9.1 Successioni infinite e serie numeriche

Proprietà delle successioni di numeri reali

Determinare se le seguenti successioni sono limitate, superiormente e/o inferiormente

1. a) $\left\{\frac{n+3}{n}\right\}$**; b)** $\left\{\frac{n^2+1}{n}\right\}$**; c)** $\left\{\frac{n}{n^2+1}\right\}$**; d)** $\left\{\frac{2-n}{n+1}\right\}$

a) Si ha: $\frac{n+3}{n}=1+\frac{3}{n}>1,1+\frac{3}{n}\leq 4$, quindi la successione è Limitata;

Si ha: b) $\frac{n^2+1}{n}>0; n+\frac{1}{n}>M, \forall M\in\mathbb{R}$, quindi è Limitata Inferiormente ma non superiormente;

c) Si ha: $0<\frac{n}{n^2+1}<\frac{n^2+1}{n^2+1}=1$ quindi è Limitata;

d) Si ha: $\frac{2-n}{n+1}=\frac{3-1-n}{n+1}=\frac{3}{n+1}-\frac{1+n}{1+n}=\frac{3}{n+1}-1$, e si ha: $\frac{3}{n+1}-1>0-1=-1; \frac{3}{n+1}-1<3-1=2$ quindi è Limitata

2. a) $\left\{\frac{3-n^2}{n+2}\right\}$**; b)** $\left\{\frac{n^2-1}{n^2+1}\right\}$**; c)** $\left\{\frac{n^2+3}{n^3-1}\right\}$**; d)** $\left\{\frac{n^4+1}{1000n^3}\right\}$**; e)** $\left\{log\left(\frac{n}{n+1}\right)\right\}$

a) Si ha: $\frac{3-n^2}{n+2}=\frac{3}{n+2}-\frac{n^2}{n+2}<\frac{3}{n+2}\leq\frac{3}{3}=1$, quindi è limitata superiormente, mentre $\frac{n^2}{n+2}>\frac{n^2-4}{n+2}=\frac{(n-2)\cdot(n+2)}{n+2}=n-2$ e poiché n è ovviamente illimitata superiormente, $-n$ sarà illimitata inferiormente, quindi anche la nostra lo è;

b) Si ha: $\frac{n^2-1}{n^2+1}=\frac{n^2+1-2}{n^2+1}=\frac{n^2+1}{n^2+1}-\frac{2}{n^2+1}=1-\frac{2}{n^2+1}<1$, ma è anche $\frac{n^2-1}{n^2+1}\geq 0$, quindi è Limitata

c) Si ha: $\frac{n^2+3}{n^3-1}=\frac{n^2}{n^3-1}+\frac{3}{n^3-1}<\frac{n^2}{n^3}+\frac{3}{n^3-1}=\frac{1}{n}+\frac{3}{n^3-1}<1+3=4$, d'altro canto è anche $\frac{n^2+3}{n^3-1}>0, n>1$, quindi è limitata;

d) Si ha: $\frac{n^4+1}{1000n^3}=\frac{n^4}{1000n^3}+\frac{1}{1000n^3}=\frac{n}{1000}+\frac{1}{1000n^3}>\frac{n}{1000}$, quindi è illimitata superiormente, ma è anche formata solo da positivi, quindi è limitata inferiormente;

e) Si ha: $log\left(\frac{n}{n+1}\right)=log\left(1-\frac{1}{n+1}\right)<log(1)=0$, quindi è Limitata Superiormente, ma è anche $log\left(\frac{n}{n+1}\right)<log(2)$, quindi è limitata.

3. a) $\left\{(-1)^n\cdot\left(n+\frac{1}{n}\right)\right\}$**; b)** $\left\{(-1)^n\cdot\frac{n-1}{n^2}\right\}$**; c)** $\{(-1)^n\cdot cos(n)\}$

a) Si ha: $(-1)^n\cdot\left(n+\frac{1}{n}\right)=\begin{cases} n+\frac{1}{n} & n\ pari \\ -n-\frac{1}{n} & n\ dispari \end{cases}$, quindi raggiungiamo e superiamo qualsiasi valore positivo, con i termini di posto pari, e qualunque negativo con quelli di posto dispari. La successione è Illimi-

tata; b) Intanto osserviamo che $\frac{n-1}{n^2} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}; \frac{n-1}{n^2} \geq 0$, ora: $(-1)^n \cdot \frac{n-1}{n^2} = \begin{cases} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} & n\ pari \\ -\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} & n\ dispari \end{cases}$, quindi in ogni caso sia i valori positivi che i negativi sono limitati, e così è l'intera successione;
c) Sappiamo che $-1 \leq cos(n) \leq 1$, quindi la successione è Limitata.

4. a) $(-1)^n \cdot tan(n)\}$; b) $\left\{\frac{n^2 + (-1)^n \cdot n^2}{n}\right\}$; c) $\left\{\frac{n}{sin(n)}\right\}$

a) Sappiamo che la funzione tangente è illimitata, quindi anche $tan(n)$ che assume infiniti valori, anche se non tutti, di questa funzione, lo è; b) Si ha: $\frac{n^2 + (-1)^n \cdot n^2}{n} = \begin{cases} 0 & n\ dispari \\ 2n & n\ \ pari \end{cases}$, quindi tutti i termini di posto dispari sono nulli, mentre gli altri crescono a dismisura, pertanto abbiamo una successione limitata inferiormente ma non superiormente;
c) Si ha: $-1 < sin(n) < 1 \Rightarrow \frac{1}{sin(n)} < -1, \frac{1}{sin(n)} > 1 \Rightarrow \frac{n}{sin(n)} < -n, \frac{n}{sin(n)} > n$, perciò è Illimitata

Determinare inf e sup delle seguenti successioni dicendo se essi sono anche min o max

5. a) $\left\{\frac{2n+3}{n+2}\right\}$; b) $\left\{\frac{n^2-1}{n}\right\}$; c) $\left\{\frac{3n}{n^2+1}\right\}$

a) Si ha: $\frac{2n+3}{n+2} = \frac{2n+4-1}{n+2} = \frac{2n+4}{n+2} - \frac{1}{n+2} = 2 - \frac{1}{n+2}$ e si ha: $2 - \frac{1}{n+2} < 2, 2 - \frac{1}{n+2} \geq 2 - \frac{1}{1+2} = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$. Pensiamo quindi che 5/3 sia il minimo e 2 il sup. Proviamolo. Abbiamo: $\frac{2n+3}{n+2} = \frac{2n+4-1}{n+2} = \frac{2n+4}{n+2} - \frac{1}{n+2} = 2 - \frac{1}{n+2}$, quindi effettivamente tutti gli elementi della successione sono maggiori o uguali a 5/3, che facendo parte della stessa successione è quindi il suo minimo. Passiamo al sup. $2 - \frac{1}{n+2} < 2 \Rightarrow -\frac{1}{n+2} < 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, proviamo la seconda proprietà: $2 - \frac{1}{n+2} < 2 - \varepsilon \Rightarrow -\frac{1}{n+2} < -\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n+2} > \varepsilon \Rightarrow n+2 < \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n < \frac{1}{\varepsilon} - 2$. Così per esempio se fosse ε = 0,0001, 2 – 0,0001 = 1,9999 sarebbe un maggiorante solo per $n < \frac{1}{0,0001} - 2 = 9998$. Infatti si ha: $2 - \frac{1}{9997+2} \approx 1,99989 < 1,9999; 2 - \frac{1}{9998+2} = 1,9999$.

b) Si ha: $\frac{n^2-1}{n} = n - \frac{1}{n}$, pertanto la successione è illimitata superiormente. È limitata inferiormente da 0 che è il minimo. Infatti $n - 1/n \geq 0 \Rightarrow n \geq 1/n \Rightarrow n^2 \geq 1 \Rightarrow n \geq 1$.
c) Si ha: $0 < \frac{3n}{n^2+1} \leq \frac{3}{1^2+1} = \frac{3}{2}$, quindi la successione è limitata. L'inf è 0, infatti $\frac{3n}{n^2+1} < \varepsilon \Rightarrow \varepsilon n^2 - 3n + 1 > 0 \Rightarrow n > \frac{3 + \sqrt{9 - 4\varepsilon^2}}{2\varepsilon}$, quindi il generico ε è un minorante solo per i valori di n scritti. Il massimo è 3/2.

6. a) $\left\{\frac{1}{n^2+2}\right\}$; b) $\left\{\frac{2+n}{n^2+1}\right\}$; c) $\left\{\frac{\sqrt{n}}{n+5}\right\}$

a) Si ha: $0 < \frac{1}{n^2+2} \leq \frac{1}{3}$. 0 è inf e 1/3 è massimo.

b) Si ha: $0<\frac{2+n}{n^2+1}\le\frac{2+1}{1^2+1}=\frac{3}{2}$, 0 inf, 3/2 max.

c) Si ha: $0<\frac{\sqrt{n}}{n+5}\le\frac{\sqrt{1}}{1+5}=\frac{1}{6}$;*inf* = 0; *max* = 1/6

7. a) {*tan*(*n*)}; b){*ln*(*n*)}; {*sin*(*n*)}

a) *tan*(*n*) è ovviamente illimitata, quindi *inf* = –∞; *sup* = +∞;

b) Sappiamo che *ln*(*n*) cresce in [1; +∞), quindi *min* = *ln*(1) = 0 e *sup* = +∞

c) *sin*(*n*) è limitata: –1 ≤ *sin*(*n*) ≤ 1, ma non vi sono valori interi, a parte 0 che non è accettabile, per cui otteniamo minimo e massimo, quindi *inf* = –1; *sup* = 1.

8. a) $\left\{\sqrt{\frac{n^2+3}{n^2+1}}\right\}$**; b){$2^n$}; c){$2^{-n}$}**

a) Si ha: $\sqrt{\frac{n^2+3}{n^2+1}}=\sqrt{\frac{n^2+1+2}{n^2+1}}=\sqrt{1+\frac{2}{n^2+1}}$, quindi: $1<\sqrt{1+\frac{2}{n^2+1}}\le\sqrt{1+\frac{2}{1^2+1}}=\sqrt{2}$, quindi *inf* = 1; *max* = $\sqrt{2}$;

b) Cli esponenziali di base maggiori di 1 sono crescenti e illimitati superiormente, quindi *min* = 2; *sup* = +∞;

c) Essendo la potenza negativa accade la situazione complementare alla precedente, ossia la successione è decrescente ma limitata inferiormente da 0, quindi *inf* = 0 e *max* = 2^{-1} = 1/2

9. a) $\left\{\frac{2^n+1}{2^n-1}\right\}$**; b** $\left\{\frac{2n}{3+cos(n)}\right\}$**; c)** $\left\{\frac{2^n}{5^n-3^n}\right\}$

a) Si ha: $\frac{2^n+1}{2^n-1}=\frac{2^n-1+2}{2^n-1}=1+\frac{2}{2^n-1}$. Si ha: $1<1+\frac{2}{2^n-1}\le 1+\frac{2}{2-1}=3$, quindi *inf* = 1; *max* = 3;

b) All'aumentare di *n*, *cos*(*n*) ha un comportamento non regolare, ma in ogni caso assume valori compresi in (–1; 1), pertanto il denominatore assume valori compresi in (2; 4), mentre il numeratore aumenta raddoppiando, quindi il minimo si ha per $\frac{2}{3+cos(1)}$, mentre non vi è limite superiore, *sup* = +∞;

c) Si ha: $0<\frac{2^n}{5^n-3^n}\le 1$, infatti il denominatore è sempre positivo, ma è anche maggiore del numeratore: $5^n - 3^n \ge (5-3)^n$, come si prova facilmente per induzione: 5 – 3 = 2 e se $5^n - 3^n \ge 2^n$, allora $5^{n+1} - 3^{n+1} = 5\cdot 5^n - 3\cdot 3^n = 3\cdot(5^n-3^n) + 2\cdot 5^n \ge 2^n + 2\cdot 5^n > 2^n + 2^n = 2^{n+1}$. Pertanto *inf* = 0 e *max* = 1.

10. a) $\left\{(-1)^n\cdot\left(n+\frac{1}{n}\right)\right\}$**; b){$(-1)^n \cdot$ *sin*(*n*)}; c) {*sin*(*n*) + *cos*(*n*)}**

a) Per *n* dispari abbiamo valori negativi che non hanno limite inferiore, per valori pari invece valori positivi senza limite superiore, quindi *inf* = –∞; *sup* = +∞ ;

b) Abbiamo già detto che *sin*(*n*) è limitata da –1 e 1, ma non assume questi valori per *n* naturale, quindi *inf* = –1; *sup* = 1

c) Tenuto conto di quanto sopra le due successioni sono limitate, potremmo quindi pensare che sia *inf* = –2; *sup* = 2, ciò non è vero perché quando una delle due è minima, l'altra è massima. Applichiamo la formula di prostaferesi: *sin*(*n*) + *cos*(*n*) = *sin*(*n*) + *sin*(π/2 – *n*) = 2*sin*(π/4)*cos*(*n* – π/4) = $\sqrt{2}$ *cos*(*n* – π/4), a questo punto, dato che la successione coseno ha *inf* = –1; *sup* = 1, possiamo dire che questa successione ha *inf* = $-\sqrt{2}$ e *sup* = $\sqrt{2}$

11. a) $\left\{\frac{n^2+(-1)^n\cdot n^2}{n}\right\}$**; b)** $\left\{\frac{\sqrt{n}+1}{n+\sqrt{n}}\right\}$ **; c)** $\left\{\frac{n+(-1)^n\cdot n}{ln(n)}\right\}$

a) Si ha: $\frac{n^2+(-1)^n\cdot n^2}{n}=\begin{cases}0 & n\ dispari\\ n & n\ pari\end{cases}$, quindi possiamo dire che *min* = 0; *sup* = +∞.

b) Si ha: $0<\frac{\sqrt{n}+1}{n+\sqrt{n}}\le 1$, infatti il numeratore è sempre minore o uguale del denominatore, ed entrambi sono sempre positivi, quindi: *inf* = 0; *max* = 1

c) Si ha: $\frac{n+(-1)^n\cdot n}{ln(n)}=\begin{cases}0 & n\ dispari\\ \frac{2n}{ln(n)} & n\ pari\end{cases}$, naturalmente $2n >> ln(n)$, quindi possiamo dire che si ha: *min* = 0 e *sup* = +∞.

12. a) $\{n^2-1000n\}$**; b)** $\left\{\frac{10^5 n}{1-n^2}\right\}$ **; c)** $\left\{\frac{n^2+n+1}{1-2n^2}\right\}$

a) La successione è ovviamente illimitata superiormente, mentre è limitata inferiormente e il suo minimo si ha per il minimo valore negativo di $n^2 - 1000n$. Consideriamo la parabola di equazione $y = x^2 - 1000x$, questa volge la concavità verso l'alto, quindi ha il minimo nel suo vertice, ossia per $x = 1000/2 = 500$, dato che questo valore è intero positivo, anche $n^2 - 1000n$ assume il minimo $500^2 - 1000 \cdot 500 = -250000$.

b) La successione assume valori negativi per $n \ge 2$, quindi è limitata superiormente da 0, mentre il suo limite inferiore è Si ha: $\frac{10^5\cdot 2}{1-2^2}=-\frac{200000}{3}$.

c) Gli elementi della successione sono tutti negativi, quindi è limitata superiormente. Il suo minimo è $\frac{1^2+1+1}{1-2\cdot 1^2}=-3$, mentre $\frac{n^2+n+1}{1-2n^2}>-\frac{1}{2}$, infatti la precedente equivale a scrivere: $2n^2+2n+2>1-2n^2 \Rightarrow 4n^2+2n+1>0$, che è certamente vero. Infine si ha: *min* = –3 e *sup* = –1/2.

Successioni divergenti

Tenuto conto del limite indicato determinare il primo numero naturale p a partire dal quale tutti gli elementi della successione verificano la richiesta

1. **a)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{1-2n^2}{n+2}=-\infty \Rightarrow \frac{1-2n^2}{n+2}<-5412$**; b)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{4n^2+3}{3n-1}=+\infty \Rightarrow \frac{4n^2+3}{3n-1}>7812$

a) $1-2n^2<-5412n-10824 \Rightarrow 2n^2-5412n-10825>0 \Rightarrow n>\frac{2706+\sqrt{7344086}}{2}>2707$, quindi p = 2708;

b) $4n^2+3>23436n-7812 \Rightarrow 4n^2-23436n+7815>0 \Rightarrow n>\frac{5859+\sqrt{34320066}}{2}\approx 5858,67 \Rightarrow n\ge 5859$

2. **a)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^2-1}{5n-3}=+\infty \Rightarrow \frac{3n^2-1}{5n-3}>47589$**; b)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+n}{n-1}=+\infty \Rightarrow \frac{n^2+n}{n-1}>57948$

a) $\frac{3n^2-1}{5n-3}>47589 \Rightarrow n>\frac{237945+\sqrt{56616109833}}{6}\approx 79314,4 \Rightarrow n\ge 79315$;

b) $\frac{n^2+n}{n-1}>57948 \Rightarrow n\ge 57949$

3. **a)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{4n^2+n+5}{3n-2}=+\infty\Rightarrow\frac{4n^2+n+5}{3n-2}>4578$ **;b)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{2-n^2}{5+2n}=-\infty\Rightarrow\frac{2-n^2}{5+2n}<-9876$

a) $\frac{4n^2+n+5}{3n-2}>4578\Rightarrow n\geq 3433$; b) $\frac{2-n^2}{5+2n}<-9876\Rightarrow n\geq 19755$

4. **a)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{2-3n^2+n}{5n-1}=-\infty\Rightarrow\frac{2-3n^2+n}{5n-1}<-5479$ **; b)** $\lim_{n\to+\infty}\left(n^2+n+1\right)=+\infty\Rightarrow n^2+n+1>2014$

a) $\frac{2-3n^2+n}{5n-1}<-5479\Rightarrow n\geq 9132$; b) $n^2+n+1>2014\Rightarrow n\geq 45$

Verificare la validità dei seguenti limiti

5. **a)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3+1}{n+1}=+\infty$ **; b)** $\lim_{n\to+\infty}ln\left(n^2\right)=+\infty$ **; c)** $\lim_{n\to+\infty}log_2\left(\frac{1}{n}\right)=-\infty$ **; d)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n+1}}=+\infty$

a) $\frac{n^2+1}{n+1}>M\Rightarrow n^2+1>Mn+M\Rightarrow n>\frac{M+\sqrt{M^2+4M-4}}{2}$, l'espressione dipende da M, quindi abbiamo trovato, al variare di M il valore da assegnare all'ndice *n*, che è il più piccolo intero maggiore o uguale a $\frac{M+\sqrt{M^2+4M-4}}{2}$;

b) $ln\left(n^2\right)>M\Rightarrow 2ln\left(n\right)>M\Rightarrow ln\left(n\right)>M/2\Rightarrow n>e^{M/2}$;

c) $log_2\left(\frac{1}{n}\right)<-M\Rightarrow -log_2\left(n\right)<-M\Rightarrow log_2\left(n\right)>M\Rightarrow n>2^M$, osserviamo che l'espressione $log_2(n)$ è definitivamente positiva, annullandosi solo per $n = 1$;

d) $\frac{n}{\sqrt{n+1}}>M\Rightarrow n^2>\left(n+1\right)\cdot M^2\Rightarrow n^2-M^2n-M>0\Rightarrow n>\frac{M\left(M+\sqrt{4+M^2}\right)}{2}$

6. **a)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{n-n^2}{n+2}=-\infty$ **; b)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{4n^2+3}{3n-1}=+\infty$ **; c)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^2-1}{5n-3}=+\infty$

a) $\frac{n-n^2}{n+2}<-M\Rightarrow n-n^2+Mn+2M<0\Rightarrow n^2-\left(M+1\right)n-2M>0\Rightarrow n>\frac{M+1+\sqrt{M^2+10M+1}}{2}$;

b) $\frac{4n^2+3}{3n-1}>M\Rightarrow n>\frac{3M+\sqrt{9M^2-16M-48}}{8}$;

c) $\frac{3n^2-1}{5n-3}>M\Rightarrow n>\frac{5M+\sqrt{25M^2-36M+12}}{6}$

7. **a)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+1}{n-1}=+\infty$ **; b)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{2-3n^2+n}{5n-1}=-\infty$ **; c)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt{n+1}}=+\infty$

a) $\frac{n^2+1}{n-1}>M\Rightarrow N>\frac{M+\sqrt{M^2-4M-4}}{2}$;

b) $\frac{2-3n^2+n}{5n-1}>M\Rightarrow N>\frac{1-5M+\sqrt{25M^2+2M+25}}{6}$;

c) $\frac{n}{\sqrt{n+1}}>M\Rightarrow n^2>M^2n+M\Rightarrow n>\frac{M^2+M\sqrt{M^2+4}}{2}$

Verificare la NON validità dei seguenti limiti

8. **a)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+1}{n^3+1}=+\infty$ **; b)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{1000n^2+1}{n^2}=+\infty$ **; c)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2-10^5}{n}=-\infty$

a) Si ha: $n^2+1<n^3+1\forall N\in\mathbb{N}\Rightarrow\frac{n^2+1}{n^3+1}<1$, ossia la successione è limitata superiormente, ovviamente non può divergere positivamente;

b) Si ha: $\frac{1000n^2+1}{n^2}=1000+\frac{1}{n^2}<1000+2$, anche questa è limitata superiormente;

c) Si ha: $\frac{n^2-10^5}{n}>0 \Rightarrow n^2>10^5 \Rightarrow n>100\sqrt{10}$, la successione è definitivamente positva, quindi non può divergere negativamente.

9. **a)** $\lim_{n\to+\infty} sin\left(n^{2014}\right)=+\infty$ **; b)** $\lim_{n\to+\infty} tan\left(\frac{n+1}{n-1}\right)=+\infty$

a) Si ha $-1<sin\left(n^{2014}\right)<1$, successione limitata;

b) Si ha: $tan\left(\frac{n+1}{n-1}\right)=tan\left(1-\frac{2}{n-1}\right)<tan(1)$, dato che la tangente è crescente per valori compresi tra 0 e π/2 e $1-\frac{2}{n-1}<1<\frac{\pi}{2}, \forall n>1$

Giustificare la risposta ai seguenti quesiti

10. Una successione illimitata sia superiormente che inferiormente, può divergere positivamente o negativamente? Giustificare la risposta.

No, abbiamo già visto $\{(-1)^n \cdot n^2\}$.

11. Se $\lim_{n\to+\infty} a_n=+\infty$, vuol dire che $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$?

No, si consideri la successione {–1, 1, 2, 3, ..., *n*, ...}

12. Se $\{a_n\}$ ha un milione di elementi negativi, è possibile che $\lim_{n\to+\infty} a_n=+\infty$?

Sì, si consideri la successione che ha il primo milione di elementi uguale a –1, e dal milionesimo in poi seguono la legge $a_n = n$.

13. Se $\lim_{n\to+\infty} a_n=+\infty$, vuol dire che $\exists p\in\mathbb{N}$: $a_n > 1000$, $\forall n > p$. Possiamo concludere che si ha anche $a_n \le 1000$, per $n \in \{1, 2, \ldots, p\}$?

No, basti pensare alla successione {10001, 1, 2, 3, ..., *n*, ...}

14. Determinare una condizione su $\{a_n\}$, affinché quanto affermato nell'esercizio precedente sia vero.

Se la successione è non crescente, cioè $a_{n+1} \ge a_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$, in questo modo i primi *p* elementi sono minori o uguali a quelli che li seguono, e quindi sono ≤ 1000. Chiaramente questa è una condizione sufficiente ma non necessaria.

15. Se $\lim_{n\to+\infty} a_n=-\infty$, vuol dire che $\exists p\in\mathbb{N}$: $a_n < -1000$, $\forall n > p$. Possiamo concludere che si ha anche $a_n \ge -1000$, per $n \in \{1, 2, \ldots, p\}$?

No, basti pensare alla successione {–10001, –1, –2, –3, ..., –*n*, ...}

16. Determinare una condizione su $\{a_n\}$, affinché quanto affermato nell'esercizio precedente sia vero.

Se la successione è non decrescente, cioè $a_{n+1} \le a_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$, in questo modo i primi *p* elementi sono maggiori o uguali a quelli che li seguono, e quindi sono ≥ –1000. Chiaramente questa è una condizione sufficiente ma non necessaria.

17. Se $\{a_n\}$ ha infiniti elementi negativi, a) è possibile che $\lim_{n\to+\infty} a_n=+\infty$? b) È sicuro che $\lim_{n\to+\infty} a_n=-\infty$?

a) No, perché se la successione diverge a più infinito da un certo punto in poi tutti gli elementi devono essere maggiori di qualunque numero fisso, quindi devono essere positivi; b) No, basti pensare a una

successione costante i cui elementi sono tutti uguali a un numero negativo, per esempio –1.

18. Se $\lim_{n\to+\infty}(a_n)^2 = +\infty$ possiamo dire che $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$?

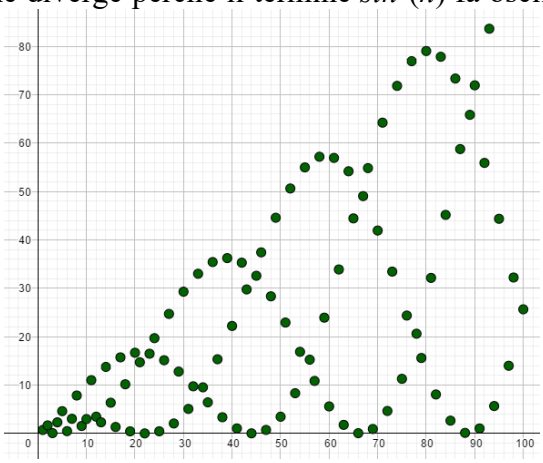
No, si pensi per esempio a $(-1)^n \cdot n$ che non diverge mentre $[(-1)^n \cdot n]^2 = n^2$ diverge positivamente.

19. Se $\lim_{n\to+\infty}(a_n)^3 = -\infty$ possiamo dire che $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$?

Sì, perché se il cubo diverge a meno infinito, anche la base deve farlo.

20. Se una successione è limitata inferiormente e illimitata superiormente, possiamo dire che certamente diverge positivamente? Giustificare la risposta.

No, consideriamo $\{n \cdot sin^2(n)$, che è limitata inferiormente perché tutti i termini sono positivi, ma non superiormente, ma non possiamo dire che diverge perché il termine $sin^2(n)$ fa oscillare i termini. Consideriamo il grafico per i primi 100 valori.



Successioni convergenti

Tenuto conto del limite indicato determinare il primo numero naturale p a partire dal quale tutti gli elementi della successione verificano la richiesta

1. a) $\lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{n+2} = 2 \Rightarrow 1{,}999 < \frac{2n}{n+2} < 2$ **; b)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{4n+1}{4n+2} = 1 \Rightarrow 0{,}999 < \frac{4n+1}{4n+2} < 1$

a) $1{,}999n + 3{,}998 < 2n < 2n + 4$; la disequazione di destra è sempre verificata, per quella di sinistra si ha: $0{,}001n > 3{,}998 \Rightarrow n > 3998$, quindi $p = 3999$

b) $3{,}996n + 1{,}998 < 4n + 1 < 4n + 2 \Rightarrow 0{,}004n > 0{,}998 \Rightarrow n > 249{,}5 \Rightarrow p = 250$

2. a) $\lim_{n\to+\infty}\frac{2n-1}{4n-3} = \frac{1}{2} \Rightarrow 0{,}5 < \frac{2n-1}{4n-3} < 0{,}501$ **; b)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+n}{n^2-1} = 1 \Rightarrow 1 < \frac{n^2+n}{n^2-1} < 1{,}0001$

a) $2n - 1{,}5 < 2n - 1 < 2{,}004n - 1{,}503 \Rightarrow 0{,}004n > 0{,}503 \Rightarrow n > 125{,}75 \Rightarrow p = 126$;

b) $n^2 - 1 < n^2 + n < 1{,}0001n^2 - 1{,}0001 \Rightarrow 0{,}0001n^2 - n - 1{,}0001 > 0 \Rightarrow n^2 - 10000n - 10001 > 0 \Rightarrow n > 10001 \Rightarrow p = 10002$

3. a) $\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2}{n^2-2} = 2 \Rightarrow 2 < \frac{2n^2}{n^2-2} < 2{,}001$ **; b)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n^2+1} = 0 \Rightarrow 0 < \frac{n}{n^2+1} < 0{,}00001$ **[a) 64; b) 100001]**

a) $\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2}{n^2-2} = 2 \Rightarrow 2 < \frac{2n^2}{n^2-2} < 2{,}001$; $n^2 - 1 < n^2 + n < 1{,}0001n^2 - 1{,}0001 \Rightarrow 0{,}0001n^2 - n - 1{,}0001 > 0 \Rightarrow n^2 - 10000n - 10001 > 0 \Rightarrow n > 10001 \Rightarrow p = 10002$

b) $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n^2+1}=0\Rightarrow 0<\frac{n}{n^2+1}<0{,}00001$ $n^2-1<n^2+n<1{,}0001n^2-1{,}0001\Rightarrow 0{,}0001n^2-n-1{,}0001>0\Rightarrow n^2-10000n-10001>0\Rightarrow n>10001\Rightarrow p=10002$

4. **a)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{1-n^2}=0\Rightarrow -0{,}00001<\frac{n}{1-n^2}<0$ **;b)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2-1}{3n^2-2n-1}=\frac{1}{3}\Rightarrow 0{,}33<\frac{n^2-1}{3n^2-2n-1}<0{,}34$

a) $0<\frac{n}{n^2-1}<0{,}00001$, ricordiamo che $1-n^2$ è negativo per ogni $n>1$, la disequazione di sinistra è sempre verificata. $0{,}00001n^2-n-0{,}00001>0\Rightarrow n^2-10000n-1>0\Rightarrow n^2-10000n-10001>0\Rightarrow n>10000\Rightarrow p=10001$

b) $0{,}99n^2-0{,}66n-0{,}33<n^2-1<1{,}02n^2-0{,}68n-0{,}34\Rightarrow$ $\begin{cases}0{,}03n^2+0{,}66n-0{,}67>0\\0{,}02n^2-0{,}68n+0{,}66>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n\geq 1\\n>33\end{cases}\Rightarrow n>33\Rightarrow p=34$ –0,03 $n^2-0{,}66n-0{,}33<n^2-1<1{,}02n^2-0{,}68n-0{,}34$ $0{,}0001n^2-n-1{,}0001>0\Rightarrow n^2-10000n-10001>0\Rightarrow n>10001\Rightarrow p=10002$

5. Provare che non esiste alcun numero naturale *p* per il quale siano vere le seguenti disequazioni, per ogni *n* ≥ *p*: a) $\frac{3n+1}{2n-1}>2{,}001$; **b)** $\frac{2n+1}{n}<1{,}999$; **c)** $\frac{n^2+1}{n-1}<100000$; **d)** $\frac{2n}{n+2}>2{,}001$; **e)** $\frac{2n-1}{4n-3}<0{,}499$

a) Si ha: $3n+1>4{,}002n-2{,}001\Rightarrow 1{,}002n<3{,}001\Rightarrow n<3{,}001/1{,}002<3$;
b) $2n+1<1{,}999n\Rightarrow 0{,}001n<-1$, che è ovviamente impossibile;
c) $n^2+1<100000n-100000\Rightarrow n^2-100000n+99999<0\Rightarrow 2\leq n\leq 100000$
d) $2n>2{,}001n+4{,}002\Rightarrow 0{,}001n<-4{,}0002$, che è ovviamente impossibile;
e) $2n-1<1{,}996n-1{,}497\Rightarrow 0{,}004n<-0$, , che è ovviamente impossibile

Verificare la validità dei seguenti limiti

6. **a)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{3n+1}{n+2}=3$ **; b)** $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{4n}{n+5}}=2$ **; c)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}=1$ **; d)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n^2+1}=0$ **; e)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}=0$

a) $\frac{3n+1}{n+2}=\frac{3n+6-5}{n+2}=3-\frac{5}{n+2}\Rightarrow 3-\varepsilon<3-\frac{5}{n+2}<3+\varepsilon\Rightarrow -\varepsilon<-\frac{5}{n+2}<\varepsilon\Rightarrow$ $\Rightarrow -\frac{5}{n+2}>-\varepsilon\Rightarrow\frac{5}{n+2}<\varepsilon\Rightarrow n+2>\frac{5}{\varepsilon}\Rightarrow n>\frac{5-2\varepsilon}{\varepsilon}$;

b) $2-\varepsilon<\sqrt{\frac{4n}{n+5}}<2+\varepsilon\Rightarrow(2-\varepsilon)^2<\frac{4n}{n+5}<(2+\varepsilon)^2\Rightarrow\begin{cases}\cancel{4n}>\cancel{4n}+20-4n\varepsilon-20\varepsilon+n\varepsilon^2+5\varepsilon^2\\\cancel{4n}<\cancel{4n}+20+4n\varepsilon+20\varepsilon+n\varepsilon^2+5\varepsilon^2\end{cases}\Rightarrow$ $\Rightarrow\begin{cases}n>\frac{20-20\varepsilon+5\varepsilon^2}{4\varepsilon-\varepsilon^2}\\n>\frac{-20-20\varepsilon-5\varepsilon^2}{4\varepsilon+\varepsilon^2}\end{cases}\Rightarrow n>\frac{20-20\varepsilon+5\varepsilon^2}{4\varepsilon-\varepsilon^2}$;

c) $\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}=1-\frac{2}{n^2+n-1}\Rightarrow 1-\varepsilon<1-\frac{2}{n^2+n-1}<1+\varepsilon\Rightarrow -\varepsilon<-\frac{2}{n^2+n-1}<\varepsilon\Rightarrow$ $\Rightarrow\frac{2}{n^2+n-1}<\varepsilon\Rightarrow n^2+n-1>\frac{2}{\varepsilon}\Rightarrow n>\frac{-\varepsilon+\sqrt{5\varepsilon^2+8}}{2\varepsilon}$;

d) $-\varepsilon<\frac{n+1}{n^2+1}<\varepsilon\Rightarrow\frac{n+1}{n^2+1}<\varepsilon\Rightarrow n+1<n^2\varepsilon+\varepsilon\Rightarrow\varepsilon n^2-n-1+\varepsilon>0\Rightarrow n>\frac{1+\sqrt{1+4\varepsilon-4\varepsilon^2}}{2\varepsilon}$;

e) $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}=0$

$$-\varepsilon<\frac{\sqrt{n}}{n+1}<\varepsilon\Rightarrow\frac{\sqrt{n}}{n+1}<\varepsilon\Rightarrow\frac{n}{(n+1)^2}<\varepsilon^2\Rightarrow\varepsilon^2n^2+\left(2\varepsilon^2-1\right)n+\varepsilon^2>0\Rightarrow n>\frac{1-2\varepsilon^2+\sqrt{1-4\varepsilon^2}}{2\varepsilon^2}$$

7. **a)** $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=0$; **b)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+2}=1$; **c)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{3n+1}{4n+2}=\frac{3}{4}$; **d)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{4n-5}=\frac{1}{2}$; **e)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2+n}{n^2-1}=2$

a)
$$-\varepsilon<\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\varepsilon\Rightarrow\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\varepsilon\Rightarrow n+1<\left(\sqrt{n}+\varepsilon\right)^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow n+1<n+\varepsilon^2+2\varepsilon\sqrt{n}\Rightarrow\sqrt{n}>\frac{1-\varepsilon^2}{2\varepsilon}\Rightarrow n>\left(\frac{1-\varepsilon^2}{2\varepsilon}\right)^2;$$

b) $1-\varepsilon<\frac{n}{n+2}<1+\varepsilon\Rightarrow1-\varepsilon<1-\frac{2}{n+2}<1+\varepsilon\Rightarrow\cancel{1}-\varepsilon<\cancel{1}-\frac{2}{n+2}\Rightarrow\frac{2}{n+2}<\varepsilon\Rightarrow\frac{n+2}{2}>\frac{1}{\varepsilon}\Rightarrow n>\frac{2}{\varepsilon}-1;$

c)
$$\frac{3}{4}-\varepsilon<\frac{3n+1}{4n+2}<\frac{3}{4}+\varepsilon\Rightarrow\cancel{12n}+6-16\varepsilon n-8\varepsilon<\cancel{12n}+4<\cancel{12n}+6+16\varepsilon n+8\varepsilon\Rightarrow$$
$$\Rightarrow-16\varepsilon n-8\varepsilon<-2<16\varepsilon n+8\varepsilon\Rightarrow-16\varepsilon n-8\varepsilon<-2\Rightarrow n>\frac{2+8\varepsilon}{16\varepsilon};$$

d)
$$\frac{1}{2}-\varepsilon<\frac{2n}{4n-5}<\frac{1}{2}+\varepsilon\Rightarrow\cancel{4n}-5-8\varepsilon n+10\varepsilon<\cancel{4n}<\cancel{4n}-5+8\varepsilon n-10\varepsilon\Rightarrow$$
$$\Rightarrow-5-8\varepsilon n+10\varepsilon<0<-5+8\varepsilon n-10\varepsilon\Rightarrow\begin{cases}8\varepsilon n>-5+10\varepsilon\\8\varepsilon n>5+10\varepsilon\end{cases}\Rightarrow n>\frac{5+10\varepsilon}{8\varepsilon};$$

e)
$$2-\varepsilon<\frac{2n^2+n}{n^2-1}<2+\varepsilon\Rightarrow\cancel{2n^2}-\varepsilon n^2-2+\varepsilon<\cancel{2n^2}+n<\cancel{2n^2}+\varepsilon n^2-2-\varepsilon\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\varepsilon n^2-n-2-\varepsilon>0\Rightarrow n>\frac{1+\sqrt{1+8\varepsilon+4\varepsilon^2}}{2\varepsilon}$$

8. **a)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2-1}=1$; **b)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{5n}{n^2+1}=0$; **c)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{1-n^2}=0$; **d)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{4n^2+n+5}{n+2n^2-2}=2$; **e)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$

a) $1-\varepsilon<\frac{n^2}{n^2-1}<1+\varepsilon\Rightarrow\cancel{n^2}-\varepsilon n^2-1+\varepsilon<\cancel{n^2}<\cancel{n^2}+\varepsilon n^2-1-\varepsilon\Rightarrow\varepsilon n^2-1-\varepsilon>0\Rightarrow n>\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}};$

b) $-\varepsilon<\frac{5n}{n^2+1}<\varepsilon\Rightarrow\frac{5n}{n^2+1}<\varepsilon\Rightarrow5n<\varepsilon n^2+\varepsilon\Rightarrow\varepsilon n^2-5n+\varepsilon>0\Rightarrow n>\frac{5+\sqrt{25-4\varepsilon^3}}{2\varepsilon};$

c) $-\varepsilon<\frac{n}{1-n^2}<\varepsilon\Rightarrow\frac{n}{1-n^2}>-\varepsilon\Rightarrow\frac{n}{n^2-1}<\varepsilon\Rightarrow n<\varepsilon n^2-\varepsilon\Rightarrow\varepsilon n^2-n-\varepsilon>0\Rightarrow n>\frac{1+\sqrt{1+4\varepsilon^3}}{2\varepsilon};$

d)
$$2-\varepsilon<\frac{4n^2+n+5}{n+2n^2-2}<2+\varepsilon\Rightarrow2n+\cancel{4n^2}-4-\varepsilon n-2\varepsilon n^2+2\varepsilon<\cancel{4n^2}+n+5<2n+\cancel{4n^2}-4+\varepsilon n+2\varepsilon n^2-2\varepsilon\Rightarrow$$
$$\Rightarrow-\varepsilon n-2\varepsilon n^2+2\varepsilon<-n+9<\varepsilon n+2\varepsilon n^2-2\varepsilon\Rightarrow\begin{cases}2\varepsilon n^2+(\varepsilon-1)n+9-2\varepsilon>0\\2\varepsilon n^2+(\varepsilon+1)n-9-2\varepsilon>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n>\frac{(\varepsilon-1)+\sqrt{17\varepsilon^2-74\varepsilon+1}}{4\varepsilon}\\n>\frac{(\varepsilon+1)+\sqrt{17\varepsilon^2+74\varepsilon+1}}{4\varepsilon}\end{cases}\Rightarrow n>\frac{(\varepsilon+1)+\sqrt{17\varepsilon^2+74\varepsilon+1}}{4\varepsilon};$$

e) $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0\qquad-\varepsilon<\frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon\Rightarrow\sqrt{n}>\frac{1}{\varepsilon}\Rightarrow n>\frac{1}{\varepsilon^2}$

9. **a)** $\lim_{n\to+\infty}sin\left(\frac{1}{n+1}\right)=0$; **b)** $\lim_{n\to+\infty}sin^{-1}\left(\frac{n}{n+1}\right)=\frac{\pi}{2}$; **c)** $\lim_{n\to+\infty}tan^{-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)=\frac{\pi}{4}$; **d)** $\lim_{n\to+\infty}e^{-n}=0$; **e)** $\lim_{n\to+\infty}cos\left(\frac{1}{n}\right)=1$

a) $-\varepsilon<sin\left(\frac{1}{n+1}\right)<\varepsilon\Rightarrow sin\left(\frac{1}{n+1}\right)<\varepsilon\Rightarrow\frac{1}{n+1}<sin^{-1}(\varepsilon)\Rightarrow n+1>\frac{1}{sin^{-1}(\varepsilon)}\Rightarrow n>\frac{1}{sin^{-1}(\varepsilon)}-1;$ Osserviamo che $sin\left(\frac{1}{n+1}\right)>0$, perché l'argomento è positivo e minore di 1/2 (in radianti) quindi al appartiene al primo quadrante; ε è una quantità piccola, pertanto certamente minore di 1 e quindi esiste

$sin^{-1}(\varepsilon)$ che è anch'esso molto piccola, e perciò $\frac{1}{sin^{-1}(\varepsilon)}-1$ è positiva e "abbastanza" grande.

b) $\frac{\pi}{2}-\varepsilon<sin^{-1}\left(\frac{n}{n+1}\right)<\frac{\pi}{2}+\varepsilon \Rightarrow sin^{-1}\left(\frac{n}{n+1}\right)>\frac{\pi}{2}-\varepsilon \Rightarrow \frac{n}{n+1}>sin\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow n>sin\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)n+sin\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\Rightarrow n>\frac{sin\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)}{1-sin\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)}$; osserviamo che

$\frac{n}{n+1}<\frac{1}{2}\Rightarrow sin^{-1}\left(\frac{n}{n+1}\right)<sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}+\varepsilon$

c) $\frac{\pi}{4}-\varepsilon<tan^{-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)<\frac{\pi}{4}+\varepsilon \Rightarrow tan^{-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)<\frac{\pi}{4}+\varepsilon \Rightarrow \frac{n+1}{n}<tan\left(\frac{\pi}{4}+\varepsilon\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow n+1<tan\left(\frac{\pi}{4}+\varepsilon\right)n \Rightarrow n>\frac{1}{tan\left(\frac{\pi}{4}+\varepsilon\right)-1}$; osserviamo che

$\frac{n+1}{n}>1\Rightarrow tan^{-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)>tan^{-1}(1)=\frac{\pi}{4}>\frac{\pi}{4}-\varepsilon$

d) $\lim_{n\to+\infty} e^{-n}=0$; $-\varepsilon<e^{-n}<\varepsilon \Rightarrow e^{-n}<\varepsilon \Rightarrow -n<ln(\varepsilon)\Rightarrow n>-ln(\varepsilon)=ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\Rightarrow n>\frac{1}{sin^{-1}(\varepsilon)}-1$

e) $\lim_{n\to+\infty} cos\left(\frac{1}{n}\right)=1$ $\quad 1-\varepsilon<cos\left(\frac{1}{n}\right)<1+\varepsilon \Rightarrow cos\left(\frac{1}{n}\right)>1-\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n}<cos^{-1}(1-\varepsilon)\Rightarrow n>\frac{1}{cos^{-1}(1-\varepsilon)}$, essendo $1/n$ prossimo a zero positivo, $cos(1/n)$ è positiva e decrescente.

Provare le seguenti disuguaglianze

10. a) $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+1}{n^2-1}\neq 0$ **; b)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{3n+1}{2n}\neq 1,49999$ **; c)** $\lim_{n\to+\infty} sin\left(\frac{\pi n-1}{6n}\right)\neq 1,5001$

a) Dovrebbe essere $-\varepsilon<\frac{n^2+1}{n^2-1}<\varepsilon \Rightarrow \frac{n^2+1}{n^2-1}<\varepsilon$, ma ciò non accade per ogni ε > 0, perché si ha: $\frac{n^2+1}{n^2-1}>1$;

b) Dovrebbe essere $1,49999-\varepsilon<\frac{3n+1}{2n}<1,49999+\varepsilon$, ma si ha: $\frac{3n+1}{2n}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2n}>1,5$;

c) Dovrebbe essere $1,5001-\varepsilon<sin\left(\frac{\pi n-1}{6n}\right)<1,5001+\varepsilon$, ma $-1\leq sin\left(\frac{\pi n-1}{6n}\right)\leq 1$

Giustificare la risposta ai seguenti quesiti

11. Se $\{a_n\}$ ha un miliardo di elementi maggiori di 100, è possibile che $\lim_{n\to+\infty} a_n=-5$?

Sì, per esempio la successione il cui primo miliardo di elementi è uguale a 101 e dall'elemento di posto 10^6+1 sono tutti uguali a –5

12. Se $\lim_{n\to+\infty} a_n=1$ è possibile che sia $a_n>1$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$?

Sì, per esempio $1+1/n$

13. Se $\lim_{n\to+\infty} a_n=0$ è possibile che a_n abbia infiniti elementi positivi e infiniti negativi?

Sì, si pensi a $(-1)^n/n$.

14. Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = 2$ è possibile che a_n abbia infiniti elementi negativi?

No perché deve succedere definitivamente $a_n > 2 - \varepsilon$, con ε numero positivo arbitrario, quindi sarà ovviamente definitivamente $a_n > 0$.

15. Se a_n ha infiniti elementi negativi è possibile che sia $\lim_{n\to+\infty} a_n = 2$?

No, vedi quanto detto sopra

16. Se a_n ha infiniti elementi negativi è possibile che sia $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$?

Sì, basta considerare $-1/n$.

17. Consideriamo una funzione periodica, come *sin*(*x*), *cos*(*x*) e così via. Cosa possiamo dire della successione che si ottiene calcolando la funzione periodica solo per valori naturali, cioè *sin*(*n*), *cos*(*n*), …?

Sono tutte successioni oscillanti perché a causa della periodicità otteniamo valori che continuano ad oscillare fra 1 e –1.

18. Quanto detto nell'esercizio precedente, è valido anche se una successione *contiene* nella sua definizione una funzione periodica, come per esempio $\left\{\frac{sin(n)}{n}\right\}$?

No, in questo caso possiamo ottenere successioni convergenti, divergenti o oscillanti. Infatti $\left\{\frac{sin(n)}{n}\right\}$ è convergente a 0; $n + sin(n)$ diverge e $1 + sin(n)$ oscilla.

19. Le successioni *sin*(*n*), *cos*(*n*) o *tan*(*n*), che sono particolari sottoinsiemi di *sin*(*x*), *cos*(*x*) o *tan*(*x*), hanno qualche elemento ripetuto? Giustificare la risposta.

No perché il periodo di ognuna delle dette funzioni è proporzionale a π che non è un numero naturale, quindi non accadrà mai che si abbia per esempio $sin(n + 2k\pi)$ o $sin(\pi - n + 2k\pi)$ rappresentino elementi della successione e quindi siano uguali a $sin(n)$.

20. Se $\{a_n\}$ ha tutti gli elementi maggiori di 2, è possibile che a) $\lim_{n\to+\infty} a_n = 2$? b) $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1{,}99$

a) Sì, basti pensare a $\{2 + 1/n\}$ i cui elementi sono tutti maggiori di 1, ma il cui limite è 2 + 0 = 2; b) No, perché in questo caso la convergenza a 2 non può essere per gli elementi inferiori a 2 che non esistono.

21. Una successione illimitata può essere a) convergente? b) divergente?

No, sempre oscillante. Infatti se fosse a) convergente dovrebbe essere limitata; b) se fosse divergente sarebbe illimitata da una sola parte e non entrambe

22. Una successione oscillante è sempre illimitata?

No, si pensi per esempio a $sin(n)$

Operazioni aritmetiche con i limiti

Successioni infinitesime e infinite

Usando il principio di sostituzione degli infiniti calcolare i seguenti limiti di successioni

1. **a)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2+1}{3n-1}$ **;b)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{4n+1}{5-n}$ **;c)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{7n^2-1+n^3}{5n^2+2n+1}$ **;d)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{4n^2+n-1}{7n-3n^2}$ **; e)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2-3}$ **; f)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{sin\left(n^{50}\right)}$

a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2+1}{3n-1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2}{3n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{3} = +\infty$; b) $\lim_{n\to+\infty} \frac{4n+1}{5-n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4n}{-n} = \lim_{n\to+\infty} -4 = -4$;

c) $\lim_{n\to+\infty}\frac{7n^2-1+n^3}{5n^2+2n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3}{5n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{5}=+\infty$; d) $\lim_{n\to+\infty}\frac{4n^2+n-1}{7n-3n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{4n^2}{-3n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{4}{-3}=-\frac{4}{3}$;

e) $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2-3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0$; f) $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{sin\left(n^{50}\right)}$ in questo caso il numeratore è un infinito, ma il denominatore no, è una successione limitata che però assume valori positivi e negativi, pertanto il limite non esiste.

2. **a)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2-n}{n^2+n}$ **; b)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{4n+\sqrt{2n}}{\sqrt{2n^3-n}}$ **; c)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{4n}+\sqrt[3]{2n}}{n}$ **;d)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{\sqrt{5n}+2}$ **;e)** $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{8n^2-n}{5n-1+3n^2}\right)^4$

a) $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2-n}{n^2+n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2}=1$; b) $\lim_{n\to+\infty}\frac{4n+\sqrt{2n}}{\sqrt{2n^3-n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{4n}{\sqrt{2n^3}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{4n}{n\cdot\sqrt{2n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{2n}}=0$;

c) $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{4n}+\sqrt[3]{2n}}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{4n}}{n}=0$;d) $\lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{\sqrt{5n}+2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{\sqrt{5n}}=+\infty$;

e) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{8n^2-n}{5n-1+3n^2}\right)^4=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{8\cancel{n^2}}{3\cancel{n^2}}\right)^4=\left(\frac{8}{3}\right)^4$

3. **a)** $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5n^2-1}{7n^3-n}\right)^3$ **; b)** $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5n^2-7}{8n^2-3n+1}\right)^4$ **; c)** $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3n^2-1+2n}{4n-5}\right)^3$ **; d)** $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3n^2+n^4}{4n^4-5}\right)^5$

a) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5n^2-1}{7n^3-n}\right)^3=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5\cancel{n^2}}{7n^{\cancel{3}}}\right)^3=0$; b) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5n^2-7}{8n^2-3n+1}\right)^4=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5\cancel{n^2}}{8\cancel{n^2}}\right)^4=\left(\frac{5}{8}\right)^4$;

c) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3n^2-1+2n}{4n-5}\right)^3=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3\cancel{n^2}}{4\cancel{n}}\right)^3=+\infty$; d) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3n^2+n^4}{4n^4-5}\right)^5=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\cancel{n^4}}{4\cancel{n^4}}\right)^5\frac{1}{4^5}$

4. **a)** $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{2}n^2-1}{n^2+n-2}\right)^7$ **;b)** $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[5]{\frac{4n^4+n^2-3}{1+n^2-3n^5}}$ **;c)** $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[7]{\frac{4n^2+n-1}{n^2-n^3+2}}$ **;d)** $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{4n^5+n-3}{n^3-2n^5+n}}$

a) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{2}n^2-1}{n^2+n-2}\right)^7=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{2}\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}}\right)^7=8\sqrt{2}$;b) $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[5]{\frac{4n^4+n^2-3}{1+n^2-3n^5}}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[5]{\frac{4\cancel{n^4}}{-3n^{\cancel{5}}}}=0$;

c) $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[7]{\frac{4n^2+n-1}{n^2-n^3+2}}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[7]{\frac{4\cancel{n^2}}{-n^{\cancel{3}}}}=0$;d) $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{4n^5+n-3}{n^3-2n^5+n}}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{4\cancel{n^5}}{-2\cancel{n^5}}}=\sqrt[3]{-2}$

5. **a)** $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[4]{\frac{5n^2+2}{n+4n^2+3}}$ **;b)** $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[5]{\frac{n^3+2n-1}{4n-3n^3+1}}$ **;c)** $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[5]{\frac{2n^4-n-1}{n^5-3n^3+1}}$ **; d)** $\lim_{n\to+\infty}\left(n^2+sin\left(n^{50}\right)\right)$

a) $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[4]{\frac{5n^2+2}{n+4n^2+3}}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[4]{\frac{5\cancel{n^2}}{4\cancel{n^2}}}=\sqrt[4]{\frac{5}{4}}$;b) $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[5]{\frac{n^3+2n-1}{4n-3n^3+1}}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[5]{\frac{\cancel{n^3}}{-3\cancel{n^3}}}=-\frac{1}{\sqrt[5]{3}}$;

c) $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[5]{\frac{2n^4-n-1}{n^5-3n^3+1}}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[5]{\frac{2\cancel{n^4}}{n^{\cancel{5}}}}=0$; ; d) $\lim_{n\to+\infty}\left(n^2+sin\left(n^{50}\right)\right)$ come già osservato in 1 f) il secondo addendo non è un infinito ma una successione limitata, essendo una somma quindi il limite è $+\infty$

6. **a)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{3n}-\sqrt{n}}{n+\sqrt{4n}-3\cdot\sqrt[3]{n}}$ **;b)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}+\sqrt{n}+5}{4-\sqrt{2n}+\sqrt[6]{3n^4}}$ **;c)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[5]{4n^3}+\sqrt{2n}}{3-\sqrt{7n}-\sqrt[4]{n^3}}$

a) $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{3n}-\sqrt{n}}{n+\sqrt{4n}-3\cdot\sqrt[3]{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{-\sqrt{n}}{n}=0$;b) $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}+\sqrt{n}+5}{4-\sqrt{2n}+\sqrt[6]{3n^4}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[6]{3}\cdot\sqrt[\cancel{6}\,3]{n^{\cancel{4}\,2}}}=\frac{1}{\sqrt[6]{3}}$;

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt[5]{4n^3}+\sqrt{2n}}{3-\sqrt{7n}-\sqrt[4]{n^3}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt[5]{4n^3}}{-\sqrt[4]{n^3}}=0$

7. **a)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt[6]{n}+\sqrt{5n}+7}{n-\sqrt{4n}-\sqrt[4]{3n}}$ **;b)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt[5]{n^3}-\sqrt{2n^5}-n}{n+\sqrt{2n^3}+\sqrt[4]{3n^{10}}}$ **;c)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt[4]{n}+\sqrt{5n^3}-2}{-3n+\sqrt{n}-\sqrt[4]{n}}$

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt[6]{n}+\sqrt{5n}+7}{n-\sqrt{4n}-\sqrt[4]{3n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{5n}}{n}=0$;b)

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt[5]{n^3}-\sqrt{2n^5}-n}{n+\sqrt{2n^3}+\sqrt[4]{3n^{10}}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-\sqrt{2n^5}}{\sqrt[4]{3n^{10}}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-\sqrt{2}\cdot\sqrt{n^5}}{\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[\cancel{4}\,2]{n^{\cancel{10}\,5}}}=\dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}=-\sqrt[4]{\dfrac{4}{3}}$;c)

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt[4]{n}+\sqrt{5n^3}-2}{-3n+\sqrt{n}-\sqrt[4]{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{5n^3}}{-3n}=-\infty$

8. **a)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}+1}{\sqrt{3n^2+n}-5n}$ **;b)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{3n+7}+\sqrt{4+5n}}{\sqrt{5n+2}+\sqrt{n+1}}$ **;c)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n+7}+\sqrt{1+3n}}{\sqrt{4n-3}+\sqrt{2n-1}}$

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}+1}{\sqrt{3n^2+n}-5n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{3n^2}-5n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{\left(\sqrt{3}-5\right)\cdot n}=0$;b)

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{3n+7}+\sqrt{4+5n}}{\sqrt{5n+2}+\sqrt{n+1}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{3n}+\sqrt{5n}}{\sqrt{5n}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\cancel{\sqrt{n}}}{\left(\sqrt{5}+1\right)\cancel{\sqrt{n}}}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}$;

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n+7}+\sqrt{1+3n}}{\sqrt{4n-3}+\sqrt{2n-1}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n}+\sqrt{3n}}{\sqrt{4n}+\sqrt{2n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\cancel{\sqrt{n}}\left(1+\sqrt{3}\right)}{\cancel{\sqrt{n}}\left(2+\sqrt{2}\right)}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}$

9. **a)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ **;b)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{1-(-1)^n\cdot n}$ **;c)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2}{1-(-1)^n\cdot n}$ **;d)** $\lim\limits_{n\to+\infty}sin\left(\dfrac{\pi}{2}\cdot n\right)$ **;e)** $\lim\limits_{n\to+\infty}sin(\pi\cdot n)$ **;f)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{sin(n)}{n}$

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}=0$;b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{1-(-1)^n\cdot n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{-(-1)^n\cdot n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{(-1)^{n+1}}=?$;

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2}{1-(-1)^n\cdot n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^{\cancel{2}}}{(-1)^{n+1}\cdot\cancel{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{(-1)^{n+1}}=\infty$;d)

$\left\{sin\left(\dfrac{\pi}{2}\cdot n\right)\right\}=\left\{sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right),sin(\pi),sin\left(\dfrac{3\pi}{2}\right),sin(2\pi),sin\left(\dfrac{5\pi}{2}\right),...\right\}=\{1,0,-1,0,1,...\}\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}sin\left(\dfrac{\pi}{2}\cdot n\right)=?$;

e) $\{sin(\pi\cdot n)\}=\{sin(\pi),sin(2\pi),sin(3\pi),sin(4\pi),...\}=\{0,0,0,0,...\}\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}sin(\pi\cdot n)=0$;

f) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{sin(n)}{n}=0$ perché $sin(n)$ è limitata

Calcolare i seguenti limiti di successioni

10. **a)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{3n^2+n+1}-\sqrt{n^2+2n-1}\right)$ **;b)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+7}\right)$ **;c)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{3n^2+n}-\sqrt{4n^2-1}\right)$

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{3n^2+n+1}-\sqrt{n^2+2n-1}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{3n^2}-\sqrt{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{3}-1\right)n=+\infty$;

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+7}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n}\right)=0$;c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{3n^2+n}-\sqrt{4n^2-1}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{3n^2}-\sqrt{4n^2}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{3}-2\right)n=-\infty$

11. **a)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{4n^2+3}-\sqrt{n^2+2n}\right)$ **;b)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2\cdot\sqrt{n^2+1}-3\cdot\sqrt{n^2-1}\right)$ **;c)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{5n^2+sin(n)}-\sqrt{n^2+2}\right)$

a) $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{4n^2+3}-\sqrt{n^2+2n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{4n^2}-\sqrt{n^2}\right)=\lim_{n\to+\infty}n=+\infty$;

b) $\lim_{n\to+\infty}\left(2\cdot\sqrt{n^2+1}-3\cdot\sqrt{n^2-1}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(2\cdot\sqrt{n^2}-3\cdot\sqrt{n^2}\right)=\lim_{n\to+\infty}(-n)=-\infty$;

c) $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{5n^2+sin(n)}-\sqrt{n^2+2}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{5n^2}-\sqrt{n^2}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{5}-1\right)n=+\infty$

12. **a)** $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+2n+1}-\sqrt{n^2+3}\right)$**;b)** $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{5n^2+3}-\sqrt{5n^2-2n+1}\right)$

a) $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+2n+1}-\sqrt{n^2+3}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{(n+1)^2}-\sqrt{n^2}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\cancel{n}+1\cancel{-n}\right)=1$;

b) $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{5n^2+3}-\sqrt{5n^2-2n+1}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{\cancel{5n^2}+3\cancel{-5n^2}+2n-1}{\sqrt{5n^2+3}+\sqrt{5n^2-2n+1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+2}{\sqrt{5n^2}+\sqrt{5n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{2\sqrt{5}n}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

13. **a)** $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^3+n^2+1}-\sqrt{n^3-4n}\right)$**;b)** $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{3n^2+2}-\sqrt{3n^2+7n-2}\right)$

a) $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^3+n^2+1}-\sqrt{n^3-4n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{\cancel{n^3}+n^2+1\cancel{-n^3}+4n}{\sqrt{n^3+n^2+1}+\sqrt{n^3-4n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n^3}+\sqrt{n^3}}=+\infty$;

b) $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{3n^2+2}-\sqrt{3n^2+7n-2}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{\cancel{3n^2}+2\cancel{-3n^2}-7n+2}{\sqrt{3n^2+2}+\sqrt{3n^2+7n-2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{-7n}{\sqrt{3n^2}+\sqrt{3n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{-7n}{2\sqrt{3}n}=\frac{-7}{2\sqrt{3}}$

14. **a)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{2n^2+1}-2n}{\sqrt{3n^2+1}+n}$**;b)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{2n^2+3n+1}-4n}{\sqrt{n^2+3}+5n}$

a) $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{2n^2+1}-2n}{\sqrt{3n^2+1}+n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{2}n-2n}{\sqrt{3n^2}+n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{2}-2\right)n}{\left(\sqrt{3}+1\right)n}=\frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{3}+1}$;

b)
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{2n^2+3n+1}-4n}{\sqrt{n^2+3}+5n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2+3n+1-16n^2}{\sqrt{n^2}+5n}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n^2+3n+1}+4n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{-14n^2}{6n}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{2}+4\right)n}=$$
$$=-\frac{7}{3\cdot\left(\sqrt{2}+4\right)}=-\frac{7\cdot\left(\sqrt{2}-4\right)}{3\cdot(2-16)}=-\frac{7\cdot\left(\sqrt{2}-4\right)}{3\cdot(-14)}=\frac{\sqrt{2}-4}{6}$$

15. **a)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{3n+2}-\sqrt{5+n}}{\sqrt{6n-1}-\sqrt{7n}}$**;b)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{2+n}}{\sqrt{3n+5}-\sqrt{4n+8}}$**;c)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}-4n}{\sqrt{n^2+n-1}+n}$

a) $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{3n+2}-\sqrt{5+n}}{\sqrt{6n-1}-\sqrt{7n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{3n}-\sqrt{n}}{\sqrt{6n}-\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}-\sqrt{7}}$;b) $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{2+n}}{\sqrt{3n+5}-\sqrt{4n+8}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt{3n}-\sqrt{4n}}=-\infty$;

c) $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}-4n}{\sqrt{n^2+n-1}+n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^2}-4n}{\sqrt{n^2}+n}=\frac{1-4}{1+1}=-\frac{3}{2}$

16. **a)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}-4n}{\sqrt{n^2+n-1}-n}$**;b)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}+4n}{\sqrt{n^2+n-1}+n}$**;c)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}+4n}{\sqrt{n^2+n-1}-n}$

a) $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}-4n}{\sqrt{n^2+n-1}-n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^2}-4n}{\sqrt{n^2}-n}=-\infty$;b) $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}+4n}{\sqrt{n^2+n-1}+n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^2}+4n}{\sqrt{n^2}+n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{5n}{2n}=\frac{5}{2}$;c)

$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}+4n}{\sqrt{n^2+n-1}-n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^2}+4n}{\sqrt{n^2}-n}=+\infty$

17. **a)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+n+1}-n}{\sqrt{n^2-2}-n}$ **;b)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{9n^2+7n+2}-3n-5}{\sqrt{4n^2-n}-2n-1}$ **;c)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4n^2+3}-2n}{\sqrt{n^2+5n}-n}$

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+n+1}-n}{\sqrt{n^2-2}-n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\cancel{n^2}+n+1-\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}-2-\cancel{n^2}}\cdot\dfrac{\sqrt{n^2-2}+n}{\sqrt{n^2+n+1}+n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{-2}\cdot\dfrac{\sqrt{n^2}+n}{\sqrt{n^2}+n}=-\infty$;

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{9n^2+7n+2}-3n-5}{\sqrt{4n^2-n}-2n-1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\cancel{9n^2}+7n+2-\cancel{9n^2}-30n-25}{\cancel{4n^2}-n-\cancel{4n^2}-4n-1}\cdot\dfrac{\sqrt{4n^2-n}+2n+1}{\sqrt{9n^2+7n+2}+3n+5}=$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-23n}{-5n}\cdot\dfrac{\sqrt{4n^2}+2n}{\sqrt{9n^2}+3n}=\dfrac{23}{5}\cdot\dfrac{4}{6}=\dfrac{46}{15}$;

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4n^2+3}-2n}{\sqrt{n^2+5n}-n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\cancel{4n^2}+3-\cancel{4n^2}}{\cancel{n^2}+5n-\cancel{n^2}}\cdot\dfrac{\sqrt{n^2+5n}+n}{\sqrt{4n^2+3}+2n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3}{5n}\cdot\dfrac{\sqrt{n^2}+n}{\sqrt{4n^2}+2n}=0$

18. **a)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+3n-8}-n}{\sqrt{2n^2+11}-\sqrt{2}n}$ **;b)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{25n^2+4n}-5n}{\sqrt{7n^2-3n}-\sqrt{7}n+2}$ **;c)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3-n-1}-n}{\sqrt[3]{8n^3-4n+1}-2n}$

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+3n-8}-n}{\sqrt{2n^2+11}-\sqrt{2}n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2+3n-8-n^2}{2n^2+11-2n^2}\cdot\dfrac{\sqrt{2n^2+11}+\sqrt{2}n}{\sqrt{n^2+3n-8}+n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\cancel{n^2}+3n-8-\cancel{n^2}}{\cancel{2n^2}+11-\cancel{2n^2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2n^2}+\sqrt{2}n}{\sqrt{n^2}+n}=+\infty$;

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{25n^2+4n}-5n}{\sqrt{7n^2-3n}-\sqrt{7}n+2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\cancel{25n^2}+4n-\cancel{25n^2}}{\cancel{7n^2}-3n-\cancel{7n^2}+4\sqrt{7}n-4}\cdot\dfrac{\sqrt{7n^2-3n}+\sqrt{7}n-2}{\sqrt{25n^2+4n}+5n}=$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4n}{\left(-3+4\sqrt{7}\right)n}\cdot\dfrac{\sqrt{7n^2}+\sqrt{7}n}{\sqrt{25n^2}+5n}=\dfrac{4}{\left(-3+4\sqrt{7}\right)}\cdot\dfrac{2\sqrt{7}}{10}=\dfrac{4\sqrt{7}\left(+3+4\sqrt{7}\right)}{5\cdot(112-9)}=\dfrac{12\sqrt{7}+112}{515}$;

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3-n-1}-n}{\sqrt[3]{8n^3-4n+1}-2n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\cancel{n^3}-n-1-\cancel{n^3}}{\cancel{8n^3}-4n+1-\cancel{8n^3}}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{\left(8n^3-4n+1\right)^2}+2n\cdot\sqrt[3]{8n^3-4n+1}+4n^2}{\sqrt[3]{\left(n^3-n-1\right)^2}+n\cdot\sqrt[3]{n^3-n-1}+n^2}=$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-n}{-4n}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{64n^6}+2n\cdot\sqrt[3]{8n^3}+4n^2}{\sqrt[3]{n^6}+n\cdot\sqrt[3]{n^3}+n^2}=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{4+4+4}{1+1+1}=1$

19. **a)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n^3+n}-\sqrt{n^3+2}}{\sqrt{n^2-5n+1}-\sqrt{n^2+2n-3}}$ **; b)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2n^2+1}-\sqrt{2n^2+n}}{\sqrt{n^4-n^3}-\sqrt{n^4+n^2}}$

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n^3+n}-\sqrt{n^3+2}}{\sqrt{n^2-5n+1}-\sqrt{n^2+2n-3}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\cancel{n^3}+n-\cancel{n^3}-2}{\cancel{n^2}-5n+1-\cancel{n^2}-2n+3}\cdot\dfrac{\sqrt{n^2-5n+1}+\sqrt{n^2+2n-3}}{\sqrt{n^3+n}+\sqrt{n^3+2}}=$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{-7n}\cdot\dfrac{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}}{\sqrt{n^3}+\sqrt{n^3}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{-7}\cdot\dfrac{2n}{2n\cdot\sqrt{n}}=0$;

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2n^2+1}-\sqrt{2n^2+n}}{\sqrt{n^4-n^3}-\sqrt{n^4+n^2}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\cancel{2n^2}+1-\cancel{2n^2}-n}{\cancel{n^4}-n^3-\cancel{n^4}-n^2}\cdot\dfrac{\sqrt{n^4-n^3}+\sqrt{n^4+n^2}}{\sqrt{2n^2+1}+\sqrt{2n^2+n}}=$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-n}{-n^3}\cdot\dfrac{\sqrt{n^4}+\sqrt{n^4}}{\sqrt{2n^2}+\sqrt{2n^2}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}\cdot\dfrac{2n^2}{2\sqrt{2}n}=0$

Determinare l'eventuale valore del parametro reale k per il quale si ha la validità delle uguaglianze seguenti

20. **a)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{k\cdot n^4+n-3}{5n^4-n^2+1}=-\frac{1}{4}$ **;b)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{5n^2+2n-2}{k\cdot n^2+3n-2}=\frac{2}{3}$ **;c)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{k\cdot n^4+2n-1}{3n+k\cdot n^4+1}=\frac{5}{2}$

a) se $k\neq 0$, si ha: $\lim_{n\to+\infty}\frac{k\cdot n^4}{5n^4}=\frac{k}{4}$, quindi deve essere $k/4 = -1/4 \Rightarrow k = -1$;

b) se $k\neq 0$, si ha: $\lim_{n\to+\infty}\frac{5n^2}{k\cdot n^2}=\frac{5}{k}$, quindi deve essere $5/k = 2/3 \Rightarrow k = 15/2$;

c) se $k\neq 0$, si ha: $\lim_{n\to+\infty}\frac{k\cdot n^4}{k\cdot n^4}=1$, se $k = 0$: $\lim_{n\to+\infty}\frac{2n-1}{3n+1}=\frac{2}{3}$, pertanto non otteniamo mai quanto richiesto

21. **a)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{-k\cdot n^3+n}{3n+5n^3+1}=\frac{7}{4}$ **;b)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^5+n^2-3}{5n^4-k\cdot n^5+n}=\frac{5}{3}$ **;c)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{k\cdot n^3+2n^4-1}{2kn+3n^4}=\frac{2}{3}$

a) se $k\neq 0$, si ha: $\lim_{n\to+\infty}\frac{-k\cdot n^3}{5n^3}=-\frac{k}{5}$, quindi deve essere $-k/5 = 7/4 \Rightarrow k = -35/4$;

b) se $k\neq 0$, si ha: $\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^5}{-k\cdot n^5}=-\frac{3}{k}$, quindi deve essere $-3/k = 5/3 \Rightarrow k = -9/5$;

c) Si ha: $\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^4}{3n^4}=\frac{2}{3}$, indipendentemente dal valore di k, quindi l'uguaglianza è un'identità

22. **a)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{(2k+1)\cdot n^2+3}{(3k-2)n^2+1}=\frac{5}{3}$ **;b)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{(k^2-1)\cdot n^2+2}{(2k^2+1)\cdot n^2+3}=\frac{1}{4}$

a) se $2k + 1 \neq 0$ e $3k - 2 \neq 0$, ossia se $k \notin \{-1/2; 2/3\}$ si ha: $\lim_{n\to+\infty}\frac{(2k+1)\cdot n^2}{(3k-2)n^2}=\frac{2k+1}{3k-2}$, quindi deve essere

$\frac{2k+1}{3k-2}=\frac{5}{3}\Rightarrow 6k+3=15k-10\Rightarrow 9k=13\Rightarrow k=\frac{13}{9}$;

b) se $k^2 - 1 \neq 0$ e $2k^2 + 1 \neq 0$, ossia se $k \notin \{-1; 1\}$ si ha: $\lim_{n\to+\infty}\frac{(k^2-1)\cdot n^2}{(2k^2+1)\cdot n^2}=\frac{k^2-1}{2k^2+1}$, quindi deve essere

$\frac{k^2-1}{2k^2+1}=\frac{1}{4}\Rightarrow 4k^2-4=2k^2+1\Rightarrow 2k^2=5\Rightarrow k=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

23. **a)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{(k^2+k-1)\cdot n^3+n}{(k^2-k+1)\cdot n^3-n^2}=2$ **; b)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{(k^2+k-1)\cdot n^3+n}{(k^2-k+1)\cdot n^3-n^2}=1$

a) se $k^2 + k - 1 \neq 0$ e $k^2 - k + 1 \neq 0$, ossia se $k\neq\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, si ha: $\lim_{n\to+\infty}\frac{(k^2+k-1)\cdot n^3}{(k^2-k+1)\cdot n^3}=\frac{k^2+k-1}{k^2-k+1}$, quindi deve essere $2k^2 - 2k + 2 = k^2 + k - 1 \Rightarrow k^2 - 3k + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 12 < 0$, quindi nessun valore reale di k.

b) se $k\neq\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ si ha: $\lim_{n\to+\infty}\frac{(k^2+k-1)\cdot n^3}{(k^2-k+1)\cdot n^3}=\frac{k^2+k-1}{k^2-k+1}$, quindi deve essere $k^2 + k - 1 = k^2 - k + 1 \Rightarrow 2k = 2$ $\Rightarrow k = 1$

Studiare i seguenti limiti al valore del parametro reale k

24. **a)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{(k+1)\cdot n^3+n^2}{(2k-1)\cdot n^4-1}$ **; b)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{(2k-5)\cdot n^2+n-1}{(3k-1)\cdot n^2+n}$ **; c)** $\lim_{n\to+\infty}\frac{(3k+1)\cdot n^2+1}{(2k-1)\cdot n^2+n+1}$

a) se $2k - 1 \neq 0 \Rightarrow k \neq 1/2$ si ha: $\lim_{n\to+\infty}\frac{(k+1)\cdot n^3+n^2}{(2k-1)\cdot n^4-1}=0$, Se $k = 1/2$: $\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^3/2+n^2}{-1}=-\infty$;

b) se $2k - 5 \neq 0$ e $3k - 1 \neq 0$, ossia se $k \notin \{1/3;\ 5/2\}$ si ha: $\lim_{n\to+\infty} \frac{(2k-5)\cdot n^2+n-1}{(3k-1)\cdot n^2+n} = \frac{2k-5}{3k-1}$; se $k = 1/3$: $\lim_{n\to+\infty} \frac{-13n^2/3+n-1}{n} = -\infty$; se $k = 5/2$: $\lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{13n^2/2+n} = 0$.

c) se $3k + 1 \neq 0$ e $2k - 1 \neq 0$, ossia se $k \notin \{-1/3;\ 1/2\}$, si ha: $\lim_{n\to+\infty} \frac{(3k+1)\cdot n^2+1}{(2k-1)\cdot n^2+n+1} = \frac{3k+1}{2k-1}$; se $k = -1/3$: $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{-n^2/3+n+1} = 0$; se $k = 1/2$: $\lim_{n\to+\infty} \frac{5n^2/2+1}{n+1} = +\infty$

25. **a)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{(k-1)\cdot n^2+n}{(k+1)\cdot n^2+2}$; **b)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{(k^2-1)\cdot n^3+n^2}{(k+1)\cdot n^3-n^2}$; **c)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{(k+2)\cdot n^3+k\cdot n^2}{(k-3)\cdot n^3+2n^2}$

a) se $k - 1 \neq 0$ e $k + 1 \neq 0$, ossia se $k \notin \{-1;\ 1\}$, si ha: $\lim_{n\to+\infty} \frac{(k-1)\cdot n^2}{(k+1)\cdot n^2} = \frac{k-1}{k+1}$; se $k = 1$: $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n^2+2} = 0$; se $k = -1$: $\lim_{n\to+\infty} \frac{-2n^2+n}{2} = -\infty$

b) se $k^2 - 1 \neq 0$ e $k + 1 \neq 0$, ossia se $k \notin \{-1;\ 1\}$ si ha: $\lim_{n\to+\infty} \frac{(k^2-1)\cdot n^3}{(k+1)\cdot n^3} = \frac{k^2-1}{k+1} = k+1$; se $k = 1$: $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2n^3-n^2} = 0$; se $k = -1$: $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{-n^2} = -1$

c) se $k + 2 \neq 0$ e $k - 3 \neq 0$, ossia se $k \notin \{-2;\ 3\}$, si ha: $\lim_{n\to+\infty} \frac{(k+2)\cdot n^3}{(k-3)\cdot n^3} = \frac{k+2}{k-3}$ se $k = 3$: $\lim_{n\to+\infty} \frac{5n^3}{2n^2} = +\infty$; se $k = -2$: $\lim_{n\to+\infty} \frac{-2n^2}{-5n^3+2n^2} = 0$

26. **a)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{(k-2)\cdot n^2+2n}{(k^2-4)\cdot n^2+3n-1}$; **b)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{(k-1)\cdot n^3+k\cdot n^2-1}{(k+1)\cdot n^2-n}$; **c)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{(k+1)\cdot n^4+k\cdot n^3+n^2}{(2k+1)\cdot n^3-(k-1)\cdot n^2+n}$

a) se $k - 2 \neq 0$ e $k^2 - 4 \neq 0$, ossia se $k \notin \{-2;\ 2\}$, si ha: $\lim_{n\to+\infty} \frac{(k-2)\cdot n^2}{(k^2-4)\cdot n^2} = \frac{1}{k+2}$; se $k = 2$: $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{3n-1} = \frac{2}{3}$; se $k = -2$: $\lim_{n\to+\infty} \frac{-4n^2+2n}{3n-1} = -\infty$

b) se $k - 1 \neq 0$ e $k + 1 \neq 0$, ossia se $k \notin \{-1;\ 1\}$, si ha: $\lim_{n\to+\infty} \frac{(k-1)\cdot n^3}{(k+1)\cdot n^2} = \begin{cases} +\infty & k<-1 \vee k>1 \\ -\infty & -1<k<1 \end{cases}$; se $k = 1$: $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-1}{2n^2-n} = \frac{1}{2}$; se $k = -1$: $\lim_{n\to+\infty} \frac{-2n^3-n^2-1}{-n} = +\infty$

c) se $k + 1 \neq 0$ e $2k + 1 \neq 0$, ossia se $k \notin \{-1;\ -1/2\}$, si ha: $\lim_{n\to+\infty} \frac{(k+1)\cdot n^4}{(2k+1)\cdot n^3} = \begin{cases} +\infty & k<-1 \vee k>-1/2 \\ -\infty & -1<k<-1/2 \end{cases}$ se $k = -1$: $\lim_{n\to+\infty} \frac{-n^3+n^2}{-n^3+2\cdot n^2+n} = 1$; se $k = -1/2$: $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^4/2-n^3/2+n^2}{3n^2/2+n} = +\infty$

Determinare per quali valori del parametro reale a le seguenti uguaglianze risultano vere

27. **a)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{(k-1)\cdot n^3+1}{(k+2)\cdot n^3-n^2} = a$; **b)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{(3k-4)\cdot n^2}{(2k+1)\cdot n^2+1} = a$

a) se $k - 1 \neq 0$ e $k + 2 \neq 0$, ossia se $k \notin \{-2; 1\}$, si ha: $\lim_{n\to+\infty} \frac{(k-1)\cdot n^3+1}{(k+2)\cdot n^3-n^2} = \frac{k-1}{k+2}$ che è un numero reale; se $k = -2$: $\lim_{n\to+\infty} \frac{-3n^3+1}{-n^2} = +\infty$; se $k = 1$: $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3n^3-n^2} = 0$. Quindi abbiamo un'uguaglianza per qualsiasi numero reale, tranne se l'equazione $\frac{k-1}{k+2} = a$ non soluzioni, ossia $k - 1 = ak + 2a$ ha non soluzioni in k. La soluzione è $k = \frac{2a+1}{1-a}$, che è un numero reale se $a \neq 1$

b) se $3k - 4 \neq 0$ e $2k + 1 \neq 0$, ossia se $k \notin \{-1/2; 4/3\}$, si ha: $\lim_{n\to+\infty} \frac{(3k-4)\cdot n^2}{(2k+1)\cdot n^2+1} = \frac{3k-4}{2k+1}$, da cui $3k - 4 = 2ak + a \Rightarrow k = \frac{a+4}{3-2a} \Rightarrow a \neq \frac{3}{2}$

28. **a)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{(3k-2)\cdot n^2+2n-2}{(5k+2)\cdot n^2} = a$ **; b)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{(k^2+1)\cdot n^2+1}{(k-1)\cdot n^2+3n-4} = a$

a) se $3k - 2 \neq 0$ e $5k + 2 \neq 0$, ossia se $k \notin \{-2/5; 2/3\}$, si ha: $\lim_{n\to+\infty} \frac{(3k-2)\cdot n^2+2n-2}{(5k+2)\cdot n^2} = \frac{3k-2}{5k+2}$; da cui $3k - 2 = 5ak + 2a \Rightarrow k = \frac{2(a+1)}{3-5a} \Rightarrow a \neq \frac{3}{5}$

b) se $k^2 + 1 \neq 0$ e $k - 1 \neq 0$, ossia se $k \neq 1$, si ha: $\lim_{n\to+\infty} \frac{(k^2+1)\cdot n^2+1}{(k-1)\cdot n^2+3n-4} = \frac{k^2+1}{k-1}$; da cui $k^2 + 1 = ak - a \Rightarrow$

$k = \frac{a \pm \sqrt{a^2-4a-4}}{2} \Rightarrow a^2 - 4a - 4 \geq 0 \Rightarrow a \leq 2-2\sqrt{2} \vee a \geq 2+2\sqrt{2}$

Proprietà dei limiti di successione

Stabilire quali delle seguenti successioni sono monotone

1. **a)** $n^2 - n + 1$**; b)** $2 - n^2$ **; c)** $n^3 + n - n^2$**; d)** $\frac{n+1}{n+2}$ **; e)** $\frac{n+1}{n^2+3n+1}$

a) $(n + 1)^2 - (n + 1) + 1 > n^2 - n + 1 \Rightarrow n^2 + 2n + 1 - n - 1 + 1 > n^2 - n + 1 \Rightarrow 2n > 0$, vera per ogni n naturale, quindi successione crescente; b) $2 - (n + 1)^2 < 2 - n^2 \Rightarrow -n^2 - 2n - 1 < -n^2 \Rightarrow -2n - 1 < 0$, vera per ogni n naturale, quindi successione decrescente; c) $(n + 1)^3 + (n + 1) - (n + 1)^2 > n^3 + n - n^2 \Rightarrow n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + n + 1 - n^2 - 2n - 1 > n^3 + n - n^2 \Rightarrow 3n^2 + n + 1 > 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 12 < 0$, pertanto l'espressione è sempre positiva, quindi successione crescente;

d) $\frac{n+2}{n+3} < \frac{n+1}{n+2} \Rightarrow (n+2)^2 > n^2+4n+3 \Rightarrow \cancel{n^2} + \cancel{4n} + 4 > \cancel{n^2} + \cancel{4n} + 3 \Rightarrow 4 > 3$, successione crescente;

e) $\frac{n+2}{(n+1)^2+3(n+1)+1} < \frac{n+1}{n^2+3n+1} \Rightarrow \frac{n+2}{n^2+5n+5} < \frac{n+1}{n^2+3n+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{n^3} + \cancel{3n^2} + n + \cancel{2n^2} + 6n + 2 < \cancel{n^3} + n^2 + \cancel{5n^2} + 5n + 5n + 5 \Rightarrow n^2 + 3n + 3 > 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 12 < 0$ successione decrescente

2. **a)** $3^n - n$**; b)** $2^{\frac{1}{n}}$ **; c)** $\frac{2^n+1}{3^n+1}$**; d)** $n^2 - 7n + 15$; **e)** $\frac{n}{n-2^n}$

a) $3^{n+1} - n - 1 > 3^n - n \Rightarrow 3 \cdot 3^n > 3^n + 1 \Rightarrow 2 \cdot 3^n > 1$, successione crescente;

b) $2^{\frac{1}{n+1}} < 2^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow n+1 > n$; successione decrescente

c)

$$\frac{2^{n+1}+1}{3^{n+1}+1} < \frac{2^n+1}{3^n+1} \Rightarrow 2^{n+1}\cdot 3^n + 2^{n+1} + 3^n + \cancel{1} < 3^{n+1}\cdot 2^n + 3^{n+1} + 2^n + \cancel{1} \Rightarrow 2\cdot 6^n + 2\cdot 2^n + 3^n - 3\cdot 6^n - 3\cdot 3^n - 2^n < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^n < 2\cdot 3^n + 6^n \Rightarrow 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n + 3^n > 0$$

successione decrescente

d) $(n+1)^2 - 7(n+1) + 15 > n^2 - 7n + 15 \Rightarrow n^2 + 2n + 1 - 7n - 7 + 15 > n^2 - 7n + 15 \Rightarrow 2n - 6 > 0 \Rightarrow n > 3$, quindi non monotona, definitivamente crescente.

e) $\frac{n+1}{n+1-2^{n+1}} > \frac{n}{n-2^n} \Rightarrow \cancel{n^2+n} - n\cdot 2^n - 2^n > \cancel{n^2+n} - n\cdot 2^{n+1} \Rightarrow (n+1-2n)\cdot 2^n < 0 \Rightarrow (1-n)\cdot 2^n < 0$, in questo caso la proprietà è vera purché sia $n > 1$. Osserviamo che per $n = 1$ e per $n = 2$ otteniamo $\frac{1}{1-2} = -1; \frac{2}{2-4} = -1$, quindi successione non decrescente.

Usando, laddove necessario, il limite notevole $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$***, calcolare i limiti***

3. **a)** $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$ **;b)** $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)^{\frac{1}{n}}$ **;c)** $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ **;d)** $\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n-3}\right)^{n+2}$ **;e)** $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^n$

a) $\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}\right] = e$;b) $\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)^{n^2+1}\right]^{\frac{1}{n\cdot(n^2+1)}} \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n\cdot(n^2+1)}} = 1$;

c) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) = e$;d) $\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n-3}\right)^{n+2} = \lim_{n\to\infty} 2^{n+2} = +\infty$;

e) $\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}\right]^{\frac{n}{2n+1}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{n}{2n}} = e^{1/2} = \sqrt{e}$

4. **a)** $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ **;b)** $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$ **;c)** $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$ **;d)** $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$ **;e)** $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2+1}{2n^2-1}}$

a) $\lim_{n\to\infty}\left[\left(1\frac{1}{-n}\right)^{-n}\right]^{\frac{n+1}{-n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{n}{-n}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$;b) $\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n/2}\right)^{n/2}\right]^2 = e^2$;c) $\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^2 = e^2$;

d) $\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}} = 1$;e) $\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{n^2+1}{n(2n^2-1)}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{n^2}{2n^3}} = 1$

5. **a)** $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{2n-1}$ **; b)** $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3n+1}{4n-1}\right)^{5n}$ **; c)** $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ **; d)** $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^n$

a) $\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}\right]^{\frac{2n-1}{2n+1}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{2n}{2n}} = e$; b) $\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{1-4n}{3n+1}}\right)^{\frac{1-4n}{3n+1}}\right]^{\frac{5n\cdot(3n+1)}{1-4n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{15n^2}{-4n}} = 0$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{n}=+\infty$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right]^{\frac{2n}{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{2n}{n}}=e^{2}$

6. **a)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{4n}\right)^{5n}$ **;b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{5n+1}\right)^{\frac{3}{2}n-1}$ **;c)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{5}{n^{2}+1}\right)^{n^{2}-1}$ **;d)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{n-2}\right)^{\sqrt{2}n}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{4n}{-3}}\right)^{\frac{-4n}{3}}\right]^{\frac{-15}{4}}=e^{-\frac{15}{4}}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{5n+1}{2}}\right)^{\frac{5n+1}{2}}\right]^{\frac{3n-2}{5n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{3n}{5n}}=e^{\frac{3}{5}}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n^{2}+1}{-5}}\right)^{\frac{n^{2}+1}{-5}}\right]^{\frac{-5\left(n^{2}-1\right)}{n^{2}+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{-5n^{2}}{n^{2}}}=e^{-5}$;d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n-2}{\sqrt{2}}}\right)^{\frac{n-2}{\sqrt{2}}}\right]^{\frac{\sqrt{2}n\sqrt{2}}{n-2}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{2n}{n}}=e^{2}$

7. **a)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{n^{2}+1}{n^{3}-1}\right)^{n^{4}-1}$ **;b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3n^{2}-2}{n^{2}+3}\right)^{n^{2}-n}$ **;c)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{5n+1}{n^{3}+n}\right)^{\frac{n^{2}}{3n+2}}$ **;d)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{\sqrt{3}n}{n^{2}+5}\right)^{n^{3}}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{1-n^{3}}{n+1}}\right)^{\frac{1-n^{3}}{n+1}}\right]^{\frac{\left(n^{4}-1\right)\cdot(n+1)}{1-n^{3}}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{\left(n^{2}+1\right)\cdot(n+1)^{2}\cdot\cancel{(n-1)}}{-\cancel{(n-1)}\cdot\left(n^{2}+n+1\right)}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{n^{4}}{-n^{2}}}=0$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3n^{2}-2}{n^{2}+3}\right)^{n^{2}-n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3n^{2}}{n^{2}}\right)^{n^{2}-n}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+3)^{n^{2}-n}=+\infty$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-\frac{n^{3}+n}{5n+1}}\right)^{-\frac{n^{3}+n}{5n+1}}\right]^{-\frac{5n+1}{n^{3}+n}\cdot\frac{n^{2}}{3n+2}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{-\frac{5n^{3}}{3n^{4}}}=1$;d) $\lim\limits_{n\to\infty}(2)^{n^{3}}=+\infty$

8. **a)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n}$ **; b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^{2}+n-1}{5n+3n^{2}-2}\right)^{4n+3}$ **;c)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4+3n}{3n-7}\right)^{n+3}$ **;d)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{2}n^{2}+\sqrt{3}}{n+\sqrt{2}n^{2}}\right)^{\sqrt{5}n}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+1}+\frac{2}{n+1}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{n+1}{2}}\right]^{\frac{2n}{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{2n}{n}}=e^{2}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+n-1}{5n+3n^2-2}\right)^{4n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n+3n^2-2}{5n+3n^2-2}+\frac{-4n+1}{5n+3n^2-2}\right)^{4n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{5n+3n^2-2}{-4n+1}}\right)^{\frac{5n+3n^2-2}{-4n+1}}\right]^{\frac{(-4n+1)\cdot(4n+3)}{5n+3n^2-2}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{-16n^2}{3n^2}}=e^{-\frac{16}{3}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n-7}{3n-7}+\frac{11}{3n-7}\right)^{n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{3n-7}{11}}\right)^{\frac{3n-7}{11}}\right]^{\frac{11\cdot(n+3)}{3n-7}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{11n}{3n}}=e^{\frac{11}{3}}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+\sqrt{2}n^2}{n+\sqrt{2}n^2}+\frac{-n+\sqrt{3}}{n+\sqrt{2}n^2}\right)^{\sqrt{5}n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n+\sqrt{2}n^2}{-n+\sqrt{3}}}\right)^{\frac{n+\sqrt{2}n^2}{-n+\sqrt{3}}}\right]^{\frac{\sqrt{5}n\cdot(-n+\sqrt{3})}{(n+\sqrt{2}n^2)}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{-\sqrt{5}n^2}{\sqrt{2}n^2}}=e^{-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}}$

9. **a)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+n}{5-n^2}\right)^{4n+3}$ **;b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-3}{2n+n^2}\right)^{5n+1}$ **;c)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+n-3}{2n+2n^2}\right)^{5n+1}$ **;**

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2-1}{4n^2-5n+2}\right)^{3n-1}$ **;e)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-1}{n^3+n^2-1}\right)^{3n+1}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2}{-n^2}\right)^{4n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}(-3)^{4n+3}=?$, il limite non esiste; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2}{n^2}\right)^{5n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}(2)^{5n+1}=+\infty$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+2n}{2n+2n^2}+\frac{-n-3}{2n+2n^2}\right)^{5n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n+2n^2}{-n-3}}\right)^{\frac{(-n-3)\cdot(5n+1)}{2n+2n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{-5n^2}{2n^2}}=e^{-\frac{5}{2}}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2-5n+2}{4n^2-5n+2}+\frac{5n-3}{4n^2-5n+2}\right)^{3n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{4n^2-5n+2}{5n-3}}\right)^{\frac{4n^2-5n+2}{5n-3}}\right]^{\frac{(5n-3)\cdot(3n-1)}{4n^2-5n+2}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{15n^2}{4n^2}}=e^{\frac{15}{4}}$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+n^2-1}{n^3+n^2-1}+\frac{-n^2}{n^3+n^2-1}\right)^{3n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n^3+n^2-1}{-n^2}}\right)^{\frac{n^3+n^2-1}{-n^2}}\right]^{\frac{-n^2\cdot(3n+1)}{n^3+n^2-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{-3n^3}{n^3}}=e^{-3}$

10. **a)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2-3n+1}\right)^{\frac{n+3}{n^2-1}}$ **;b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}\right)^{\frac{n+\sqrt{n}}{n-\sqrt{n}}}$ **;c)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n+3}}{\sqrt{n-2}-\sqrt{n}}\right)^{n+1}$ **;d)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2^n+n-1}{2^n-n+3}\right)^{3^n}$

a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-3n+1}{n^2-3n+1}+\frac{n^2+5n}{n^2-3n+1}\right)^{\frac{n+3}{n^2-1}}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n^2-3n+1}{n^2+5n}}\right)^{\frac{n^2-3n+1}{n^2+5n}}\right]^{\frac{n^2+5n}{n^2-3n+1}\cdot\frac{n+3}{n^2-1}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{n^3}{n^4}}=e^0=1;$

b) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}+\frac{-2\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}\right)^{\frac{n+\sqrt{n}}{n-\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n+\sqrt{n}}{-2\sqrt{n}}}\right)^{\frac{n+\sqrt{n}}{-2\sqrt{n}}}\right]^{\frac{-2\sqrt{n}}{n-\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{-2\sqrt{n}}{n}}=e^0=1;$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cancel{n}+1\cancel{-n}-3}{\cancel{n}-2\cancel{-n}}\cdot\frac{\sqrt{n-2}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3}}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n-2}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3}}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}\right)^{n+1}=\left[1^{\infty}\right];$

c) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3}}+\frac{\sqrt{n-2}+\sqrt{n}-\sqrt{n+1}-\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3}}\right)^{n+1}=$;

$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n-2}+\sqrt{n}-\sqrt{n+1}-\sqrt{n+3}}}\right)^{\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n-2}+\sqrt{n}-\sqrt{n+1}-\sqrt{n+3}}}\right]^{\frac{\sqrt{n-2}+\sqrt{n}-\sqrt{n+1}-\sqrt{n+3}}{2\sqrt{n}}\cdot(n+1)}=$

$\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\sqrt{n-2}+\sqrt{n}-\sqrt{n+1}-\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3}}\cdot(n+1)}=\lim_{n\to\infty}e^{\left[\frac{\sqrt{n-2}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3}}-\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3}}\right]\cdot(n+1)}=\lim_{n\to\infty}e^{\left[\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}-1\right]\cdot(n+1)}=e^0=1$

d) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n-n+3}{2^n-n+3}+\frac{2^n+2n-4}{2^n-n+3}\right)^{3^n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2^n-n+3}{2^n+2n-4}}\right)^{\frac{2^n-n+3}{2^n+2n-4}}\right]^{\frac{2^n+2n-4}{2^n-n+3}\cdot 3^n}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{2^n}{2^n}\cdot 3^n}=+\infty$

11. Calcolare $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a}{b\cdot n}\right)^{c\cdot n}$, al variare dei parametri in $\mathbb{R}$.

Deve ovviamente essere $b\neq 0$ se no il limite non ha significato. Se $a=0$ avremo: $\lim_{n\to+\infty}(1)^{c\cdot n}=1$; Se $a\neq 0$ e $c=0$, avremo: $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a}{b\cdot n}\right)^0=1$; Se $a\cdot c\neq 0$, avremo: $\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{b}{a}\cdot n}\right)^{\frac{b}{a}\cdot n}\right]^{\frac{c\cdot a}{b}}=e^{\frac{c\cdot a}{b}}$

Le Serie numeriche

Determinare le seguenti somme

1. a) $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^k$ **;b)** $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^k$ **;c)** $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^k$ **;d)** $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(-\frac{4}{3}\right)^k$ **;e)** $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^k$ **;f)** $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^k$ **;g)** $\sum_{k=4}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k$

a) $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^k=+\infty$, serie geometrica di ragione maggiore di 1; b) $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^k=\frac{1}{1-3/4}=\frac{1}{1/4}=4$;

c) $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^k=\frac{1}{1-(-3/4)}=\frac{1}{7/4}=\frac{4}{7}$; d) $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(-\frac{4}{3}\right)^k=?$ serie geometrica di ragione minore di -1;

e) $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^k=\frac{1}{1-5/6}=\frac{1}{1/6}=6$; f) $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^k=\frac{1}{1-(-2/3)}=\frac{1}{5/3}=\frac{3}{5}$;

g) $\sum_{k=4}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k-\sum_{k=0}^{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k=\frac{1}{1-2/3}-1-\frac{2}{3}-\frac{4}{9}-\frac{8}{27}=\frac{1}{1/3}-\frac{27+18+12+8}{27}=3-\frac{65}{27}=\frac{16}{27}$

2. **a)** $\sum_{k=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{9}\right)^k$ **;b)** $\sum_{k=3}^{+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^k$ **;c)** $\sum_{k=11}^{+\infty}\left(\frac{7}{3}\right)^k$ **;d)** $\sum_{k=2}^{+\infty}\left(-\frac{1}{9}\right)^k$ **;e)** $\sum_{k=2}^{+\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^k$ **;f)** $\sum_{k=4}^{+\infty}\left(\frac{5}{8}\right)^k$ **;g)** $\sum_{k=1}^{+\infty}\left(-\frac{8}{9}\right)^k$ **;h)** $\sum_{k=23}^{+\infty}\left(-\frac{8}{3}\right)^k$

a) $\sum_{k=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{9}\right)^k=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{9}\right)^k-1=\frac{1}{1-(-1/9)}-1=\frac{1}{10/9}-1=\frac{9}{10}-1=-\frac{1}{10}$;

b) $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^k-\sum_{k=0}^{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^k=\frac{1}{1-(-1/3)}-\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)=\frac{1}{4/3}-\frac{9-3+1}{9}=\frac{3}{4}-\frac{7}{9}=-\frac{1}{36}$;

c) $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{7}{3}\right)^k=+\infty$; d) $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{9}\right)^k-\sum_{k=0}^{1}\left(-\frac{1}{9}\right)^k=\frac{1}{1-(-1/9)}-1+\frac{1}{9}=\frac{1}{10/9}-\frac{9-1}{9}=\frac{9}{10}-\frac{8}{9}=\frac{1}{90}$;

e) $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^k-\sum_{k=0}^{1}\left(-\frac{1}{4}\right)^k=\frac{1}{1-(-1/4)}-1+\frac{1}{4}=\frac{1}{5/4}-\frac{4-1}{4}=\frac{4}{5}-\frac{3}{4}=\frac{1}{20}$;

f) $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{8}\right)^k-\sum_{k=0}^{3}\left(\frac{5}{8}\right)^k=\frac{1}{1-5/8}-\frac{1-(5/8)^4}{1-5/8}=\frac{1}{3/8}-\frac{1-625/4096}{3/8}=\frac{625/\cancel{4096}^{512}}{3/\cancel{8}}=\frac{625}{1536}$;

g) $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(-\frac{8}{9}\right)^k-1=\frac{1}{1-(-8/9)}-1=\frac{1}{17/9}-1=\frac{9}{17}-1=-\frac{8}{17}$; h) $\sum_{k=23}^{+\infty}\left(-\frac{8}{3}\right)^k=?$

Usando le serie geometriche costruire la frazione generatrice dei seguenti numeri periodici

3. **a)** $5,67\overline{89}$ **; b)** $5,6\overline{789}$ **; c)** $5,\overline{6789}$ **; d)** $0,03\overline{33}$ **; e)** $0,0\overline{333}$ **; f)** $0,\overline{0333}$

a) $5+\frac{67}{100}+\frac{89}{10^4}+\frac{89}{10^6}+\ldots=5+\frac{67}{100}+\frac{89}{10^4}\cdot\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{10^{2k}}=\frac{567}{100}+\frac{89}{10^4}\cdot\frac{1}{1-1/100}=\frac{567}{100}+\frac{89}{10^{\cancel{4}^2}}\cdot\frac{\cancel{100}}{99}=\frac{567\cdot 99+89}{9900}=\frac{56222}{9900}=\frac{28111}{4950}$;

b) $5+\frac{6}{10}+\frac{789}{10^4}+\frac{789}{10^7}+\ldots=5+\frac{6}{10}+\frac{789}{10^4}\cdot\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{10^{3k}}=\frac{56}{10}+\frac{789}{10^4}\cdot\frac{1}{1-1/1000}=\frac{56}{10}+\frac{789}{10^{\cancel{4}^1}}\cdot\frac{\cancel{1000}}{999}=\frac{56\cdot 999+789}{9990}=\frac{56733}{9990}=\frac{189111}{3330}$;

c) $5+\frac{6789}{10^4}+\frac{6789}{10^8}+\ldots=5+\frac{6789}{10^4}\cdot\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{10^{4k}}=5+\frac{6789}{10^4}\cdot\frac{1}{1-1/10^4}=5+\frac{6789}{\cancel{10^4}}\cdot\frac{\cancel{10^4}}{9999}=\frac{5\cdot 9999+6789}{9999}=\frac{56784}{9999}=\frac{18928}{3333}$;

d) $\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\frac{3}{10^4}+\ldots=\frac{3}{10^2}\cdot\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{10}=\frac{3}{10^2}\cdot\frac{1}{1-1/10}=\frac{\cancel{3}}{10^{\cancel{2}}}\cdot\frac{\cancel{10}}{\cancel{9}^3}=\frac{1}{30}$;

e) Ha ovviamente lo stesso risultato di d); f) Come d) ed e)

Utilizzando la serie di Mengoli $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\cdot(n+1)}=1$***, calcolare le seguenti somme***

4. **a)** $\sum_{n=5}^{+\infty}\frac{3}{2n\cdot(n+1)}$ **; b)** $\sum_{n=4}^{+\infty}\frac{5}{8n\cdot(n+1)}$ **; c)** $\sum_{n=7}^{+\infty}\frac{4}{7n\cdot(n+1)}$ **;d)** $\sum_{n=8}^{+\infty}\frac{-7}{4n\cdot(n+1)}$ **;e)** $\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{8}{15n\cdot(n+1)}$ **;f)** $\sum_{n=5}^{+\infty}\frac{-2}{3n\cdot(n+1)}$

a) $\frac{3}{2}\cdot\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\cdot(n+1)}-\sum_{n=1}^{4}\frac{1}{n\cdot(n+1)}\right]=\frac{3}{2}\cdot\left[1-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}-\frac{1}{20}\right]=\frac{\cancel{3}}{2}\cdot\frac{60-30-10-5-3}{\cancel{60}^{20}}=\frac{3}{10}$;

b) $\frac{5}{8}\cdot\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\cdot(n+1)}-\sum_{n=1}^{3}\frac{1}{n\cdot(n+1)}\right]=\frac{5}{8}\cdot\left[1-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}\right]=\frac{5}{8}\cdot\frac{12-6-2-1}{12}=\frac{5}{32}$;

c) $\frac{4}{7}\cdot\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\cdot(n+1)}-\sum_{n=1}^{6}\frac{1}{n\cdot(n+1)}\right]=\frac{4}{7}\cdot\left[1-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}-\frac{1}{20}-\frac{1}{30}-\frac{1}{42}\right]=\frac{\cancel{4}}{7}\cdot\frac{420-210-70-35-21-14-10}{\cancel{420}^{105}}=\frac{4}{49}$;

d) $-\frac{7}{4}\cdot\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\cdot(n+1)}-\sum_{n=1}^{7}\frac{1}{n\cdot(n+1)}\right]=-\frac{7}{4}\cdot\left[1-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}-\frac{1}{20}\right]=\frac{\cancel{3}}{2}\cdot\frac{60-30-10-5-3}{\cancel{60}^{20}}=\frac{3}{10}$;

e) $\frac{8}{15}\cdot\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\cdot(n+1)}-\sum_{n=1}^{2}\frac{1}{n\cdot(n+1)}\right]=\frac{8}{15}\cdot\left[1-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right]=\frac{\cancel{8}^{4}}{15}\cdot\frac{6-3-1}{\cancel{6}^{3}}=\frac{8}{45}$;

f) $-\frac{2}{3}\cdot\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\cdot(n+1)}-\sum_{n=1}^{4}\frac{1}{n\cdot(n+1)}\right]=-\frac{2}{3}\cdot\left[1-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}-\frac{1}{20}\right]=-\frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{60-30-10-5-3}{\cancel{60}^{30}}=-\frac{2}{15}$

Determinare le seguenti somme

5. **a)** $\sum_{n=0}^{+\infty}sin^n(x)$ **;b)** $\sum_{n=0}^{+\infty}cos^n(x)$ **;c)** $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\,sin^n(x)$ **;d)** $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot cos^n(x)$

a) $\sum_{n=0}^{+\infty}sin^n(x)=\frac{1}{1-sin(x)}$;b) $\sum_{n=0}^{+\infty}cos^n(x)=\frac{1}{1-cos(x)}=\frac{1}{2\cdot sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$;c) $\sum_{n=0}^{+\infty}\left[-sin(x)\right]^n=\frac{1}{1-(-sin(x))}=\frac{1}{1+sin(x)}$;

d) $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot cos^n(x)=\frac{1}{1+cos(x)}=\frac{1}{2\cdot cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$

Determinare le seguenti somme

6. **a)** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4+\sqrt{2}}{4^{n+1}}$ **;b)** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3+(-1)^{n+1}}{2\cdot 7^n}$ **;c)** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{5^n}$ **;d)** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^{n+2}}{3^n}$ **;e)** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n-2^n}{4^n}$ **;f)** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n-2^n}{8^n}$

a) $\frac{4+\sqrt{2}}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}=\frac{4+\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{1}{1-1/4}=\frac{4+\sqrt{2}}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{4}}{3}=\frac{4+\sqrt{2}}{3}$;

b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3+(-1)^{n+1}}{2\cdot 7^n}=\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{7^n}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{7}\right)^n=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-1/7}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+1/7}=\frac{\cancel{3}}{2}\cdot\frac{7}{\cancel{6}^{2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{8}=\frac{7}{4}-\frac{7}{16}=\frac{21}{16}$;

c) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n=\frac{1}{1-2/5}+\frac{1}{1-3/5}=\frac{5}{3}+\frac{5}{2}=\frac{25}{6}$;

d) $4\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n=4\cdot\frac{1}{1+2/3}=4\cdot\frac{3}{5}=\frac{12}{5}$; e) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^n-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=+\infty$;

f) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{1}{1-1/2}-\frac{1}{1-1/4}=2-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$

7. **a)** $\sum_{n=1}^{+\infty}ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ **:b)** $\sum_{n=1}^{+\infty}sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$ **;c)** $\sum_{n=1}^{+\infty}cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$ **d);** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3}{n\cdot(n+3)}$ **;e)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{5}{n\cdot(n+5)}$

a) $\sum_{n=1}^{+\infty}ln\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1-ln(2)+ln(3)-$:b) $\sum_{n=1}^{+\infty}sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)=1+0-1+0+1+0-1+0+\ldots$, quindi indeterminata;

c) $\sum_{n=1}^{+\infty}cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$, come la precedente;

$$\frac{3}{n\cdot(n+3)}=\frac{n+3-n}{n\cdot(n+3)}=\frac{\cancel{n+3}}{n\cdot\cancel{(n+3)}}-\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\cdot(n+3)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\Rightarrow$$

$$\text{d)}\Rightarrow\sum_{n=1}^{k}\frac{3}{n\cdot(n+3)}=1-\cancel{\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{5}}+\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{6}}+\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{7}}+\ldots+\frac{1}{k}-\cancel{\frac{1}{k+3}}+\ldots=\frac{11}{6}+\frac{1}{k-2}+\frac{1}{k-1}+\frac{1}{k};$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3}{n\cdot(n+3)}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{11}{6}+\frac{1}{k-2}+\frac{1}{k-1}+\frac{1}{k}\right)=\frac{11}{6}$$

$$\frac{5}{n\cdot(n+5)}=\frac{n+5-n}{n\cdot(n+5)}=\frac{\cancel{n+5}}{n\cdot\cancel{(n+5)}}-\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\cdot(n+5)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+5}\Rightarrow\sum_{n=1}^{k}\frac{5}{n\cdot(n+5)}=$$

$$\text{e)}\ 1-\cancel{\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{5}}+\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{6}}+\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{7}}+\ldots+\frac{1}{k}-\cancel{\frac{1}{k+5}}+\ldots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{k-4}+\ldots+\frac{1}{k}=\frac{137}{60}+\frac{1}{k-4}+\ldots+\frac{1}{k}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{5}{n\cdot(n+5)}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{137}{60}++\frac{1}{k-4}+\ldots+\frac{1}{k}\right)=\frac{137}{60}$$

8. **a)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+2)\cdot(n+3)}$ **;b)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+5)\cdot(n+6)}$ **;c)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{8}{n\cdot(n+8)}$ **;d)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{(n+7)\cdot(n+8)}$

$$\text{a)}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+3-n-2}{(n+2)\cdot(n+3)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right]=\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{4}}+\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{5}}+\ldots=\frac{1}{3};$$

$$\text{b)}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+6-n-5}{(n+5)\cdot(n+6)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{n+5}-\frac{1}{n+6}\right]=\frac{1}{6}-\cancel{\frac{1}{7}}+\cancel{\frac{1}{7}}-\cancel{\frac{1}{8}}+\ldots=\frac{1}{6};$$

$$\text{c)}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+8-n}{n\cdot(n+8)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+8}\right]=1-\cancel{\frac{1}{9}}+\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{10}}+\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{11}}+\frac{1}{4}-\cancel{\frac{1}{12}}+\ldots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{8}=\frac{761}{280};$$

$$\text{d)}\,2\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+8-n-7}{(n+7)\cdot(n+8)}=2\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{n+7}-\frac{1}{n+8}\right]=2\cdot\left(\frac{1}{8}-\cancel{\frac{1}{9}}+\cancel{\frac{1}{9}}-\cancel{\frac{1}{10}}+\ldots\right)=2\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$$

9. **a)** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n-3)\cdot(2n+1)}$ **;b)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)\cdot(3n+2)}$ **;c)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-1)\cdot(4n+3)}$ **;d)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(6n-1)\cdot(6n+5)}$

$$\text{a)}-\frac{1}{4}\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n-3-2n-1}{(2n-3)\cdot(2n+1)}=-\frac{1}{4}\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n-3}\right]=-\frac{1}{4}\cdot\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\frac{1}{1}+\cancel{\frac{1}{7}}-\frac{1}{3}+\cancel{\frac{1}{9}}-\cancel{\frac{1}{5}}+\cancel{\frac{1}{11}}-\cancel{\frac{1}{7}}+\ldots\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3};$$

$$\text{b)}\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2-3n+1}{(3n-1)\cdot(3n+2)}=\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right]=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{5}}+\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{8}}+\cancel{\frac{1}{8}}-\cancel{\frac{1}{11}}+\ldots\right)=\frac{1}{6};$$

$$\text{c)}\frac{1}{4}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+3-4n+1}{(4n-1)\cdot(4n+3)}=\frac{1}{4}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n+3}\right]=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{7}}+\cancel{\frac{1}{7}}-\cancel{\frac{1}{11}}+\cancel{\frac{1}{11}}-\cancel{\frac{1}{15}}+\ldots\right)=\frac{1}{12};$$

$$\text{d)}\frac{1}{6}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6n+5-6n+1}{(6n-1)\cdot(6n+5)}=\frac{1}{6}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{6n-1}-\frac{1}{6n+5}\right]=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{5}-\cancel{\frac{1}{11}}+\cancel{\frac{1}{11}}-\cancel{\frac{1}{17}}+\cancel{\frac{1}{17}}-\cancel{\frac{1}{23}}+\ldots\right)=\frac{1}{30}$$

10. **Consideriamo una successione di cerchi i cui raggi sono gli elementi della successione** $\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\ldots,\frac{1}{2^n},\ldots\right\}$**. Determinare la somma delle aree degli infiniti cerchi.**

Dobbiamo calcolare $\sum_{n=0}^{+\infty}\pi\cdot\left(\frac{1}{2^n}\right)^2=\pi\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=\pi\cdot\frac{1}{1-1/4}=\frac{4}{3}\pi$

11. $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\frac{1}{64}-\frac{1}{128}-\ldots$

$$\left(1+\frac{1}{8}+\frac{1}{64}+\ldots\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^n-\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^n\right]=$$

$$=2\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^n-\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=2\cdot\frac{1}{1-1/8}-\frac{1}{1-1/2}=2\cdot\frac{8}{7}-2=\frac{2}{7}$$

12. **a)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}$ **; b)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}$

a)
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+2-n-1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{n\cdot(n+1)}-\frac{1}{n\cdot(n+2)}\right]=\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{n\cdot(n+1)}-\frac{1}{2}\cdot\frac{n+2-n}{n\cdot(n+2)}\right]=$$
$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\cdot(n+1)}-\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right]=1-\frac{1}{2}\cdot\left(1-\cancel{\frac{1}{3}}+\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}+\ldots\right)=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{4};$$

b)
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+3-n-2}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}-\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+3)}\right]=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+3-n-1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+3)}=$$
$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{n\cdot(n+1)}\frac{1}{n\cdot(n+3)}\right]=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{11}{18}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{18}=\frac{9-7}{36}=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$$

Abbiamo usato risultati di alcuni esercizi precedenti.

Determinare il minimo valore di k per cui si ha la validità delle seguenti disuguaglianze

13. **a)** $\sum_{n=k}^{+\infty}\left(\frac{5}{13}\right)^n<\frac{1}{256}$ **;b)** $\sum_{n=k}^{+\infty}\left(\frac{7}{12}\right)^n<\frac{1}{320}$ **;c)** $\sum_{n=k}^{+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n<\frac{1}{128}$

a)
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{13}\right)^n-\sum_{n=0}^{k-1}\left(\frac{5}{13}\right)^n=\frac{1}{1-5/13}-\frac{1-(5/13)^k}{1-5/13}=\frac{(5/13)^k}{8/13}<\frac{1}{256}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(\frac{5}{13}\right)^k<\frac{1}{\cancel{256}^{32}}\frac{\cancel{8}}{13}\Rightarrow k\cdot ln\left(\frac{5}{13}\right)<ln\left(\frac{1}{416}\right)\Rightarrow k>ln\left(\frac{1}{416}\right)/ln\left(\frac{5}{13}\right)\approx 6,3\Rightarrow k\geq 7;$$

b)
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{7}{12}\right)^n-\sum_{n=0}^{k-1}\left(\frac{7}{12}\right)^n=\frac{1}{1-7/12}-\frac{1-(7/12)^k}{1-7/12}=\frac{(7/12)^k}{5/12}<\frac{1}{320}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(\frac{7}{12}\right)^k<\frac{1}{\cancel{320}^{64}}\frac{\cancel{5}}{12}\Rightarrow k\cdot ln\left(\frac{7}{12}\right)<ln\left(\frac{1}{768}\right)\Rightarrow k>ln\left(\frac{1}{768}\right)/ln\left(\frac{7}{12}\right)\approx 12,3\Rightarrow k\geq 13;$$

c)
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n-\sum_{n=0}^{k}\left(\frac{2}{5}\right)^n=\frac{1}{1-2/5}-\frac{1-(2/5)^k}{1-2/5}=\frac{(2/5)^k}{3/5}<\frac{1}{128}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(\frac{2}{5}\right)^k<\frac{1}{128}\cdot\frac{5}{3}\Rightarrow k\cdot ln\left(\frac{2}{5}\right)<ln\left(\frac{5}{384}\right)\Rightarrow k>ln\left(\frac{5}{384}\right)/ln\left(\frac{2}{5}\right)\approx 4,7\Rightarrow k\geq 5$$

14. **a)** $\sum_{n=k}^{+\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^n<\frac{1}{426}$ **; b)** $\sum_{n=k}^{+\infty}\left(\frac{10}{13}\right)^n<\frac{1}{356}$ **; b)** $\sum_{n=k}^{+\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n<\frac{1}{512}$

a);
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^n-\sum_{n=0}^{k-1}\left(\frac{7}{9}\right)^n=\frac{1}{1-7/9}-\frac{1-(7/9)^k}{1-7/9}=\frac{(7/9)^k}{2/9}<\frac{1}{426}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(\frac{7}{9}\right)^k<\frac{1}{\cancel{426}^{213}}\cdot\frac{\cancel{2}}{9}\Rightarrow k\cdot ln\left(\frac{7}{9}\right)<ln\left(\frac{1}{1917}\right)\Rightarrow k>ln\left(\frac{1}{1917}\right)/ln\left(\frac{7}{9}\right)\approx 30,05\Rightarrow k\geq 31$$

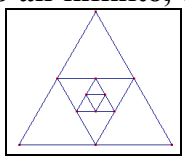
b); $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{10}{13}\right)^n-\sum_{n=0}^{k-1}\left(\frac{10}{13}\right)^n=\frac{1}{1-10/13}-\frac{1-(10/13)^k}{1-10/13}=\frac{(10/13)^k}{3/13}<\frac{1}{356}\Rightarrow$

$\Rightarrow\left(\frac{10}{13}\right)^k<\frac{1}{356}\cdot\frac{3}{13}\Rightarrow k\cdot ln\left(\frac{10}{13}\right)<ln\left(\frac{3}{4628}\right)\Rightarrow k>ln\left(\frac{3}{4628}\right)/ln\left(\frac{10}{13}\right)\approx 27,9\Rightarrow k\geq 28$

b) $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n-\sum_{n=0}^{k-1}\left(\frac{4}{9}\right)^n=\frac{1}{1-4/9}-\frac{1-(4/9)^k}{1-4/9}=\frac{(4/9)^k}{5/9}<\frac{1}{512}\Rightarrow$

$\Rightarrow\left(\frac{4}{9}\right)^k<\frac{1}{512}\cdot\frac{5}{9}\Rightarrow k\cdot ln\left(\frac{4}{9}\right)<ln\left(\frac{5}{4608}\right)\Rightarrow k>ln\left(\frac{5}{4608}\right)/ln\left(\frac{4}{9}\right)\approx 8,4\Rightarrow k\geq 9$

15. In figura ciascun triangolo è equilatero e ha i vertici nei punti medi del triangolo in cui è inscritto. Se il lato del triangolo maggiore è 1, e continuiamo questo processo all'infinito, determinare la somma dei perimetri degli infiniti triangoli così ottenuti.



La stessa figura ci suggerisce che ogni triangolo ha lato, e quindi perimetro, metà di quello in cui è inscritto, pertanto dobbiamo calcolare $3+\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+...+\frac{3}{2^n}+...=3\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=3\cdot\frac{1}{1-1/2}=6$

16. Con riferimento al precedente problema determinare la misura del lato del triangolo maggiore se la somma è rispettivamente a) 24; b) 100; c) $\sqrt{17}$.

Detta ℓ la misura del lato, la somma dei perimetri è $3\ell\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=6\ell$, quindi avremo:

a) $6\ell=24\Rightarrow\ell=4$; a) $6\ell=100\Rightarrow\ell=\frac{50}{3}$; a) $6\ell=\sqrt{17}\Rightarrow\ell=\frac{\sqrt{17}}{6}$

17. Data una serie geometrica di ragione *r*, consideriamo la serie ottenuta innalzando a una potenza intera *m*, possiamo dire che quest'ultima serie è anch'essa geometrica? Se la risposta è affermativa, qual è la ragione?

Sì, r^m, infatti innalziamo ogni termine generico r^n alla potenza m, ottenendo $(r^n)^m=(r^m)^n$.

18. Una serie geometrica di ragione *r*, priva dei primi *h* elementi, $h\geq 0$, con $r^2<1$, ha somma 2, la serie i cui termini sono i cubi di quelli della precedente ha somma 24. Determinare il primo termine della serie di partenza.

Dato che $0<r<1$, si ha: $\sum_{n=h}^{+\infty}r^n=1\Rightarrow\frac{1}{1-r}-\frac{1-r^h}{1-r}=\frac{r^h}{1-r}=2$. Adesso consideriamo $\sum_{n=h}^{+\infty}\left(r^3\right)^n=1\Rightarrow\frac{r^{3h}}{1-r^3}=24$, abbiamo quindi il sistema:

$$\begin{cases}r^h=2-2r\\ r^{3h}=24-24r^3\end{cases}\Rightarrow(2-2r)^3=24-24r^3\Rightarrow 8\cdot(1-r)^3=24\cdot\left(1-r^3\right)\Rightarrow(1-r)^{\cancel{3}\,2}=3\cdot\cancel{(1-r)}\cdot\left(r^2+r+1\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-2r+r^2=3r^2+3r+3\Rightarrow 2r^2+5r+2=0\Rightarrow r=\frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{-5\pm 3}{4}=\prec\begin{matrix}-2\\ -\frac{1}{2}\end{matrix}$$

Ovviamente è accettabile solo –1/2. Pertanto: $\frac{(-1/2)^h}{1+1/2}=2\Rightarrow(-1/2)^h=3$, che è appunto il termine cercato.

19. È possibile che si abbia $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n < 0, |q| < 1$? Giustificare la risposta.

La risposta è negativa. Infatti $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, |q| < 1$, quindi se $0 < q < 1 \Rightarrow -1 < -q < 0 \Rightarrow 0 < 1 - q < 1$ $\Rightarrow \frac{1}{1-q} > 1$. Se invece $-1 < q < 0 \Rightarrow 0 < -q < 1 \Rightarrow 1 < 1 - q < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{1-q} < 1$

Serie a termini di segno costante

Fra le seguenti serie stabilire quali certamente divergono (nelle risposte NP = Non può dirsi)

1. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+n-1}{n^3-n+1}$; **b)** $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$; **c)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2-1}$; **d)** $\sum_{n=1}^{\infty} sin^2(n)$

Dobbiamo calcolare $\lim_{n\to\infty} a_n$, se è diverso da zero la serie non converge, diversamente nulla può dirsi,a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n-1}{n^3-n+1} = 1 \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+n-1}{n^3-n+1} = +\infty$; b) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = +\infty$;

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n^2-1} = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2-1} = ?$; d) $\lim_{n\to\infty} sin^2(n) = ? \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} sin^2(n) = +\infty$

2. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin^2(n)}{n}$; **b)** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3+(-1)^n}{n^4-(1)^n}$; **c)** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{n}$; **d)** $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n^2+1}{n^2+n+1}}$; **e)** $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n^2)}$

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{sin^2(n)}{n} = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin^2(n)}{n} = ?$; b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+(-1)^n}{n^4-(1)^n} = 0 \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3+(-1)^n}{n^4-(1)^n} = ?$; c) $\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n} = +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{n} = +\infty$;

d) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^2+1}{n^2+n+1}} = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n^2+1}{n^2+n+1}} = +\infty$; e) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n^2)} = 0 \Rightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n^2)} = ?$

Mediante il criterio del confronto determinare il carattere delle seguenti serie (nelle risposte S significa convergente)

3. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n\cdot\sqrt{n}+2}$; **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot\sqrt[3]{n}+n+1}$; **c)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n+3}$; **d)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2+n}$; **e)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^3-1}$

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n\cdot\sqrt{n}+2} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n\cdot\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot\sqrt[3]{n}+n+1} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot\sqrt[3]{n}} = S$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n+3} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2+n} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2} = S$; e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^3-1} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} = S$

4. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n-1}{3n^4-2n+1}$; **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2^n}$; **c)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n+1}$; **d)** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log(n)}$

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n-1}{3n^4-2n+1} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2} = S$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2^n} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n+1} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}$;

d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log(n)} > \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

5. a) $\sum_{n=1}^{\infty} sin^2\left(\frac{1}{n}\right)$; **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^n}$; **c)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ln(n)+1}{n^2+n-1}$; **d)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

a) $\sum_{n=1}^{\infty} sin^2\left(\frac{1}{n}\right) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right) = S$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^n} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n} = S$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ln(n)+1}{n^2+n-1} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = S$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

Mediante il criterio del rapporto determinare il carattere delle seguenti serie

6. **a)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+2}}{n^n}$ **; b)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2n}}{n!}$ **; c)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 4^{2n-1}}{(2n)!}$ **; d)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{n+1}}$ **; e)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot(n-1)!}{(n+1)^n}$

a) $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{\cancel{n+3}}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{\cancel{2^{n+2}}}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^n}{(n+1)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=0\cdot e=0<1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+2}}{n^n}=S$;

b) $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^{2n+\cancel{2}^{1}}}{\cancel{(n+1)!}}}{\frac{n^{2n}}{\cancel{n!}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{2n+1}}{n^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n}\cdot(n+1)=e^2\cdot\lim_{n\to\infty}(n+1)=+\infty\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2n}}{n!}=+\infty$;

c) $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)\cdot 4^{\cancel{2n+1}^{2}}}{(2n+2)!}}{\frac{n\cdot\cancel{4^{2n-1}}}{(2n)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{16\cdot(n+1)}{n\cdot(2n+1)\cdot(2n+2)}=0<1\Rightarrow=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 4^{2n-1}}{(2n)!}=S$;

d) $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\cancel{(n+1)!}}{(n+1)^{n+\cancel{2}^{1}}}}{\frac{\cancel{n!}}{n^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\frac{1}{e}<1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{n+1}}=S$;

e) $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{\cancel{n+1}}\cdot\cancel{n!}}{(n+2)^{n+1}}}{\frac{\cancel{2^n}\cdot\cancel{(n-1)!}}{(n+1)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+2}\cdot\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n=\frac{2}{e}<1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot(n-1)!}{(n+1)^n}=S$

7. **a)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+2}}{(2n+1)!}$**; b)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{3^n}$ **; c)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+(-1)^n}{4^n}$ **; d)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+(-1)^n}{(n+1)!}$

a) $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^{n+3}}{(2n+3)!}}{\frac{n^{n+2}}{(2n+1)!}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2}\cdot\frac{n+1}{(2n+2)\cdot(2n+3)}=e\cdot 0=0<1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+2}}{(2n+1)!}=S$;

b) $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2+(-1)^{n+1}}{3^{\cancel{n+1}}}}{\frac{2+(-1)^n}{\cancel{3^n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+(-1)^{n+1}}{3\cdot\left[2+(-1)^n\right]}=?$, non si può applicare il criterio, ma si ha:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{3^n}=2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=2\cdot\left(\frac{1}{1-1/3}-1\right)+\left(\frac{1}{1+1/3}-1\right)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4};$$

c) $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^3+(-1)^{n+1}}{4^{\cancel{n+1}}}}{\frac{n^3+(-1)^n}{\cancel{4^n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3+(-1)^{n+1}}{4\cdot\left[n^3+(-1)^n\right]}=\frac{1}{4}<1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+(-1)^n}{4^n}=S$;

d) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{n+1+(-1)^{n+1}}{(n+2)\cancel{!}}}{\dfrac{n+(-1)^n}{\cancel{(n+1)!}}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n+1+(-1)^{n+1}}{(n+2)\cdot\left[n+(-1)^n\right]}=0<1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+(-1)^n}{(n+1)!}=S$

La sfida

1. Data la successione $a_n=\begin{cases}k & se \quad n=1\\ -\dfrac{1}{a_{n-1}+1} & se \quad n>1\end{cases}$**, verificare che essa è formata dalla generazione ciclica di 4 termini.**

$a_1=k, a_2=-\dfrac{1}{k+1}, a_3=-\dfrac{1}{-\dfrac{1}{k+1}+1}=-\dfrac{k+1}{k}, a_4=-\dfrac{1}{-\dfrac{k+1}{k}+1}=k$, a questo punto è ovvio che si ripeteranno all'infinito gli stessi valori, quindi avremo: $a_n=\begin{cases}-\dfrac{k+1}{k} & se \quad n=3h\\ k & se \quad n=3h+1\\ -\dfrac{1}{k+1} & se \quad n=3h+2\end{cases}$

2. Provare che se $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ **converge anche** $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ **converge.**

Per ipotesi si ha: $\lim_{n\to\infty}\left(|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|\right)=\ell\Rightarrow\ell-\varepsilon<\left|\left(|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|\right)\right|<\ell+\varepsilon,\forall\varepsilon>0,\forall n>h$, cioè la successione dei resti parziali della serie in valore assoluto è limitata, ma noi sappiamo che si ha: $|a_1+a_2+\ldots+a_n|\le|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|=|(|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|)|$ quindi anche questa successione è limitata, quindi convergente.

3. Provare che se $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n, a_n\ge 0,\forall n\in\mathbb{N}$ **converge anche** $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n^2$ **converge.**

Si ha: $\lim_{n\to\infty}a_n=0\Rightarrow-\varepsilon<|a_n|<\varepsilon,\forall\varepsilon>0,\forall n>h$, quindi si ha definitivamente $0\le a_n<1\Rightarrow a_n\ge a_n^2$, quindi se $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n=S$, ogni sua minorante converge, ossia la tesi.

4. Sommare $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{10^n}$**.** ***Suggerimento*** **associare in modo opportuno gli addendi della serie.**

$$\frac{1}{10}+\left(\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^2}\right)+\left(\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^3}\right)+\left(\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^4}\right)+\ldots=\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}+\ldots\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}+\ldots\right)+\ldots=\frac{1}{10}\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\ldots\right)+$$
$$+\frac{1}{10^2}\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\ldots\right)+\frac{1}{10^3}\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\ldots\right)+\ldots=$$
$$=\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\ldots\right)\cdot\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\ldots\right)=\left(\frac{1}{1-1/10}-1\right)\cdot\frac{1}{1-1/10}=\frac{1}{9}\cdot\frac{10}{9}=\frac{10}{81}$$

5. Sommare $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k-1)}$.

Si ha:

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k-1)}=\frac{n+k-1-n}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k-1)}=\frac{1}{k-1}\cdot\left[\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+k-2)}-\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k-1)}\right]=$$

$$=\frac{1}{(k-1)\cdot(k-2)}\cdot\left[\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+k-3)}-\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k-2)}-\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k-2)}+\frac{1}{(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k-1)}\right]=$$

$$=\frac{1}{(k-1)\cdot(k-2)}\cdot\left[\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+k-3)}-\frac{2}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k-2)}+\frac{1}{(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k-1)}\right]=$$

$$=\frac{1}{(k-1)\cdot(k-2)\cdot(k-3)}\cdot\left[\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+k-4)}-\frac{3}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k-3)}+\frac{3}{(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k-2)}-\frac{1}{(n+3)\cdot\ldots\cdot(n+k-1)}\right]=\ldots=$$

$$=\frac{1}{(k-1)!}\cdot\left[\cancel{\binom{k}{0}\cdot\frac{1}{n-1}}-\cancel{\binom{k}{1}\cdot\frac{1}{n}}+\cancel{\binom{k}{2}\cdot\frac{1}{n+1}}-\ldots+\cancel{\binom{k}{k-1}\cdot\frac{(-1)^{k-1}}{n}}+\cancel{\binom{k}{k}\cdot\frac{(-1)^{k}}{n-1}}\right]=\frac{1}{(k-1)!}\cdot\frac{1}{k-1}$$

6. Sommare $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(k\cdot n-1)\cdot(k\cdot n+k-1)}$.

$$\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{kn+k-1-kn+1}{(k\cdot n-1)\cdot(k\cdot n+k-1)}=\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{(k\cdot n-1)}-\frac{1}{(k\cdot n+k-1)}\right]=\frac{1}{k}\cdot\left(\frac{1}{k-1}\cancel{-\frac{1}{2k-1}}\cancel{+\frac{1}{2k-1}}\cancel{-\frac{1}{3k-1}}+\ldots\right)=\frac{1}{k\cdot(k-1)}$$

7. Sommare $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{k}{n\cdot(n+k)},k>0$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+k-n}{n\cdot(n+k)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right]=\left(1\cancel{-\frac{1}{k+1}}+\frac{1}{2}\cancel{-\frac{1}{k+2}}+\frac{1}{3}\cancel{-\frac{1}{k+3}}+\ldots+\frac{1}{k}\cancel{-\frac{1}{2k}}+\ldots\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}+\ldots\right)=\sum_{h=1}^{k}\frac{1}{h}$$

8. Lanciamo un dado regolare a forma di cubo per *n* volte, con quale probabilità la prima volta che otteniamo 6 è in un lancio multiplo di 3? *Suggerimento*: si ottiene una serie geometrica infinita.

Lo lanciamo 3 volte e deve uscire la terza volta, quindi le prime due volte no, con probabilità $(5/6)^2$ e la terza volta sì con probabilità 1/6, quindi in totale probabilità $25/6^3$; Per $n = 6$, o la terza vola o la 6 con probabilità $5^5/6^6$, così in generale la probabilità è data dalla somma

$$\frac{5^2}{6^3}+\frac{5^5}{6^6}+\frac{5^8}{6^9}+\ldots+\frac{5^{3n-1}}{6^{3n}}+\ldots=\frac{25}{216}\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{3n}=\frac{25}{216}\cdot\frac{1}{1-(5/6)^3}=\frac{25}{\cancel{216}}\cdot\frac{\cancel{216}}{91}=\frac{25}{91}$$

9. La successione di Fibonacci è definita dalla legge: $F(n + 1) = F(n) + F(n - 1)$ per $n \geq 3$, con $F(1) = F(2) = 1$. Provare che si ha: $F(n)=\dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$.

Abbiamo:

$$\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}+\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}}=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)}{\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}}=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}$$

Abbiamo quindi provato che la nostra successione verifica la regola generale della successione di Fibonacci, quindi è questa.

Temi assegnati agli esami di stato

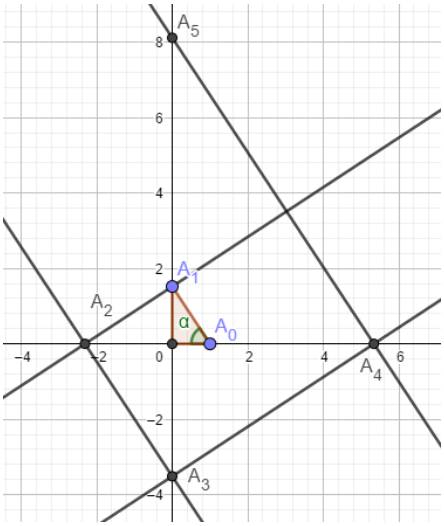
1. (Istituto magistrale PNI 1994/95) Su una semiretta di origine A_0 è dato il segmento A_0A_1 di lunghezza 2. Si considerino i segmenti adiacenti A_1A_2, A_2A_3, …, $A_{n-1}A_n$ tali che il rapporto tra ogni segmento e il precedente sia k. Il candidato: a) dimostri che le aree dei cerchi aventi per diametro i suddetti segmenti sono i termini di una progressione geometrica e calcoli l'area S_n della parte di piano delimitata dalla successione delle prime n circonferenze; b) determini il limite di S_n al tendere di n all'infinito quando $k = 1/2$; c) determini, in generale, il limite di S_n al tendere di n all'infinito, distinguendo i casi: 1) $k < 1$ 2) $k \geq 1$.

a) Si ha: $\overline{A_0A_1} = 2; \overline{A_1A_2} = 2k; \overline{A_2A_3} = 2k^2; ...; \overline{A_{n-1}A_n} = 2k^{n-1}$, quindi l'area del cerchio di diametro $A_{p-1}A_p$ è $\pi \cdot \frac{\left(2k^{p-1}\right)^2}{4} = \pi \cdot k^{2p-2}$, quella dell'area del cerchio di diametro A_pA_{p+1} è $\pi \cdot \frac{\left(2k^{p}\right)^2}{4} = \pi \cdot k^{2p}$ e il loro rapporto costante è del cerchio di diametro $A_{p-1}A_p$ è $\frac{\pi \cdot k^{2p}}{\pi \cdot k^{2p-2}} = k^2$. Si ha: $S_n = \sum_{p=1}^{n} \pi \cdot k^{2p-2} = \pi \cdot \frac{1-k^{2n+2-2}}{1-k^2} = \pi \cdot \frac{1-k^{2n}}{1-k^2}$. b) $\lim_{n\to\infty} \pi \cdot \frac{1-(1/2)^{2n}}{1-(1/2)^2} = \pi \cdot \frac{1}{1-1/4} = \frac{4\pi}{3}$; c1) $\lim_{n\to\infty} \pi \cdot \frac{1-k^{2n}}{1-k^2} = \pi \cdot \frac{1}{1-k^2}$; c)2 $\lim_{n\to\infty} \pi \cdot \frac{k^{2n}-1}{k^2-1} = \lim_{n\to\infty} \pi \cdot \frac{\cancel{\left(k^2-1\right)} \cdot \left(k^{2n-2}+k^{2n-4}+...+1\right)}{\cancel{k^2-1}} = +\infty$

2. (Liceo scientifico PNI 1994/95) In un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy è dato il punto $A_0 \equiv (1; 0)$. Si costruisca il triangolo rettangolo OA_0A_1 avente il vertice A_1 sull'asse delle ordinate e sia α l'angolo $O\hat{A}_0A_1$. Si conduca per A_1 la perpendicolare alla retta A_0A_1 che incontra l'asse delle ascisse in A_2; si conduca per A_2 la perpendicolare alla retta A_1A_2 che incontra l'asse delle ordinate in A_3 e così via, ottenendo una spezzata $A_0A_1A_2A_3$ ... $A_{n-1}A_n$ i cui vertici di indice dispari appartengono all'asse delle ordinate e quelli di indice pari all'asse delle ascisse. Il candidato: a) dimostri che le lunghezze dei lati della spezzata sono in progressione geometrica e calcoli la lunghezza ℓ_n della spezzata; b) determini il limite di ℓ_n al tendere di n all'infinito, distinguendo i casi: 1) $\alpha < \frac{\pi}{4}$ 2) $\alpha \geq \frac{\pi}{4}$.

a) Consideriamo la figura seguente in cui abbiamo costruito fino al punto A_5, cominciamo a calcolare $\overline{A_0A_1} = \frac{\overline{OA_0}}{cos(\alpha)} = \frac{1}{cos(\alpha)}$; $\overline{A_1A_2} = \overline{A_0A_1} \cdot tan(\alpha) = \frac{tan(\alpha)}{cos(\alpha)} = \frac{sin(\alpha)}{cos^2(\alpha)}$; osserviamo che si ha: $O\widehat{A_2}A_3 = \alpha$, quindi $\overline{A_2A_3} = \frac{\overline{A_1A_2}}{cot(\alpha)} = \frac{sin(\alpha)}{cos^2(\alpha)} \cdot \frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)} = \frac{sin^2(\alpha)}{cos^3(\alpha)}$, quindi abbiamo effettivamente una progressione geometrica di ragione $\frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)} = tan(\alpha)$. Perciò:

$$\ell_n = \frac{1}{cos(\alpha)} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} tan(\alpha) = \frac{1}{cos(\alpha)} \cdot \frac{1-tan^n(\alpha)}{1-tan(\alpha)} = \frac{1-tan^n(\alpha)}{cos(\alpha)-sin(\alpha)}$$



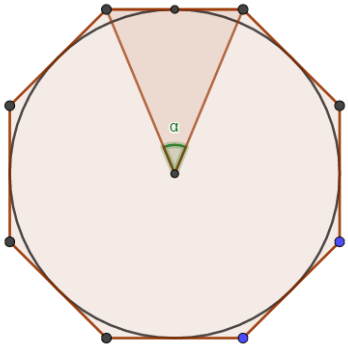
b1) $\left(\alpha < \frac{\pi}{4}\right)$ $\lim_{n\to\infty} \frac{1-tan^n(\alpha)}{cos(\alpha)-sin(\alpha)} = \frac{1}{cos(\alpha)-sin(\alpha)}$;

b2) $\left(\alpha \geq \frac{\pi}{4}\right)$ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{cos(\alpha)} \frac{1-tan^n(\alpha)}{1-tan(\alpha)} = \lim_{n\to\infty} \frac{tan^{n-1}(\alpha)+tan^{n-2}(\alpha)+\ldots+1}{cos(\alpha)} = +\infty$

3. (Liceo scientifico PNI 2001/2002) Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{n!}$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{3}{n}\right)=0$$

4. (Liceo scientifico 2006/2007) Si denoti con S_n l'area del poligono regolare di n lati inscritto in un cerchio C. a) Si dimostri che $S_n = \frac{n}{2}r^2 sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ e si trovi un'analoga espressione per l'area del poligono regolare di n lati circoscritto a C. b) Si calcoli il limite di S_n per $n \to \infty$.



a) In figura consideriamo un ottagono regolare, , la sua area è 8 volte quella del triangolo isoscele segnato, in cui $\alpha = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$, la cui altezza relativa alla base è il raggio del cerchio. Quindi l'area del triangolo misura: $\frac{\ell \cdot r}{2} = \frac{2\cdot\left[r\cdot tan(\alpha/2)\right]r}{2} = r^2 \cdot tan(\alpha/2)$. In generale per un poligono di n lati: $\alpha = \frac{2\pi}{n}$, quindi $S_n = n\cdot r^2 \cdot tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$; b) $\lim_{n\to\infty}\left[n\cdot r^2\cdot tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\pi r^2}{cos(\pi/n)}\cdot\frac{sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\pi/n}\cdot\right] = \pi r^2$

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

1. (AHSME 1952) Sapendo che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a\cdot p^{n-1}\right) = 6, a_1 + a_2 = \frac{9}{2}$, determinare a_1.

Si ha: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a\cdot p^{n-1}\right)=a\cdot\sum_{n=0}^{\infty}p^n=a\cdot\frac{1}{1-p}=6\Rightarrow\begin{cases}1-p=\frac{a}{6}\\ a+ap=\frac{9}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p=\frac{6-a}{6}\\ a+a\cdot\frac{6-a}{6}=\frac{9}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p=\frac{6-a}{6}\\ a^2-12a+27=0\end{cases}\Rightarrow a=3\vee 9$

2. (AHSME 1964) Data la successione $a_n=\frac{5+3\cdot\sqrt{5}}{10}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\frac{5-3\cdot\sqrt{5}}{10}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ dimostrare che si ha: $a_n=a_{n+1}-a_{n-1}$.

Abbiamo

$$\frac{5+3\cdot\sqrt{5}}{10}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}+\frac{5-3\cdot\sqrt{5}}{10}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\frac{5+3\cdot\sqrt{5}}{10}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\frac{5-3\cdot\sqrt{5}}{10}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}=$$

$$=\frac{5+3\cdot\sqrt{5}}{10}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\cdot\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right]+\frac{5-3\cdot\sqrt{5}}{10}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\cdot\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}-\frac{2}{1-\sqrt{5}}\right]=$$

$$=\frac{5+3\cdot\sqrt{5}}{10}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\cdot\frac{1+5+2\sqrt{5}-4}{2\cdot\left(1+\sqrt{5}\right)}+\frac{5-3\cdot\sqrt{5}}{10}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\cdot\frac{1+5-2\sqrt{5}-4}{2\cdot\left(1-\sqrt{5}\right)}=$$

$$=\frac{5+3\cdot\sqrt{5}}{10}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\cdot\cancel{\frac{2+2\sqrt{5}}{2\cdot\left(1+\sqrt{5}\right)}}+\frac{5-3\cdot\sqrt{5}}{10}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\cdot\cancel{\frac{2-2\sqrt{5}}{2\cdot\left(1-\sqrt{5}\right)}}=a_n$$

3. (AHSME 1970) Una serie geometrica di ragione *r* ha somma 15, la serie i cui termini sono i quadrati di quelli della precedente, ha somma 45. Determinare il primo termine della serie di partenza.

$$a\cdot\sum_{n=0}^{\infty}r^n=15, a^2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}r^{2n}=45\Rightarrow\begin{cases}\frac{a}{1-r}=15\\ \frac{a^2}{1-r^2}=45\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{a}{1-r}=15\\ \frac{a}{1-r}\cdot\frac{a}{1+r}=45\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{a}{1-r}=15\\ \frac{a}{1+r}=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1+r}{1-r}=5\\ \frac{a}{1+r}=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1+r=5-5r\\ a=3+3r\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}r=\frac{2}{3}\\ a=5\end{cases}\Rightarrow$$

4. (AHSME 1975) Consideriamo l'insieme A = {1, 3, 2, …}, in cui $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$, per $n\geq 3$. determinare la somma dei primi 100 elementi di A.

Abbiamo A = {1, 3, 2, –1, –3, –2, 1, –1, 3, 2, –1, –3, –2, 1, ..., 1, 3, 2, –1}, in pratica i primi 6 elementi si ripetono 6 · 16 volte, la loro somma è nulla, quindi rimane solo la somma dei primi 4 termini: 1 + 3 + 2 – 1= 5.

5. (AHSME 1975) Il primo termine di una serie geometrica è un numero naturale, la ragione è il reciproco di un numero naturale e la somma è 3. Determinare la somma dei primi 2 termini.

Abbiamo $n+\frac{n}{m}+\frac{n}{m^2}+...=\frac{n}{1-1/m}=3$, dobbiamo determinare $n+\frac{n}{m}$. Si ha: $n=3-\frac{3}{m}$, dato che n è un numero naturale, può essere solo 1 o 2, ma $3/m$ è naturale solo se m = 1 (non accettabile) o m = 3, quindi n = 2, m = 3, e la somma cercata è 2 + 2/3 = 8/3.

6. (AHSME 1980) Un punto parte dall'origine con una traiettoria rettilinea, raggiungendo il punto (1; 0), poi ruota di 90° in senso antiorario raggiungendo (1; 1/2), qui ruota di nuovo di 90° in senso antiorario e percorrendo metà del precedente tratto. Se continua questo percorso all'infinito, quale punto raggiungerà?

Le ascisse seguono la somma della serie $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{1+1/4} = \frac{4}{5}$, le ordinate quelle della serie $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+1/4} = \frac{2}{5}$, quindi tenderà al punto (4/5; 2/5)

7. (AHSME 1984) La successione a_n è definita dalla legge: $a_1 = 2$ e $a_{n+1} = a_n + 2n$ ($n > 1$). Calcolare a_{100}.

Abbiamo: $a_{n+1} - a_n = 2n$, quindi $a_2 - a_1 = 2$; $a_3 - a_2 = 2 \cdot 2$; ... $a_{100} - a_{99} = 2 \cdot 99$, sommando termine a termine troviamo: $a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + \ldots + a_{99} - a_{98} + a_{100} - a_{99} = 2 \cdot (1 + 2 + \ldots + 99)$, ossia $a_{100} - a_1 = 2 \cdot 100 \cdot 99/2 = 9900 \Rightarrow a_{100} = 9902$.

8. (AHSME 1992) a_n è una successione crescente di numeri interi positivi che verificano la seguente proprietà: $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, sapendo che $a_7 = 120$, determinare a_8.

Abbiamo: $a_1 = a$; $a_2 = b$; $a_3 = a + b$; $a_4 = a + 2b$, $a_5 = 2a + 3b$; $a_6 = 3a + 5b$; $a_7 = 5a + 8b$; $a_8 = 8a + 13b$. Si ha: $5a + 8b = 120 \Rightarrow a = \frac{120-8b}{5}; b = \frac{120-5a}{8}$, quindi a deve essere multiplo di 8 e b multiplo di 5. Da cui $5 \cdot 8n + 8 \cdot 5m = 120 \Rightarrow n + m = 3$, le cui uniche soluzioni in numeri naturali sono (1; 2) e (2; 1). Proviamole: se $n = 1$, $m = 2 \Rightarrow a = 8$, $b = 10$ e $a_8 = 8a + 13b = 64 + 130 = 194$; se $n = 2$, $m = 1 \Rightarrow a = 16$, $b = 5$, non va bene perché la successione deve essere crescente.

9. (AHSME 1996) La successione 1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 2, . . . è formata da 1 separati da blocchi di 2 con n 2 nell'n–esimo blocco. La somma dei primi 1234 termini di questa successione è (A) 1996 (B) 2419 (C) 2429 (D) 2439 (E) 2449

Dobbiamo stabilire nei primi 1234 termini quanti 1 e quanti 2 abbiamo. Quando abbiamo scritto n volte la cifra 1 abbiamo scritto $1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1) = n \cdot (n - 1)/2$ volte la cifra 2, quindi dobbiamo stabilire quando si ha: $n + n \cdot (n - 1)/2 = 1234 \Rightarrow n^2 + n - 2468 = 0 \Rightarrow n = \frac{-1+\sqrt{1+9872}}{2} \approx 49,2$, quindi abbiamo scritto 49 volte la cifra 1, poi abbiamo scritto $48 \cdot 49/2 = 1176$ volte la cifra 2, per un totale di $1176 + 49 = 1225$ cifre e quindi abbiamo scritto altre 9 cifre 2. Quindi la somma cercata è $49 + 1185 \cdot 2 = 2419$, che è la risposta B.

10. (AHSME 1999) Sia $a_1 = 1$, $(a_{n+1})^3 = 99 \cdot (a_n)^3$, $\forall n \in \mathbb{N}$, una successione di numeri reali. Determinare a_{100}.

$(a_{n+1})^3 = 99 \cdot (a_n)^3 = 99^2 \cdot (a_{n-1})^3 = 99^3 \cdot (a_{n-2})^3 = \ldots = 99^{n-1} \cdot (a_1)^3 = 99^{n-1}$, quindi $(a_{100})^3 = 99^{99} \Rightarrow a_{100} = 99^{33}$.

11. (AHSME 1999) La successione $a_1, a_2, a_3, \ldots$ è tale che $a_1 = 19$, $a_9 = 99$ e per ogni $n \geq 3$, a_n, è la media aritmetica dei precedenti $n - 1$ termini. Quanto vale a_2?

$$a_3 = \frac{19+a_2}{2}, a_4 = \frac{19+a_2+\frac{19+a_2}{2}}{3} = \cancel{3}\cdot\frac{19+a_2}{\cancel{6}^2} = \frac{19+a_2}{2}, a_5 = \frac{19+a_2+\frac{19+a_2}{2}+\frac{19+a_2}{2}}{4} = \frac{19+a_2}{2}, \ldots$$

Come la successione è costante dal terzo elemento in poi, quindi si ha: $\frac{19+a_2}{2} = 99 \Rightarrow a_2 = 198 - 19 = 179$

12. (Rice 2006) Calcolare $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\cdot\sqrt{k+2}+(k+2)\cdot\sqrt{k}}$.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}\cdot\sqrt{k\cdot(k+2)}+\sqrt{k+2}\cdot\sqrt{k\cdot(k+2)}}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{k\cdot(k+2)}}\cdot\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+2}}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{k\cdot(k+2)}}\cdot\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+2}}{k-k-2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k}}{\sqrt{k\cdot(k+2)}}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+2}}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\cancel{\frac{1}{\sqrt{4}}}+\cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}}-\cancel{\frac{1}{\sqrt{5}}}+\ldots\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

13. (Rice 2006) Calcolare $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{a^{k-1}}, |a|>1$.

$$1+\frac{2}{a}+\frac{3}{a^2}+\frac{4}{a^3}+\ldots=1+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\right)+\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2}\right)+\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{a^3}\right)+\ldots=$$

$$=\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+\ldots\right)+\ldots=\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+\ldots\right)+$$

$$+\frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+\ldots\right)+\frac{1}{a^2}\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+\ldots\right)+\ldots=\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+\ldots\right)^2=$$

$$=\left(\frac{1}{1-1/a}\right)^2=\frac{a^2}{a^2-1}$$

14. (HSMC 2007) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione $1 + 2x + 4x^2 + \ldots + (2x)^n + \ldots = 3{,}4 - 1{,}2 \cdot x$, con $|x| < 0{,}5$.

Si ha: $\sum_{n=0}^{+\infty}(2x)^n=\frac{1}{1-2x}\Rightarrow\frac{1}{1-2x}=3.4-1.2x\Rightarrow 1=3.4-1.2x-6.8x+2.4x^2, x\neq\frac{1}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow 2.4x^2-8x+2.4=0, x\neq\frac{1}{2}\Rightarrow 3x^2-10x+3=0, x\neq\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{25-9}}{3}=\frac{5\pm 4}{3}=\prec\begin{matrix}3\\1/3\end{matrix}$, ovviamente si accetta solo 1/3

15. (Rice 2008) Sapendo che si ha: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, determinare $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+8n+16}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+4)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{4}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}-\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}\right)=\frac{\pi^2}{6}-\frac{205}{144}$$

16. (Rice 2008) Calcolare $\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{1}{2^{x+y-|x-y|}}$. Sugg. Calcolare la somma in 3 casi: $x = y$, $x > y$ e $x < y$; quindi confrontare i risultati.

Se $x = y$: $\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2x}}=\sum_{x=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2x}}=\frac{1}{1-1/4}=\frac{4}{3}$; Se $x > y \Rightarrow x = y + d$: $\sum_{d=1}^{\infty}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2x+2d}}=\sum_{d=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2d}}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2x}}=\left(\frac{4}{3}-1\right)\cdot\frac{4}{3}=\frac{4}{9}$; Se $x < y \Rightarrow x = y - d$: $\sum_{d=1}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2y+2d}}=\frac{4}{9}$. Infine $\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{1}{2^{x+y-|x-y|}}=\frac{4}{3}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}=\frac{20}{9}$.

17. (Rice 2008) Calcolare $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{5^k}$. *Suggerimento* moltiplicare per 5 tutti i termini.

$$\frac{1}{5}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5k}{5^k}=\frac{1}{5}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{5^{k-1}}=\frac{1}{5}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{5^k}=\frac{1}{5}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{5^k}+\frac{1}{5}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{5^k}=\frac{1}{5}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{5^k}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1-1/5}=$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{5^k}+\frac{1}{\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{5}}{4}=\frac{1}{5}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{5^k}+\frac{1}{4}\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{5^k}=\frac{1}{5}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{5^k}+\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{4}{5}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{5^k}=\frac{1}{4}\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{5^k}=\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{4}=\frac{5}{16}$$

18. (HCC 2012) Quale delle seguenti serie converge a 2? I $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ II $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n^2+1}$ III $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{3^n}$

a) Solo I b) Solo II c) Solo III d) I e III e) II e III

Si ha: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{1-1/2}=2;\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n^2+1}\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}=+\infty;\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{3^n}=4\cdot\left(\frac{1}{1-1/3}-1\right)=4\cdot\left(\frac{3}{2}-1\right)=4\cdot\frac{1}{2}=2$, quindi la risposta corretta è d).

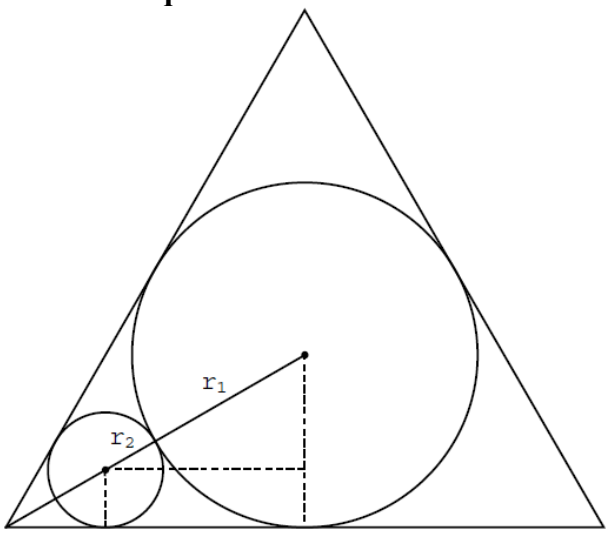
19. (MT1993) A couple decides to share a glass of orange juice by alternately drinking half of the juice in the glass. The man drinks half the glass of juice. They alternate drinking half of the remaining juice until only an inconsequential drop remains. What part of the juice does each consume?

The man drinks $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\ldots+\frac{1}{2^{2n-1}}+\ldots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{2n+1}}=\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-1/4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$, hence the woman drinks 1/3.

20. (V 2003) Define $a_0 = 2$, $a_1 = 8$ and $a_n=\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}, n\geq 2$. Find a_{2003}.

$a_2=\frac{a}{a_0}=\frac{8}{2}=4; a_3=\frac{a_2}{a_1}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}; a_4=\frac{a_3}{a_2}=\frac{1/2}{4}=\frac{1}{8}; a_5=\frac{a_4}{a_3}=\frac{1/8}{1/2}=\frac{1}{4}; a_6=\frac{a_5}{a_4}=\frac{1/4}{1/8}=2=a_0$. Hence there is a period whose length is 6. $2003 = 6 \cdot 333 + 5 \Rightarrow a_{2003} = a_5 = 1/4$

21. (V 2003) A circle C_1 is inscribed in an equilateral triangle with side length 1 unit. Construct a circle C_2 that is tangent to C_1 and two sides of the triangle. Then construct a circle C_3 that is tangent to C_2 and two sides of the triangle. Continue constructing such circles indefinitely. Find the sum of the areas of this infinite sequence of circles.



Let r_1 and r_2 be the radii of two circles as indicated. From the right triangle in the sketch,

$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}=\frac{r_1-r_2}{r_1+r_2} \Longrightarrow r_2=\frac{1}{3}r_1$

This pattern continues. Hence $r_3=\frac{1}{3}r_2=\frac{1}{3^2}r_1 \cdots$ etc.

Then the sum of the areas is $A=\pi r_1^2+\pi\left(\frac{r_1}{3}\right)^2+\pi\left(\frac{r_1}{3^2}\right)^2+\cdots$

$A=\pi r_1^2[1+\frac{1}{9}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{9^3}+\cdots]=\pi r_1^2\frac{1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{9}{8}\pi r_1^2$

Again from the sketch, $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{r_1}{\frac{1}{2}} \Longrightarrow r_1 = \frac{1}{2}\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$

Thus $A = \frac{9}{8}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{9}{8}\cdot\frac{3}{36}\cdot\pi = \frac{3}{32}\pi$

22. (V 2004) Let C_1 a circle of radius 1, square S_1 is inscribed in C_1, circle C_2 is inscribed in S_1 and square S_2 is inscribed in C_2. This process continues indefinitely, alternating circles and squares. For $n \geq 1$, let A_n be the area of the region inside circle Cn and outside square S_n. Find $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$.

If a square is inscribed in a circle, its diagonal is the diameter of the circle. So: $d = 2r$, but $d = \ell\sqrt{2} \Rightarrow \ell = \frac{2r}{\sqrt{2}} = r\sqrt{2}$. If a circle in inscribed in a square, its diameter is equal to the side of of the square. So: $2r = \ell \Rightarrow r = \frac{\ell}{2}$. Hence:

$$\ell_1 = r_1\sqrt{2}; r_2 = \frac{\ell_1}{2} = \frac{r_1\sqrt{2}}{2}; \ell_2 = r_2\sqrt{2} = \frac{2r_1}{2} = r_1; r_3 = \frac{\ell_2}{2} = \frac{r_1}{2}; \ell_3 = r_3\sqrt{2} = \frac{r_1}{4}; r_4 = \frac{\ell_3}{2} = \frac{r_1}{8}; \ldots; r_n = \frac{r_1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

The area of the region inside circle and outside square is

$$A_n = \pi r_n^2 - 2r_n^2 = (\pi - 2)\cdot r_n^2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n = (\pi - 2)\cdot\sum_{n=1}^{\infty} r_n^2 (\pi - 2)\cdot\sum_{n=0.}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{\pi - 2}{1 - 1/2} = 2\pi - 4$$

23. (HSMC 2004) Suppose that $F(n)$ is a real–valued function whose domain is the set of positive integers and that $F(n)$ satisfies the following two properties: $F(1) = 23$; $F(n + 1) = 8 + 3 \cdot F(n)$, for $n \geq 1$. It follows that there are constants p; q and r such that $F(n) = pqn - r$ for $n \geq 1$. Find the value of $p + q + r$.

$pq - r = F(1) = 23$; $pq^2 - r = F(2) = 8 + 3F(1) = 77$; $pq^3 - r = F(3) = 8 + 3F(2) = 239$; Solving each equation for r yields: $pq - 23 = pq^2 - 77 \Rightarrow pq(q - 1) = 54$; $pq^2 - 77 = pq^3 - 239 \Rightarrow pq2(q - 1) = 162$; Therefore, $q = 3$. Substituting into one of the above equations yields: $3p - 23 = 9p - 77 \Rightarrow p = 9$ and $27 - r = 23 \Rightarrow r = 4$. Therefore, $p + q + r = 9 + 3 + 4 = 16$.

24. (HSMC 2008) Suppose that $f(n + 1) = f(n) + f(n - 1)$ for $n = 2, 3, \ldots$. Given that $f(6) = 2$ and $f(4) = 8$, what is $f(1) + f(3)$?

Now

$$\begin{aligned} f(6) &= f(5) + f(4) \\ 2 &= f(5) + 8 \\ f(5) &= -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(5) &= f(4) + f(3) \\ -6 &= 8 + f(3) \\ f(3) &= -14 \end{aligned}$$

and similarly, $f(2) = 22$ and $f(1) = -36$. This yields $f(1) + f(3) = -36 - 14 = -50$.

25. (HSMC 2005)The function f is given by the table

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	4	3	5	1	2

. If $u_0 = 3$, and $u_{n+1} = f(u_n)$ for $n \geq 0$, what is the value of u_{2005}?

The function f is given by the table

x	1	2	3	4	5
f(x)	4	3	5	1	2

If $u_0 = 3$, and $u_{n+1} = f(u_n)$ for $n \geq 0$, what is the value of u_{2005}?

Solution. Checking the pattern for the first few values we see that $u_0 = 3, u_1 = f(3) = 5, u_2 = f(5) = 2, u_3 = 3$, thus $u_{3j+k} = u_k, u_{2005} = u_1 = 5$.

26. (HSMC 2007) Let $\{a_n\}$ be a sequence of integers such that $a_1 = 1$ and $a_{m+n} = a_m + a_n + mn$ for $m, n = 1, 2, ...$ Find a_{15}.

. Let $\{a_n\}$ be a sequence of integers such that $a_1 = 1$ and $a_{m+n} = a_m + a_n + mn$ for $m, n = 1, 2, ...$ Find a_{15}.

Solution. Take $n = 1$. Then $a_{m+1} = a_m + a_1 + m$, so $a_{m+1} - a_m = m + 1$. Thus $a_{15} - a_{14} = 15$, $a_{14} - a_{13} = 14$, ..., $a_2 - a_1 = 2$. Adding these equalities up, we get $a_{15} - a_1 = 15 + 14 + ... + 2$. So $a_{15} = 15 + 14 + ... + 2 + 1 = \frac{(15)(16)}{2} = 120$.

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. (Corso di laurea in Informatica, Udine 2009) Costruiamo due successioni $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, nel modo seguente: $x_1 = y_1 = 1$ e per $n > 1$: $x_{n+1} = x_n + y_n$, $y_{n+1} = x_n \cdot y_n$. Si calcoli y_5.

A) 6 B) 11 C) 17 D) 30

$x_2 = x_1 + y_1 = 2$; $y_2 = x_1 \cdot y_1 = 1$; $x_3 = x_2 + y_2 = 3$; $y_3 = x_2 \cdot y_2 = 2$; $x_4 = x_3 + y_3 = 5$; $y_4 = x_3 \cdot y_3 = 6$; $y_5 = x_4 \cdot y_4 = 30$. Risposta D

2. (Facoltà scientifiche CISIA 2010) Data la sequenza di numeri: $\begin{cases} x_0 = x_1 = 1 \\ x_i = x_{i-1} + 2 \cdot x_{i-2} \quad i \geq 2 \end{cases}$, x_6 è uguale a

$x_2 = x_1 + 2x_0 = 3$; $x_3 = x_2 + 2x_1 = 5$; $x_4 = x_3 + 2x_2 = 11$; $x_5 = x_4 + 2x_3 = 21$; $x_6 = x_5 + 2x_4 = 43$. Risposta A)

3. (Veterinaria 1998) Indicato con $x(n)$ il termine ennesimo di una successione di numeri, e data la legge: $x(n + 1) = x(n - 1) + x(n)$, quale delle seguenti successioni numeriche rispetta la legge?

A1) 1,1,1,1,1,1,1,... B) 1,2,3,5,8,13,21,... C) 1,2,3,4,5,6,7,...
D) 1,2,4,8,16,32,64,... E) 1,–1,1,–1,1,–1,1,...

È la successione di Fibonacci, quindi: B

4. (Facoltà scientifiche, Roma La Sapienza) Data la funzione $f(x) = x^2 - 1$, si consideri la successione così definita: $a_1 = 0$, $a_2 = f(a_1)$, …, $a_{n+1} = f(a_n)$. Quanto vale a_{64}? A) –64 B) –1 C) 0 D) 63

$a_2 = f(a_1) = f(0) = -1$; $a_3 = f(a_2) = f(-1) = 0$; a questo punto otteniamo la sequenza–1, 0. Poiché a_{64} occupa la posizione pari, vale –1. Risposta B

5. (Scuola Superiore di Catania) Una successione di numeri è costruita nel modo seguente:

$$x_0 = 5, x_1 = 16, x_2 = 11, x_3 = -5, \ldots, x_{n+1} = x_{n-1} - x_n, \ldots$$

A che cosa è uguale x_{2005}? Quanti sono i diversi valori che assumono gli elementi della successione?

$x_4 = x_3 - x_2 = -16$; $x_5 = x_4 - x_3 = -11$; $x_6 = x_5 - x_4 = 5$; A questo punto si ripetono i sei valori: 5; 16; 11; –5; –16; –11. Dato che $2005 = 6 \cdot 334 + 1$, $x_{2005} = x_4 = 16$