incontra le due curve rispettivamente nei due punti di coordinate, uguali fra loro, ottenute risolvendo le equazioni seguenti: $x = 1 - x^2 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ e $x = (1 - x)^2 \Rightarrow x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Abbiamo considerato ovviamente solo i valori compresi fra 0 e 1. Pertanto la probabilità che la goccia cada fuori dall'area colorata è dato dal rapporto fra la parte di diagonale che è fuori dall'area e la diagonale stessa.

Nel primo caso avremo $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{5}+1}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}38$ e nel secondo: $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2-3+\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}62$. Quindi il 38% circa delle prime mattonelle e il 62% delle seconde, ma ciò succede solo con una probabilità del 20%, quindi, 0,38 · 0, 20 · 5000 + 0,62 · 0,20 · 5000 = 1000.

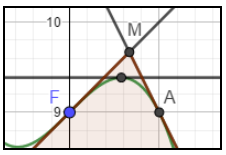
24. (Liceo scientifico 2017/18) Consideriamo la funzione $f_k : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ così definita: $f(x) = -x^3 + x + 9$.

Detto Γ il grafico della funzione, e date la retta *r* tangente a Γ nel punto di ascissa 0 e la retta *s* tangente a Γ nel punto di ascissa 1, si consideri il triangolo *T* delimitato dalle rette *r*, *s* e dall'asse delle ascisse. Determina la probabilità che, preso a caso un punto $P \equiv (x_P; y_P)$ all'interno di *T*, questo si trovi al di sopra di ogni punto di Γ (cioè si abbia $y_P > f(x)$ per tale punto *P*).

Il quesito purtroppo non è molto chiaro poiché la dicitura *si trovi al di sopra di* Γ_1, può dare luogo a diverse interpretazioni e il successivo *chiarimento* non è di grande aiuto. Il sottoscritto legge $y_p > f_1(x)$, nel senso che i punti debbono avere ordinata maggiore di *qualsiasi* punto di Γ_1 all'interno di *T*, pertanto la zona da considerare dovrebbe essere non quella al di sopra dell'arco *FA* in figura e quella compresa tra l'arco *AD* e il triangolo alla sua destra, poiché in questo caso si ha $y_P > f_1(x_P)$, cioè l'ordinata del punto è maggiore di quella del punto sulla curva che ha la sua *stessa ascissa*.



Invece secondo la mia interpretazione sarebbe il triangolo, simile a *T*, delimitato dalla tangente alla curva nel suo punto di massimo e quindi la probabilità sarebbe il rapporto delle aree dei due triangoli simili che non è altro che il quadrato del rapporto di due loro altezze corrispondenti. In particolare il quadrato del rapporto della differenza fra l'ordinata di *M* e quella del massimo con l'ordinata di *M*, che è 9 + 2/3 = 29/3



Quindi la probabilità richiesta è $\left(1-\frac{\frac{-3\sqrt{3}}{27}+\frac{\sqrt{3}}{3}+9}{\frac{29}{3}}\right)^2 = \frac{16-8\sqrt{3}}{2523} \approx 0{,}085\%$. Interpretandola nell'altro modo dobbiamo innanzitutto determinare l'ascissa del punto *D* intersezione della cubica con l'asse delle ascisse, che ha un valore irrazionale, circa 2,24 quindi calcolare la due aree utilizzando gli integrali, cioè dobbiamo togliere dall'area del quadrilatero *OFMC*, il trapezoide determinato dalla curva e dai punti di ascissa 0 e circa 2,24. Ossia l'area del quadrilatero la otteniamo come somma delle aree del trapezio di basi l'ordinata di *F* e quella di *M* e il triangolo rettangolo a esso adiacente, cioè:

$\frac{9+29/3}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{29}{3}\cdot\left(\frac{11}{2}-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{355}{12}\approx 29,6$, mentre l'area del trapezoide è $\int_0^{2,24}\left(-x^3+x+9\right)dx\approx 16,4$, quindi l'area da considerare sarà circa 13,2. Infine l'area del triangolo T sarà invece 14,5 · 29/3 · 1/2 ≈ 70,08. Quindi con questa interpretazione la probabilità sarebbe circa 13,2/70,08 ≈ 18,8%.

25. (Liceo scientifico 2017/18) Si dispone di due dadi uguali non bilanciati a forma di tetraedro regolare con le facce numerate da 1 a 4. Lanciando ciascuno dei due dadi, la probabilità che esca 1 è il doppio della probabilità che esca 2, che a sua volta è il doppio della probabilità che esca 3, che a sua volta è il doppio della probabilità che esca 4. Se si lanciano i due dadi contemporaneamente, qual è la probabilità che escano due numeri uguali tra loro?

La probabilità richiesta è unione di eventi incompatibili, pertanto è data dalla somma dei 4 singoli eventi ossia: P(1-1) + P(2-2) + P(3-3) + P(4-4), inoltre i singoli eventi sono indipendenti, pertanto la probabilità dell'evento P(N-N) = P(N) · P(N) = $P(N)^2$. Dato che abbiamo: P(1) = 2P(2) = 4P(3) = 8P(4) e poiché, ovviamente P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = 1, avremo 15 P(4) = 1, cioè P(4) = 1/15, P(3) = 2/15, P(2) = 4/15, P(1) = 8/15. Infine, la probabilità richiesta è (1 + 4 + 16 + 64)/225 = 85/225 = 17/45.

26. (Liceo scientifico 2017/18) In un gioco a due giocatori, ogni partita vinta frutta 1 punto e vince chi per primo raggiunge 10 punti. Due giocatori che in ciascuna partita hanno la stessa probabilità di vincere si sfidano. Qual è la probabilità che uno dei due giocatori vinca in un numero di partite minore o uguale a 12?

Abbiamo a che fare con una distribuzione di tipo bernoulliano. Dire che A vince in al più 12 partire vuol dire che vince in 10, 11 o 12 partite, cioè l'avversario B vince 0, 1 o 2 partite. Pertanto la probabilità richiesta è data dalla seguente espressione, dove si tiene conto che in ogni caso l'ultima la deve vincere A, perché se no avrebbe già vinto in meno di 11 o 12 partite e quindi non si continuerebbe a giocare. Pertanto la partita che B vince su 11 partite è una delle prime 10, e le 2 che vince su 12 partite sono scelte fra le prime 11. In conclusione la probabilità richiesta vale:

$$2\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\cdot\binom{10}{0}+\left(\frac{1}{2}\right)^{11}\cdot\binom{10}{1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{12}\cdot\binom{11}{2}\right]=2\cdot\left[\frac{1}{2^{10}}+\frac{10}{2^{11}}+\frac{55}{2^{12}}\right]=\frac{79}{2048}\approx 3,9\%$$

27. (Liceo scientifico 2018/19) Si lanciano 4 dadi con facce numerate da 1 a 6. Qual è la probabilità che a) la somma dei 4 numeri usciti non superi 5? b) il prodotto dei 4 numeri usciti sia multiplo di 3? c) il massimo numero uscito sia 4?

a) I casi possibili sono ovviamente 6^4 = 1296. Gli eventi favorevoli sono (1; 1; 1; 1) e i 4 in cui 3 dadi presentano 1 e uno presenta 2. Ossia sono in totale 5. Quindi la probabilità è 5/1296
b) In questo caso conviene considerare l'evento complementare, ossia che il prodotto non sia multiplo di 3, ossia che nessuno dei 4 dadi presenti 3 o 6. Quindi gli eventi favorevoli sono dati dal lancio di 4 dadi ciascuno dei quali può assumere 4 soli valori, pertanto sono in numero di 4^4. La probabilità è perciò: $1 - (4/6)^4 = 1 - 16/81 = 65/81$.
c) Abbiamo i seguenti eventi favorevoli (indichiamo con m4, l'uscita di un punteggio minore di 4): un 4 e tre m4; due 4 e due m4; tre 4 e un m4; quattro 4. Essi sono quindi in numero di

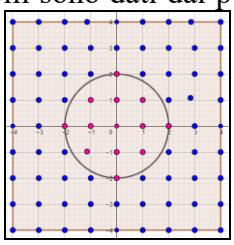
$$\binom{4}{1}\cdot 3^3+\binom{4}{2}\cdot 3^2+\binom{4}{3}\cdot 3+\binom{4}{4}=4\cdot 27+6\cdot 9+4\cdot 3+1=175$$

La probabilità è 175/1296.

28. (Liceo scientifico 2022/23) Un dado truccato, con le facce numerate da 1 a 6, gode della proprietà di avere ciascuna faccia pari che si presenta con probabilità doppia rispetto a ciascuna faccia dispari. Calcolare le probabilità di ottenere, lanciando una volta il dado, rispettivamente: a) un numero primo; b) un numero almeno pari a 3; c) un numero al più pari a 3.

a) Detta d la probabilità che esca un numero dispari e p che esca pari, si ha $p = 2d$ e si ha $3(p + d) = 1 \Rightarrow 9d = 1 \Rightarrow d = 1/9$, $p = 2/9$. I numeri primi che possono uscire sono 2, 3, 5, con probabilità unione di eventi incompatibili: 2/9 + 1/9 + 1/9 = 4/9.
b) 1/9 + 2/9 + 1/9 + 2/9 = 6/9 = 2/3.
c) 1/9 + 2/9 + 1/9 = 4/9.

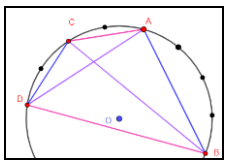
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

1. **(AHSME 1970) Consideriamo l'insieme *A* dei numeri naturali di 5 cifre in cui la somma delle cifre è 43. Con quale probabilità un numero scelto a caso da *A* è divisibile per 11?**
   La massima somma delle cifre di un numero di *A* è ovviamente 45, 99999. Pertanto in *A* vi è 99997 e le sue 5 permutazioni e 99988 e le sue 10 permutazioni. Di questi numeri sono divisibili per 11 solo 97999, 99979 e 98989, pertanto la probabilità richiesta è 3/15 = 1/5.
2. **(AHSME 1973) Abbiamo due carte, una rossa da entrambi i lati e l'altra rossa da una parte e nera dall'altra. Scegliamo a caso una delle due carte e la poniamo sul tavolo, se la parte rivolta verso di noi è rossa, con quale probabilità è rossa anche l'altra parte?**
   I casi possibili sono: 3, dato che possiamo avere scelto la carta bicolore, il che si fa in 2 modi, o la carta monocolore, i casi favorevoli sono ovviamente 2, quindi la probabilità è 2/3.
3. **(AHSME 1974) Lanciamo un dado per 6 volte, con quale probabilità otteniamo per almeno cinque volte un punteggio non inferiore a 5?**
   Gli eventi sono indipendenti e incompatibili, formati dall'evento *esattamente* 5 *volte* e 6 *volte*, quindi vale: $6 \cdot (1/3)^5 \cdot 2/3 + (1/3)^6 = 13/729$
4. **(AHSME 1976) Si consideri l'insieme dei punti che, nel piano cartesiano ortogonale, hanno entrambe le coordinate intere che in valore assoluto non superano 4. Se ne scelga uno a caso, qual è la probabilità che il punto scelto disti dall'origine non più di due unità? Suggerimento: si consideri la circonferenza con centro nell'origine e raggio 2 unità**
   Il punto scelto a caso deve stare nella circonferenza con centro nell'origine e raggio 2 unità, e con coordinate intere ce ne sono 13, come mostrato in figura. I casi possibili sono dati dai punti a coordinate intere che stanno dentro un quadrato di lato 8, che sono 81, quindi  la probabilità è 13/81.
5. **(AHSME 1977) Lanciamo tre dadi per tre volte, con quale probabilità otteniamo tre numeri che possano essere messi in modo da costituire una progressione aritmetica di ragione 1?**
   In pratica devono essere 3 numeri consecutivi, le terne possibili sono 6^3, mentre quelle favorevoli sono le permutazioni di (1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5) e (4, 5, 6) cioè $4 \cdot 3! = 24$. La probabilità è 24/216 = 1/9.
6. **(AHSME 1986) Dall'insieme dei primi 10 numeri naturali scegliamo sei numeri a caso e li ordiniamo secondo grandezza, con che probabilità il secondo più piccolo è 3?**
   I casi possibili sono $\binom{10}{6} = 210$. I casi favorevoli sono le terne (1, 3, *x*) o (2, 3, *x*) con $x > 3$, quindi sono: $2 \cdot \binom{7}{4} = 70$, la probabilità è 1/3.
7. **(AHSME 1988) Dall'insieme dei primi 9 numeri naturali scegliamo due numeri a caso, anche uguali fra loro, e li sommiamo, fra le dieci cifre quale è più probabile che costituisca la cifra delle unità di tale somma?**
   È facile capire che è più probabile ottenere 0, perché 0 si ottiene dalle somme $x + (10 - x)$ che sono in numero di 9, $1 \le x \le 9$, mentre gli altri numeri $1 \le y \le 9$ si ottengono solo 8 somme, per esempio per 3 abbiamo: 1 + 2, 2 + 1, 4 + 9, …, 9 + 4, ossia manca il caso 3 + 0 e ugualmente per tutti gli altri viene a mancare il caso $y + 0$.
8. **(AHSME 1990) Dall'insieme dei primi 100 numeri naturali scegliamo due numeri a caso, *a* e *b*, quindi formiamo il numero $3^a + 7^b$. Con quale probabilità la sua cifra delle unità è 8?**

$3^a = \begin{cases} 1 & a = 4n \\ 3 & a = 4n+1 \\ 9 & a = 4n+2 \\ 7 & a = 4n+3 \end{cases}; 7^b = \begin{cases} 1 & a = 4n \\ 7 & a = 4n+1 \\ 9 & a = 4n+2 \\ 3 & a = 4n+3 \end{cases} \Rightarrow 3^a + 7^b = 8 \begin{cases} a = 4n, b = 4m+1 \\ a = 4n+2, b = 4m+2 \\ a = 4n+3, b = 4m \end{cases}$, abbiamo indicato la cifra delle unità a seconda del valore dell'esponente. Quindi i casi favorevoli sono: $3 \cdot 25^2$, mentre quelli possibili sono $100^2 = 4^2 \cdot 25^2$, perciò la probabilità cercata è 3/16.

9. **(AHSME 1995) Se *a*, *b* e *c* sono 3 numeri, non necessariamente distinti, scelti a caso e con rigenerazione dall'insieme {1, 2, 3, 4, 5}, determinare la probabilità che *ab* + *c* sia pari.**
I casi possibili sono 5^3. Per i casi favorevoli, la somma è pari se gli addendi hanno la stessa parità, se *c* è dispari, 3 scelte, *ab* deve avere entrambi i fattori dispari, 9 scelte, quindi in totale 27. Se *c* è pari, 2 scelte, *ab* deve avere almeno un fattore pari, 25 – 9 = 16 scelte, pertanto 32 scelte. Infine i casi favorevoli sono 27 + 32 = 59 e la probabilità 59/125.

10. **(AHSME 1996) 4 punti distinti, *A*, *B*, *C*, e *D*, sono scelti a caso da un insieme di 1996 punti posti a uguali distanze su una circonferenza. Con che probabilità la corda *AB* interseca la corda *CD*?**
Poiché la scelta delle quaterne è casuale dobbiamo considerare solo i tre possibili accoppiamenti dei punti: *ABCD*, *ACBD*, *ADBC*. Di questi solo uno soddisfa la richiesta, come mostrato nella figura seguente, quindi la probabilità cercata è 1/3.

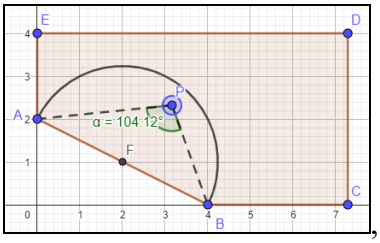


11. **(AHSME 1996) Un dado regolare a 6 facce è lanciato 3 volte. Se la somma dei punteggi dei primi due lanci uguaglia il punteggio del terzo, determinare la probabilità che si sia ottenuto almeno un 2.**
Dato che il terzo dado può ottenere solo punteggi da 1 a 6, i primi due insieme possono dare solo punteggi da 2 a 6, quindi i casi possibili sono 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15, di questi quelli che contengono almeno un 2 sono $(x, 2)$ e $(2, x)$, $1 \le x \le 4$ che sono in numero di 7, a questi deve aggiungersi il caso in cui 2 lo mostra il terzo dado, quindi la probabilità è 8/15.

12. **(AHSME 1996) Un'urna contiene palline di 4 colori: rosso, bianco, azzurro e verde. Quando estraiamo 4 palline senza restituzione, i seguenti eventi sono ugualmente probabili: a) *l'estrazione di* 4 *palline rosse*; b) *l'estrazione di* 1 *pallina bianca e di* 3 *rosse*; c) *l'estrazione di* 1 *pallina bianca*, 1 *azzurra e* 2 *rosse*; d) *l'estrazione di* 4 *palline tutte di diverso colore*. Quante sono al minimo le palline nell'urna? A) 19 B) 21 C) 46 D) 69 E) più di 69**
Indichiamo con *r, b, a, v* il numero delle palline di ognuno dei 4 colori nell'ordine, i casi favorevoli indicati, sono: $\binom{r}{4} = \binom{r}{3}\binom{b}{1} = \binom{r}{2}\binom{b}{2}\binom{a}{1} = \binom{r}{1}\binom{b}{1}\binom{a}{1}\binom{v}{1}$, i casi possibili sono uguali per tutti, quindi li tralasciamo. Semplificando: $r = 4b + 3 = 3a + 2 = 2v + 1$, dato che *r* deve essere intero positivo, come gli altri simboli, l minimo valore è $r = 11$, in questo caso, $b = 2$, $a = 3$, $v = 5$, per un totale di 21, che è la risposta B.

13. **(AMC 2000) Il professor Gamble compra un biglietto di una lotteria il cui numero è formato da 6 numeri distinti, scelti tra 1 e 46 compresi. Egli sceglie il biglietto in modo che la somma dei logaritmi in base 10 dei 6 numeri sia un intero. Sapendo che anche il numero estratto verifica la stessa proprietà, con che probabilità il Professor Gamble ha scelto il biglietto vincente?**
Poiché $log(a_1) + log(a_2) + log(a_3) + log(a_4) + log(a_5) + log(a_6) = log(a_1a_2a_3a_4a_5a_6)$ affinché questo sia intero $a_1a_2a_3a_4a_5a_6 = 10^k = 2^k \cdot 5^k$. Quindi le scelte devono essere fatte in modo opportuno nell'insieme {1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 32, 40}. Il che significa che le sestine possibili sono (1, 2, 4, 5, 10, 25), (1, 2, 5, 10, 25, 40), (1, 4, 5, 10, 20, 25) e (1, 5, 10, 20, 40, 25), essendo una sola quella vincente, la probabilità è ¼ = 25%.

14. **(AMC 2001) Un punto *P* è scelto a caso nell'interno di un pentagono di vertici $A \equiv (0; 2)$, $B \equiv (4; 0)$, $C \equiv (2\pi + 1; 0)$, $D \equiv (2\pi + 1; 4)$, $E \equiv (0; 4)$. Qual è la probabilità che $A\hat{P}B$ sia ottuso?**

Come mostrato in figura, 

, l'angolo è ottuso solo se P è interno al semicerchio di diametro AB, quindi la probabilità è data dal rapporto fra l'area del detto semicerchio e quella del pentagono, cioè: $\dfrac{5\pi/2}{4(2\pi+1)-4}=\dfrac{5}{16}$

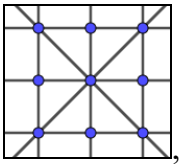
15. (HSMC 2003) Due numeri distinti sono scelti a caso dai primi 6 naturali. Con che probabilità il più piccolo diviso per il più grande rappresenta un numero decimale limitato non intero?

Per essere un numero decimale limitato il denominatore, opportunamente semplificato, deve contenere solo potenze di 2 o di 5. Le scelte possibili sono $\binom{6}{2}$ = 15, quelle favorevoli sono tutte le frazioni con denominatore 2, 4 o 5, che sono in numero di (1 + 3 + 4) = 8, oltre che 3/6 = ½, quindi la probabilità è 9/15 = 3/5 = 60%.

16. (HSMC 2003) Un numero è scelto a caso fra tutti i numeri interi di 4 cifre. Con che probabilità il numero sarà divisibile per 2, 3, 4, e 5?

I casi possibili sono 9000, quelli favorevoli sono i numeri multipli di 60, cioè da 60 · 17 a 60 · 166, cioè un totale di 150, quindi la probabilità è 150/9000 = 1/60.

17. (HSMC 2006) Si costruisca una griglia formata da 9 punti, su 3 righe e 3 colonne. Quindi si scelgano a caso 3 punti, con che probabilità essi saranno allineati?

I casi possibili sono $\binom{9}{3}=84$, quelli favorevoli sono 8, come mostrato in figura  , quindi la probabilità è 8/84 = 2/21.

18. (RICE 2006) La Rice University e la Stanford University preparano domande e corrispondenti soluzioni per una gara di matematica. Il gruppo della Rice scrive 10 domande l'ora e commette un errore nel calcolo delle soluzioni il 10% delle volte. Il gruppo Stanford scrive 20 problemi l'ora e sbaglia le soluzioni il 20% delle volte. Ogni gruppo lavora 10 ore e poi manda i problemi a Smartie che li controlla. Però Smartie non è così brava, quindi solo il 75% dei problemi che pensa siano sbagliati lo sono realmente. Inoltre crede che abbiano soluzioni errate il 20% delle domande Rice e il 10% di quelle Stanford. Qual è la probabilità che Smartie ritenga errata la soluzione corretta di un problema?

Indichiamo con C il numero di problemi corretti, con E quelli errati; con C_S il numero di problemi che Smartie crede siano corretti, con E_S quelli che crede errati; con S i problemi inviati da Stanford, con R quelli inviati da Rice. Dobbiamo determinare $P(E_S\,|\,C)=\dfrac{P(C\,|\,E_S)P(E_S)}{P(C)}$, ora $P(E_S) = P(E_S|R)\,P(R) + P(E_S|S)\,P(S)$ = 1/5 · 1/3 + 1/10 · 2/3 = 2/15; mentre $P(C|E_S) = 1 - P(E|E_S)$ = 1 – ¾ = ¼. Infine: $P(C)$ = 250/300 = 5/6. Pertanto: $P(E_S\,|\,C)=\dfrac{1/4\cdot 2/15}{5/6}=\dfrac{1}{25}$.

19. (RICE 2006) Un cliente va in un supermercato, la probabilità che compri a) pane è 60%, b) latte è 50% c) pane e latte è 30%. Con che probabilità il cliente comprerà almeno uno fra latte e pane?

È un semplice evento unione: P = 0,6 + 0,5 – 0,3 = 0,8 = 80%

20. (RICE 2006) Un aereo ha tre motori che funzionano indipendentemente. La probabilità che un motore si guasti è 1%. Con quale probabilità il volo si concluderà regolarmente se perché accada ciò basta almeno un motore funzionante?

$1 - 0{,}01^3 = 99{,}9\%$

21. (RICE 2006) Una compagnia assicurativa crede che la gente possa dividersi in 2 classi: quelli che sono portati per gli incidenti e quelli che non lo sono. Le loro statistiche mostrano che la gente della prima classe ha un incidente annuale con probabilità 40%, mentre questa probabilità è 20% per gli altri. Dato che il 30% della gente sono del primo tipo, con che probabilità un neo-assicurato avrà un incidente nel suo primo anno di assicurazione?

La probabilità è data dall'unione degli eventi incompatibili che l'assicurato sia del primo o del secondo tipo, quindi: $0{,}3 \cdot 0{,}4 + 0{,}7 \cdot 0{,}2 = 26\%$

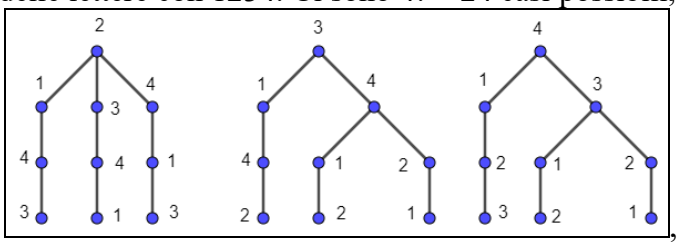
22. (RICE 2007) Il polinomio $-400x^5 + 26660x^4 - 3602x^3 + 1510x^2 - 18x - 90$ ha 5 radici razionali. Supponiamo che si tiri ad indovinare una di queste radici (tenuto conto del teorema che stabilisce che le radici razionali di un polinomio sono fra i divisori del rapporto fra il termine noto e il coefficiente del monomio di grado massimo), con che probabilità si può determinare?

Il rapporto da considerare è 90/400 il numeratore ha 24 divisori, il denominatore ne ha 30, basta ricordare che il numero di divisori di un intero è dato dal prodotto degli esponenti aumentati di 1 della sua fattorizzazione in primi. Teniamo conto che dobbiamo considerare i negativi, pertanto raddoppiamo il numero di divisori. I divisori del rapporto non sono però $24 \cdot 30 = 720$ perché conteremo più volte gli stessi divisori, per esempio dividendo 1/1 e –1/(–1), quindi dobbiamo dimezzare, ottenendo 360. Ma ci sono altre ripetizioni, come 3/3 o 2/4 e 4/8. Conviene quindi considerare $90/400 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5/(2^4 \cdot 5^2) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 2^{-4} \cdot 5^{-2}$, in modo che i divisori totali saranno quelli di $2^a \cdot 5^b \cdot 3^c$, con $-4 \le a \le 1$, $0 \le b \le 2$, $-2 \le c \le 1$, per un totale di $2 \cdot (6 \cdot 3 \cdot 3) = 144$, i casi favorevoli sono ovviamente 5 e la probabilità: 5/144.

23. (RICE 2007) La squadra Rice ha probabilità 1/3 di vincere una certa gara matematica. Se la Rice partecipa a 4 gare, con che probabilità vincerà almeno una volta?

$1 - (2/3)^4 = 65/81$

24. (RICE 2007) Tina scrive una lettera per ciascuna delle sue 4 amiche. Poi prepara e intesta una busta per ciascuna lettera, ma poi mette le lettere a caso nelle buste. Con che probabilità nessuna delle amiche riceverà la lettera a ella destinata?

Indichiamo la sequenza esatta delle lettere con 1234. Ci sono 4! = 24 casi possibili, quelli favorevoli si contano con il seguente albero 

, P = 9/24 = 3/8.

25. (HSMC 2007) Lanciamo una moneta regolare 2007 volte e registriamo la faccia ottenuta: testa o croce. Indichiamo con p_1 la probabilità che il numero di teste, alla fine dei lanci, sia il doppio del numero di croci e con p_2 la probabilità che il numero di croci sia 1338. Determinare p_1/p_2.

Dato che 2007/3 = 669, devono uscire 669 croci per p_1 che è uguale al numero di teste che devono uscire per p_2, quindi $p_1 = p_2$ e il rapporto vale 1.

26. (RICE 2007) Un numero x è scelto a caso nell'intervallo [0; 1], e un altro numero y in [−1; 1]. Determinare la probabilità che sia $x > y$.

Dato che $[-1; 1] = [-1; 0] \cup [0; 1]$, se y è scelto in [−1; 0], ovviamente $x > y$, e questo ha probabilità ½ di accadere, la probabilità di scegliere y in [−1; 0]. Se invece $y \in [0; 1]$, la probabilità che sia $x > y$ è ovviamente ½, quindi la probabilità è $½ \cdot ½ = ¼$. Infine la probabilità richiesta è $½ + ¼ = ¾$.

27. (RICE 2007) Andy e Bob giocano a ping-pong. A un certo punto Andy ha 17 punti e Bob 18. In ogni giocata, Andy ha il 50% di probabilità di fare un punto. Vince chi arriva prima a 21 punti. Con che probabilità Andy vincerà?

Andy vince se vince 4 volte e Bob vince al massimo 2 volte, e l'ultimo incontro lo vince Andy, quindi se per le partite escluse l'ultima, accadono i casi AAA, AAAB, AAABB e permutazioni, quindi la probabilità è $½^4 + 4 \cdot ½^5 + 10 \cdot ½^6 = 11/32$.

28. (HSMC 2007) Un esperimento consiste nello scegliere, con rigenerazione, un intero a caso fra i numeri da 1 a 9 inclusi. Se M indica un multiplo di 3 e N un numero non multiplo di 3, quale delle seguenti successioni ha più probabilità di essere scelta? A) MNNMN B) NMMN C) NMMNM D) NNMN

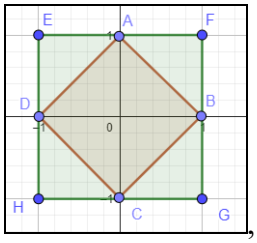
P(M) = 1/3, P(N) = 2/3. Quindi: $P(MNNMN) = 8/3^5$; $P(NMMN) = 4/3^4$; $P(NMMNM) = 4/3^5$;

P(NNMN) = $8/3^4$. Fra i 4 numeri il maggiore è quello della risposta D.

29. (RICE 2007) Scott ha bevuto troppo la scorsa sera, così esce dal dipartimento di matematica, posto in (0; 0) e si rivolge verso l'asse *y*. La sua casa si trova in (4; 5) ed egli vi si dirige passando solo per punti reticolo, ogni passo che fa lo porta su uno di tali punti. Sapendo che fa ogni passo in direzione delle *y* positive o delle *x* positive, determinare la probabilità che Scott passi per la casa di Paula, che si trova in (2; 3), supposto che tutti i percorsi possibili siano ugualmente probabili.

Perché Scott arrivi a casa sua deve fare in qualche modo 4 passi in orizzontale e 5 in verticale, quindi una delle permutazioni della "parola" OOOOVVVVV, che sono $\frac{9!}{4!\cdot 5!}=126$, i cammini che portano nella casa di Paula sono tanti quante le permutazioni di OOVVV, cioè $\frac{5!}{2!\cdot 3!}=5$, arrivati in questo punto ci sono ulteriori $\frac{4!}{2!\cdot 2!}=6$ cammini che portano alla casa di Scott quindi in totale 5 · 6 = 30 dei 126 cammini passano per la casa di Paula e la probabilità richiesta è: 30/126 = 10/21.

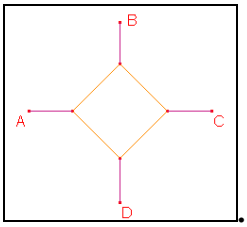
30. (RICE 2007) Se *a* e *b* sono scelti a caso e indipendentemente nell'intervallo [−1; 1], con che probabilità sarà |*a*| + |*b*| < 1?

In un sistema di riferimento *ab*, i casi favorevoli, ossia la totalità delle coppie (*a*; *b*) che verificano la condizione è data dal quadrato *ABCD* in figura: 

, quelli possibili dal quadrato *EFGH*, pertanto la probabilità richiesta è 50%.

31. (RICE 2008) Negli antichi giochi Romani, i gladiatori combattevano contro i velociraptor. In una gara un velociraptor lottava contro *n* gladiatori. L'animale attaccava per primo un gladiatore, uccidendolo all'istante. Quindi attaccava un gladiatore alla volta, colpendo l'animale con probabilità ½. Se sono necessari 10 colpi per uccidere un velociraptor, quanti gladiatori almeno devono combattere perché la probabilità di uccidere l'animale sia almeno ½? *Suggerimento* determinare la media di attacchi.

I gladiatori arraccano $n - 1$ volte, quindi il numero atteso di colpi è $(n - 1)/2$, e poiché la probabilità di colpire uguaglia quella di non colpire, la media è anche mediana, perciò deve essere $(n - 1)/2 \geq 10 \Rightarrow n \geq 21$.

32. (RICE 2008) Daphne si trova nel labirinto schematizzato 

. Ella entra in A, e ad ogni bivio sceglie una direzione a caso (incluso tornare indietro). Una volta che Daphne raggiunge l'uscita non rientra. Con che probabilità uscirà da A?

Osserviamo che in ogni bivio ha 1/3 di probabilità di prendere una qualsiasi delle 3 strade. Indichiamo con *a*, *b*, *c* e *d*, i quattro nodi del quadrato giallo e con *P*(*X*), per $X \in$ {A, B, C, D} la probabilità di uscire da *X*, Evidentemente *P*(*B*) = *P*(*D*), quindi: $\begin{cases} P(A)=1/3+2/3P(B) \\ P(B)=1/3P(A)+1/3P(C) \\ P(C)=2/3P(B) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(A)=7/15 \\ P(B)=1/5 \\ P(C)=2/15 \end{cases}$.

33. (RICE 2008) Tre X, tre Y e tre Z sono messi a caso in una matrice 3 × 3. Qual è la probabilità che nessuna riga o colonna conterrà due lettere uguali?

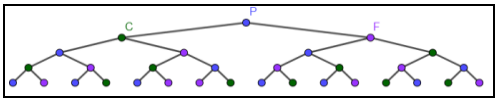
I casi possibili sono quante le permutazioni di XXXYYYZZZ, cioè $\frac{9!}{(3!)^3} = 1680$, per i casi favorevoli abbiamo le 6 permutazioni della tabella seguente, per una probabilità di 6/1680 = 1/280.

X	Y	Z
Y	Z	X
Z	X	Y

34. (RICE 2008) Lord Voldemort ogni giorno fa solo due cose: maledice Babbani e calcia cuccioli. Ogni Babbano che maledice ha il 50% di probabilità di morire, mentre ogni calcio a un cucciolo ha sempre successo. Ogni Babbano morto gli fornisce 3 unità di soddisfazione e ogni cucciolo colpito 2. Ogni volta che muoiono un numero pari di Babbani raddoppia la sua soddisfazione. Sapendo che ogni ora può o maledire un Babbano o calciare un cucciolo, quanti Babbani dovrebbe maledire in un giorno per massimizzare la sua soddisfazione attesa?

Consideriamo i due casi in cui in un giorno maledice $2x$ Babbani ($0 \le x \le 12$) e calcia $24 - 2x$ cuccioli, in cui ha la probabilità di ottenere $6x + 2 \cdot (24 - 2x) = 48 + 4x$ punti di soddisfazione, che è massimo se $x = 12$, ossia se maledice sempre Babbani. Se invece maledice $(2x + 1)$ Babbani ($0 \le x \le 11$) e calcia $23 - 2x$ cuccioli, ha la probabilità di ottenere $6x + x/2 + 2 \cdot (23 - 2x) = 46 + 9x/2$ punti di soddisfazione, che è massimo se $x = 11$ e vale 50,5 unità. Quindi maledice solo Babbani.

35. (RICE 2008) Terence Tao gioca a pietra-carta-forbici usando la seguente strategia: all'inizio mostra sempre pietra; ad ogni giocata successiva mostra un segno diverso da quello della giocata precedente, scegliendo fra i due segni con probabilità 50%. Con che probabilità alla quinta giocata mostrerà pietra?

Consideriamo l'albero del gioco 

I casi possibili sono ovviamente $2^4 = 16$, quelli favorevoli (colore blu) sono 6, probabilità 3/8.

36. (RICE 2008) Sei persone fanno il seguente gioco: prendono un cubo inizialmente bianco. Uno alla volta i giocatori segnano una X su una faccia bianca del cubo e lo lanciano come un dado. Vince il primo a cui esce una X (ovviamente il giocatore 1 ha probabilità 1/6 di vincere, il secondo, se non ha vinto il primo, 2/6 e così via). Con che probabilità vincerà il sesto?

La probabilità è $5!/6^5 = 5/324$

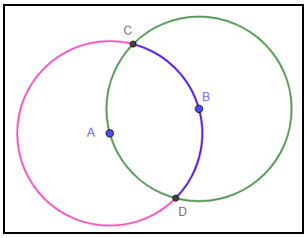
37. (RICE 2008) Supponiamo che ogni famiglia ha probabilità di avere uno, due o tre figli pari a ¼, ½ e ¼ rispettivamente. Supposto che tutti si sposano e avranno bambini, con che probabilità una coppia iniziale avrà esattamente quattro nipoti?

Dobbiamo considerare i casi incompatibili e indipendenti che ciascuna coppia abbia 1, 2 o 3 figli. Se la prima coppia ha un solo figlio non potrà avere 4 nipoti. Se ne ha 2, questi devono avere o 1 e 3 figli, o 2 e 2 figli, con probabilità $2 \cdot ¼ \cdot ¼ + ½ \cdot ½ = 3/8$. Se ne ha 3, questi devono avere 1, 1 e 2 figli, con probabilità $3 \cdot (¼ \cdot ¼ \cdot ½) = 3/32$. Infine la coppia iniziale avrà 4 nipoti con probabilità: $½ \cdot 3/8 + ¼ \cdot 3/32 = 27/128$.

38. (RICE 2008) Cody prepara la sua colazione guarnendo dei tacos con delle salse vendute in bottiglie da 88 *ml*. Ogni giorno mangia 3, 4 o 5 tacos con probabilità 1/6, 1/3 e ½ rispettivamente. Per il primo taco, usa sempre 2 *ml* di salsa e per ogni taco aggiuntiva ne usa 1 *ml* in più rispetto al precedente. Se ha cominciato una nuova bottiglia, con che probabilità la svuoterà in 5 giorni?

Se mangia 3 tacos consuma $(2 + 3 + 4)$ *ml* = 9 *ml*; se ne mangia 4, $(9 + 5)$ *ml* = 14 *ml*; per 5 ne consuma $(14 + 6)$ *ml* = 20 *ml*. Dobbiamo risolvere la disequazione diofantea $9x + 14y + 20z = 88$, con $x + y + z = 5$, $x, y, z \ge 0$. Otteniamo $x = \frac{6(z-3)}{5}, y = \frac{43-11z}{5}$, dato che le soluzioni devono essere non negative si ha $43 - 11z \ge 0 \Rightarrow 0 \le z \le 3$. D'altro canto $z - 3$ deve essere multiplo di 5, perché x deve essere intero. Pertanto $z = 3$, $x = 0$, $y = 2$ è l'unica soluzione. Perciò per 2 giorni mangia 4 tacos e per 3 giorni ne mangia 5, e la probabilità è perciò: $\binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{36}$.

39. (RICE 2008) Un punto A si trova a 1000 piedi da un punto B. Una persona in A sceglie una direzione a caso e cammina per 1000 piedi in quella direzione. Con che probabilità arriverà a non più di 1000 piedi da B?



In figura, la persona partendo da *A* va a finire su uno qualsiasi dei punti della circonferenza rossa di centro *A*, i punti che distano 1000 piedi da *B* sono quelli della circonferenza di verde di centro *B*. Pertanto i punti che ci interessano sono quelli dell'arco *CD*. Facilmente si capisce che i triangoli, non disegnati, *ABC* e *BDA* sono equilateri, quindi l'arco insiste su un angolo al centro di 120° e quindi misura 1/3 della circonferenza. Ovviamente la probabilità cercata è proprio 1/3.

40. (RICE 2008) Bill il mago ha tre carte A, B e C con su scritte dei numeri, precisamente: A: 2 3 5 7; B: 2 4 6 7; C: 2 3 6 1. Con queste fa il seguente gioco. Chiede ad un volontario di pensare un numero da 1 a 8, dicendogli solo in quali carte A, B o C si trova. In tal modo egli è sempre in grado di trovare il numero pensato. Un giorno Bill perde la carta C e non riesce a ricordare che numeri vi erano scritti. Così sceglie a caso 3 numeri diversi da 1 a 8 e li scrive su una carta. Che probabilità ha adesso Bill di indovinare qualsiasi numero pensi uno del pubblico?

Considerando I numeri sulle due carte rimaste vediamo che il 2 e il 7 sono in entrambe, mentre il 3 e il 5 è solo su A; il 4 e il 6 solo su B. L'1 e l'8 su nessuna delle due. Così usando solo le informazioni ottenute da A e B, Bill riesce a sapere a quali delle precedenti 4 classi appartiene il numero e basta. Perciò per potere avere la certezza di indovinare, in C deve mettere un solo numero di ognuna delle 4 classi. Dato che sceglie i 3 numeri a caso ha 24 scelte che lo fanno vincere sicuramente, su un totale di $\binom{8}{4} = 70$ scelte possibili, quindi la probabilità di indovinare sempre è 16/70 = 8/35.

41. (AHSME 1997) Two six-sided dice are fair in the sense that each face is equally likely to turn up. However, one of the dice has the 4 replaced by 3 and the other die has the 3 replaced by 4. When these dice are rolled, what is the probability that the sum is an odd number?

Due dadi a sei facce sono regolari nel senso che ogni faccia ha la stessa possibilità di uscire. Solo che uno dei dadi ha il 4 *sostituito dal* 3 *e l'altro dado ha il* 3 *sostituito dal* 4. *Lanciando i dadi con che probabilità la somma è un numero dispari*?

La somma è dispari solo se i due punteggi hanno diversa parità, quindi consideriamo gli eventi primo dado pari e secondo dispari e viceversa. Per cui la probabilità è 2/6 · 2/6 + 4/6 · 4/6 = 5/9.

42. (AHSME 1999) 6 points on a circle are given. 4 of the chords joining pairs of the 6 points are selected at random. What is the probability that the four chords are the sides of a convex quadrilateral?

6 *punti sono su una circonferenza*. 4 *delle corde che uniscono coppie dei* 6 *punti sono scelte a caso. Con che probabilità le quattro corde sono lati di un quadrilatero convesso*?

Comunque scegliamo 4 dei sei punti essi sono vertici di un quadrilatero convesso, quindi vi sono $\binom{6}{4} = 15$ casi favorevoli scegliendo le corde a caso. Poiché anche le corde sono $\binom{6}{2} = 15$, i casi possibili di sceglierne 4 sono $\binom{15}{4} = 1365$. Quindi la probabilità è 15/1365 = 1/91.

43. (HSMC 1999) A basketball player is on the line to shoot a one-and-one free throw. (In a one-and-one situation, a second shot is allowed only if the first shot is successful.) If the player's free throw shooting average is 0.750, what is the probability that he will score exactly one basket? Express your answer as a common fraction.

Un giocatore di basket sta per tirare un tiro libero. (*In questo caso un secondo tiro è consentito solo se il primo tiro va nel canestro.*) *Se la media successo sui tiri liberi del giocatore è* 0.750, *quanto vale la probabilità che infili esattamente un canestro? Esprimi la risposta in forma di frazione*.

In pratica deve indovinare il primo tiro e sbagliare il secondo, quindi la probabilità è ¾ · ¼ = 3/16.

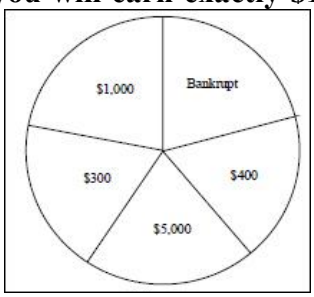
44. (HSMC 2000) Five people are asked (individually) to choose a random integer in the interval [1; 20]. What is the probability that everyone chooses a different number?

A cinque persone è chiesto (*individualmente*) *di scegliere un intero a caso nell'intervallo* [1; 20]. *Con*

che probabilità ciascuno sceglie un numero diverso?

I casi possibili sono 20^4, quelli favorevoli $D_{20,4}$, quindi la probabilità è 2907/4000.

45. (HSMC 2001) On the game show Wheel of Fraction, you see the following spinner. Given that each region has the same area, what is the probability that you will earn exactly $1700 in your first three spins? Express your answer as a common fraction.



Nel gioco noto come Ruota della Fortuna c'è il seguente tabellone. Dato che ogni regione ha la stessa area, qual è la probabilità di vincere esattamente $1700 *nei primi tre turni? Esprimi la risposta in forma di frazione.*

1700 = 1000 + 300 + 400 è l'unico modo favorevole, ovviamente a prescindere dall'ordine, quindi I casi favorevoli sono 3!, mentre quelli possibili sono 5^3, la robabilità è perciò 6/125.

46. (HSMC 2001) The probability that Patty passes a driving test is p and the probability that she fails is $6p^2$. Find the value *p*.

La probabilità che Patty passi l'esame per la patente è p è la probabilità che non lo passi è $6p^2$. *Trova p.*

Deve essere $p = 1 - 6p^2$, l'equazione ha una sola soluzione accettabile: $p = 1/3$, l'altra è negativa.

47. (HSMC 2002) Two standard six-faced dice are rolled. Jean wins if the product of the two numbers rolled is odd or a multiple of three, otherwise Allen wins. What is the probability that Jean wins? Express your answer as a common reduced fraction.

Due dadi standard a sei facce sono lanciati. Jean vince se il prodotto dei due numeri usciti è disparì o multiplo di tre, altrimenti vince Allen. Con che probabilità vince Jean? Esprimi la risposta sotto forma di una frazione ridotta ai minimi termini

Devono uscire o entrambi numeri dispari oppure uno almeno dei due multiplo di 3. Quindi la probabilità cercata è: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + (9 + 9 - 3)/36 = 2/3$. Spieghiamo il calcolo fra parentesi. Abbiamo considerato l'evento unione formato da primo dado {3; 6} e secondo dado pari se il primo è 3, qualsiasi se è 6. IL secondo dado è lo stesso del primo invertendo l'ordine dei dadi. abbiamo poi tolto l'evento intersezione {(3; 6), (6; 3), (6; 6)}.

48. (HSMC 2003) Two distinct numbers are chosen at random from the collection {1, 2, 3, 4, 5, 6}. What is the probability that the smaller number divided by the larger number is a terminating decimal? Express your answer as a common fraction.

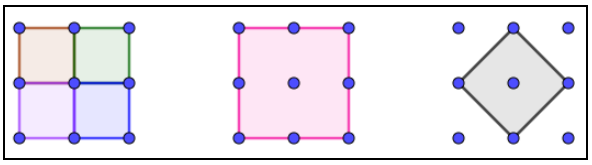
Due distinti numeri sono scelti a caso dall'insieme {1, 2, 3, 4, 5, 6}. *Con che probabilità il più piccolo dei numeri diviso per il più grande è un numero decimale limitato? Esprimi la risposta in forma di frazione.*

I casi possibili sono 15, quelli favorevoli sono (1; 2), (1; 4), (1; 5), (2; 4); (2; 5), (3; 4), (3; 5), (3; 6), (4; 5), quindi la probabilità è 9/15 = 3/5 = 60%.

49. (HSMC 2003) What is the probability that four randomly selected points on the geoboard shown below are vertices of a square?

Con che probabilità quattro punti scelti a caso nella tabella mostrata sopra siano vertici di un quadrato?

I casi possibili sono $\binom{9}{4} = 126$, i quadrati possibili sono i sei mostrati mostrati nella figura seguente.



Quindi la probabilità è 6/126 = 1/21

50. (HSMC 2004) A fair die is rolled three times. What is the probability that you get a larger num-

ber each time?

Un dado regolare è lanciato 3 *volte. Con che probabilità ogni volta si ottiene un numero maggiore del precedente*?

I casi possibili sono 216, quelli favorevoli si ottengono ragionando nel modo seguente, la terna (a; b; c) che viene fuori nel lancio dei tre dadi deve essere formata da 3 numeri distinti, supponiamo che siamo (3, 6, 4). Questa terna non va bene, come non vanno bene nessuna delle altre 4 terne ottenute da questa permutandola, tranne che (3, 4, 6). Ciò significa che di tutte le permutazioni di (a; b; c) ne va bene una sola. In pratica dobbiamo scegliere tutte le terne formate con numeri distinti, senza tenere conto dell'ordine. Ossia i casi favorevoli sono: $\binom{6}{3} = 20$, infine la probabilità cercata è 20/216 = 5/54.

51. (HSMC 2005) If seven distinct fair six-sided dice are rolled, what is the probability the sum will be 10?

Se sette distinti dadi a 6 *facce regolari sono lanciati, qual è la probabilità che la somma sia* 10?

Si ha: 10 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 4 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 3 = 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2, sono le uniche possibilità, ovviamente con le relative permutazioni. Quindi $\frac{7+2\cdot\binom{7}{2}+\binom{7}{3}}{6^7} = \frac{7}{23228} \approx 0,03\%$

52. (HSMC 2005) If Ella rolls a standard six-sided die until she rolls the same number on consecutive rolls, what is the probability that her 10th roll is her last roll?

Se Ella lancia un dado a 6 *facce regolare finché non esce lo stesso numero in due lanci consecutivi, con che probabilità il* 10° *lancio sarà l'ultimo*?

Il primo lancio venga un numero qualsiasi, con probabilità 1, il secondo deve essere diverso dal precedente con probabilità 5/6, ovviamente anche la probabilità che il terzo sia diverso dal secondo è 5/6 e così via fino al 9, mentre il decimo deve essere uguale al nono con probabilità 1/6. Infine la probabilità richiesta è: $5^8/6^9$.

53. (HSMC 2005) Two positive integers are chosen at random. What is the probability that their product is odd? Express your answer as a common fraction.

Due interi positive sono scelti a caso. Con che probabilità il loro prodotto è dispari? Esprimi la risposta in forma di frazione.

Entrambi devono essere dispari, quindi: ½ · ½ = ¼.

54. (HSMC 2006) Five balls are numbered 1 through 5 and placed in a bowl. Josh will randomly choose a ball from the bowl, look at its number and then put it back into the bowl. Then Josh will again randomly choose a ball from the bowl and look at its number. What is the probability that the product of the two numbers will be even and greater than 10? Express your answer as a common fraction.

Cinque palle sono numerate da 1 *a* 5 *e messe in un urna. Josh sceglie a caso una palla dall'urna, ne guarda il numero e la rimette nell'urna. Poi di nuovo Josh ripete l'operazione. Con che probabilità il prodotto dei due numeri sarà pari e maggiore di* 10? *Esprimi la risposta in forma di frazione.*

Il prodotto è pari se uno almeno dei due è pari, ed è maggiore di 10 solo nei casi (3; 4), (4; 3), (4; 4), (4; 5) e (5; 4). I casi possibili sono $5^2 = 25$, la probabilità richiesta è: 5/25 = 1/5.

55. (RICE 2009) Let *a*, *b*, *c*, and *d* be the numbers that show when four fair dice, numbered 1 through 6 are rolled. What is the probability that $|(a-1)(b-2)(c-3)(d-6)| = 1$?

Siano a, b, c, e d i numeri che si ottengono lanciando quattro dadi con le facce numerate da 1 *a* 6. *Con che probabilità* $|(a-1)(b-2)(c-3)(d-6)| = 1$?

Il prodotto fa 1 solo se tutti i fattori sono uguali a 1 o a –1. Il primo fattore può valere solo + 1, il quarto solo –1, gli altri due invece ±1. Pertanto i casi favorevoli sono 4, mentre i casi possibili sono 6^4, quindi la probabilità è 1/324.

56. (RICE 2009) Frank alternates between clipping a weighted coin that has a 2/3 chance of landing heads and a 1/3 chance of landing tails and another weighted coin that has a ¼ chance of landing heads and a ¾ chance of landing tails. The first coin tossed is the 2/3 – 1/3 weighted coin. What is the probability that he sees two heads in a row before he sees two tails in a row?

Frank lancia alternativamente una moneta falsata che ha i 2/3 *di possibilità che esca testa e* 1/3 *che esca croce e un'altra moneta falsata che ha* ¼ *di possibilità che esca testa e* ¾ *che esca croce. La*

prima moneta lanciata è quella 2/3 – 1/3. *Con che probabilità si otterranno due teste di fila prima che vi siano due croci di fila*?

Se al primo lancio viene testa (probabilità 2/3), Frank ha probabilità ¼ di ottenere un'altra testa, inoltre ha probabilità ¾ · 1/3 = ¼ di ottenere due croci successive e probabilità ¾ · 2/3 = ½ di ottenere croce-testa dopo di che si ripete la situazione, quindi la probabilità è la somma di una serie geometrica. Così ha probabilità ½ di ottenere due teste e lo stesso di ottenere 2 croci. Se invece il primo lancio ottiene croce (probabilità 1/3), ha probabilità ¾ di ottenere un'altra croce e probabilità ¼ · 2/3 = 1/6 di ottenere due teste successive, e ¼ · 1/3 = 1/12 di ottenere testa-croce e ritornare alla situazione di partenza. Quindi esprimendo le probabilità sempre come serie geometrica ha probabilità 2/11 di ottenere 2 teste prima e 9/11 di ottenere due croci prima. Infine la probabilità richiesta è 2/3 · ½ + 1/3 · 2/11 = 13/33.

Test di Verifica

1. **Estraiamo senza rigenerazione tre carte da un mazzo da 52. Quali fra i seguenti eventi hanno probabilità maggiore del 30% di accadere?**
   A hanno tutte lo stesso colore B sono tutte figure C sono tutte maggiori di 5
   D due sono nere e una rossa E solo una è una figura
   Le rispettive probabilità sono: 25/51 · 24/50 ≈ 24%; 12/52 · 11/51 · 10/50 ≈ 1%; 32/52 · 31/51 · 30/50 ≈ 22%; 3 · 26/52 · 25/51 · 26/50 ≈ 38%; 3 · 12/52 · 40/51 · 39/50 ≈ 42%; Risposte corrette: D – E
2. **Quali fra i seguenti eventi sono stocasticamente indipendenti, nello spazio degli eventi formato dall'estrazione senza rigenerazione di due carte da un mazzo da 52?**
   A (entrambe figure; entrambe rosse) B (uguale valore; uguale colore) C (entrambe di valore inferiore a 5; entrambe di valore superiore a 8) D (hanno valori consecutivi; hanno colori diversi) E (somma dei valori è inferiore a 10; due figure)
   Risposte corrette: C – E. Infatti vi sono figure rosse; se hanno lo stesso valore possono avere anche lo stesso colore; se hanno valori consecutivi possono anche essere di colori diversi. Invece se hanno valore inferiore a 5 non possono averlo anche superiore a 8 e se sono figure la somma dei valori è sempre superiore a 21.
3. **Quali fra i seguenti eventi sono equiprobabili all'evento *ottenere esattamente* 3 *volte testa lanciando una moneta regolare* 5 *volte*?**
   A Estrarre una pallina bianca da un'urna che ne ha 10 bianche e 22 di altri colori B Ottenere esattamente 3 volte 6 lanciando un dado regolare 5 volte C Fra 5 carte nere e 3 rosse capovolte e indistinguibili, sceglierne 2 nere sapendo che dopo avere estratto la prima carta elimino 3 carte nere e 2 rosse D Estrarre senza rigenerazione 3 carte di valore uguale da un mazzo di carte da briscola E Scegliere 10 studenti da una classe di 22
   L'evento di partenza ha probabilità: $10/2^5 = 5/16$. Gli altri eventi hanno probabilità rispettive: 10/32 = 5/16; $10 \cdot 5^2/6^5$; 5/8 · ½ = 5/16; 3/39 · 2/38. E non è un evento. Quindi risposte corrette: A – C
4. **Se crediamo nella legge dei grandi numeri, dopo avere lanciato 1000 volte una moneta regolare quali dei seguenti fatti deve accadere?**
   A Deve uscire almeno 100 volte testa B Devono uscire almeno 500 teste C Devono uscire almeno 500 volte la stessa faccia D Non devono uscire 600 volte testa E Devono uscire esattamente 500 volte testa
   Risposte corrette: A – C. Infatti in 1000 lanci testa o croce dovrebbe uscire un numero di volte vicino a 500
5. **Per quale delle seguenti probabilità conviene usare il metodo soggettivista?**
   A Avere 3 figli dello stesso sesso B Nel mese di dicembre a Roma ci saranno almeno 10 giorni di pioggia C Sulla ruota di Napoli entro l'anno usciranno tre numeri consecutivi nella stessa estrazione D Entro la fine dell'anno X riuscirà a fidanzarsi con Y E Nel 2023 il PIL italiano aumenterà più del 1,3%
   Risposte corrette: B – D. Infatti posso contare i casi possibili e favorevoli negli altri casi.
6. **La probabilità che accada l'evento *A* è 1/3, quella che accada *B* è 7/8, con quale probabilità *p* accadono sia *A* che *B*?**
   A Fra 0 e 5/24 B 5/24 C fra 5/24 e 1/34 D fra 1/3 e 1 E Nessuno dei precedenti

Dato che 1/3 + 7/8 = 29/24 = 1 + 5/24, i due eventi sono compatibili e l'intersezione ha probabilità almeno 5/24, se gli eventi sono complementari, se il primo evento è contenuto nel secondo allora l'evento intersezione è il primo. Risposta corretta: C

7. Lanciamo *n* dadi con facce numerate da 1 a 6, con *n* numero primo. Quale fra i seguenti valori è la probabilità che il prodotto dei punteggi usciti sia n^2?

A 0 **B** $\frac{n}{6^n}$ **C** $\frac{n^2-n}{2\cdot 6^n}$ **D** $\frac{n^2+n}{2\cdot 6^n}$ **E Nessuno dei precedenti**

Essendo n un numero primo, gli unici divisori di n^2 sono (1; n; n^2), quindi in teoria gli unici lanci che forniscono il prodotto richiesto sono: (1; 1; …; 1; n^2), (1; 1; 1; …; n; n), e permutazioni. Ma la prima sequenza si ottiene solo se $n^2 \le 6 \Rightarrow n \le 3$. In questo caso vi sono: $n+\binom{n}{2}=n+\frac{n^2-n}{2}=\frac{n^2+n}{2}$ modi:, quindi la probabilità è $\frac{n^2+n}{2\cdot 6^n}$; mentre se $3 \le n \le 6$ i casi favorevoli sono solo $\frac{n^2-n}{2}$: (1; 1; 1; …; n; n) e la probabilità diventa $\frac{n^2-n}{2\cdot 6^n}$; infine se $n \ge 7$, la probabilità è 0. Risposta corretta: E

8. In una scatola ci sono 100 fra penne, matite e gomme, ognuna associata a un numero intero da 1 a 100. Scegliamo a caso un numero da 1 a 100. La probabilità che esso sia associato ad una penna è 0,4; quella che sia associato a una matita è doppia di quella che lo sia a una gomma. Con che probabilità il numero scelto è associato alle gomme?

A 1/5 B 2/5 C 3/5 D 4/5 E Nessuno dei precedenti

La somma delle probabilità deve essere 1, quindi $p(m) + p(g) = 0{,}6$ e $p(m) = 2p(g) \Rightarrow p(m) = 0{,}4$; $p(g) = 0{,}2 = 1/5$. Risposta corretta: A

9. Lanciamo una moneta non truccata per 5 volte. Con che probabilità non usciranno mai due teste in due lanci successivi?

A 5/16 B ½ C 11/32 D ¼ E Nessuno dei precedenti

I casi possibili sono $2^5 = 32$, quelli favorevoli sono: non escono teste; 1 caso, esce una sola testa, 5 casi; escono due teste, 10 – 4 = 6 casi (dalle 10 permutazioni di CCCTT abbiamo tolto le possibilità che TT occupi le posizioni 12, 23, 34, 45); escono tre teste, 1 caso, solo TCTCT, dato che le C devono separare le T. Totale 8 casi favorevoli. Probabilità 8/32 = ¼. Risposta corretta: D

10. In un sacchetto mettiamo 100 biglie numerate da 1 a 100 e ne scegliamo una a caso. Sappiamo che la probabilità che la biglia estratta verifichi una certa proprietà P è 7/25. Però prima di estrarre la biglia veniamo informati che a causa di un buco nel sacchetto sono cadute *n* biglie che non verificano la proprietà P, il che fa sì che la probabilità precedente diventa 7/17. Quanto vale *n*?

A 10 B 32 C Il problema non ha soluzione

D Non si può determinare dai dati E Nessuno dei precedenti

Siano p le biglie che verificano la proprietà, si ha: $p/100 = 7/25 \Rightarrow p = 28$. Quando cadono le n biglie, la probabilità diventa $28/(100 - n) = 7/17 \Rightarrow n = 32$. Risposta corretta: B

11. In un'urna vi sono alcune palline bianche, 12 rosse e 15 verdi, se la probabilità di estrarre una pallina bianca è 2/11, quante sono le palline bianche?

Si ha: $b/(b + 27) = 2/11 \Rightarrow b = 6$

12. Hai due monete indistinguibili, una equa e l'altra che ha probabilità 2/3 che in ogni lancio mostri testa. Determina la probabilità che scegliendo una delle due monete a caso e lanciandola esca testa, quindi lanciando l'altra tre volte di fila escano due teste e una croce, non per forza in quest'ordine.

Gli eventi sono indipendenti. La scelta delle due monete dà luogo ad eventi incompatibili. Perciò $P = ½ \cdot (½ \cdot 3 \cdot 4/27 + 2/3 \cdot 3 \cdot 1/8) = 17/72$

13. In una classe di 22 studenti 8 sono femmine. Scegliendo a caso 4 studenti, con che probabilità esattamente 3 sono femmine?

Gli studenti si scelgono in $\binom{22}{4} = 7315$ modi. Le quaterne che contengono 3 femmine e un maschio sono $4 \cdot \binom{8}{3} \cdot \binom{14}{1} = 3136$. La probabilità richiesta è 3136/7315 = 448/1045.

14. **La probabilità secondo Laplace di un evento appartenente ad uno spazio degli eventi finito, è il** *rapporto* **fra il numero dei casi favorevoli al suo verificarsi e quello dei casi possibili, nell'ipotesi che tutti i casi abbiano la stessa** *possibilità* **di accadere. Un evento è probabilisticamente impossibile se la sua probabilità di accadere è** *zero*
15. **Un gioco fra N avversari, ciascuno dei quali ha una probabilità p_h ($1 \le h \le N$) di vincere, si dice equo se ogni giocatore puntando 1, in caso di vincita otterrà $1/p_h$ Due eventi A e B appartenenti allo stesso spazio degli eventi E, sono compatibili se $A \cap B \neq \varnothing$ Due eventi A e B appartenenti allo stesso spazio degli eventi sono stocasticamente indipendenti se $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$**

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. **(Accademia navale) Qual è la probabilità di estrarre da un'urna con 40 palline, numerate da 1 a 40, una pallina di numero divisibile per 8 o minore di 20? A) 1/20 B) 11/20 C) 11/40 D) 2 E) 1**
   Eventi compatibili: P = 5/40 + 19/40 – 2/40 = 22/40 = 11/20 Risposta corretta: B
2. **(Accademia navale) Nel gioco della tombola, qual è la probabilità che esca alla terza estrazione il numero 21, se non è già uscito nelle precedenti estrazioni? A) 1/88 B) 1/90 C) 21/90 D) 1/21 E) 0**
   89/90 · 88/89 · 1/88 = 1/90. Risposta corretta: B
3. **(Accademia navale) In un sacchetto sono disposte 10 palline gialle, 2 rosse e una verde. Quale delle seguenti affermazioni è falsa? A) La probabilità di estrarre una pallina blu dal sacchetto è zero B) La probabilità di estrarre una pallina gialla dal sacchetto è maggiore della probabilità di estrarne una degli altri due colori C) La probabilità di estrarre una pallina dal sacchetto è uno D) La probabilità di estrarre una pallina gialla dal sacchetto è 10 E) La probabilità di estrarre una pallina verde dal sacchetto è minore della probabilità di estrarne una gialla o rossa**
   Risposta corretta: D, anche perché la probabilità non può superare 1.
4. **(Accademia militare) Tutti gli studenti di una classe praticano almeno uno sport tra lo sci e il nuoto. Il 60% degli studenti sa sciare e l'80% sa nuotare. Quale percentuale di studenti sa sia sciare sia nuotare? A) 60% B) 48% C) 140% D) 40%**
   La somma delle due tipologie di studenti deve fare 100%, quindi l'intersezione è (60 + 80 - 100)% = 40%. Risposta corretta: D
5. **(Accademia militare) La probabilità che lanciando 3 volte un dado normale non truccato a 6 facce esca sempre un numero dispari è pari a: A) 1/8 B) 1/36 C) 1/18 D) 3/6**
   ½ · ½ · ½ = 1/8. Risposta corretta: A
6. **(Accademia militare) In un casinò, alla roulette, si sono già verificate tre uscite consecutive di numeri rossi. Supponendo di non considerare lo zero, qual è la probabilità che nel giro successivo esca ancora un numero rosso e qual è la probabilità che, una volta uscito, esca per altre tre volte consecutive? A) 1/16; 1/128 B) ½; 1/8 C) 1/16; 1/8 D) ½; 1/16**
   Gli eventi sono indipendenti, quindi risposta corretta: B
7. **(Accademia militare) Un'urna contiene 48 palline di uguali dimensioni ma di colore diverso. Sapendo che le palline possono essere soltanto rosse, bianche o blu e che la probabilità di estrarre una pallina blu è pari a 5/12, quante palline tra bianche e rosse sono contenute nell'urna?**
   A) 22 B) 20 C) 26 D) 28
   Le palline blu sono 20 (dato che 5/12 = 20/48), quindi le altre palline sono 28. Risposta corretta: D
8. **(Economia Università di Trento) Un'urna contiene 25 palline bianche e 75 palline nere. Se viene estratta una pallina nera, essa viene rimessa nell'urna; se viene estratta una pallina bianca, questa viene tolta e ne viene aggiunta una nera. La probabilità di avere nell'urna 24 palline bianche e 76 nere dopo due estrazioni (ed eventuali inserzioni) è: A) 5/16 B) 7/16 C) 151/400 D) 149/400**
   L'evento si verifica se si estraggono una pallina bianca e una nera, anche non nell'ordine, quindi la

probabilità è 75/100 · 25/100 + 25/100 · 76/100 = 151/400. Risposta corretta: C

9. **(Medicina 1997) Una scatola ha 60 biglietti numerati da 1 a 60. Estraendo un biglietto a caso un numero *n*, qual è la probabilità che sia *n* > 57 o *n* < 4?**
A) 9/3600 B) 9/60 C) 1/10 D) 5/60 E) 50/(60 · 59)
Eventi incompatibili: P = (3 + 3)/60 = 1/10. Risposta corretta: C

10. **(Medicina 1997) La probabilità che lanciando simultaneamente due dadi si ottengano due numeri la cui somma vale 11 è, rispetto alla probabilità che si ottengano due numeri la cui somma vale 10: A) non paragonabile, perché si tratta di eventi diversi B) minore C) maggiore D) uguale E) circa doppia**
Ci sono più casi favorevoli per 10 = 4 + 6 = 5 + 5 = 6 + 4, rispetto a 11 = 5 + 6 = 6 + 5. Risposta corretta: B

11. **(Ingegneria 2000) Un macchinario produce bulloni. Un bullone è ritenuto difettoso quando ha peso o dimensioni sbagliate. Il controllo di qualità mette in evidenza che il 5% dei bulloni prodotti ha almeno il peso sbagliato e che il 3% ha almeno le dimensioni sbagliate. Nell' ipotesi che il 2% dei bulloni prodotti abbia sia peso che dimensioni sbagliate, qual è la percentuale di bulloni difettosi che produce quel macchinario? A) 4% B) 10% C) non si può rispondere con i dati a disposizione D) 6% E) 8%**
Abbiamo due eventi compatibili. Su 100 bulloni 5 hanno almeno il peso sbagliato e 3 almeno le dimensioni sbagliate, mentre 2 hanno entrambe le cose sbagliate, quindi i bulloni difettosi, per ogni 100, sono 5 + 3 – 2 = 6. Risposta corretta: D

12. **(Odontoiatria 2001) Due dadi vengono lanciati contemporaneamente. Qual è la probabilità di ottenere un punteggio minore o uguale a 4? A) ½ B) 1/6 C) 1/12 D) 1/18 E) 1/9**
Casi favorevoli (1; 1), (1; 2), (1; 3); (2; 1), (2; 2), (3; 1). Probabilità 6/36 = 1/6. Risposta corretta: B

13. **(Odontoiatria 2002) Da un mazzo di 40 carte (10 cuori, 10 quadri, 10 fiori, 10 picche) se ne estraggono tre; qual è la probabilità che siano tre figure fra le dodici presenti, supponendo di non rimettere la carta estratta nel mazzo? A) 11/494 B) 33/1600 C) 36/1235 D) 9/10 E) 33/494**
$D_{12,3}/D_{40,3}$ = 11/494. Risposta corretta: A

14. **(Medicina 2002) In un vassoio ci sono 100 caramelle di cui 35 all'arancia, 33 alla menta e 32 al limone. Prendendo a caso una caramella dal vassoio, qual è la probabilità che non sia alla menta? A) 0,33 B) 0,32 C) 0,65 D) 0,68 E) 0,67**
1 – 33/100 = 67/100. Risposta corretta: E

15. **(Odontoiatria 2002) Si ha un'urna contenente 8 palline bianche. Qual è il numero minimo di palline rosse che bisognerebbe aggiungere perché, estraendo due palline contemporaneamente, la probabilità che esse siano una bianca e una rossa sia 16/45? A) 2 B) 3 C) 5 D) 8 E) 10**
Aggiungiamo *r* palline rosse, la probabilità richiesta è $2\cdot\frac{8}{8+r}\cdot\frac{r}{7+r}=\frac{16}{45}\Rightarrow r=2\vee 28$, quindi minimo 2. Risposta corretta: A

16. **(Veterinaria 2003) Da un mazzo di 40 carte (10 cuori, 10 quadri, 10 fiori, 10 picche) se ne estraggono tre; qual è la probabilità che siano tre assi fra i quattro presenti, supponendo di non rimettere la carta estratta nel mazzo? A) 4/3705 B) 3/10 C) 1/120 D) 1/2470 E) 3/800**
$D_{4,3}/D_{40,3}$ = 1/2470. Risposta corretta: D

17. **(Medicina 2003) Da un mazzo di 40 carte (10 cuori, 10 quadri, 10 fiori, 10 picche) se ne estraggono tre; qual è la probabilità che siano tutte e tre di fiori, supponendo di non rimettere la carta estratta nel mazzo? A) 3/247 B) 9/800 C) 25/1482 D) 7/10 E) 11/247**
$D_{10,3}/D_{40,3}$ = 3/247. Risposta corretta: A

18. **(Odontoiatria 2004) Una moneta è lanciata quattro volte. Qual è la probabilità di ottenere due croci e due teste sapendo che la prima volta si è ottenuto croce? A) ½ B) ¼ C) 3/8 D) 3/16 E) 5/16**
Dobbiamo calcolare la probabilità che le successive uscite siano una croce e due teste, tralasciando l'ordine, quindi: P = 3 · 1/8 = 3/8. Risposta corretta: C

19. **(Medicina 2004) Si hanno due dadi uguali con le facce di colori diversi. Ciascun dado ha due facce azzurre, due facce marroni e due facce verdi. La probabilità *p* che dopo un lancio simultaneo dei due dadi si ottengano facce dello stesso colore è: A) 1/3 B) 2/3 C) 1/3 < *p* < ½ D) *p* < 1/6 E) *p* > 2/3**
3 · 1/3 · 1/3 = 1/3. Risposta corretta: A

20. (Medicina 2004) Qual è la probabilità che lanciando 6 volte una moneta escano esattamente 4 teste? A) 15/64 B) 1/64 C) 15/16 D) 1/16 E) 5/32

$\binom{6}{2}\cdot\frac{1}{2^6}=\frac{15}{64}$. Risposta corretta: A

21. (Veterinaria 2004) Una moneta è lanciata quattro volte. Qual è la probabilità *p* di ottenere quattro croci sapendo che le prime due volte si è ottenuto croce? A) ½ B) ½ < *p* < ¾ C) *p* < ¼ D) 3/8 E) ¼

p = ¼. Risposta corretta: E

22. (Veterinaria 2005) Un'urna contiene 12 palline, alcune bianche e altre rosse. È possibile che vi siano anche palline verdi, ma non siamo sicuri. Sapendo che la probabilità di estrarre a caso dall'urna una pallina bianca o rossa è rispettivamente ¾ e ¼, indicare se vi sono palline verdi e, in caso affermativo, il loro numero
A) ce n'è 1 B) ce ne sono 2 C) ce ne sono 3 D) ce ne sono 4 E) non ce ne sono

Dato che ¾ + ¼ = 1, l'intersezione è vuota. Risposta corretta: E

23. (Veterinaria 2008) Se si lancia un dado 5 volte con quale probabilità il 2 esce esattamente 3 volte? A) $2\cdot 5^3/6^5$ B) $5^2/6^5$ C) $1/6^3$ D) ½ E) $5^2/(2\cdot 6^2)$

$\binom{5}{3}\cdot\frac{1}{6^3}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2=10\cdot\frac{5^2}{6^5}$. Risposta corretta: A

24. (Scienze della formazione primaria, Università di Cagliari 2008-09) Su 10 lanci di dado il 6 esce 4 volte. Che probabilità c'è che il 6 esca pure all'undicesimo lancio?
A) 1 su 6 B) 4 su 6 C) 6 su 10 D) non è possibile stabilirlo a priori E) 10 su 6

Gli eventi sono indipendenti, quindi 1/6. Risposta corretta: A

25. (Scienze della formazione primaria, Università di Cagliari 2008-09) Estraendo un numero a caso dal sacchetto della tombola (che contiene tutti i numeri interi da 1 a 90), che probabilità c'è di pescare un numero che sia ≤ di 30 o ≥ di 60? A) 30/90 B) 31/90 C) 30/60 D) 60/90 E) 59/90

Eventi incompatibili. (30 + 30)/90 = 60/90 = Risposta corretta: D

26. (Facoltà scientifiche, Roma La Sapienza 2009) Quando piove ho l'80% di probabilità di essere di buon umore. Quando non piove ho il 90% di probabilità di essere di buon umore. La probabilità che domani piova è del 70%. Allora, che probabilità ho di essere di buon umore domani?
A) 83/100 B) 80/100 C) 63/100 D) 56/100

Eventi incompatibili: 0,7 · 0,8 + 0,3 · 0,9 = 0,83. Risposta corretta: A

27. (Scuola superiore di Catania) Nell'estrazione del lotto dell'11/9/99 sulla ruota di Torino sono apparsi i numeri: 86, 44, 62, 34, 64 il cui massimo comune divisore è 2. Qual è la probabilità che, sulla stessa ruota, alla prossima estrazione compaiano 5 numeri il cui MCD sia 5?

I casi possibili sono $\binom{90}{5}$, i multipli di 5 sono 18, {5; 10; 15; …; 90} scegliendone 5 a caso, hanno tutti MCD ≥ 5. Di questi 18, 9 sono multipli di 10; 6 sono multipli di 15. Quindi dobbiamo fare in modo che non vi siano più di 4 multipli di 10 e più di 4 multipli di 15, fra i 5 scelti. Per semplificare dalle $\binom{18}{5}$ cinquine di multipli di 5 che scegliamo, togliamo quelle che contengono 5 dei 9 multipli di 10, che sono $\binom{9}{5}$ e quelle che contengono 5 dei 6 multipli di 15, che sono 6, ottenendo così $\binom{18}{5}-\binom{9}{5}-6$ casi favorevoli. La probabilità è perciò $\frac{\binom{18}{5}-\binom{9}{5}-6}{\binom{90}{5}}=\frac{703}{3662439}$

28. (Scuola superiore di Catania) Da un mazzo di carte francesi (52 carte) sono state tolte le regine (Q) e tutte le carte di fiori. Calcolare la probabilità che estraendo una carta da tale mazzo modificato essa sia di cuori.

Nel mazzo vi sono 36 carte, di cui 12 di cuori, quindi la probabilità è 12/36 = 1/3

29. (Scuola superiore di Catania) Dal gioco della tombola sono stati eliminati tutti i numeri che contengono almeno una cifra pari a 8. Calcolare la probabilità che alla prima estrazione venga estratto un numero minore o uguale a 30.

Sono stati eliminati: tutti i numeri che hanno 8 come cifra delle unità, che sono 9, e tutti quelli che hanno 8 come cifra delle decine, che sono 9 (perché 88 l'abbiamo già contato prima), quindi sono rimasti 90 – 18 = 72 numeri, la probabilità richiesta vale (30 – 3)/72 = 27/72 = 3/8

30. (Scuola Superiore di Catania) Nel classico gioco dell'oca c'è una pista suddivisa in caselle, contrassegnate dai numeri naturali positivi (in un certo senso lo 0 corrisponde al punto di partenza). Modifichiamo il gioco in modo che ogni giocatore, a turno, lancia una moneta equa e avanza di una casella se esce testa e di 2 se esce croce. Non sono previste caselle con comandi speciali (torna indietro, vai alla casella N, …). a) Qual è la probabilità che un giocatore passi per la casella 1? b) 2? c) 3?

a) Al primo lancio ottiene egualmente testa o croce, quindi la probabilità è ½.
b) Alla 2 si arriva con C oppure con TT, quindi la probabilità è ½ + ¼ = ¾;
c) Alla 3 si arriva con CT, TC, TTT, quindi la probabilità è ¼ + ¼ + 1/8 = 5/8;

31. (Scuola Superiore di Catania) Ci sono due urne, esternamente uguali: la prima contiene 3 palline di cui una sola rossa, mentre la seconda contiene 5 palline, di cui una sola rossa. In un gioco, estraggo a sorte una pallina e vinco se è rossa. Mi vengono proposti due metodi per l'estrazione. *A*: scelgo a caso una delle due urne e da questa estraggo una pallina. *B*: Metto insieme le palline di entrambe le urne e, dopo aver rimescolato tutte le palline, estraggo una pallina dall'urna così formata. a) È più conveniente il metodo *A* o quello *B*? b) Si consideri poi il caso più generale in cui le urne contengono *n* ed *m* palline, sempre una sola delle quali, in ciascuna urna, è rossa. Per quali valori di *n* ed *m* è più conveniente il metodo *A* e per quali il *B*. c) In quali casi i metodi sono equiprobabili?

a) $P(A) = ½ \cdot (1/3 + 1/5) = 4/15$; $P(B) = 2/8 = 1/4$, quindi conviene il metodo A;
b) $P(A)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)=\frac{m+n}{2mn}; P(B)=\frac{2}{m+n}$ Ora si ha: $\frac{m+n}{2mn}>\frac{2}{m+n}\Rightarrow(m+n)^2>4mn\Rightarrow(m-n)^2>0\Rightarrow m\neq n$. Pertanto il metodo A è sempre migliore di B se le palline nelle due urne sono in diverso numero;
c) Mentre $\frac{m+n}{2mn}=\frac{2}{m+n}\Rightarrow(m-n)^2=0\Rightarrow m=n$.

32. (Scuola Superiore di Catania) Calcolare la probabilità P_1 di ottenere almeno un 6 nel lancio di 6 dadi. Provare che è maggiore di ½. Generalizzare tale risultato scrivendo una formula per P_n, dove P_n è la probabilità di ottenere almeno *n* sei nel lancio di 6*n* dadi.

Nel primo caso: $1-\left(\frac{5}{6}\right)^6=\frac{6^6-5^6}{6^6}>\frac{3\cdot6^5}{2\cdot3\cdot6^5}=\frac{1}{2}$. In generale $P_n=1-\sum_{k=0}^{n-1}\binom{6n}{k}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^k\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{6n-k}$

33. (Scuola Superiore di Catania) Gigi e Mario giocano a testa o croce e ognuno di loro lancia *n* volte una moneta. a) Calcolare la probabilità che Gigi ha di ottenere *k* volte testa. b) Calcolare la probabilità che Gigi e Mario ottengano lo stesso numero di teste. c) Quest'ultimo evento è più o meno probabile di ottenerne un numero diverso? d) Ammettiamo ora che Mario lanci la moneta una volta in più di Gigi, ma che in caso di parità la vittoria sia attribuita a Gigi. Chi dei due è avvantaggiato?

a) $\binom{n}{k}\cdot\frac{1}{2^n}$;
b) Per ogni valore di *k* dobbiamo moltiplicare la probabilità precedente per se stessa, pertanto otteniamo: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\cdot\frac{1}{2^{2n}}$;
c) Ovviamente è meno probabile, per esempio ottenere entrambi 3 teste ha meno casi favorevoli che uno ne ottenga 3 e l'altro un numero diverso da 3;

d) Gigi perché la probabilità di Mario di ottenere (k + 1) teste è diventata $\binom{n+1}{k+1} \cdot \frac{1}{2^{n+1}}$ che è inferiore a quella di Gigi. Per esempio se lanciano 10 monete e Gigi fa 6 teste, con probabilità 105/32, Mario fa 6 teste con probabilità 165/64 < 105/32.

34. (Medicina 2013) Recenti studi hanno riportato che nel 2006 il numero di donne sottoposte all'esame per la diagnosi del tumore al seno risultate positive è aumentato del 13% rispetto al 2005. Nello stesso lasso di tempo, il numero di esami effettuati è aumentato del 10%. Se le donne sottoposte a tale esame fossero rappresentative dell'intera popolazione, quale tra le seguenti affermazioni sarebbe vera? A) L'aumento dell'incidenza del tumore al seno non può essere calcolato se non si conosce il numero effettivo di esami eseguiti B) Se una percentuale maggiore di popolazione venisse sottoposta a tale esame, il tasso di positività aumenterebbe sicuramente C) La percentuale di donne risultate positive all'esame per la diagnosi del tumore al seno nel 2006 è aumentata poco meno del 3% rispetto al 2005 D) Il 13% delle donne sottoposte all'esame per la diagnosi del tumore al seno nel 2006 è risultato positivo E) La percentuale dell'intera popolazione femminile risultata positiva all'esame per la diagnosi del tumore al seno nel 2006 è aumentata del 13% rispetto al 2005

Se nel 2005 si erano sottoposte all'esame 100 donne, nel 2006 sono diventate 110. Se nel 2005 vi erano x donne positive, nel 2006 ve ne sono 1,13x, quindi le due percentuali da confrontare sono: x/100 e 1,13x/110, e la loro differenza percentuale è circa il 2,7%. Risposta corretta: C

35. (Medicina 2013) Alan lancia contemporaneamente due dadi non truccati con le facce numerate da 1 a 6. Qual è la probabilità che esca lo stesso numero su entrambi i dadi? A) ½ B) 1/3 C) 1/36 D) 1/6 E) 1/18

La probabilità che il secondo dado mostri la stessa faccia del primo è uguale alla probabilità che lanciando un solo dado esca un punteggio prefissato, quindi 1/6. Risposta corretta: D