9. Successioni di numeri reali e funzioni reali di una variabile reale

9.2 Caratteristiche delle funzioni

Richiamiamo le conoscenze...

Calcolare

1. **a) $|3 + |4 - 5| - 2|$; b) $|1 - |2 - |3 - 4|| - 5|$; c) $||1 - 2| - |3 - 4| - 5|$; d) $|1 - 2 - |3 - |4 - 5||$**

a) $|3 + |4 - 5| - 2| = |3 + |-1| - 2| = |3 + 1 - 2| = 2$;

b) $|1 - |2 - |3 - 4|| - 5| = |1 - |2 - |-1|| - 5| = |1 - |2 - 1| - 5| = |1 - 1 - 5| = |-5| = 5$;

c) $||1 - 2| - |3 - 4| - 5| = ||-1| - |-1| - 5| = |1 - 1 - 5| = |-5| = 5$;

d) $|1 - 2 - |3 - |4 - 5|| = |1 - 2 - |3 - |-1|| = |1 - 2 - |3 - 1| = |1 - 2 - 2| = |-3| = 3$

2. **a)** $\dfrac{|1-2|-3}{1-|2-3|}$**; b)** $\dfrac{|1-2-|3-4||}{|1-|2-3|-4|}$**; c)** $\dfrac{|1-|2-|3-4|||}{|1-2-|3-4||}$**; d)** $\dfrac{|1-|2-3-|-4|||}{1-2-|3-4|}$

a) $\dfrac{|1-2|-3}{1-|2-3|} = \dfrac{|-1|-3}{1-|-1|} = \dfrac{1-3}{1-1} = \varnothing$;

b) $\dfrac{|1-2-|3-4||}{|1-|2-3|-4|} = \dfrac{|1-2-|-1||}{|1-|-1|-4|} = \dfrac{|1-2-1|}{|1-1-4|} = \dfrac{|-2|}{|-4|} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$;

c) $\dfrac{|1-|2-|3-4|||}{|1-2-|3-4||} = \dfrac{|1-|2-|-1|||}{|1-2-|-1||} = \dfrac{|1-|2-1||}{|1-2-1|} = \dfrac{|1-1|}{|-2|} = 0$;

d) $\dfrac{|1-|2-3-|-4|||}{1-2-|3-4|} = \dfrac{|1-|2-3-4||}{1-2-|-1|} = \dfrac{|1-|-5||}{1-2-1} = \dfrac{|1-5|}{-2} = -\dfrac{4}{2} = -2$

3. **a) $|x + 1| - (x + 1)$; b) $|x^2| - x^2$; c) $|x + 1| + x + 1$**

a) $\begin{cases} -x-1-x-1 & x<-1 \\ x+1-x-1 & x\ge -1 \end{cases} = \begin{cases} -2x-1 & x<-1 \\ 0 & x\ge -1 \end{cases}$ **b)** $|x^2| - x^2 = x| - x^2 = 0$;

c) $\begin{cases} -x-1+x+1 & x<-1 \\ x+1+x+1 & x\ge -1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & x<-1 \\ 2x+2 & x\ge -1 \end{cases}$

4. **a) $||x| - 1| - |x - 1|$; b)** $\dfrac{|x-2|-|x+2|}{|x-2|+|x+2|}$

a) $\begin{cases} |-x-1|-|x-1| & x<0 \\ |x-1|-|x-1| & x\ge 0 \end{cases} = \begin{cases} -x-1+x-1 & x<-1 \\ x+1+x-1 & -1\le x\le 0 \\ 0 & x\ge 0 \end{cases} = \begin{cases} -2 & x<-1 \\ 2x & -1\le x\le 0 \\ 0 & x>0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{-x+2+x+2}{-x+2-x-2} & x\le -2 \\ \dfrac{x-2+x+2}{x-2-x-2} & -2<x<2 \\ \dfrac{x-2-x-2}{x-2+x-2} & x\ge 2 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{4}{-2x} & x\le -2 \\ \dfrac{2x}{-4} & -2<x<2 \\ \dfrac{-4}{2x} & x\ge 2 \end{cases} = \begin{cases} -\dfrac{2}{x} & x\le -2 \\ -\dfrac{x}{2} & -2<x<2 \\ -\dfrac{2}{x} & x\ge 2 \end{cases} = \begin{cases} -\dfrac{2}{x} & x\le -2 \vee x\ge 2 \\ -\dfrac{x}{2} & -2<x<2 \end{cases}$

5. **Semplificare** $\dfrac{a}{|a|}+\dfrac{b}{|b|}+\dfrac{c}{|c|}+\dfrac{abc}{|abc|}$**, $a, b, c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$**

Se i parametri sono tutti positivi: $1 + 1 + 1 + 1 = 4$; Se i parametri sono tutti negativi: $-1 - 1 - 1 - 1 = -4$; Se i parametri sono 2 positivi e uno negativo: $1 + 1 - 1 - 1 = 0$; Se i parametri sono 1 positivo e due negativi: $1 - 1 - 1 + 1 = 0$.

6. **Dimostrare che $|x - y| = \max(x, y) - \min(x, y)$.**

Se $x \geq y$ si ha $|x - y| = x - y$ ed ovviamente $\max(x, y) = x$ e $\min(x, y) = y$; Se $x < y$ si ha $|x - y| = y - x$ ed ovviamente $\max(x, y) = y$ e $\min(x, y) = x$

7. Determinare minimo e massimo dell'espressione $|x - 2| + |x - 4| - |2x - 6|$, con $2 \leq x \leq 8$.

$$|x-2|+|x-4|-|2x-6| = \begin{cases} x-2-x+4+2x-6 & 2 \leq x \leq 3 \\ x-2-x+4-2x+6 & 3 < x < 4 \\ x-2+x-4-2x+6 & x \geq 4 \end{cases} = \begin{cases} 2x-4 & 2 \leq x \leq 3 \\ -2x+8 & 3 < x < 4 \\ 0 & x \geq 4 \end{cases}$$

, $2x - 4$ varia da 0 a 2, mentre $-2x + 8$ varia da 0 a 2.

Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni

8. a) $|x - |2x + 1|| = 3$; b) $|x - 1| + |x + 1| = 2$; c) $(1 - |x|) \cdot (1 + x) > 0$

a) $$\begin{cases} |x-2x-1|=3 & x \geq -1/2 \\ |x+2x+1|=3 & x < -1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |-x-1|=3 \\ x \geq -1/2 \end{cases} \vee \begin{cases} |3x+1|=3 \\ x < -1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x-1=\pm 3 \\ x \geq -1/2 \end{cases} \vee \begin{cases} 3x+1=\pm 3 \\ x < -1/2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-4 \vee x=2 \\ x \geq -1/2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2/3 \vee x=-4/3 \\ x < -1/2 \end{cases} \Rightarrow x=2 \vee x=-4/3$$

b) $$\begin{cases} x-1+x+1=2 \\ x>1 \end{cases} \vee \begin{cases} -x+1-x-1=2 \\ x<-1 \end{cases} \vee \begin{cases} -x+1+x+1=2 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x>1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ x<-1 \end{cases} \vee \begin{cases} 2=2 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow -1 \leq x \leq 1;$$

c) $$\begin{cases} (1-x)\cdot(1+x)>0 \\ x \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} (1+x)\cdot(1+x)>0 \\ x<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1<x<1 \\ x \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \neq -1 \\ x<0 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x < 1 \vee x<0, x \neq -1 \Rightarrow x<1, x \neq -1$$

9. a) $|x - 1| + |x + 2| < 5$; b) $1 \leq |x - 2| \leq 7$; c) $\dfrac{|x-|x||}{x} > 0$

a) $$\begin{cases} x-1+x+2<5 \\ x>1 \end{cases} \vee \begin{cases} -x+1-x-2<5 \\ x<-2 \end{cases} \vee \begin{cases} -x+1+x+2<5 \\ -2 \leq x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<2 \\ x>1 \end{cases} \vee \begin{cases} x>-3 \\ x<-2 \end{cases} \vee \begin{cases} 3<5 \\ -2 \leq x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow;$$

$$\Rightarrow 1<x<2 \vee -3<x<-2 \vee -2 \leq x \leq 1 \Rightarrow -3<x<2$$

b) $$\begin{cases} 1 \leq x-2 \leq 7 \\ x \geq 2 \end{cases} \vee \begin{cases} 1 \leq -x+2 \leq 7 \\ x<2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \leq x \leq 9 \\ x \geq 2 \end{cases} \vee \begin{cases} -1 \leq -x \leq 5 \\ x<2 \end{cases} \Rightarrow 3 \leq x \leq 9 \vee \begin{cases} -5 \leq x \leq 1 \\ x<2 \end{cases} \Rightarrow 3 \leq x \leq 9 \vee -5 \leq x \leq 1;$$

c) $$\begin{cases} \dfrac{|x-x|}{x}>0 \\ x \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \dfrac{|x+x|}{x}>0 \\ x<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0>0 \\ x \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \dfrac{-2x}{x}>0 \\ x<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2>0 \\ x<0 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$$

10. Trovare i valori del parametro reale m per i quali l'equazione $|||x| - 2| - m| = 5$ ha esattamente 5 soluzioni.

$$\begin{cases} ||x-2|-m|=5 \\ x \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} ||-x-2|-m|=5 \\ x<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x-2-m|=5 \\ x \geq 2 \end{cases} \vee \begin{cases} |-x+2-m|=5 \\ 0 \leq x<2 \end{cases} \vee \begin{cases} |-x-2-m|=5 \\ x \leq -2 \end{cases} \begin{cases} |x+2-m|=5 \\ -2<x<0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2-m=\pm 5 \\ x \geq 2 \end{cases} \vee \begin{cases} -x+2-m=\pm 5 \\ 0 \leq x<2 \end{cases} \vee \begin{cases} -x-2-m=\pm 5 \\ x \leq -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x+2-m=\pm 5 \\ -2<x<0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=m+7 \vee x=m-3 \\ x \geq 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=7-m \vee x=-3-m \\ 0 \leq x<2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-7-m \vee x=3-m \\ x \leq -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=m+3 \vee x=m-7 \\ -2<x<0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m+7 \geq 2 \vee m-3 \geq 2) \vee (0 \leq 7-m<2 \vee 0 \leq -3-m<2) \vee (-7-m \leq -2 \vee 3-m \leq -2) \vee (-2<m+3<0 \vee -2<m-7<0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m \geq -5 \vee m \geq 5) \vee (5<m \leq 7 \vee -5<m<-3) \vee (m \geq -5 \vee m \geq 5) \vee (-5<m<-3 \vee 5<m<7)$$

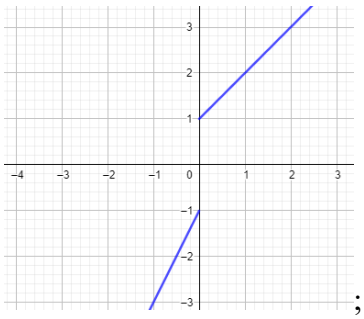
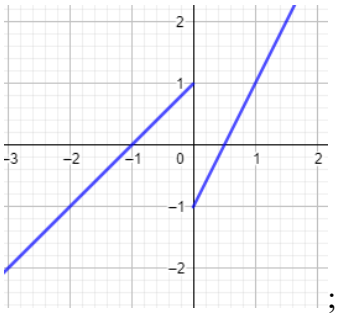
Rappresentiamo il tutto in un grafico in cui inseriamo il numero di soluzioni di ogni sistema iniziale.

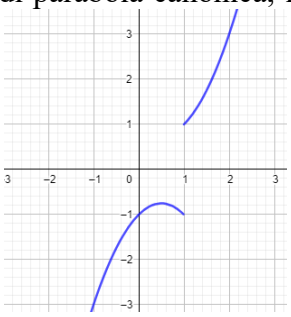
	-5		-3		5		7	
0		1		1		2		2
0		1		0		1		0
0		1		1		2		2
0		1		0		1		0
0	2	4		2	3	6	5	4

L'ultima riga fornisce il totale delle soluzioni, pertanto la risposta corretta è $m = 7$

Disegnare il grafico delle seguenti funzioni

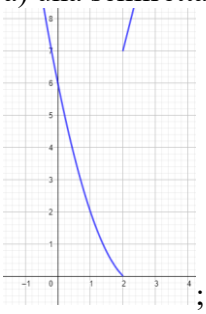
11. **a)** $f(x)=\begin{cases} x+1 & x>0 \\ 2x-1 & x\le 0 \end{cases}$; **b)** $f(x)=\begin{cases} x+1 & x\le 0 \\ 2x-1 & x>0 \end{cases}$; **c)** $f(x)=\begin{cases} x^2-x+1 & x>1 \\ -x^2+x-1 & x\le 1 \end{cases}$

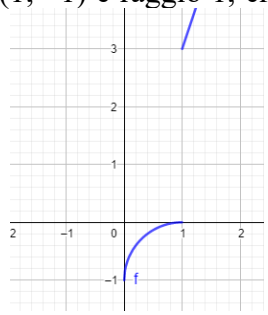
a) 2 semirette:  ; b) 2 semirette:  ;

c) due archi di parabola canonica, la prima di vertice (1/2; –¾) e l'altra di vertice (1/2; ¾) al di fuori del dominio: 

12. **a)** $f(x)=\begin{cases} 4x-1 & x>2 \\ x^2-5x+6 & x\le 2 \end{cases}$; **b)** $f(x)=\begin{cases} 3x & x>1 \\ \sqrt{1-(x-1)^2}-1 & x\le 0 \end{cases}$

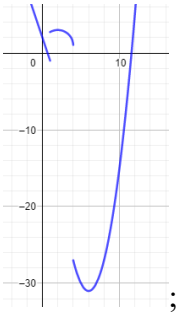
a) una semiretta e un arco di parabola canonica di vertice (5/2; –1/4), fuori dal dominio:

 ; b) una semiretta e un arco di circonferenza di centro (1; –1) e raggio 1, che si ottiene



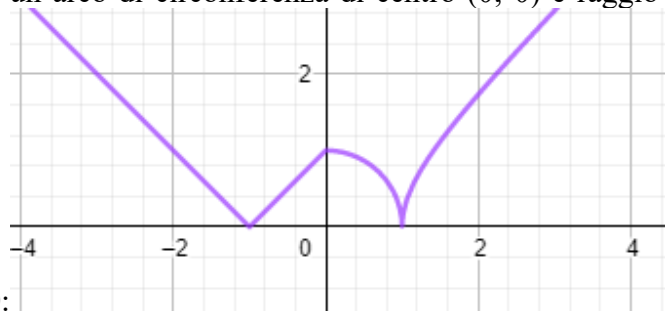
da $y=\sqrt{1-(x-1)^2}-1 \Rightarrow (y+1)^2=1-(x-1)^2 \Rightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=1$:

13. **a)** $f(x)=\begin{cases} 2-3x & x<1 \\ \sqrt{4-(x-2)^2}+1 & 1\le x\le 4 \\ x^2-12x+5 & x>4 \end{cases}$ **; b)** $f(x)=\sqrt{\left|(1+x)\cdot(1-|x|)\right|}$

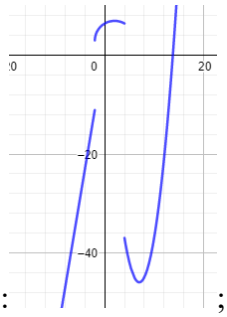
a) una semiretta, un arco di circonferenza di centro (1; –1) e raggio 2, che si ottiene da $y=\sqrt{4-(x-2)^2}+1 \Rightarrow (y-1)^2=4-(x-2)^2 \Rightarrow (x-2)^2+(y-1)^2=2^2$ e un arco di parabola di vertice (6; –31): 

; b) Equivale a:

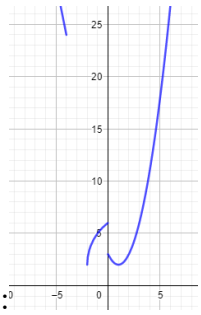
$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{\left|(1+x)\cdot(1+x)\right|} & x\le 0 \\ \sqrt{\left|(1+x)\cdot(1-x)\right|} & x>0 \end{cases}=\begin{cases} \sqrt{\left|(1+x)^2\right|} & x\le 0 \\ \sqrt{1-x^2} & 0<x\le 1 \\ \sqrt{x^2-1} & x>1 \end{cases}=\begin{cases} |1+x| & x\le 0 \\ \sqrt{1-x^2} & 0<x\le 1 \\ \sqrt{x^2-1} & x>1 \end{cases}=\begin{cases} -1-x & x\le -1 \\ 1+x & -1<x\le 0 \\ \sqrt{1-x^2} & 0<x\le 1 \\ \sqrt{x^2-1} & x>1 \end{cases},$$

quindi una semiretta, un segmento, un arco di circonferenza di centro (0; 0) e raggio 1 e un arco di iperbole di equazione $x^2-y^2-1=0$: 

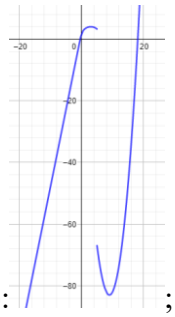
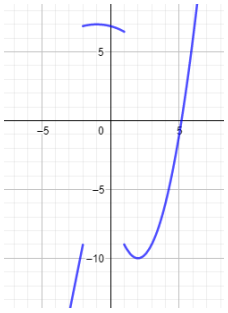
14. **a)** $f(x)=\begin{cases} 6x+1 & x<-2 \\ \sqrt{16-(x-2)^2}+3 & -2\le x\le 4 \\ x^2-14x+3 & x>4 \end{cases}$ **; b)** $f(x)=\begin{cases} 4-5x & x<-4 \\ \sqrt{25-(x-3)^2}+2 & -4\le x\le 0 \\ x^2-2x+3 & x>0 \end{cases}$

a) una semiretta, un arco di circonferenza di centro (2; 3) e raggio 4, che si ottiene da $y=\sqrt{16-(x-2)^2}+3 \Rightarrow (y-3)^2=16-(x-2)^2 \Rightarrow (x-2)^2+(y-3)^2=4^2$ e un arco di parabola di vertice (7; –46): 

; b) una semiretta, un arco di circonferenza di centro (3; 2) e raggio 5, che

si ottiene da $y=\sqrt{25-(x-3)^2}+2 \Rightarrow (y-2)^2=25-(x-3)^2 \Rightarrow (x-3)^2+(y-2)^2=5^2$ e un arco di parabola di vertice (1; 2): 

15. **a)** $f(x)=\begin{cases} 5x+2 & x<0 \\ \sqrt{9-(x-3)^2}+1 & 0\le x\le 5 \\ x^2-18x-2 & x>5 \end{cases}$ **; b)** $f(x)=\begin{cases} 1+5x & x<-2 \\ \sqrt{16-(x+1)^2}+3 & -2\le x\le 1 \\ x^2-4x-6 & x>1 \end{cases}$

a) una semiretta, un arco di circonferenza di centro (3; 1) e raggio 3, che si ottiene da $y=\sqrt{9-(x-3)^2}+1 \Rightarrow (y-1)^2=9-(x-3)^2 \Rightarrow (x-3)^2+(y-1)^2=3^2$ e un arco di parabola di vertice (9; –83):  ; b) una semiretta, un arco di circonferenza di centro (–1; 3) e raggio 4, che si ottiene da $y=\sqrt{16-(x+1)^2}+3 \Rightarrow (y-3)^2=16-(x+1)^2 \Rightarrow (x+1)^2+(y-3)^2=4^2$ e un arco di parabola di vertice (2; –14): 

Risolvere le seguenti disequazioni irrazionali

16. **a)** $x+1>\sqrt{x+1}$ **; b)** $x+1\le\sqrt{x-1}$ **; c)** $x+1>\sqrt{x^2+1}$ **; d)** $x-1<\sqrt{x^2+x}$

a) $x+1>\sqrt{x+1} \Rightarrow \begin{cases} x+1\ge 0 \\ (x+1)^2>x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ (x+1)\cdot(x+1-1)>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ (x+1)\cdot x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ x<-1 \vee x>0 \end{cases} \Rightarrow x>0$;

b) $x+1\le\sqrt{x-1} \Rightarrow \begin{cases} x-1\ge 0 \\ x+1\ge 0 \\ (x+1)^2\le x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x\ge -1 \\ x^2+2x+1-x+1\le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x\ge -1 \\ x^2+x+2\le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x\ge -1 \\ \varnothing \quad (\Delta<0) \end{cases} \Rightarrow \varnothing$;

c) $x+1>\sqrt{x^2+1} \Rightarrow \begin{cases} x+1>0 \\ (x+1)^2>x^2+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x^2+2x+1-x^2-1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1 \\ 2x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow x>0$; Non abbiamo imposto che il radicando sia non negativo perché lo è sempre

d) $x-1<\sqrt{x^2+x} \Rightarrow \begin{cases} x^2+x\ge 0 \\ x-1<0 \end{cases} \vee \begin{cases} x-1\ge 0 \\ (x-1)^2<x^2+x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\le -1 \vee x\ge 0 \\ x<1 \end{cases} \vee \begin{cases} x\ge 1 \\ \cancel{x^2}-2x+1-\cancel{x^2}-x<0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x\le -1 \vee 0\le x<1) \vee \begin{cases} x\ge 1 \\ -3x+1<0 \end{cases} \Rightarrow (x\le -1 \vee 0\le x<1) \vee \begin{cases} x\ge 1 \\ x>1/3 \end{cases} \Rightarrow (x\le -1 \vee 0\le x<1) \vee x\ge 1 \Rightarrow x\le -1 \vee x\ge 0$

17. **a)** $2x-3>\sqrt{2x^2-x-1}$ **; b)** $4x+1>\sqrt{2x-1}$ **; c)** $x^2\le\sqrt{2x^2+1}$

$$\begin{cases} 2x^2-x-1\ge 0 \\ 2x-3>0 \\ (2x-3)^2>2x^2-x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\le -\frac{1}{2} \vee x\ge 1 \\ x>\frac{3}{2} \\ 4x^2-12x+9-2x^2+x+1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\le -\frac{1}{2} \vee x\ge 1 \\ x>\frac{3}{2} \\ 2x^2-11x+10>0 \end{cases} \Rightarrow$$

a)

$$\Rightarrow \begin{cases} x\le -\frac{1}{2} \vee x\ge 1 \\ x>\frac{3}{2} \\ x<\frac{11-\sqrt{41}}{4} \vee x>\frac{11+\sqrt{41}}{4} \end{cases} \Rightarrow x>\frac{11+\sqrt{41}}{4}$$

b) $\begin{cases} 2x-1\ge 0 \\ 4x+1>0 \\ (4x+1)^2>2x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge \frac{1}{2} \\ x>-\frac{1}{4} \\ 16x^2+8x+1-2x+1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge \frac{1}{2} \\ x>-\frac{1}{4} \\ 16x^2+6x+2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge \frac{1}{2} \\ x>-\frac{1}{4} \\ \forall x\in\mathbb{R}(\Delta<0) \end{cases} \Rightarrow x\ge\frac{1}{2};$

c) $x^2\le\sqrt{2x^2+1} \Rightarrow x^4\le 2x^2+1 \Rightarrow x^4-2x^2-1\le 0 \Rightarrow 1-\sqrt{2}\le x^2\le 1+\sqrt{2} \Rightarrow 0\le x^2\le 1+\sqrt{2} \Rightarrow -\sqrt{1+\sqrt{2}}\le x\le\sqrt{1+\sqrt{2}}$

Non abbiamo imposto che primo membro e radicando fossero non negativi perché lo sono sempre

18. **a)** $x^2\le\sqrt{x^2-2}$ **; b)** $x>\sqrt{x^2+x-1}$ **; c)** $x^2+2>\sqrt{x^2-4}$ **; d)** $1-x^2\le\sqrt{x^2+1}$

a) $\begin{cases} x^2-2\ge 0 \\ x^4\le x^2-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\le -\sqrt{2} \vee x\ge\sqrt{2} \\ x^4-x^2+2\le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\le -\sqrt{2} \vee x\ge\sqrt{2} \\ \varnothing(\Delta<0) \end{cases} \Rightarrow \varnothing$; Non abbiamo considerato il caso che il primo membro sia negativo perché non lo è mai

b) $\begin{cases} x\ge 0 \\ x^2+x-1\ge 0 \\ \cancel{x^2}>\cancel{x^2}+x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x\le\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \vee x\ge\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x<1 \end{cases} \Rightarrow \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\le x<1;$

c) $\begin{cases} x^2-4\ge 0 \\ (x^2+2)^2>x^2-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\le 2 \vee x\ge 2 \\ x^4+4x^2+4-x^2+4>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\le 2 \vee x\ge 2 \\ x^4+3x^2+8>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\le 2 \vee x\ge 2 \\ \forall x\in\mathbb{R}(\Delta<0) \end{cases} \Rightarrow x\le 2 \vee x\ge 2$ Non abbiamo imposto che il primo membro sia non negativo perché lo è sempre;

d) $1-x^2\le 0 \vee \begin{cases} 1-x^2>0 \\ (1-x^2)^2\le x^2+1 \end{cases} \Rightarrow (x\le -1 \vee x\ge 1) \vee \begin{cases} -1<x<1 \\ 1-2x^2+x^4-x^2-1\le 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x\le -1 \vee x\ge 1) \vee \begin{cases} -1<x<1 \\ x^4-3x^2\le 0 \end{cases} \Rightarrow (x\le -1 \vee x\ge 1) \vee \begin{cases} -1<x<1 \\ x^2-3\le 0 \end{cases} \Rightarrow (x\le -1 \vee x\ge 1) \vee \begin{cases} -1<x<1 \\ -\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x\le -1 \vee x\ge 1) \vee (-1<x<1) \Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}$

Poteva semplicemente osservarsi che il primo membro è sempre non superiore ad 1 mentre il secondo è sempre non inferiore ad 1.

19. **a)** $5x+3\le\sqrt{x^2+1}$ **; b)** $7x-2>\sqrt{3x-4}$ **; c)** $x^2+1\ge\sqrt{1-x^2}$ **; d)** $x^2-1>\sqrt{x^2+1}$

a) $$5x+3\le 0\vee\begin{cases}5x+3>0\\(5x+3)^2\le x^2+1\end{cases}\Rightarrow x\le-\frac{3}{5}\vee\begin{cases}x>-\frac{3}{5}\\25x^2+30x+9-x^2-1\le 0\end{cases}\Rightarrow x\le-\frac{3}{5}\vee\begin{cases}x>-\frac{3}{5}\\\cancel{24}^{12}x^2+\cancel{30}^{15}x+\cancel{8}^{4}\le 0\end{cases}\Rightarrow$$;

$$\Rightarrow x\le-\frac{3}{5}\vee\begin{cases}x>-\frac{3}{5}\\\frac{-15-\sqrt{33}}{24}\le x\le\frac{-15+\sqrt{33}}{24}\end{cases}\Rightarrow x\le-\frac{3}{5}\vee-\frac{3}{5}<x\le\frac{-15+\sqrt{33}}{24}\Rightarrow x\le\frac{-15+\sqrt{33}}{24}$$

b) $$\begin{cases}7x-2>0\\3x-4\ge 0\\(7x-2)^2>3x-4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>\frac{2}{7}\\x\ge\frac{4}{3}\\49x^2-28x+4-3x+4>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>\frac{2}{7}\\x\ge\frac{4}{3}\\49x^2-31x+8>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>\frac{2}{7}\\x\ge\frac{4}{3}\\\forall x\in\mathbb{R}\,(\Delta<0)\end{cases}\Rightarrow x\ge\frac{4}{3};$$

c) $$\begin{cases}1-x^2\ge 0\\(x^2+1)^2\ge 1-x^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-1\le x\le 1\\x^4+2x^2+\cancel{1}-\cancel{1}+x^2\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-1\le x\le 1\\x^4+3x^2\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-1\le x\le 1\\\forall x\in\mathbb{R}\end{cases}\Rightarrow -1\le x\le 1;$$

d) $$\begin{cases}x^2-1\ge 0\\(x^2-1)^2>x^2+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\le-1\vee x\ge 1\\x^4-2x^2+\cancel{1}-x^2-\cancel{1}>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\le-1\vee x\ge 1\\x^4-3x^2>0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x\le-1\vee x\ge 1\\x^2-3>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\le-1\vee x\ge 1\\x<-\sqrt{3}\vee x>\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow x<-\sqrt{3}\vee x>\sqrt{3}$$

Intervalli di numeri reali

Stabilire quali dei seguenti insiemi sono discreti, quali densi, quali continui e quali con nessuna delle precedenti proprietà (NP)

1. **a) Insieme dei numeri pari; b)** $\{q\in\mathbb{Q}:q<4\}$ **; c)** $\{z\in\mathbb{Z}:z<32\}$

a) sono numeri naturali quindi Discreto; b) sono numeri razionali quindi Denso; c) sono numeri interi quindi Discreto

2. **a) Insieme dei multipli di 4; b)** $\{r\in\mathbb{R}:r^2<2\}$ **; c)** $\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}$

a) sono numeri naturali quindi Discreto; b) sono numeri reali quindi Continuo; c) sono i reciproci di numeri naturali quindi Discreto

3. **a)** $\{q\in\mathbb{Q}:q<1\vee q>2\}$ **; b)** $\{q\in\mathbb{Q}:0<q<1\}$ **; c)** $\left\{\frac{1}{z}:z\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\right\}$

a) sono numeri razionali, se prendiamo $x<y<1$, vi sono infiniti elementi z: $x<z<y$, ugualmente se $2<x<y$, o se $x<1<2<y$, quindi Denso; b) sono numeri razionali quindi Denso; c) sono i reciproci di numeri interi quindi Discreto

4. **a)** $\{q\in\mathbb{Q}:-2\le q\le 1\vee q>2\}$ **; b)** $\{r\in\mathbb{R}:r<1\}$ **; c)** $\left\{\frac{1}{r}:r\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\right\}$

a) nulla può dirsi, dato che se consideriamo per esempio $1<2$ non esistono numeri dell'insieme compresi tra essi; b) sono numeri reali quindi Continuo; c) sono reciproci di numeri reali quindi Continuo

5. **a)** $\{r\in\mathbb{R}:r^2\in\mathbb{Z}\}$ **; b)** $\{n\in\mathbb{N}:7\le n\le 12\vee n>24\}$ **; c)** $\{r\in\mathbb{R}:\sqrt{2}\le r\le\sqrt{3}\}$

a) sono numeri interi quindi Discreto; b) sono numeri naturali quindi Discreto; c) sono numeri reali quindi Continuo

6. **a)** $X=\left\{\frac{z+2}{z+3}:z\in\mathbb{Z}\right\}$ **; b)** $X=\left\{\frac{z+2}{z+3}:z\in\mathbb{Q}\right\}$ **; c)** $X=\left\{\frac{r+2}{r+3}:r\in\mathbb{R}\right\}$ **; d)** $X=\left\{\frac{q+2}{q+3}:q\le-1\vee q\ge 1\right\}$

a) sono numeri interi quindi Discreto; b) sono numeri razionali quindi Denso; c) sono numeri reali quindi Continuo; d) nulla può dirsi, dato che se consideriamo per esempio $-1 < 1$ non esistono numeri dell'insieme compresi tra essi

7. **L'unione di due insiemi discreti è un insieme discreto?**
   Ovviamente Sì
8. **L'unione di due insiemi densi è sempre un insieme denso?**
   No, si pensi all'esercizio 4a
9. **L'unione di due insiemi continui è sempre un insieme continuo?**
   No, si pensi all'insieme $\{r \in \mathbb{R} : r \leq 0 \vee r \geq 1\}$
10. **L'intersezione di due insiemi discreti è sempre un insieme discreto?**
    Ovviamente Sì perché è un sottoinsieme di un insieme discreto
11. **L'intersezione di due insiemi densi è sempre un insieme denso?**
    Ovviamente Sì perché è un sottoinsieme di un insieme denso
12. **L'intersezione di due insiemi continui è sempre un insieme continuo?**
    Ovviamente Sì perché è un sottoinsieme di un insieme continuo
13. **L'unione di un insieme discreto con un insieme denso, che tipo di insieme è?**
    Nulla può dirsi, per esempio $\{q \in \mathbb{Q} : q \leq 1\} \cup \{1\} = \{q \in \mathbb{Q} : q \leq 1\}$ che è denso, mentre $\{q \in \mathbb{Q} : q \leq 1\} \cup \{2\}$non è denso né discreto
14. **L'unione di un insieme discreto con un insieme continuo, che tipo di insieme è?**
    Nulla può dirsi, per esempio $1; 2 \cup \{1\} = 1; 2$ che è continuo mentre $1; 2 \cup \{3\}$non è continuo né discreto
15. **L'unione di un insieme denso con un insieme continuo, che tipo di insieme è?**
    Nulla può dirsi per esempio $\{q \in \mathbb{Q} : 1 \leq q \leq 2\} \cup 1; 2 = 1; 2$ che è continuo, mentre $\{q \in \mathbb{Q} : 1 \leq q \leq 2\} \cup 3; 4$ non è denso né continuo
16. **L'intersezione di un insieme discreto con un insieme denso, che tipo di insieme è?**
    Ovviamente Discreto
17. **L'intersezione di un insieme discreto con uno continuo, che tipo di insieme è?**
    Ovviamente Discreto
18. **L'intersezione di un insieme denso con un insieme continuo, che tipo di insieme è?**
    Nulla può dirsi, per esempio $\{q \in \mathbb{Q} : q \leq 1\} \cap 1; 2 = \{1\}$ che è discreto, mentre $\{q \in \mathbb{Q} : q > 1\} \cap 1; 2 = \{q \in \mathbb{Q} : 1 < q \leq 2\}$che è denso

Definizione di funzione secondo Dirichlet

Stabilire quale delle seguenti leggi definiscono funzioni

1. **Associamo i libri di una biblioteca allo scaffale nel quale sono riposti.**
   Sì
2. **Associamo le automobili al proprio proprietario.**
   No perché vi possono essere automobili con più di un proprietario
3. **Associamo i figli ai loro padri.**
   Sì
4. **Associamo i padri ai loro figli.**
   No perché vi possono essere padri con più figli
5. **Associamo a ogni cittadino italiano il proprio codice fiscale.**
   Sì
6. **Associamo a un gruppo di degenti di un ospedale la loro temperatura corporea rilevata a un dato orario di un certo giorno.**
   Sì
7. **Associamo a ogni numero naturale il proprio doppio.**
   Sì
8. **Associamo a ogni materia il professore che la insegna.**
   No perché vi possono essere professori che insegnano più materie (Matematica e Fisica, Storia e Filosofia, …)
9. **Associamo a ogni numero intero il proprio successivo.**

Sì

10. Associamo a ogni numero intero la somma delle proprie cifre.

Sì

11. All'insieme {1, 2, 3, 4, 5} l'estratto numero *k* (1 ≤ *k* ≤ 5) della prima estrazione del 2015 sulla ruota di Napoli.

Sì

12. All'insieme {1, 2, …, 10} il primo estratto della ruota numero *k* (1 ≤ *k* ≤ 10) della prima estrazione del 2015.

No perché il rimo estratto di due ruote diverse può essere lo stesso numero

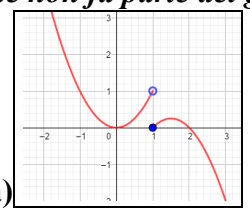
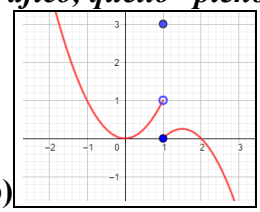
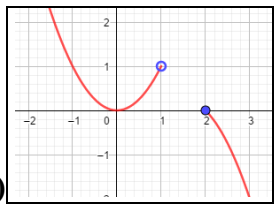
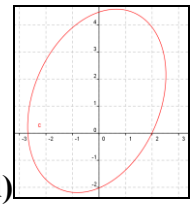
13. a) $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x>1 \\ x^2+1 & x<0 \end{cases}$ **; b)** $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x>1 \\ x^2+1 & x>0 \end{cases}$ **; c)** $f(x)=\begin{cases} 1 & x<0 \\ 2 & x=0 \\ 3 & x>0 \end{cases}$

a) Sì; b) No perché i numeri compresi fra 0 e 1 hanno più di un corrispondente, per esempio $f(0{,}1) = 0{,}1^2 - 1 = -0{,}99$. Ma anche $f(0{,}1) = 0{,}1^2 + 1 = 1{,}01$; c) Sì

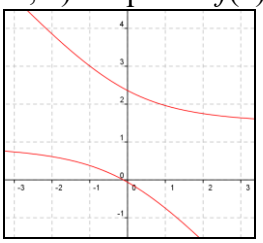
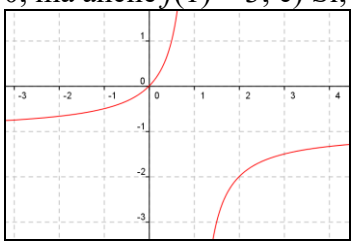
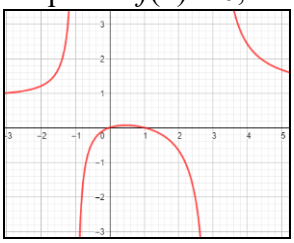
14. a) $f(x)=\begin{cases} 1 & x<-2 \\ 2 & x=0 \\ 3 & x>1 \end{cases}$ **; b)** $f(x)=\begin{cases} 1 & x<2 \\ 2 & x=2 \\ 3 & x\geq 2 \end{cases}$ **; c)** $f(x)=\begin{cases} 1 & 1<x<2 \\ 2 & 2\leq x<5 \\ 3 & x\geq 4 \end{cases}$

a) Sì; b) No perché $f(2) = 2$, ma anche $f(2) = 3$; c) No perché 2 e i numeri compresi fra 4 e 5 hanno più di un corrispondente, per esempio $f(4) = 2$, ma anche $f(4) = 3$

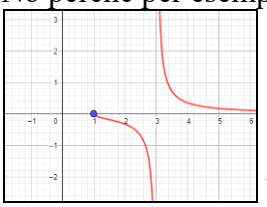
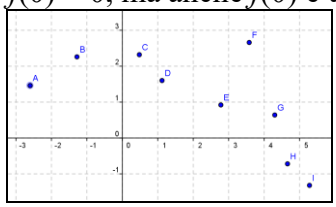
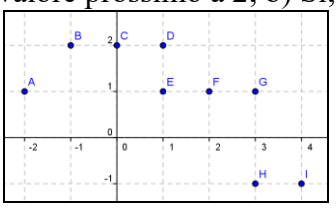
Stabilire quali dei seguenti grafici si riferiscono a funzioni, giustificando le risposte, il punto "vuoto" indica che non fa parte del grafico, quello "pieno" invece sì.

15. a)  **b)**  **c)**  **d)** 

a) Sì; b) No perché $f(1) = 0$, ma anche $f(1) = 3$; c) Sì; d) No perché $f(1) = 0$, ma anche $f(1) = 3$

16. a)  **b)**  **c)** 

a) No perché per esempio $f(0) = 0$, ma anche $f(0)$ è un valore prossimo a 2; b) Sì; c) Sì

17. a)  **b)**  **c)** 

a) Sì; b) Sì; c) No perché $f(1) = 1$, ma anche $f(1) = 2$

Per ciascuna delle date funzioni determinare quanto richiesto

18. a) $f(x) = x - 2$, $f(2) = ?$; b) $f(x) = 3x + 1$, $f(1/2) = ?$; c) $f(x) = x^2/2 - 1$, $f(-1) = ?$

a) $f(2) = 2 - 2 = 0$; b) $f(1/2) = 3/2 + 1 = 5/2$; c) $f(-1) = ((-1)^2/2 - 1 = -1/2$

19. a) $f(x) = -x^2 + x$, $f(-2/3) = ?$; b) $f(x)=\dfrac{x-2}{x+2}$, $f(2) = ?$; c) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}-1$, $f(-1/2) = ?$

a) $f(-2/3) = -(-2/3)^2 + (-2/3) = -4/9 - 2/3 = -10/9$;

b) $f(2)=\dfrac{2-2}{2+2}=0$; c) $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{(-1/2)^2+1}{-1/2}-1=-2\cdot\left(\dfrac{1}{4}+1\right)-1=-\cancel{2}\cdot\dfrac{5}{\cancel{4}^{\,2}}-1=-\dfrac{7}{2}$

20. **a)** $f(x)=\sqrt{x+1}$, **$f(3)$ = ?; b)** $f(x)=\sqrt{x^2+2x+1}$, **$f(-3/2)$ = ?; c)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x+1}}{x+1}$, $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=?$

a) $f(3)=\sqrt{3+1}=2$; b) $f(-3/2)=\sqrt{(-3/2)^2-2\cdot 3/2+1}=\sqrt{9/4-3+1}=\sqrt{1/4}=1/2$;

c) $f(1/3)=\dfrac{\sqrt{2/3+1}}{1/3+1}=\dfrac{\sqrt{5/3}}{4/3}=\sqrt{\dfrac{5}{\cancel{3}}\cdot\dfrac{\cancel{9}^{3}}{16}}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

21. **a)** $f(x)=\sqrt[3]{4x+1-x^2}$, **$f(-3)$ = ?; b)** $f(x)=\sqrt{x-\sqrt{x+1}}$, **$f(3)$ = ?; c) $f(x) = ln[ln(x) + 1]$, $f(e)$ = ?**

a) $f(-3)=\sqrt[3]{-12+1-(-3)^2}=\sqrt[3]{-11-9}=-\sqrt[3]{20}$; b) $f(3)=\sqrt{3-\sqrt{3+1}}=\sqrt{3-2}=1$;

c) $f(e) = ln[ln(e) + 1] = ln(1 + 1) = ln(2)$

22. **a)** $f(x)=x^3-x+\dfrac{1}{x}$, **$f(3/4)$ = ? b) $f(x) = ln(x + 1)$,** $f\left(\sqrt{2}\right)$ **= ?**

a) $f\left(\dfrac{3}{4}\right)=\left(\dfrac{3}{4}\right)^3-\left(\dfrac{3}{4}\right)+\dfrac{1}{\left(\dfrac{3}{4}\right)}=\dfrac{27}{64}-\dfrac{3}{4}+\dfrac{4}{3}=\dfrac{81-144+256}{192}=\dfrac{193}{192}$; b) $f\left(\sqrt{2}\right)=ln\left(\sqrt{2}+1\right)$

23. **a) $f(x) = sin(2x) - cos(x)$, $f(\pi/3)$ = ?; b) $f(x) = x + tan(3x)$, $f(\pi/4)$ = ?**

a) $f(\pi/3) = sin(2\pi/3) - cos(\pi/3) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$; b) $f(\pi/4) = \pi/4 + tan(3\pi/4) = \pi/4 - 1$

24. **a)** $f(x)=\sqrt{x+1}-|x+2|$, **$f(-1)$ = ?; b) $f(x) = |x - |x + 2| + 1|$, $f(-2/3)$ = ?**

a) $f(-1)=\sqrt{-1+1}-|-1+2|=-|1|=-1$;

b) $f(-2/3) = |-2/3 - |-2/3 + 2| + 1| = = |-2/3 - 4/3 + 1| = 1$

25. **a)** $f(x)=\dfrac{ln\left(x^2-1\right)}{\sqrt{x^3-1}}$, **$f(2)$ = ?; b)** $f(x)=sin\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$, **$f(\pi/2)$** = ?

a) $f(2)=\dfrac{ln\left(2^2-1\right)}{\sqrt{2^3-1}}=\dfrac{ln(3)}{\sqrt{7}}$; b) $f(\pi/2)=sin\left(\dfrac{\pi/2+1}{\pi/2}\right)=sin\left(\dfrac{\pi+2}{\pi}\right)$

26. **a)** $f(x)=\begin{cases} x-1 & x>1 \\ 2x+1 & x\le 1\end{cases}$, **$f(1)$ = ?; b)** $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x\ge 0 \\ x^2+1 & x<0\end{cases}$, **$f(1/2)$ = ?**

a) $f(1) = 2 + 1 = 3$; b) $f(1/2) = (1/2)^2 - 1 = -3/4$

27. **a)** $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & x>0 \\ 3x+1 & x\le 0\end{cases}$, **$f(2)$ = ?; b)** $f(x)=\begin{cases} x^3-1 & x\ge 0 \\ \dfrac{x^2+1}{x} & x<0\end{cases}$, $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)-f\left(\dfrac{1}{2}\right)=?$

a) $f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$;

b) $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)-f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+1}{\left(-\dfrac{1}{2}\right)}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+1=-2\cdot\left(\dfrac{1}{4}+1\right)-\dfrac{1}{8}+1=-\cancel{2}\cdot\dfrac{5}{\cancel{4}^{2}}+\dfrac{7}{8}=\dfrac{-20+7}{8}=-\dfrac{13}{8}$

28. **a)** $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x-1} & x>2 \\ \sqrt[3]{x-1} & x\le 2\end{cases}$, **$f(-1/2) + f(1/2)$ = ?; b)** $f(x)=\begin{cases} sin(x) & x\ge 0 \\ cos(x) & x<0\end{cases}$, **$f(\pi/2)$ = ?**

a) $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt[3]{-\dfrac{1}{2}-1}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}-1}=\sqrt[3]{-\dfrac{3}{2}}+\sqrt[3]{-\dfrac{1}{2}}=-\dfrac{\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{4}}{2}$; b) $f(\pi/2) = sin(\pi/2) = 1$

29. **a)** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & x\le 0\\ ln(x) & 0<x\le 2\\ \sqrt{x} & x>2\end{cases}$ **, *f*(–1)+*f*(0)–*f*(1) = ?; b)** $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+1} & x\le 1\\ ln(x-1) & 1<x\le 3\\ \dfrac{1}{x^2-1} & x>3\end{cases}$ **, *f*(–1) + *f*(2) – *f*(4) = ?**

a) $f(-1)+f(0)-f(1)=\dfrac{1}{-1-1}+\dfrac{1}{0-1}-ln(1)=-\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{3}{2}$;

b) $f(-1)+f(2)-f(4)=\sqrt{(-1)^2+1}+ln(2-1)-\dfrac{1}{4^2-1}=\sqrt{2}+0-\dfrac{1}{15}=\sqrt{2}-\dfrac{1}{15}$

Date le funzioni seguenti, calcolare quanto richiesto

30. **a) *f*(*x*) = *x*² + *x* + 1, *f*(2*x*) = ?; b) *f*(*x*) = *x*³ – *x* + 1, *f*(*x* + 1) = ?**

a) $f(2x) = (2x)^2 + 2x + 1 = 4x^2 + 2x + 1$;.0

b) $f(x + 1) = (x + 1)^3 - x - 1 + 1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x = x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

31. **a)** $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ **, *f*(*x*²) = ?; b) *f*(*x*) = (*x* – 1)^*x*, *f*(*x*²) = ?; c) *f*(*x*) = *x*⁴ + 5*x*² + 3, *f*(*x*² – 1) = ?**

a) $f(x^2)=\dfrac{x^4-1}{x^4+1}$; b) $f(x^2) = (x^2-1)^{x^2}$;

b) c) $f(x^2 - 1) = (x^2 - 1)^4 + 5(x^2 - 1)^2 + 3 = x^8 - 4x^6 + 6x^4 - 4x^2 + 1 + 5x^4 - 10x^2 + 5 + 3 = x^8 - 4x^6 + 11x^4 - 14x^2 + 9$

32. **a) *f*(*x*) = |*x* + *sin*(*x*)|,** $f(\sqrt{x})=?$ **; b) *f*(*x*) = *x*² + 1, *f*[*sin*(*x*)] = ?**

a) $f(\sqrt{x})=\left|\sqrt{x}+sin(\sqrt{x})\right|$; b) $f[sin(x)] = sin^2(x) + 1$

33. **a)** $f(x)=\dfrac{e^{2x-1}+1}{e^{x+1}-1}, f(2x+1)=?$ **; b)** $f(x)=\dfrac{x+\frac{1}{x}}{x-\frac{1}{x}}, f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=?$ **; c) *f*(*x*) = *x*² – *x*, *f*(*e*^{*x* + 1} – *e*^{*x* – 1})**

a) $f(2x+1)=\dfrac{e^{2\cdot(2x+1)-1}+1}{e^{2x+1+1}-1}=\dfrac{e^{4x+1}+1}{e^{2x+2}-1}$

c) $f(e^{x+1}-e^{x-1})=(e^{x+1}-e^{x-1})^2-(e^{x+1}-e^{x-1})=(e^{x+1}-e^{x-1})\cdot(e^{x+1}-e^{x-1}-1)$

b) $$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{\left(x+\frac{1}{x}\right)}}{\left(x+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{\left(x+\frac{1}{x}\right)}}=\frac{\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}}{\frac{x^2+1}{x}-\frac{x}{x^2+1}}=\frac{\frac{(x^2+1)^2+x^2}{\cancel{x\cdot(x^2+1)}}}{\frac{(x^2+1)^2-x^2}{\cancel{x\cdot(x^2+1)}}}=\frac{x^4+2x^2+1+x^2}{x^4+2x^2+1-x^2}=\frac{x^4+3x^2+1}{x^4+x^2+1}$$

34. $f(x)=x+\dfrac{1}{x}, f\left(\dfrac{1}{x}\right)=?$ **In che relazione sono le due funzioni?**

$f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x}+x=f(x)$

35. $f(x)=\dfrac{x\cdot(x-1)}{2}$ **, *f*(*x*+2) = ? In che relazione sono le due funzioni?**

$$f(x+2)=\frac{(x+2)\cdot(x+2-1)}{2}=\frac{(x+2)\cdot(x+1)}{2}=\frac{(x+2)\cdot(x+1)}{2}\cdot\frac{x\cdot(x-1)}{x\cdot(x-1)}=\frac{(x+1)\cdot(x+2)}{x\cdot(x-1)}\cdot f(x)$$

36. ***f*(*x*) = *x*² + *x* + 1, *f*(*x* + *h*) = ?**

$f(x + h) = (x + h)^2 + x + h + 1 = x^2 + (2h + 1)\,x + h^2 + h + 1$

37. Determinare per quale valore di *h* la precedente espressione è priva del termine a) di primo grado; b) noto.

Deve essere: a) $2h + 1 = 0 \Rightarrow h = -½$; b) $h^2 + h + 1 = 0$, che non accade mai perché $\Delta = 1 - 4 < 0$

Dimostrare la validità delle seguenti identità.

38. $\lceil x \rceil = n + 1$ e $\lfloor x \rfloor = n$, se $x \in (n; n + 1)$, $n \in \mathbb{Z}$

Basta applicare la definizione

39. $\lceil x + n \rceil = \lceil x \rceil + n$ e $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$, $n \in \mathbb{Z}$

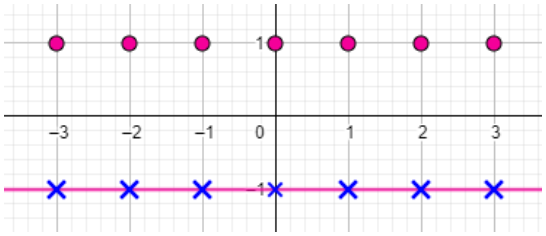
Basta applicare la definizione, dato che si ha ovviamente: $\lceil n \rceil = \lfloor n \rfloor = n$, se n è intero

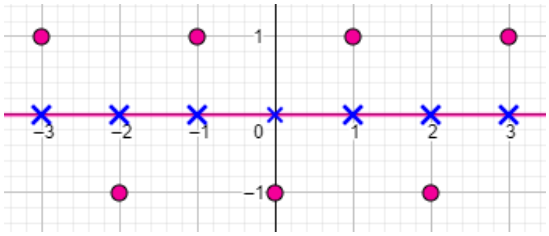
40. $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$, se $x \notin \mathbb{Z}$, e $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor$, se $x \in \mathbb{Z}$

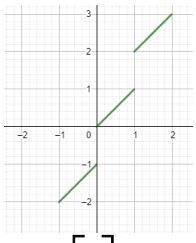
Basta applicare la definizione

Rappresentare le seguenti funzioni (round(x) è la funzione che associa a ogni ascissa la sua approssimazione per eccesso se la prima cifra decimale è maggiore o uguale a 5, o per difetto se minore di 5)

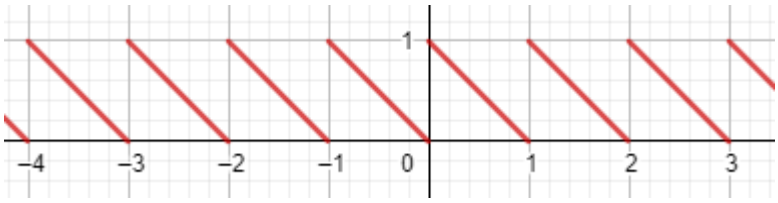
41. a) $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \end{cases}$ **; b)** $f(x) = \begin{cases} -1 & x \in \mathbb{Z} \wedge x \text{ pari} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ 1 & x \in \mathbb{Z} \wedge x \text{ dispari} \end{cases}$ **(0 si considera pari); c)** $f(x) = x + \lfloor x \rfloor$

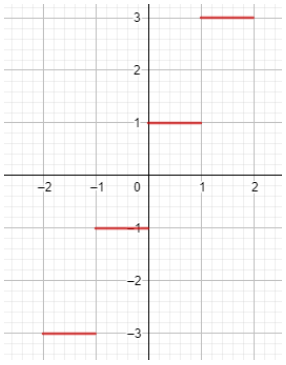
a) 

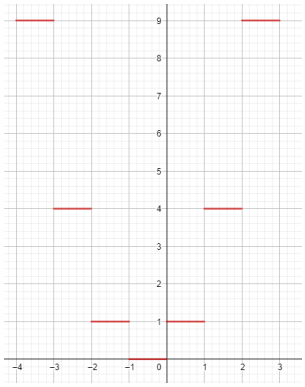
b) 

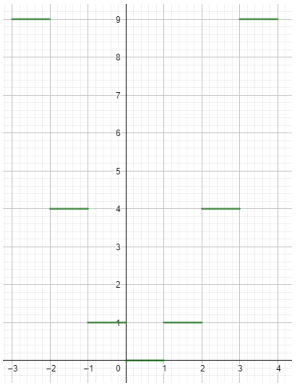
b) 

42. a) $f(x) = \lceil x \rceil - x$ **; b)** $f(x) = \lceil x \rceil + \lfloor x \rfloor$**; c)** $f(x) = \lceil x \rceil^2$**; d)** $f(x) = \lfloor x \rfloor^2$

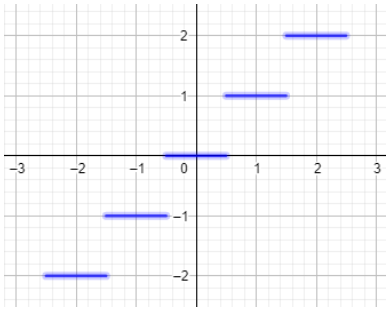
a) 

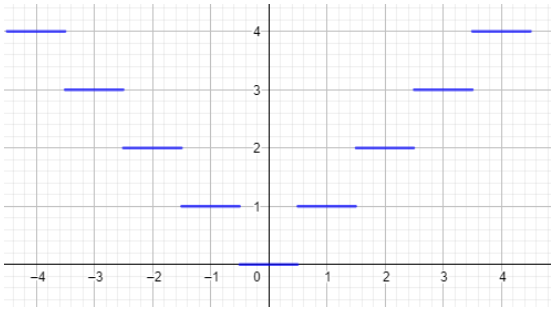
b) 

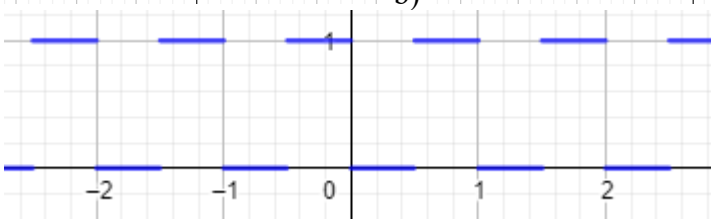
c) 

d) 

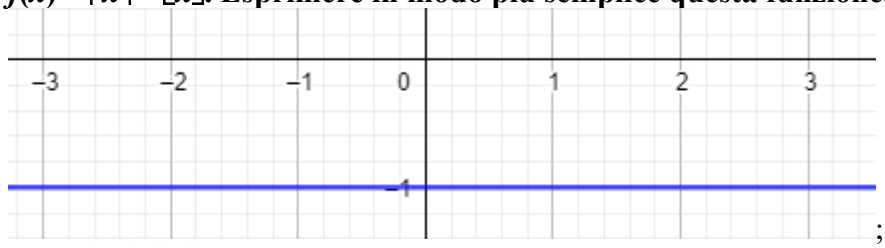
43. a) $f(x) = round(x)$**; b)** $f(x) = |round(x)|$**;** $f(x) = round(x) - \lceil x \rceil$**; c)** $f(x) = round(x) - \lfloor x \rfloor$

a) 

b) 

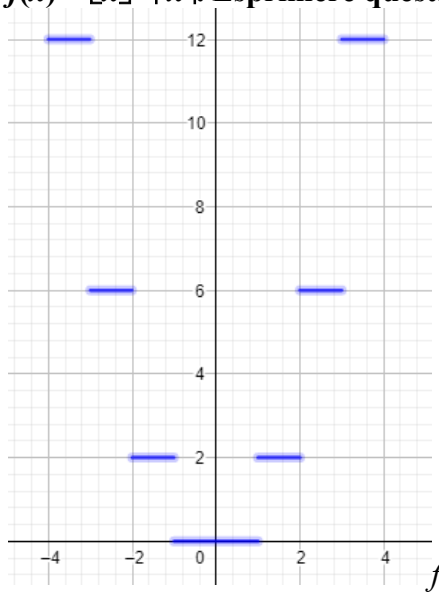
c) 

44. $f(x) = \lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor$**. Esprimere in modo più semplice questa funzione.**



; $f(x) = -1$

45. $f(x) = \lfloor x \rfloor \cdot \lceil x \rceil$**. Esprimere questa funzione senza usare floor e ceiling.**



$f(x) = n \cdot (n + 1)$, se $x \in [-n - 1; -n] \cup [n; n + 1]$, con $n \in \mathbb{N}$

46. Provare che a) $\left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{x} \right\rfloor$**; b)** $\left\lceil \sqrt{\lceil x \rceil} \right\rceil = \left\lceil \sqrt{x} \right\rceil$**;** $\left\lceil \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rceil \neq \left\lceil \sqrt{x} \right\rceil$**.**

a) Sia $\left\lfloor \sqrt{x} \right\rfloor = n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n^2 \le x < (n+1)^2 \Leftrightarrow n^2 \le \lfloor x \rfloor < (n+1)^2 \Leftrightarrow \left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor = n = \left\lfloor \sqrt{x} \right\rfloor$;

b) Sia $\left\lceil \sqrt{x} \right\rceil = n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n^2 < x \le (n+1)^2 \Leftrightarrow n^2 < \lceil x \rceil \le (n+1)^2 \Leftrightarrow \left\lceil \sqrt{\lceil x \rceil} \right\rceil = n = \left\lceil \sqrt{x} \right\rceil$;

c) Si ha: $\left\lceil \sqrt{\lfloor 1{,}1 \rfloor} \right\rceil = \lceil 1 \rceil = 1; \left\lceil \sqrt{1{,}1} \right\rceil = 2$

Risolvere le seguenti equazioni

47. a) $\lfloor x \rfloor + x = 1$**; b)** $\lceil x \rceil - x = 2$**; c)** $\lceil x \rceil + \lfloor x \rfloor = 5$**; d)** $\lfloor x \rfloor + 1 = 2 \cdot \lfloor x + 2 \rfloor$

a) $\lfloor x \rfloor + x = 1$, se $x \in \mathbb{Z}$ abbiamo $x + x = 1 \Rightarrow 2x = 1$ che non ha soluzione accettabile poiché $x = ½$ non è intero. Se invece $x \notin \mathbb{Z}$, allora non vi sono lo stesso soluzioni, infatti per $0 < x < 1$ avremo: $x = 1$ che è falsa, mentre per $x > 1$, $\lfloor x \rfloor + x > 1$ e per $x < 0$, $\lfloor x \rfloor + x < 1$;

b) $\lceil x \rceil - x = 2$; se $x \in \mathbb{Z}$ abbiamo $x - x = 2$, che non ha soluzione. Se invece $x \notin \mathbb{Z}$, allora non vi sono lo stesso soluzioni, perché la differenza fra il ceiling di un numero non intero e lo stesso numero non può fare un numero intero

c) $\lceil x \rceil + \lfloor x \rfloor = 5$ se $x \in \mathbb{Z}$ abbiamo $x + x = 5 \Rightarrow 2x = 5$ che non ha soluzione accettabile poiché $x = 5/2$ non è intero. Se invece $x \notin \mathbb{Z}$, allora $\lfloor x \rfloor + 1 + \lfloor x \rfloor = 5 \Rightarrow 2\lfloor x \rfloor = 4 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 2 \Rightarrow 2 < x < 3$ e non si accettano i valori interi poiché x non lo è;

d) $\lfloor x \rfloor + 1 = 2 \cdot \lfloor x + 2 \rfloor$, se $x \in \mathbb{Z}$ abbiamo $x + 1 = 2x + 4 \Rightarrow x = -3$. Se invece $x \notin \mathbb{Z}$, allora $\lfloor x \rfloor + 1 = 2\lfloor x \rfloor + 4 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = -3 \Rightarrow -3 < x < -2$

48. **a) $\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$; b) $2 \cdot \lfloor x \rfloor + 3 = 3 \cdot \lfloor x - 2 \rfloor + 5$; c) $\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = 5$; d) $\lfloor x \rfloor - x = 2$**

a) $\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$, se $x \in \mathbb{Z}$ abbiamo $x + 1 = x + 1$ che è un'identità. Se invece $x \notin \mathbb{Z}$, allora $\lfloor x \rfloor + 1 = \lfloor x \rfloor + 1$, che è ancora un'identità.

b) $2 \cdot \lfloor x \rfloor + 3 = 3 \cdot \lfloor x - 2 \rfloor + 5$, se $x \in \mathbb{Z}$ abbiamo $2x + 3 = 3x - 6 + 5 \Rightarrow x = 4$. Se invece $x \notin \mathbb{Z}$, allora diventa $2\lfloor x \rfloor + 3 - 3\lfloor x \rfloor + 6 - 5 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 4 \Rightarrow 4 < x < 5$;

c) $\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = 5$, se $x \in \mathbb{Z}$ abbiamo $x - x = 0$, che non ha soluzione. Se invece $x \notin \mathbb{Z}$, $\lfloor x \rfloor + 1 - \lfloor x \rfloor = 5$, che ugualmente è priva di soluzioni

d) $\lfloor x \rfloor - x = 2$, se $x \in \mathbb{Z}$ abbiamo $x - x = 2$, che non ha soluzione. Se invece $x \notin \mathbb{Z}$, ugualmente non vi sono soluzioni perché la differenza fra un numero non intero e il suo floor non può essere un numero intero

49. **a) $\lceil x \rceil + 1 = 2 \cdot \lfloor x + 2 \rfloor$; b) $\lceil x + 1 \rceil - 3 = 4 \cdot \lceil x - 2 \rceil$; c) $\lfloor x \rfloor \cdot \lfloor x - 1 \rfloor = 0$**

a) Se $x \in \mathbb{Z}$ abbiamo $x + 1 = 2x + 4 \Rightarrow x = -3$. Se invece $x \notin \mathbb{Z}$ osserviamo che $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$, quindi otteniamo $\lfloor x \rfloor + 1 + 1 = 2 \cdot \lfloor x + 2 \rfloor$. Inoltre $\lfloor x + 2 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 2$, quindi $\lfloor x \rfloor + 2 = 2 \cdot \lfloor x \rfloor + 4 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = -2$, perciò $-2 < x < -1$, ricordiamo che x non è intero, pertanto la soluzione $x = -2$ non è accettabile

b) $\lceil x + 1 \rceil - 3 = 4 \cdot \lceil x - 2 \rceil$, se $x \in \mathbb{Z}$ abbiamo $x + 1 - 3 = 4x - 8 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$. Se invece $x \notin \mathbb{Z}$, allora $\lceil x \rceil + 1 - 3 = 4\lceil x \rceil - 8 \Rightarrow 3\lceil x \rceil = 6 \Rightarrow \lceil x \rceil = 2 \Rightarrow 1 < x < 2$;

c) $\lfloor x \rfloor \cdot \lfloor x - 1 \rfloor = 0$. Per il principio di annullamento del prodotto abbiamo $\lfloor x \rfloor = 0 \vee \lfloor x - 1 \rfloor = 0$, quindi $0 \le x < 1 \vee 1 \le x < 2$, ossia $0 \le x < 2$

50. **a) $\lceil x \rceil \cdot \lceil x + 1 \rceil = 1$; b) $\lfloor x \rfloor \cdot \lceil x \rceil = 0$; c) $\lfloor x \rfloor^2 = 1$**

a) Se $x \in \mathbb{Z}$ abbiamo $x^2 + x = 1$ che non ha soluzioni accettabili perché non intere. Se invece $x \notin \mathbb{Z}$, ugualmente perché l'equazione da risolvere sarà $\lceil x \rceil^2 + \lceil x \rceil = 1$

b) Per il principio di annullamento del prodotto abbiamo $\lfloor x \rfloor = 0 \vee \lceil x \rceil = 0$, quindi $0 \le x < 1 \vee -1 < x \le 0$, ossia $-1 < x < 1$

c) $\lfloor x \rfloor^2 = 1 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 1 \vee \lfloor x \rfloor = -1 \Rightarrow 1 \le x < 2 \vee -1 \le x < 0$

51. **a) $\lfloor x^2 \rfloor = 1$; b) $\lceil x \rceil^2 = 1$; c) $\lceil x^2 \rceil = 1$**

a) $\lfloor x^2 \rfloor = 1 \Rightarrow 1 \le x^2 < 2 \Rightarrow -\sqrt{2} < x \le -1 \vee 1 \le x < \sqrt{2}$

b) $\lceil x \rceil^2 = 1 \Rightarrow \lceil x \rceil = 1 \vee \lceil x \rceil = -1 \Rightarrow 0 < x \le 1 \vee -2 < x \le -1$

c) $\lceil x^2 \rceil = 1 \Rightarrow 0 < x^2 \le 1 \Rightarrow -1 \le x \le 1$, ovviamente deve essere $x \ne 0$

52. **a) $\lceil 2x \rceil = 2\lceil x \rceil$; b) $\lfloor 5x \rfloor - 5\lfloor x \rfloor$; c) $\lceil 3x \rceil = 3\lfloor x \rfloor$; d) $\lceil 2x + 1 \rceil = 3 \cdot \lfloor x - 1 \rfloor - 2$**

a) $\lceil 2x \rceil = 2\lceil x \rceil$ osserviamo che le due espressioni non sono uguali. Per esempio $\lceil 2 \cdot 1{,}6 \rceil = \lceil 3{,}2 \rceil = 4$, e $2 \cdot \lceil 1{,}6 \rceil = 2 \cdot 2 = 4$, ma $\lceil 2 \cdot 1{,}4 \rceil = \lceil 2{,}8 \rceil = 3$, e $2 \cdot \lceil 1{,}4 \rceil = 2 \cdot 2 = 4$. In pratica $\lceil 2x \rceil = 2\lceil x \rceil$ se x appartiene agli intervalli del tipo $(n + 0{,}5; n + 1$, con n numero intero.

b) Ragionando come in precedenza: $\lfloor 5 \cdot 1.1 \rfloor = 5$ e $5 \cdot \lfloor 1{,}1 \rfloor = 5$, ma $\lfloor 5 \cdot 1.2 \rfloor = 6$ e $5 \cdot \lfloor 1{,}2 \rfloor = 5$, $\lfloor 5 \cdot 1.3 \rfloor = 6$ e $5 \cdot \lfloor 1{,}3 \rfloor = 5$ e così via fino a $\lfloor 5 \cdot 1.9 \rfloor = 9$ e $5 \cdot \lfloor 1{,}9 \rfloor = 5$ mentre $\lfloor 5 \cdot 2 \rfloor = 10$ e $5 \cdot \lfloor 2 \rfloor = 10$, perciò stavolta vanno bene gli intervalli del tipo $(n; n + 0{,}2$, con n numero intero.

c) In questo caso non vi sono soluzioni per x non intero perché $\lceil 3x \rceil > 3\lfloor x \rfloor$ mentre se x è intero le due espressioni coincidono, quindi $x \in \mathbb{Z}$

53. **Provare che** $\lfloor x \rfloor + \lfloor 1 - x \rfloor = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Z} \\ 0 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$.

Abbiamo già visto che se $x \in \mathbb{Z}$, si ha: $\lfloor x \rfloor + \lfloor 1 - x \rfloor = x + 1 - x = 1$. Mentre in generale $\lfloor 1 - x \rfloor = 1 + \lfloor -x \rfloor$ e $\lfloor -x \rfloor = -(\lfloor x \rfloor + 1)$, pertanto $\lfloor x \rfloor + \lfloor 1 - x \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1 - (\lfloor x \rfloor + 1) = \lfloor x \rfloor + 1 - \lfloor x \rfloor - 1 = 0$.

Classificare le seguenti funzioni

54. **a) $f(x) = x^2 - tan(3)$; b) $f(x) = 3^2 - tan(x)$; c) $f(x) = (2x - ln(4))^5$**

a) razionale, dato che $tan(3)$ è un numero; b) trascendente, dato che $tan(x)$ non è un numero; c) razionale, dato che $ln(4)$ è un numero

55. **a)** $f(x) = (2x - ln(4))^{5x+1}$; **b)** $f(x)=\dfrac{x^4-\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}-\pi}$; **c)** $f(x)=\dfrac{x^5+\sqrt{cos(\pi/2)}}{\sqrt{x+log_{1/2}(5)}}$

a) algebrica non razionale, dato che $ln(4)$ è un numero e l'esponente $5x+1$ è variabile; b) algebrica non razionale, dato che vi sono funzioni irrazionali; c) algebrica non razionale, dato che $\sqrt{cos(\pi/2)}=0$ e vi sono funzioni irrazionali

56. **a)** $f(x)=\begin{cases}|x| & x<1\\ |sin\ x| & x>2\end{cases}$; **b)** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x}{x} & x<1\\ \dfrac{1-\sqrt{x}}{\log_x 3} & x>2\end{cases}$;

a) trascendente, dato che $|sin(x)|$ è trascendente; b) trascendente, dato che $log_x(3)$ è trascendente;

57. **a)** $f(x)=\begin{cases}x^3+x^x & x>0\\ sin\left(\dfrac{\pi}{9}\right) & x\le 0\end{cases}$; **b)** $f(x)=\begin{cases}2^x & x>\dfrac{3}{4}\\ x^2 & x<-\dfrac{1}{4}\end{cases}$

a) algebrica non razionale, dato che $sin(\pi/9)$ è un numero e x^x è un esponenziale; b) algebrica non razionale, dato che 2^x è un esponenziale.

Dominio e codominio delle funzioni

Determinare l'insieme di esistenza delle seguenti funzioni

1. **a)** $f_1(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$; **b)** $f_2(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$; **c)** $f_3(x)=\sqrt{x^2+2}$; **d)** $f_4(x)=1+\dfrac{1}{x^2-1}$

a) $x-1\neq 0 \Rightarrow x\neq 1$; b) il denominatore non è mai nullo, quindi tutti i reali; c) il radicando non è mai negativo, quindi tutti i reali; d) $x^2-1\neq 0 \Rightarrow x\neq \pm 1$

2. **a)** $g_1(x)=\sqrt[4]{2x-1}+\sqrt[5]{3x-1}$; **b)** $g_2(x) = ln(x^2 + 5)$; **c)** $g_3(x) = 4x + ln(5)$

a) $2x-1\ge 0 \Rightarrow x\ge ½$ il secondo radicando non si considera perché di indice dispari; b) l'argomento del logaritmo è sempre positivo, quindi tutti i reali; c) Non ci sono condizioni da imporre, quindi tutti i reali

3. **a)** $h_1(x)=\dfrac{x+2}{ln(x-1)}$; **b)** $h_2(x)=\dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{17}}$; **c)** $h_3(x)=\dfrac{x+5}{x^2-4}$; **d)** $h_4(x)=\sqrt{-x^2}$

a) $\begin{cases}x-1>0\\ ln(x-1)\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>1\\ x-1\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>1\\ x\neq 2\end{cases}\Rightarrow(1;2)\cup(2;+\infty)$; b) $x\ge 0$; c) $x^2-4\neq 0\Rightarrow x\neq \pm 2$; d) $-x^2\ge 0$ $\Rightarrow x^2\le 0 \Rightarrow x=0$

4. **a)** $m_1(x)=\dfrac{x^2-x+1}{\sqrt{x}-1}$; **b)** $m_2(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; **c)** $m_3(x)=\dfrac{sin(2x+1)}{\sqrt[3]{x+2}}$; **d)** $m_4(x) = ln(x + 2)$

a) $\begin{cases}x\ge 0\\ \sqrt{x}-1\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x\neq 1\end{cases}\Rightarrow[0;1)\cup(1;+\infty)$; b) $x>0$; c) Non ci sono condizioni da imporre, quindi tutti i reali; d) $x+2>0\Rightarrow x>-2$

5. **a)** $p_1(x) = sec(x^2)$; **b)** $p_2(x)=\dfrac{log_2(x+1)}{x^4+5}$; **c)** $p_3(x) = tan(3x - 4)$; **d)** $p_4(x) = cot(4x + 2)$

a) $x^2\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\Rightarrow x\neq\pm\sqrt{\dfrac{\pi}{2}+k\pi}$; b) il denominatore non è mai nullo, quindi $x+1>0\Rightarrow x>-1$; c) $3x-4\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\Rightarrow x\neq\dfrac{4+\pi+2k\pi}{6}$; d) $4x+2\neq k\pi\Rightarrow x\neq\dfrac{-2+k\pi}{4}$

6. **a)** $q_1(x)=\dfrac{sin(x+1)}{cos(x)}$ **;b)** $q_2(x)=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x^2+1}}$ **;c)** $q_3(x)=\dfrac{x^2+1}{x+3}-\dfrac{x}{2-x}$ **;d)** $q_4(x)=\sqrt{x+\pi}$ **;e)** $q_5(x)=\sqrt{|x+3|}$

a) $cos(x)\neq 0 \Rightarrow x\neq \pi/2+k\pi$; b) il denominatore ha sempre significato, quindi $x\geq 0$;

c) $\begin{cases} x+3\neq 0 \\ 2-x\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\neq -3 \\ x\neq 2 \end{cases}$; d) $x+\pi\geq 0 \Rightarrow x\geq -\pi$

7. **a)** $f_1(x)=\dfrac{x+\sqrt{x}}{x^2-3}$ **; b)** $f_2(x)=\dfrac{log_x(3)}{2x+1}$ **; c)** $f_3(x)=\sqrt{x+2}-\sqrt{2-3x}$ **; d)** $f_4(x)=ln(x+1)-\sqrt{1-2x}$

a) $\begin{cases} x\geq 0 \\ x^2-3\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ x\neq \pm\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \left[0;\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};+\infty\right)$; b) $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ 2x+1\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ x\neq -1/2 \end{cases} \Rightarrow (0;1)\cup(1;+\infty)$;

c) $\begin{cases} x+2\geq 0 \\ 2-3x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq -2 \\ x\leq 2/3 \end{cases} \Rightarrow \left[-2;\dfrac{2}{3}\right]$; d) $\begin{cases} x+1>0 \\ 1-2x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x\leq 1/2 \end{cases} \Rightarrow \left(-1;\dfrac{1}{2}\right]$

8. **a)** $h_1(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-9}}$ **; b)** $h_2(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x^2-9}}$ **; c)** $h_3(x)=log_3\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)$

a) $\begin{cases} x^2-4\geq 0 \\ x^2-9>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\leq -2 \vee x\geq 2 \\ x<-3 \vee x>3 \end{cases} \Rightarrow (-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$;

b) $\dfrac{x^2-4}{x^2-9}\geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2-4\geq 0 \\ x^2-9>0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2-4\leq 0 \\ x^2-9<0 \end{cases} \vee \Rightarrow \begin{cases} x\leq -2 \vee x\geq 2 \\ x<-3 \vee x>3 \end{cases} \vee \begin{cases} -2\leq x\leq 2 \\ -3<x<3 \end{cases} \Rightarrow x<-3 \vee -2\leq x\leq 2 \vee x>3$;

c) $\dfrac{x+1}{x-2}>0 \Rightarrow \begin{cases} x+1>0 \\ x-2>0 \end{cases} \vee \begin{cases} x+1<0 \\ x-2<0 \end{cases} \vee \Rightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x>2 \end{cases} \vee \begin{cases} x<-1 \\ x<2 \end{cases} \Rightarrow x<-1 \vee x>2$

9. **a)** $k_1(x)=log_{3x-1}(4x+1)$**; b)** $k_2(x)=ln[ln(2x-5)]$

a) $\begin{cases} 3x-1>0 \\ 3x-1\neq 1 \\ 4x+1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1/3 \\ x\neq 2/3 \\ x>-1/4 \end{cases} \Rightarrow \left(\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3}\right)\cup\left(\dfrac{2}{3};+\infty\right)$;

b) $\begin{cases} 2x-5>0 \\ ln(2x-5)>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>5/2 \\ 2x-5>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>5/2 \\ x>3 \end{cases} \Rightarrow x>3$

10. **a)** $m_1(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}$ **; b)** $m_2(x)=\dfrac{x+tan(x)}{sin(x)}$ **; c)** $m_3(x)=\dfrac{\sqrt{ln(2x+1)}}{\sqrt[3]{\sqrt{x-2}+1}}$ **; d)** $m_4(x)=\sqrt{\sqrt{x}-1}$

a) $\begin{cases} x+1\geq 0 \\ x-1\geq 0 \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq -1 \\ x\geq 1 \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow x\geq 1$; b) $\begin{cases} x\neq \pi/2+k\pi \\ sin(x)\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\neq \pi/2+k\pi \\ x\neq k\pi \end{cases} \Rightarrow x\neq k\dfrac{\pi}{2}$;

c) $\begin{cases} 2x+1>0 \\ ln(2x+1)\geq 0 \\ x-2\geq 0 \\ \sqrt[3]{\sqrt{x-2}+1}\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1/2 \\ 2x+1\geq 1 \\ x\geq 2 \\ \sqrt{x-2}+1\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1/2 \\ x\geq 0 \\ x\geq 2 \\ x\geq 2 \end{cases} \Rightarrow x\geq 2$; d) $\begin{cases} x\geq 0 \\ \sqrt{x}-1\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ x\geq 1 \end{cases} \Rightarrow x\geq 1$

11. **a)** $p_1(x)=\sqrt{log_5(x-2)-1}$ **; b)** $p_2(x)=cot(2x)-\dfrac{\sqrt[3]{x}}{4x+1}$ **; c)** $p_3(x)=(x+1)^x+ln(3x+1)$

a) $\begin{cases} x-2>0 \\ log_5(x-2)-1\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>2 \\ log_5(x-2)\geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>2 \\ x-2\geq 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>2 \\ x\geq 7 \end{cases} \Rightarrow x\geq 7$;

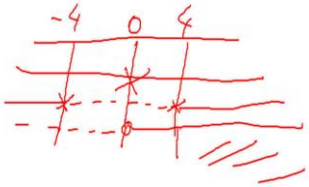
b) $\begin{cases} 2x \neq k\pi \\ 4x+1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq k\pi/2 \\ x \neq -1/4 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x+1>0 \\ 3x+1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x>-1/3 \end{cases} \Rightarrow x > -\dfrac{1}{3}$

12. **a)** $r_1(x) = ln\left(x^2-4\right) - \dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt[3]{x}}{x^4-1}$; **b)** $r_2(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1}{x}} + ln\left(x^2-16\right) - \dfrac{\sqrt[4]{x}-5}{3+x^2}$

a) $(2; +\infty)$;

Ydo: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x^2-16>0 \\ x \geq 0 \\ 3+x^2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x<-4 \vee x>4 \\ x \geq 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$



b) $x>4 \quad (4; +\infty)$

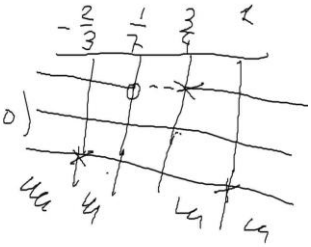
13. **a)** $q_1(x) = \sqrt{x^3-2} + ln(x^2+1) + \dfrac{\sqrt[3]{x-7}}{9-x^2}$; **b)** $q_2(x) = \sqrt[7]{x+9} + \sqrt{3x^2-2} + \dfrac{ln(x-1)}{x-x^2}$

a) $\begin{cases} x^3-2 \geq 0 \\ x^2+1>0 \\ 9-x^2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \sqrt[3]{2} \\ \forall x \in \mathbb{R} \\ x \neq \pm 3 \end{cases} \Rightarrow \left[\sqrt[3]{2}; 3\right) \cup (3; +\infty)$;

b) $\begin{cases} 3x^2-2 \geq 0 \\ x-1>0 \\ x-x^2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -\sqrt{2/3} \vee x \geq \sqrt{2/3} \\ x>1 \\ x \neq 0, x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow x>1$

14. **a)** $s_1(x) = \sqrt{3x-2} + ln(5x+1) - \dfrac{\sqrt[5]{x-4}}{3-x^2}$; **b)** $s_2(x) = \sqrt{\dfrac{7x-1}{4x-3}} + 2ln(x^2-x+3) + \dfrac{4x-1}{3x^2-x-2}$

$\begin{cases} \dfrac{7x-1}{4x-3} \geq 0 \\ x^2-x+3>0 \\ 3x^2-x-2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{7} \vee x > \frac{3}{4} \\ \forall x \in \mathbb{R} \quad (\Delta = 1-12<0) \\ x \neq \dfrac{1 \pm \sqrt{25}}{6} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{cases} \end{cases}$



Ydo: $x<-\frac{2}{3} \vee -\frac{2}{3}<x\leq\frac{1}{7} \vee \frac{3}{4}<x<1 \vee x>1 = \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{7}\right] \cup \left(\frac{3}{4}; 1\right) \cup (1; +\infty)$

a)

b) $\begin{cases} \dfrac{7x-1}{4x-3} \geq 0 \\ x^2-x+3>0 \\ 3x^2-x-2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<3/4 \vee x \geq 1/7 \\ \forall x \in \mathbb{R} \qquad (\Delta<0) \\ x \neq 1, x \neq -2/3 \end{cases} \Rightarrow \left(-\infty; -\dfrac{2}{3}\right) \cup \left(-\dfrac{2}{3}; \dfrac{1}{7}\right] \cup \left(\dfrac{3}{4}; 1\right) \cup (1; +\infty)$

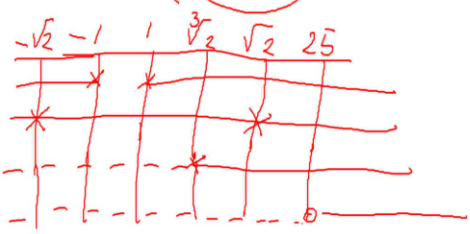
15. **a)** $t_1(x) = \left(x^2+3\right)^{sin(x)} + sin(x)^{x^2+1}$; **b)** $t_2(x) = \left(x^2-x\right)^{\sqrt{2}} + \left(x^3+1\right)^{3/5}$

$\left[\text{a) } (2k\pi; 2k\pi+\pi), k \in \mathbb{Z}; \text{b) } (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)\right]$

16. $p(x) = \log_{x^2-1}\left(x^3-2\right) + \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}-1}-2}$

$$\begin{cases} x^2-1>0 \\ x^2-1\neq 1 \\ x^3-2>0 \\ \sqrt{\sqrt{x}-1}-2\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-1 \vee x>1 \\ x^2\neq 2 \\ x>\sqrt[3]{2} \\ \sqrt{\sqrt{x}-1}\geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\neq\pm\sqrt{2} \\ \sqrt{x}-1\geq 0 \\ \sqrt{x}-1\geq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \equiv \\ \sqrt{x}-1\geq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x<-1 \vee x>1 \\ x\neq\pm\sqrt{2} \\ x>\sqrt[3]{2} \\ \sqrt{x}\geq 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \equiv \\ x\geq 25 \end{cases}$$



Sol. $x\geq 25$: $[25;+\infty)$

17. $v(x) = sin^{-1}(x^2 - x)$ **(ricorda che il dominio di** $sin^{-1}(x)$ **è [–1; 1]**

$$-1\leq x^2-x\leq 1 \Rightarrow \begin{cases} x^2-x-1\leq 0 \\ x^2-x+1\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\leq x\leq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \forall x\in\mathbb{R} \quad (\Delta<0) \end{cases} \Rightarrow \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$$

18. **a)** $t(x) = sin^{-1}(2x^2 - 3x + 1) + cos^{-1}(2x - 3)$**; b)** $u(x) = sin^{-1}ln(2x + 1)$

a) $$\begin{cases} -1\leq 2x^2-3x+1\leq 1 \\ -1\leq 2x-3\leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2-3x+2\geq 0 \\ 2x^2-3x\leq 0 \\ 2x-4\leq 0 \\ 2x-2\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x\in\mathbb{R} \ (\Delta<0) \\ 0\leq x\leq 3/2 \\ x\leq 2 \\ x\geq 1 \end{cases} \Rightarrow \left[1;\frac{3}{2}\right]$$

b) $$\begin{cases} -1\leq ln(2x+1)\leq 1 \\ 2x+1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{-1}\leq 2x+1\leq e \\ x>-1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-1+e^{-1}}{2}\leq x\leq \dfrac{-1+e}{2} \\ x>-1/2 \end{cases} \Rightarrow \left[\frac{e^{-1}-1}{2};\frac{e-1}{2}\right]$$

19. **a)** $w(x)=\sqrt{sin^{-1}(1-3x)}$**; b)** $z(x)=ln\left[cos^{-1}(4x+1)\right]$

a) $$\begin{cases} -1\leq 1-3x\leq 1 \\ sin^{-1}(1-3x)\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\leq -3x\leq 0 \\ 0\leq 1-3x\leq \pi/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0\leq x\leq 2/3 \\ -1\leq -3x\leq -1+\pi/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0\leq x\leq 2/3 \\ 1/3-\pi/6\leq x\leq 1/3 \end{cases} \Rightarrow \left[0;\frac{1}{3}\right]$$

b) $$\begin{cases} -1\leq 4x+1\leq 1 \\ cos^{-1}(4x+1)>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\leq 4x\leq 0 \\ -1\leq 4x+1\leq 1 \end{cases} \Rightarrow -1/2\leq x\leq 0$$. Ricordiamo che $cos^{-1}(x)$ è sempre positivo nel suo dominio

Determinare l'insieme di esistenza delle seguenti funzioni

20. **a)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-|3x+1|}}{|-2x+1|-|x-7|}$**; b)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x+1-|x-3|}}{\sqrt{x-|-3+x|}-|2x+5|}$**; c)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{7x+1-|5x+2|}}{|3x+1|-|-x+5|}$

a) $$\begin{cases} 1-|3x+1|\geq 0 \\ |-2x+1|-|x-7|\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |3x+1|\leq 1 \\ |-2x+1|\neq |x-7| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1\leq 3x+1\leq 1 \\ -2x+1\neq x-7 \\ -2x+1\neq -x+7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\leq 3x\leq 0 \\ -3x\neq -8 \\ -x\neq 6 \end{cases} \Rightarrow$$;

$$\Rightarrow \begin{cases} -2/3\leq x\leq 0 \\ x\neq 8/3 \\ x\neq -6 \end{cases} \Rightarrow -2/3\leq x\leq 0$$

$$\begin{cases} 2x+1-|x-3|\ge 0 \\ x-|-3+x|\ge 0 \\ \sqrt{x-|-3+x|}-|2x+5|\ne 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+1\ge |x-3| \\ x\ge |-3+x| \\ \sqrt{x-|-3+x|}\ne |2x+5| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2x+1\ge x-3 \\ x-3\ge 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x+1\ge -x+3 \\ x-3<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge -3+x \\ -3+x\ge 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x\ge 3-x \\ -3+x<0 \end{cases} \\ x-|-3+x|\ne (2x+5)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x\ge -4 \\ x\ge 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x\ge 2/3 \\ x<3 \end{cases} \\ \begin{cases} 0\ge -3 \\ x\ge 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x\ge 3/2 \\ x<3 \end{cases} \\ x-|-3+x|\ne 4x^2+20x+25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 3 \vee 2/3\le x<3 \\ x\ge 3\vee 3/2\le x<3 \\ 4x^2+19x+25\ne -|-3+x| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 2/3 \\ x\ge 3/2 \\ \begin{cases} 4x^2+19x+25\ne 3-x \\ -3+x\ge 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 4x^2+19x+25\ne -3+x \\ -3+x<0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$$

b) $$\Rightarrow \begin{cases} x\ge 2/3 \\ x\ge 3/2 \\ \begin{cases} \cancel{4}^{2}x^2+\cancel{20}^{10}x+\cancel{22}^{11}\ne 0 \\ x\ge 3 \end{cases} \vee \begin{cases} \cancel{4}^{2}x^2+\cancel{18}^{9}x+\cancel{28}^{14}\ne 0 \\ x<3 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 2/3 \\ x\ge 3/2 \\ \begin{cases} x\ne \dfrac{-5\pm\sqrt{3}}{2} \\ x\ge 3 \end{cases} \vee \begin{cases} \forall x\in\mathbb{R}\ne 0 \\ x<3 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow x\ge 3/2$$

c) $$\begin{cases} 7x+1-|5x+2|\ge 0 \\ |3x+1|\ne |-x+5| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} 7x+1-5x-2\ge 0 \\ 5x+2\ge 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 7x+1+5x+2\ge 0 \\ 5x+2<0 \end{cases} \\ 3x+1\ne -x+5 \vee 3x+1\ne x-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x\ge 1/2 \\ x\ge -2/5 \end{cases} \vee \begin{cases} x\ge -1/4 \\ x<-2/5 \end{cases} \\ x\ne 1\vee x\ne -3 \end{cases} \Rightarrow$$

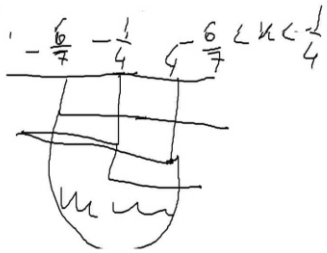
$$\Rightarrow \begin{cases} x\ge 1/2 \\ x\ne 1\vee x\ne -3 \end{cases} \Rightarrow \left[\frac{1}{2};1\right)\cup(1;+\infty)$$

21. **a)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x+5-|4x+1|}}{|-x+2|-|3x-8|}$; **b)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{3-|4x+7|}}{|-5x+3|-|8x-2|}$; **c)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-|7x-1|}}{|5x-8|-|-3x+2|}$

$$\begin{cases} 3x+5-|4x+1|\ge 0 \\ |-x+2|-|3x-8|\ne 0 \end{cases} \quad 3x+5>|4x+1| \Rightarrow \begin{cases} 3x+5>4x+1 \\ 4x+1\ge 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 3x+5>-4x-1 \\ 4x+1<0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x<4 \\ x\ge -\frac{1}{4} \end{cases} \vee \begin{cases} x>-6/7 \\ x<-\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{4}\le x<4 \vee \Rightarrow -\frac{6}{7}<x<4 \; ; \quad |-x+2|\ne|3x-8| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x+2\ne 3x-8 \vee x-2\ne 3x-8 \Rightarrow x\ne \frac{5}{2} \vee x\ne 3$$



a) $$\text{Tde} \begin{cases} -\frac{6}{7}<x<4 \\ x\ne \frac{5}{2};\ x\ne 3 \end{cases} \quad \left(-\frac{6}{7};\frac{5}{2}\right)\cup\left(\frac{5}{2};3\right)\cup(3;4)$$

b) $$\begin{cases} 3-|4x+7|\ge 0 \\ |-5x+3|\ne |8x-2| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} 3-4x-7\ge 0 \\ 4x+7\ge 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 3+4x+7\ge 0 \\ 4x+7<0 \end{cases} \\ -5x+3\ne 8x-2 \vee -5x+3\ne -8x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x\le -1 \\ x\ge -7/4 \end{cases} \vee \begin{cases} x\ge -5/2 \\ x<-7/4 \end{cases} \\ x\ne 5/13\vee x\ne -1/3 \end{cases} \Rightarrow ;$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -7/4\le x\le -1 \vee -5/2\le x<-7/4 \\ x\ne 5/13\vee x\ne -1/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5/2\le x\le -1 \\ x\ne 5/13\vee x\ne -1/3 \end{cases} \Rightarrow -5/2\le x\le -1$$

c) $\begin{cases} x-|7x-1|\ge 0 \\ |5x-8|\ne|-3x+2| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x-7x+1\ge 0 \\ 7x-1\ge 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x+7x-1\ge 0 \\ 7x-1<0 \end{cases} \\ 5x-8\ne -3x+2 \vee 5x-8\ne 3x-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x\le 1/6 \\ x\ge 1/7 \end{cases} \vee \begin{cases} x\ge 1/8 \\ x<1/7 \end{cases} \Rightarrow \\ x\ne 5/4 \vee x\ne 1/3 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 1/7\le x\le 1/6 \vee 1/8\le x<1/7 \\ x\ne 5/4 \vee x\ne 1/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1/8\le x\le 1/6 \\ x\ne 5/4 \vee x\ne 1/3 \end{cases} \Rightarrow 1/8\le x\le 1/6$

22. **a)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{4x-3+|6x+7|}}{|2x+1|+|-3x-2|}$; **b)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{7+|-2x+3|}}{|x-9|-|4x+5|}$; **c)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x-|4x-7|}}{\sqrt{|-5x+1|-x}}$

a) $4x-3+|6x-7|\ge 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x-3+6x-7\ge 0 \\ 6x-7\ge 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 4x-3-6x+7\ge 0 \\ 6x-7<0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x\ge 7/6 \end{cases} \vee \begin{cases} x\le 2 \\ x<7/6 \end{cases} \Rightarrow x\ge 7/6 \vee x<7/6 \Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}$, il denominatore è sempre non nullo perché somma di due quantità non negative che non si annullano contemporaneamente;

b) $f(x)=\dfrac{\sqrt{7+|-2x+3|}}{|x-9|-|4x+5|}$ $|x-9|\ne|4x+5| \Rightarrow x-9\ne 4x+5 \vee x-9\ne -4x-5 \Rightarrow x\ne -14/3 \vee x\ne 4/5$, il radicando è sempre non negativo, perché somma di due quantità non negative;

c) $\begin{cases} 3x-|4x-7|\ge 0 \\ |-5x+1|-x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} 3x-4x+7\ge 0 \\ 4x-7\ge 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 3x+4x-7\ge 0 \\ 4x-7<0 \end{cases} \\ \begin{cases} -5x+1-x>0 \\ -5x+1\ge 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 5x-1-x>0 \\ -5x+1<0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x\le 7 \\ x\ge 7/4 \end{cases} \vee \begin{cases} x\ge 1 \\ x<7/4 \end{cases} \\ \begin{cases} x<1/6 \\ x\le 1/5 \end{cases} \vee \begin{cases} x>1/4 \\ x>1/5 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 7/4\le x\le 7 \vee 1\le x<7/4 \\ x<1/6 \vee x>1/4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1\le x\le 7 \\ x<1/6 \vee x>1/4 \end{cases} \Rightarrow 1\le x\le 7$

23. **a)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x-5-|4x|}}{\sqrt{|-x|-|-7x+3|}}$; **b)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1+|3x+4|}}{|x+2|+\sqrt{|4x+1|-2}}$; **c)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-3-|4x-1|}}{|x+1|-|2x-7|}$

a) $\begin{cases} 3x-5-|4x|\ge 0 \\ |-x|-|-7x+3|>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} 3x-5-4x\ge 0 \\ x\ge 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 3x-5+4x\ge 0 \\ x<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+7x-3\ge 0 \\ x<0 \end{cases} \vee \begin{cases} -x+7x-3\ge 0 \\ 0\le x\le 3/7 \end{cases} \vee \begin{cases} -x-7x+3\ge 0 \\ x>3/7 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x\le -5 \\ x\ge 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x\ge 5/7 \\ x<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge 3/8 \\ x<0 \end{cases} \vee \begin{cases} x\ge 1/2 \\ 0\le x\le 3/7 \end{cases} \vee \begin{cases} x\le 3/8 \\ x>3/7 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \varnothing$

Non abbiamo continuato perché la prima disequazione non ha soluzioni, quindi non ne ha l'intero sistema;

b) $\begin{cases} x+1+|3x+4|\ge 0 \\ |4x+1|-2\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x+1+3x+4\ge 0 \\ 3x+4\ge 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x+1-3x-4\ge 0 \\ 3x+4<0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4x+1-2\ge 0 \\ 4x+1\ge 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -4x-1-2\ge 0 \\ 4x+1<0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x\ge -5/4 \\ x\ge -4/3 \end{cases} \vee \begin{cases} x\le -3/2 \\ x<-4/3 \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge 1/4 \\ x\ge -1/4 \end{cases} \vee \begin{cases} x\le -3/4 \\ x<-1/4 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$, il de-

$\Rightarrow \begin{cases} x\ge -5/4 \vee x\le -3/2 \\ x\ge 1/4 \vee x\le -3/4 \end{cases} \Rightarrow x\le -\dfrac{3}{2} \vee -\dfrac{5}{4}\le x\le -\dfrac{3}{4} \vee x\ge \dfrac{1}{4}$

nominatore essendo somma di quantità non negative che non si annullano contemporaneamente non si annulla mai, purché abbia senso il radicale;

$$\begin{cases} x-|7x-1|\ge 0 \\ |5x-8|\ne|-3x+2| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x-7x+1\ge 0 \\ 7x-1\ge 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x+7x-1\ge 0 \\ 7x-1<0 \end{cases} \\ 5x-8\ne -3x+2 \vee 5x-8\ne 3x-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x\le 1/6 \\ x\ge 1/7 \end{cases} \vee \begin{cases} x\ge 1/8 \\ x<1/7 \end{cases} \Rightarrow \\ x\ne 5/4 \vee x\ne 1/3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1/7\le x\le 1/6 \vee 1/8\le x<1/7 \\ x\ne 5/4 \vee x\ne 1/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1/8\le x\le 1/6 \\ x\ne 5/4 \vee x\ne 1/3 \end{cases} \Rightarrow 1/8\le x\le 1/6$$

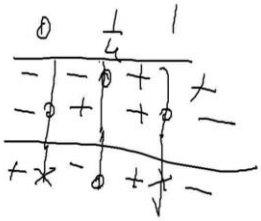
c) $$\begin{cases} x-3-|4x-1|\ge 0 \\ |x+1|\ne|2x-7| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x-3-4x+1\ge 0 \\ 4x-1\ge 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x-3+4x-1\ge 0 \\ 4x-1<0 \end{cases} \\ x+1\ne 2x-7 \vee x+1\ne -2x+7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x\le -2/3 \\ x\ge 1/4 \end{cases} \vee \begin{cases} x\ge 4/5 \\ x<1/4 \end{cases} \Rightarrow \\ x\ne 8 \vee x\ne 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varnothing \vee \varnothing \\ x\ne 8 \vee x\ne 2 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$$

Determinare gli intervalli in cui sono positive le seguenti funzioni

24. **a)** $f(x)=\dfrac{4x-1}{x-x^2}$ **; b)** $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-x^2}$ **; c)** $f(x)=\dfrac{x^2-x-1}{5x^2-4}$ **; d)** $f(x)=\dfrac{x^4-x}{2x^3-1}$

$\dfrac{4x-1}{x-x^2}>0$ $\quad x>\frac{1}{4}$ $\quad 0<x<1$



a)

b) $$\begin{cases} x^2-1>0 \\ x-x^2>0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2-1<0 \\ x-x^2<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-1 \vee x>1 \\ 0<x<1 \end{cases} \vee \begin{cases} -1<x<1 \\ x<0 \vee x>1 \end{cases} \Rightarrow \varnothing \vee -1<x<0$$

c) $$\begin{cases} x^2-x-1>0 \\ 5x^2-4>0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2-x-1<0 \\ 5x^2-4<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \vee x>\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x<-\dfrac{2}{\sqrt{5}} \vee x>\dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{cases} \vee \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}<x<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ -\dfrac{2}{\sqrt{5}}<x<\dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x<-\frac{2}{\sqrt{5}} \vee x>\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \vee \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

d) $$\begin{cases} x^4-x>0 \\ 2x^3-1>0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^4-x<0 \\ 2x^3-1<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<0 \vee x>1 \\ x>\sqrt[3]{1/2} \end{cases} \vee \begin{cases} 0<x<1 \\ x<\sqrt[3]{1/2} \end{cases} \Rightarrow x>1 \vee 0<x<\sqrt[3]{1/2}$$

25. **a)** $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+4}$ **; b)** $f(x)=\dfrac{x^2-5}{1-3x+x^2}$ **; c)** $f(x)=\dfrac{-1}{1-x+x^2}$ **; d)** $f(x)=\dfrac{x^2+x}{5x^2+x-1}$

a) Sempre positiva, dato che numero e denominatore sono entrambi sempre positivi

b) $$\begin{cases} x^2-5>0 \\ 1-3x+x^2>0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2-5<0 \\ 1-3x+x^2<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-\sqrt{5} \vee x>\sqrt{5} \\ x<\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \vee x>\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} -\sqrt{5}<x<\sqrt{5} \\ \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<x<\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x<-\sqrt{5} \vee x>\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \vee \frac{3-\sqrt{5}}{2}<x<\sqrt{5}$$

c) $1-x+x^2<0 \Rightarrow \varnothing, (\Delta<0)$

d) $\begin{cases} x^2+x>0 \\ 5x^2+x-1>0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2+x<0 \\ 5x^2+x-1<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-1 \vee x>0 \\ x<\frac{-1-\sqrt{21}}{2} \vee x>\frac{-1+\sqrt{21}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} -1<x<0 \\ \frac{-1-\sqrt{21}}{2} x<\frac{-1+\sqrt{21}}{2} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(x<-1 \vee x>\frac{-1+\sqrt{21}}{2} \right) \vee \frac{-1-\sqrt{21}}{2}<x<0$

26. **a)** $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}$ **; b)** $f(x)=\frac{2x^3-1}{x^2-11x-12}$ **; c)** $f(x)=\frac{x-1}{3x+2}$

a) $\begin{cases} x+1\geq 0 \\ 4-x\geq 0 \\ x+1>4-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq -1 \\ x\leq 4 \\ x>3/2 \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{2}<x\leq 4$

b) $\begin{cases} 2x^3-1>0 \\ x^2-11x-12>0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x^3-1<0 \\ x^2-11x-12<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1/\sqrt[3]{2} \\ x<-1 \vee x>12 \end{cases} \vee \begin{cases} x<1/\sqrt[3]{2} \\ -1<x<12 \end{cases} \Rightarrow x>12 \vee -1<x<\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

c) $\begin{cases} x-1>0 \\ 3x+2>0 \end{cases} \vee \begin{cases} x-1>0 \\ 3x+2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ x>-\frac{2}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x<1 \\ x<-\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow x>1 \vee x<-\frac{2}{3}$

27. **a)** $f(x) = ln(3x^2 - x - 1) - 2$**; b)** $f(x) = log_2(x) + log_2(3x - 1)$**; c)** $f(x)=\frac{4x^2+1}{4-3x}$

a) $\begin{cases} 3x^2-x-1>0 \\ ln\left(3x^2-x-1\right)>2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<\frac{1-\sqrt{13}}{6} \vee x>\frac{1+\sqrt{13}}{6} \\ 3x^2-x-1>e^2 \end{cases} \vee \begin{cases} x<\frac{1-\sqrt{13}}{6} \vee x>\frac{1+\sqrt{13}}{6} \\ x<\frac{1-\sqrt{13+12e^2}}{6} \vee x>\frac{1+\sqrt{13+12e^2}}{6} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x<\frac{1-\sqrt{13+12e^2}}{6} \vee x>\frac{1+\sqrt{13+12e^2}}{6}$

b) $\begin{cases} x>0 \\ 3x-1>0 \\ log_2\left[x\cdot(3x-1)\right]>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x>1/3 \\ x\cdot(3x-1)>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x>1/3 \\ 3x^2-x-1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x>1/3 \\ x<\frac{1-\sqrt{13}}{6} \vee x>\frac{1+\sqrt{13}}{6} \end{cases} \Rightarrow x>\frac{1+\sqrt{13}}{6}$

c) $4 - 3x > 0 \Rightarrow x < 4/3$; il numeratore è sempre positivo

28. **a)** $f(x) = log_{4x-1}(5x + 2)$**; b)** $f(x)=log_{x^2-x}(3-2x)$ **; c)** $f(x) = log_{2x+5}(x^2 - 16)$

a) $\begin{cases} 0<4x-1<1 \\ 0<5x+2<1 \end{cases} \vee \begin{cases} 4x-1>1 \\ 5x+2>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1/4<x<1/2 \\ -2/5<x<-1/5 \end{cases} \vee \begin{cases} x>1/2 \\ x>-1/5 \end{cases} \Rightarrow \varnothing \vee x>\frac{1}{2} \Rightarrow x>\frac{1}{2}$

b) $\begin{cases} 0<x^2-x<1 \\ 0<3-2x<1 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2-x>1 \\ 3-2x>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x<0 \vee x>1) \wedge \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \\ 1<x<3/2 \end{cases} \vee \begin{cases} x<\frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee x>\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x<1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1-\sqrt{5}}{2}<x<0 \wedge 1<x<\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1<x<3/2 \end{cases} \vee x<\frac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow 1<x<\frac{3}{2} \vee x<\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

c) $\begin{cases} 0<2x+5<1 \\ 0<x^2-16<1 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x+5>1 \\ x^2-16>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5/2<x<-2 \\ (x<-4 \vee x>4) \wedge -\sqrt{17}<x<\sqrt{17} \end{cases} \vee \begin{cases} x>-2 \\ x<-\sqrt{17} \vee x>\sqrt{17} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -5/2<x<-2 \\ -\sqrt{17}<x<-4 \vee 4<x\sqrt{17} \end{cases} \vee x>\sqrt{17} \Rightarrow \varnothing \vee x>\sqrt{17} \Rightarrow x>\sqrt{17}$

29. **a)** $f(x) = log_{3x+2}(7x-2)$; **b)** $f(x)=\dfrac{log_{11x+12}(4x+3)}{x+1}$; **c)** $f(x)=\dfrac{x}{log_{4x-1}(7-2x)}$

a) $\begin{cases} 0<3x+2<1 \\ 0<7x-2<1 \end{cases} \vee \begin{cases} 3x+2>1 \\ 7x-2>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2/3<x<-1/3 \\ 2/7<x<3/7 \end{cases} \vee \begin{cases} x>-1/3 \\ x>3/7 \end{cases} \Rightarrow \varnothing \vee x>\dfrac{3}{7} \Rightarrow x>\dfrac{3}{7}$

b) $\begin{cases} 0<11x+12<1 \\ 0<4x+3<1 \\ x+1>0 \end{cases} \vee \begin{cases} 11x+12>1 \\ 4x+3>1 \\ x+1>0 \end{cases} \vee \begin{cases} 0<11x+12<1 \\ 4x+3>1 \\ x+1<0 \end{cases} \vee \begin{cases} 11x+12>1 \\ 0<4x+3<1 \\ x+1<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -12/11<x<-1 \\ -3/4<x<-1/2 \\ x>-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x>-1 \\ x>-1/2 \\ x>-1 \end{cases} \vee$

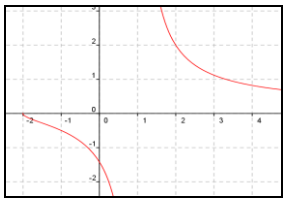
$\vee \begin{cases} -12/11<x<-1 \\ x>-1/2 \\ x<-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x>-1 \\ -3/4<x<-1/2 \\ x<-1 \end{cases} \Rightarrow \varnothing \vee x>-\dfrac{1}{2} \vee \varnothing \vee \varnothing \Rightarrow x>-\dfrac{1}{2}$

c) $\begin{cases} 0<4x-1<1 \\ 0<7-2x<1 \\ x>0 \end{cases} \vee \begin{cases} 4x-1>1 \\ 7-2x>1 \\ x>0 \end{cases} \vee \begin{cases} 0<4x-1<1 \\ 7-2x>1 \\ x<0 \end{cases} \vee \begin{cases} 4x-1>1 \\ 0<7-2x<1 \\ x<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1/4<x<1/2 \\ 3<x<7/2 \\ x>0 \end{cases} \vee \begin{cases} x>1/2 \\ x<3 \\ x>0 \end{cases} \vee$

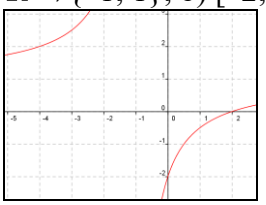
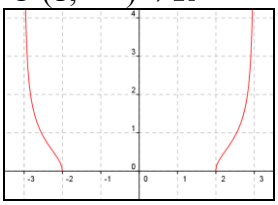
$\vee \begin{cases} 1/4<x<1/2 \\ x<3 \\ x<0 \end{cases} \vee \begin{cases} x>1/2 \\ 3<x<7/2 \\ x<0 \end{cases} \Rightarrow \varnothing \vee \dfrac{1}{2}<x<3 \vee \varnothing \vee \varnothing \Rightarrow \dfrac{1}{2}<x<3$

Determinare dominio e codominio delle seguenti funzioni ipotizzando un andamento simile anche laddove non abbiamo informazioni grafiche. $\mathbb{Z}_d$ indica i numeri interi relativi dispari.

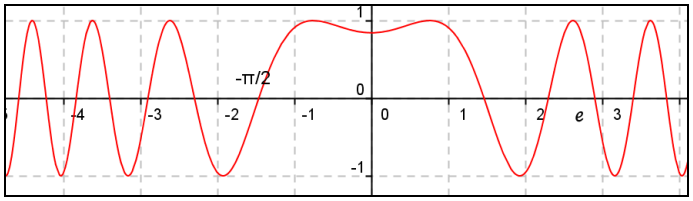
30. **a)**

b) 

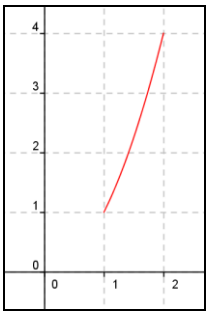
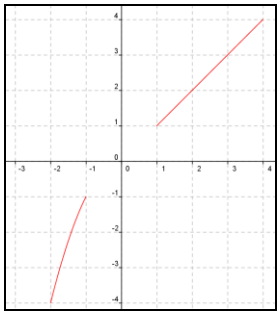
a) $\mathbb{R} \to \{-1; 1\}$; b) $[-2; 1) \cup (1; +\infty) \to \mathbb{R}$

31. **a)** 
b) 

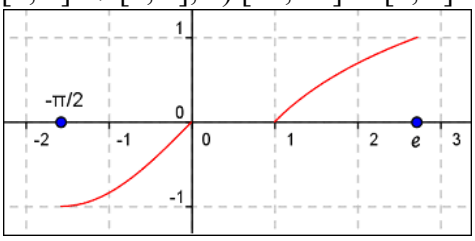
a) $\mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$; b) $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty) \to \mathbb{R}_0^+$

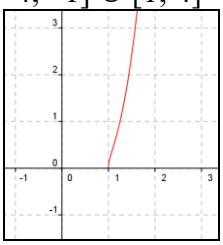
32. 

$\mathbb{R} \to [-1; 1]$

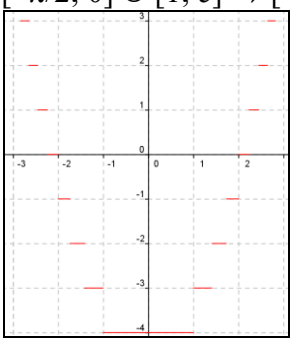
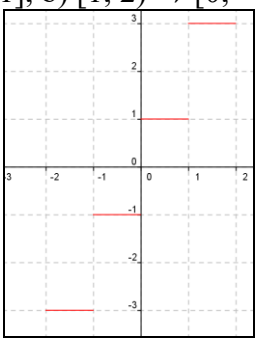
33. **a)**  **b)** 

a) $[1; 2] \to [1; 4]$; b) $[-2; -1] \cup [1; 4] \to [-4; -1] \cup [1; 4]$

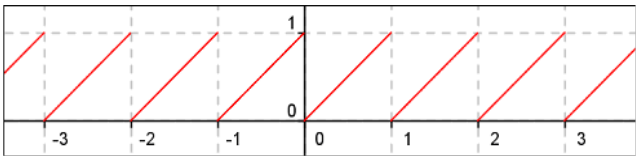
34. **a)** 

b) 

a) $[-\pi/2; 0] \cup [1; e] \to [-1; 1]$; b) $[1; 2) \to [0; +\infty)$

35. **a)**  **b)** 

$\mathbb{R} \to [-4; +\infty) \cap \mathbb{Z}$; b) $\mathbb{R} \to \mathbb{Z}_d$

36. **a)** 

b)

a) $\mathbb{R} \to [0; 1]$; b) $\mathbb{R} \to \{1; 2\}$

Determinare il codominio delle seguenti funzioni

37. **a)** $f(x) = 3x - 1$; **b)** $f(x) = x^2 + 1$; **c)** $f(x) = -x^2 - 3$; **d)** $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

a) è una retta non parallela a uno degli assi, quindi $\mathbb{R}$; b) facilmente si ha: $x^2 + 1 \geq 1$, quindi: $[1; +\infty)$; c) facilmente si ha: $-x^2 - 3 \leq -3$, quindi: $(-\infty; -3]$;

d) Risolviamo: $y = \dfrac{x+1}{x-1} \Rightarrow x(y-1) = y+1 \Rightarrow x = \dfrac{y+1}{y-1}$, che ha senso sempre tranne che per $y = 1$, quindi: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

38. **a)** $f(x) = (x^2 + 3)^2$; **b)** $f(x) = x^4 + 4x^2 + 5$; **c)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2+5}$; **d)** $f(x) = e^{2x-1}$

a) facilmente si ha: $(x^2 + 3)^2 \geq 3^2 = 9$, quindi: $[9; +\infty)$; b) facilmente si ha: $x^4 + 4x^2 + 5 \geq 5$, quindi: $[5; +\infty)$; c) facilmente si ha: $x^2 + 5 \geq 5 \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{x^2+5} \leq \dfrac{1}{5}$, quindi: $(0; 1/5]$; d) Gli esponenziali sono sempre positivi, quindi $(0; +\infty)$

39. **a)** $f(x) = \sin(3x - 1)$; **b)** $f(x) = 3\sin(4x)$; **c)** $f(x) = 2^{x+1}$; **d)** $f(x) = \sqrt{x+1}$

a) Il seno, quale che sia il suo argomento, ha codominio: $[-1; 1]$; b) Da a) dato che vi è il fattore 3, diventa: $[-3; 3]$; c) Esponenziale: $(0; +\infty)$; d) Il radicando è definito per $x \geq -1$, per questi valori il radicando assume tutti i valori da 0 in poi, quindi: $[0;+\infty)$

40. **a) $f(x) = csc(2x - 1)$; b) $f(x)=\sqrt{2x^2+5}$; c) $f(x) = 1 - cos(-x + 5)$; d) $f(x)=\frac{-1}{2x^2+3}$**

a) secante e cosecante hanno codominio $(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$; b) il radicando non si annulla, ma è sempre maggiore o uguale a 5, pertanto: $\left[\sqrt{5};+\infty\right)$; c) per quanto detto su seni e coseni si ha: [1 – 1; 1 – (– 1)] = [0; 2]; $2x^2 + 3 \geq 3 \Rightarrow -\frac{1}{3}\leq-\frac{1}{2x^2+3}<0$

41. **a) $f(x)=\frac{1}{2+3\cdot sin(x)}$; b) $f(x)=\frac{-2}{1-4\cdot cos(2x)}$; c) $f(x)=x+\sqrt{x}$**

a) $-1 = 2 - 3 \leq 2 + 3\, sin(x) \leq 2 + 3 = 5 \Rightarrow -1 \leq 2 + 3sin(x) \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{2+3\cdot sin(x)}\leq 1,\ 0 \leq 2 + 3sin(x) \leq 5$

$\Rightarrow \frac{1}{2+3\cdot sin(x)}\geq\frac{1}{5}\Rightarrow cod(f)=(-\infty;-1]\cup\left[\frac{1}{5};+\infty\right)$

b) $-1 \leq cos(2x) \leq 1 \Rightarrow -4 \leq 4cos(2x) \leq 4 \Rightarrow -4 \leq -4cos(2x) \leq 4 \Rightarrow -3 \leq 1 - 4cos(2x) \leq 5 \Rightarrow 1 - 4cos(2x) \leq 5 \Rightarrow \frac{1}{1-4\cdot cos(2x)}\geq\frac{1}{5}\Rightarrow\frac{-2}{1-4\cdot cos(2x)}\leq-\frac{2}{5}$, $-3 \leq 1 - 4cos(2x) \Rightarrow \frac{1}{1-4\cdot cos(2x)}\leq-\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{-2}{1-4\cdot cos(2x)}\geq\frac{2}{3}$;

c) Dato che il dominio è $x \geq 0$, si ha anche $x+\sqrt{x}\geq 0:\mathbb{R}_0^+$

42. **a) $f(x)=\sqrt{sin^2(4x+2)+1}$; b) $f(x)=\sqrt{1+2\cdot cos(x^2)}$; c) $f(x) = sin^{-1}(3x + 4)$**

a) $-1 \leq sin(4x + 2) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq sin^2(4x + 2) \leq 1 \Rightarrow 1 \leq sin^2(4x + 2) + 1 \leq 2 \Rightarrow 1\leq\sqrt{sin^2(4x+2)+1}\leq\sqrt{2}$; b) $-1 \leq cos(x^2) \leq 1 \Rightarrow 1 - 2 \leq 1 + 2cos(x^2) \leq 1 + 2 \Rightarrow 0\leq\sqrt{1+2cos(x^2)}\leq\sqrt{3}$; c) $-\pi/2 \leq sin^{-1}(3x + 4) \leq \pi/2$

43. **a) $f(x) = sin^{-1}(x^2)$; b) $f(x)=\frac{ln(x)}{1+ln(x)}$; c) $f(x)=\sqrt{sin^{-1}(x)}$; d) $f(x) = ln[cos^{-1}(2x - 1)]$**

a) $0 \leq sin^{-1}(x^2) \leq \pi/2$;

b) $y=\frac{ln(x)}{1+ln(x)}\Rightarrow ln(x)\cdot(1-y)=y, x>0, x\neq e^{-1}\Rightarrow ln(x)=\frac{y}{1-y}, x>0, x\neq e^{-1}\Rightarrow x=e^{\frac{y}{1-y}}\Rightarrow y\neq 1$

c) $-\pi/2 \leq sin^{-1}(x) \leq \pi/2 \Rightarrow 0\leq\sqrt{sin^{-1}(x)}\leq\sqrt{\pi/2}$;

d) $0 \leq cos^{-1}(2x - 1) \leq \pi \Rightarrow ln[cos^{-1}(2x - 1)] \leq ln(\pi)$

44. **a) $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-4}$; b) $f(x)=\frac{x^2-2}{1-x}$; c) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+1}$**

a) $dom(f)$: $x \neq \pm 2$, $y=\frac{x^2-1}{x^2-4}\Rightarrow yx^2-4y-x^2+1=0\Rightarrow(y-1)x^2=4y-1\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{4y-1}{y-1}}\Rightarrow y\leq\frac{1}{4}\vee y>1$

b) $y=\frac{x^2-2}{1-x}\Rightarrow y-xy-x^2+2=0, x\neq 1\Rightarrow x^2+xy-2-y=0\Rightarrow x=\frac{-y\pm\sqrt{y^2+8+4y}}{2}\Rightarrow$;

$\Rightarrow y^2+4y+8\geq 0\Rightarrow\Delta=16-32<0\Rightarrow\forall y\in\mathbb{R}$

$$y=\frac{\sqrt{x}}{x+1}\Rightarrow xy+y-\sqrt{x}=0\Rightarrow\left(\sqrt{x}=z\right)yz^2-z+y=0\Rightarrow z=\frac{1\pm\sqrt{1-4y^2}}{2y}\Rightarrow$$

c) $$\Rightarrow\begin{cases}1-4y^2\ge 0\\ \dfrac{1+\sqrt{1-4y^2}}{2y}\ge 0\vee\dfrac{1-\sqrt{1-4y^2}}{2y}\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\le y\le\dfrac{1}{2}\\ y>0\vee\begin{cases}1-\sqrt{1-4y^2}\ge 0\\ y>0\end{cases}\vee\begin{cases}1-\sqrt{1-4y^2}\le 0\\ y<0\end{cases}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\le y\le\dfrac{1}{2}\\ y>0\vee\begin{cases}\cancel{1}\ge\cancel{1}-4y^2\\ y>0\end{cases}\vee\begin{cases}\cancel{1}\le\cancel{1}-4y^2\\ y<0\end{cases}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\le y\le\dfrac{1}{2}\\ y>0\vee\begin{cases}\forall y\in\mathbb{R}\\ y>0\end{cases}\vee\begin{cases}y=0\\ y<0\end{cases}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\le y\le\dfrac{1}{2}\\ y>0\end{cases}\Rightarrow 0<y\le\frac{1}{2}$$

45. **a)** $f(x)=\dfrac{x^2+1}{3-x^2}$ **; b)** $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{1-x-x^2}$ **; c)** $f(x)=\dfrac{x^4+1}{5-2x^4}$ **; d)** $f(x)=\dfrac{x^2-x-1}{2-x^2}$

a) $y=\dfrac{x^2+1}{3-x^2}\Rightarrow x^2(1+y)=3y-1\Rightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{3y-1}{1+y}}\Rightarrow\dfrac{3y-1}{1+y}\ge 0\Rightarrow y<-1\vee y\ge\dfrac{1}{3}$;

b) $$y=\frac{x^2+x+1}{1-x-x^2}\Rightarrow(1+y)x^2+(1+y)x+1-y=0\Rightarrow x=\frac{-1-y\pm\sqrt{1+y^2+2y-4+4y^2}}{2+2y}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=\frac{-1-y\pm\sqrt{5y^2+2y-3}}{2+2y}\Rightarrow 5y^2+2y-3\ge 0,\ y\ne-1\Rightarrow y<-1\vee y\ge\frac{3}{5}$$;

c) $y=\dfrac{x^4+1}{5-2x^4}\Rightarrow(1+2y)x^4=5y-1\Rightarrow x=\pm\sqrt[4]{\dfrac{5y-1}{1+2y}}\Rightarrow\dfrac{5y-1}{1+2y}\ge 0\Rightarrow y<-\dfrac{1}{2}\vee y\ge\dfrac{1}{5}$;

d) $$y=\frac{x^2-x-1}{2-x^2}\Rightarrow(1+y)x^2-x-1-2y=0\Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+4(1+y)(1+2y)}}{1+y}=\frac{1\pm\sqrt{8y^2+12y+5}}{1+y}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 8y^2+12y+5\ge 0,\ y\ne-1\Rightarrow\Delta=144-160<0,\ y\ne-1\Rightarrow y\ne-1$$

In effetti però se $y=-1$, si ha: $-x-1+2=0\Rightarrow x=1$, quindi il codominio è $\mathbb{R}$

Determinare i valori del parametro reale m, in modo che il dominio delle seguenti funzioni sia $\mathbb{R}$

46. **a)** $\dfrac{4x^2-3x}{7mx^2-3x+1}$ **; b)** $\sqrt[4]{mx^2+x+m}$ **; c)** $\boldsymbol{ln(mx^2+2)}$

a) Deve essere $7mx^2-3x+1\ne 0\Rightarrow x\ne\dfrac{3\pm\sqrt{9-28m}}{14m}$, quindi dobbiamo fare in modo che il radicando sia negativo, in modo tale che non dobbiamo escludere alcun numero, pertanto deve essere: $m>9/28$;

b) Deve essere $mx^2+x+m\ge 0$ per ogni x reale $\Rightarrow\begin{cases}m>0\\ \Delta=1-4m^2<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m>0\\ m<-1/2\vee m>1/2\end{cases}\Rightarrow m>\dfrac{1}{2}$, $m>½$. Se $m=½$ si ha: x^2+2x+1 che è sempre non negativo, pertanto deve essere $m\ge 1/2$;

c) Deve essere $mx^2+2>0$, perciò se $m>0$ va bene; se $m<0\Rightarrow x^2<-\dfrac{2}{m}$, e quindi non va bene per ogni x, pertanto deve essere: $m>0$

47. **a)** $\dfrac{3x^2-2x}{mx^2-mx+1}$ **; b)** $\boldsymbol{log_{m+1}(mx^2-3x+2)}$**; c)** $\sqrt[6]{mx^2-1}$

a) Deve essere $mx^2-m+1\ne 0\Rightarrow x\ne\dfrac{m\pm\sqrt{m^2-4m}}{2m}$, quindi dobbiamo fare in modo che il radicando sia negativo, in modo tale che non dobbiamo escludere alcun numero, pertanto deve essere: $0<m<4$;

b) Deve essere $\begin{cases} mx^2-3x+2>0 \\ m+1>0 \\ m+1\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mx^2-3x+2>0 \\ m>-1 \\ m\neq 0 \end{cases} \begin{cases} m>0, \Delta=9-8m<0 \\ m>-1 \\ m\neq 0 \end{cases} \Rightarrow m>\frac{9}{8}$. Se $m = 9/8$, l'argomento del logaritmo diviene un quadrato perfetto che può anche essere nullo, pertanto non va bene: $m > 9/8$;

c) Deve essere $mx^2 - 1 \geq 0$ per ogni x reale, che non accade mai, perché se $m < 0$ è sempre negativo, mentre se $m > 0$ si ha $x \leq -\sqrt{\frac{1}{m}} \vee x \geq \sqrt{\frac{1}{m}}$, pertanto non è possibile rispettare la consegna.

Determinare i valori del parametro reale m, in modo che il dominio delle seguenti funzioni sia quello indicato accanto

48. **a)** $\frac{x^2-1}{3mx-1}$, $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$; **b)** $\frac{1}{x^2-mx+2}$, $\mathbb{R}\setminus\{-1; 3\}$; **c)** $\frac{1}{6x^2+mx-3}$, $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{3}{2};\frac{1}{3}\right\}$

a) Deve essere $3m(1/2) - 1 = 0 \Rightarrow m = 2/3$; b) Deve essere $\begin{cases} (-1)^2-m(-1)+2=0 \\ 3^2-3m+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=-3 \\ m=11/3 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$;

c) Deve essere $\begin{cases} 6(-3/2)^2-3/2m-3=0 \\ 6(1/3)^2+1/3m-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3/2m=27/2-3 \\ 1/3m=3-2/3 \end{cases} \begin{cases} m=7 \\ m=7 \end{cases} \Rightarrow m=7$

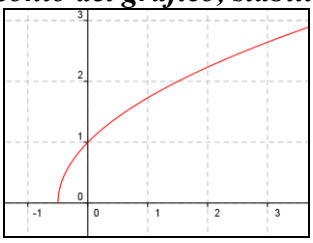
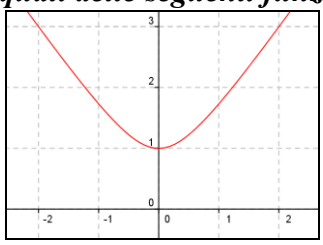
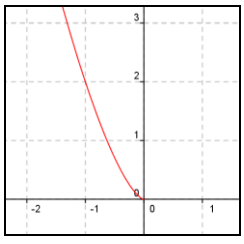
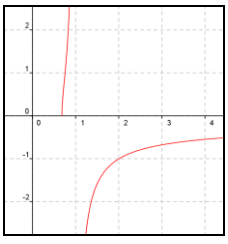
49. **a)** $\sqrt{4mx-1}, \left[\frac{2}{3};+\infty\right)$; **b)** $\boldsymbol{ln(3-4mx)}$, **(–∞; –1); c)** $\boldsymbol{ln(3-4mx)}$, **(–1; +∞)**

a) Deve essere $4m(2/3) - 1 = 0 \Rightarrow m = 3/8$; b) Deve essere $3 - 4m(-1) = 0 \Rightarrow 3 + 4m = 0 \Rightarrow m = -3/4$, dobbiamo però controllare se il dominio ha -1 come estremo superiore o inferiore. Si ha $ln(3 + 3x)$, il cui dominio è $3 + 3x > 0$, cioè $x > -1$, quindi il problema non ha soluzioni;

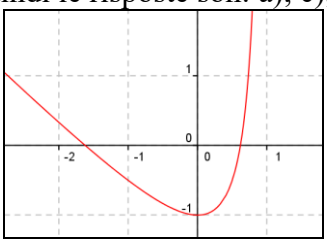
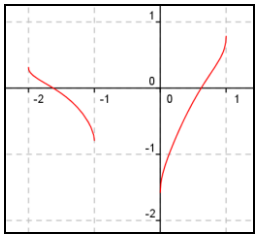
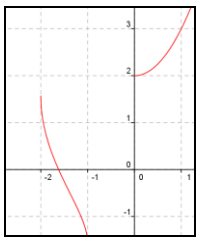
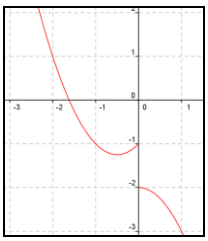
c) Tenuto conto del caso b) stavolta va bene $m = -3/4$

Iniettività e suriettività di una funzione. Funzioni invertibili

Tenuto conto del grafico, stabilire quali delle seguenti funzioni sono iniettive nel loro insieme di esistenza

1. **a)**  **b)**  **c)**  **d)** 

Basta considerare quelle curve per cui una qualsiasi parallela all'asse x le incontra al più in un punto, quindi le risposte son: a); c); d)

2. **a)**  **b)**  **c)**  **d)** 

Ragionando come prima: c)

Stabilire quali delle seguenti funzioni sono iniettive nel loro insieme di esistenza

3. **a)** $f(x)=\frac{24x+5}{17x-9}$; **b)** $\boldsymbol{f(x) = 5x - 1}$; **c)** $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 1}$; **d)** $f(x)=\sqrt{x^2-x}$; **e)** $\boldsymbol{f(x) = e^{2x-1}}$

a) $\frac{24x_1+5}{17x_1-9}=\frac{24x_2+5}{17x_2-9} \Rightarrow \cancel{24\cdot 17x_1x_2}+85x_2-231x_1\cancel{-45}=\cancel{24\cdot 17x_1x_2}+85x_1-231x_2\cancel{-45} \Rightarrow 316x_1=316x_2 \Rightarrow x_1=x_2$

iniettiva;

b) $5x_1 - 1 = 5x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2$, iniettiva;

c) $x_1^2 \cancel{-1} = x_2^2 \cancel{-1} \Rightarrow x_1 = \pm x_2$, non iniettiva;

d) Non iniettiva. Per esempio: $\sqrt{x^2 - x} = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 1$;

e) $e^{2x-1} = e^{2y-1} \Rightarrow 2x - 1 = 2y - 1 \Rightarrow x = y$, iniettiva;

4. **a)** $f(x) = \dfrac{4x-1}{11x+3}$; **b)** $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$; **c)** $f(x) = x^3$; **d)** $f(x) = 2x^2 - x + 1$; **e)** $f(x) = sin^{-1}(x + 3)$

a) $\dfrac{4x_1-1}{11x_1+3} = \dfrac{4x_2-1}{11x_2+3} \Rightarrow \cancel{44x_1x_2} - 11x_2 + 12x_1 \cancel{-3} = \cancel{44x_1x_2} - 11x_1 + 12x_2 \cancel{-3} \Rightarrow 23x_1 = 23x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$, iniettiva;

b) Non iniettiva. Per esempio: $\dfrac{x^2+1}{x} = 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$;

c) $x^3 = y^3 \Rightarrow x = y$, iniettiva;

d) Non iniettiva. Per esempio: $2x^2 - x + 1 = 1 \Rightarrow x = 0 \vee x = 1/2$;

e) $sin^{-1}(x + 3) = sin^{-1}(y + 3) \Rightarrow x + 3 = y + 3 \Rightarrow x = y$, iniettiva;

5. **a)** $f(x) = \sqrt{x^3+1}$; **b)** $f(x) = |x|$; **c)** $f(x) = \sqrt[3]{x^2-1}$; **d)** $f(x) = \dfrac{|x+1|}{x-1}$; **e)** $f(x) = ln(x^2 + 2)$

a) $\sqrt{x_1^3+1} = \sqrt{x_2^3+1} \Rightarrow x_1^3 + 1 = x_2^3 + 1 \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2$, iniettiva;

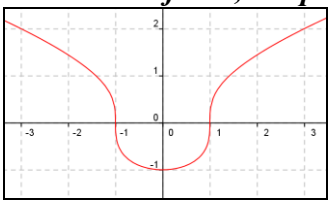
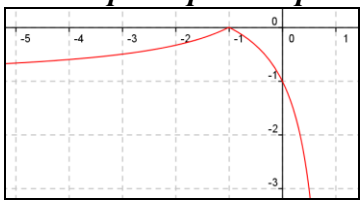
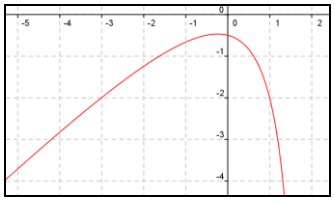
b) Non iniettiva, per esempio $|3| = |-3|$;

c) Non iniettiva, per esempio $\sqrt[3]{1^2-1} = \sqrt[3]{(-1)^2-1} = 0$;

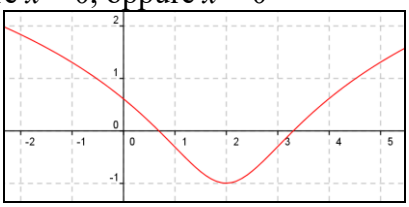
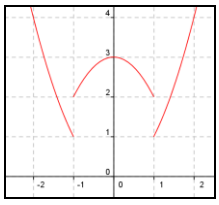
d) Non iniettiva, per esempio $\dfrac{|-3+1|}{-3-1} = -\dfrac{1}{2}, \dfrac{|-1/3+1|}{-1/3-1} = -\dfrac{1}{2}$;

e) Non iniettiva, per esempio $ln(2^2 + 2) = ln((-2)^2 + 2) = ln(6)$;

Determinare una restrizione delle seguenti funzioni affinché esse risultino iniettive, ovviamente le risposte possono essere infinite, noi proponiamo quelle più "ampie"

6. **a)**  **b)**  **c)** 

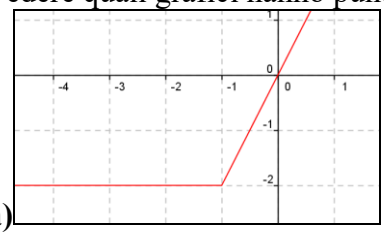
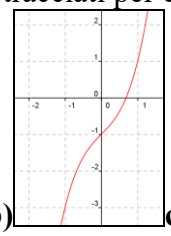
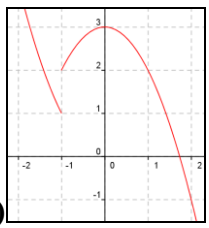
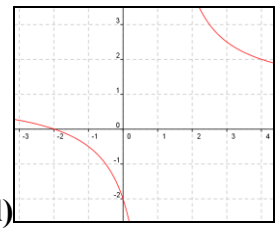
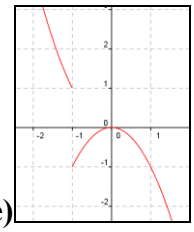
a) Basta considerare $x < 0$, oppure $x > 0$; b) Basta considerare $x < -1$, oppure $x > -1$; c) Basta considerare $x < 0$, oppure $x > 0$

7. **a)**  **b)** 

a) Basta considerare $x < 2$, oppure $x > 2$; b) Basta considerare $x < -1$, oppure $x > 1$, o ancora $[0; 1]$ e così via

Stabilire quali delle seguenti funzioni sono suriettive su tutti i reali

Basta vedere quali grafici hanno punti tracciati per qualsiasi ordinata visibile

8. **a)**  **b)**  **c)**  **d)**  **e)** 

Solo b) e c)

Livello 2

9. **a)** $f(x)=\frac{x+5}{x-1}$; **b)** $f(x) = 2 - 3x$; **c)** $f(x) = -x^2 - 1$; **d)** $f(x)=\sqrt{x^2-1}$; **e)** $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+3}$

a) $y=\frac{x+5}{x-1}\Rightarrow x(y-1)=5+y\Rightarrow x=\frac{y+5}{y-1}\Rightarrow y\neq 1$, non suriettiva;

b) $y = 2 - 3x \Rightarrow x = 2/3 - y/3$, suriettiva;

c) Non suriettiva perché assume solo valori negativi;

d) Non suriettiva perché assume solo valori non negativi;

e) $y=\frac{x^2-1}{x^2+3}\Rightarrow (y-1)x^2=-1-3y\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{3y+1}{1-y}}\Rightarrow -\frac{1}{3}\leq y<1$, non suriettiva;

10. **a)** $f(x)=\frac{2x^2+1}{3x-2}$; **b)** $f(x) = x^3 + x - 1$; **c)** $f(x) = x^2 - 5x + 6$; **d)** $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$; **e)** $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$

a) $y=\frac{2x^2+1}{3x-2}\Rightarrow 2x^2-3yx+1+2y=0\Rightarrow \Delta=9y^2-8y-8\geq 0\Rightarrow y\leq\frac{4-\sqrt{88}}{9}\vee y\geq\frac{4+\sqrt{88}}{9}$, non suriettiva

b) $y = x^3 + x - 1$, ha sempre soluzioni per ogni y, perché equazione di grado dispari che ha sempre almeno una soluzione reale, suriettiva;

c) Non suriettiva per esempio $-1 = x^2 - 5x + 6 \Rightarrow x^2 - 5x + 7 = 0 \Rightarrow \Delta = 25 - 28 < 0$;

d) $y=\sqrt[3]{x-1}\Rightarrow x=y^3+1$, suriettiva;

e) Non suriettiva perché assume solo valori positivi;

11. **a)** $f(x) = |x| - |2x + 1|$; **b)** $f(x) = (x^3 + 1)^2$; **c)** $f(x) = ln(3x + 1)$; **d)** $f(x)=e^{x^2-1}$; **e)** $f(x) = tan(4x - 1)$

a) Non suriettiva, perché non assume valori superiori per esempio ad 1;

b) Non suriettiva perché assume solo valori non negativi;

c) $y = ln(3x + 1) \Rightarrow x = (e^y - 1)/3$, suriettiva;

d) Non suriettiva perché assume solo valori positivi;

e) Suriettiva perché la tangente assume tutti i valori reali;

Dopo avere verificato che le seguenti funzioni sono iniettive, determinarne le funzioni inverse nel loro insieme di esistenza

Lasciamo le verifiche di iniettività per esercizio, sono del tutto simili a quelle degli esercizi precedenti

12. **a)** $f(x)=\frac{7x+2}{15x-1}$; **b)** $g(x)=\frac{1}{2}x-\frac{4}{3}$; **c)** $h(x)=log_3\left(\sqrt{x}\right)$

a) $y=\frac{7x+2}{15x-1}\Rightarrow (15x-7)y=x+2\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+2}{15x-7}$

b) $y=\frac{1}{2}x-\frac{4}{3}\Rightarrow g^{-1}(x)=2x+\frac{8}{3}$;

c) $y=log_3\left(\sqrt{x}\right)\Rightarrow\sqrt{x}=3^y\Rightarrow h^{-1}(x)=3^{2x}$

13. **a)** $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$; **b)** $g(x)=\sqrt{x-1}$; **c)** $h(x)=e^{\frac{x+1}{x-1}}$; **d)** $p(x)=\frac{8x+4}{-7x+1}$

a) $y=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\Rightarrow\frac{x-1}{x+1}=y^2\Rightarrow (y^2-1)x=-1-y^2\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x^2+1}{1-x^2}, x>0$

b) $y=\sqrt{x-1}\Rightarrow x-1=y^2\Rightarrow g^{-1}(x)=x^2+1, x>0$;

c) $y=e^{\frac{x+1}{x-1}}\Rightarrow\frac{x+1}{x-1}=ln(y)\Rightarrow (ln(y)-1)=ln(y)+1\Rightarrow h^{-1}(x)=\frac{ln(x)+1}{ln(x)-1}$

d) $y=\frac{8x+4}{-7x+1}\Rightarrow (8+7y)x=y-4\Rightarrow p^{-1}(x)=\frac{x-4}{7x+8}$

14. **a)** $f(x) = x^3 + 1$; **b)** $g(x) = e^{1-x}$; **c)** $h(x) = ln(x + 1)$

a) $y=x^3+1\Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-1}$

b); $y = e^{1-x} \Rightarrow 1 - x = ln(y) \Rightarrow g^{-1}(x) = 1 - ln(x)$

c) $y = ln(x+1) \Rightarrow x + 1 = e^{y} \Rightarrow h^{-1}(x) = e^{x} - 1$

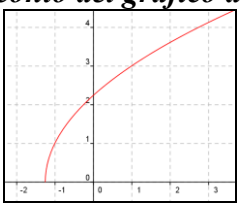
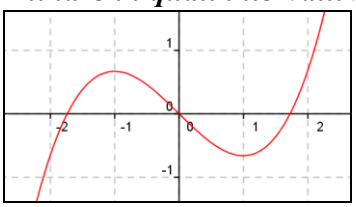
15. La somma di due funzioni iniettive è sempre una funzione iniettiva? Giustificare la risposta.

No, per esempio $f(x) = \sqrt{-x}, x < 0, g(x) = \sqrt{x}, x > 0 \Rightarrow f(x) + g(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & x < 0 \\ \sqrt{x} & x \geq 0 \end{cases}$

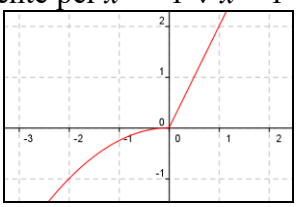
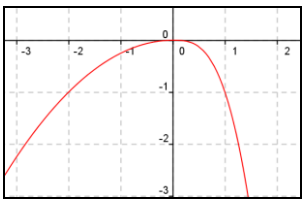
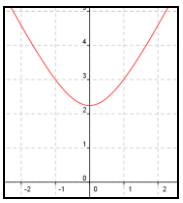
16. **Una funzione lineare del tipo $y = ax + b, a \neq 0$ è iniettiva su qualsiasi sottoinsieme dei reali. La somma di due funzioni lineari è sempre iniettiva? Giustificare la risposta.**

No $f(x) = x + 1, x < 0, g(x) = -x + 2, x > 0 \Rightarrow f(x) + g(x) = \begin{cases} x + 1 & x < 0 \\ -x + 2 & x \geq 0 \end{cases}$

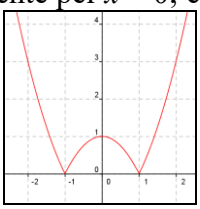
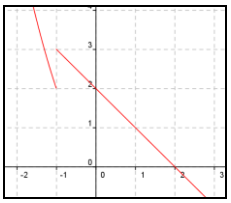
Tenuto conto del grafico determinare in quali intervalli sono crescenti, costanti o decrescenti

17. a)  **b)** 

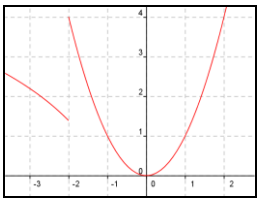
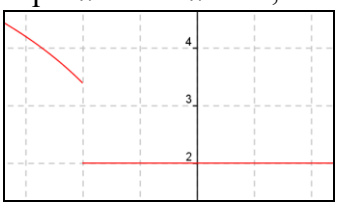
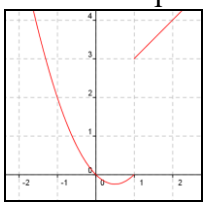
a) Strettamente crescente in tutto il dominio; b) Strettamente decrescente in [–1; 1], strettamente crescente per $x < -1 \vee x > 1$

18. a)  **b)**  **c)** 

a) Strettamente crescente in tutto il dominio; b) Strettamente crescente per $x \leq 0$, strettamente decrescente per $x > 0$; c) Strettamente decrescente per $x \leq 0$, strettamente crescente per $x > 0$

19. a)  **b)** 

a) Strettamente decrescente per $x \leq -1 \vee 0 \leq x \leq 1$, strettamente crescente per $-1 < x < 0 \vee x > 1$;
b) Strettamente decrescente per $x \leq -1$ e $x > -1$, ma non monotona per ogni x, perché non iniettiva

20. a)  **b)**  **c)** 

a) Strettamente decrescente per $x \leq -2 \vee -2 < x < 0$, strettamente crescente per $x \geq 0$ ma non monotona nel dominio, perché non iniettiva); b) Non crescente in tutto il dominio; c) Strettamente crescente per $x \geq 1/2$, strettamente decrescente per $x < ½$, ma non monotona nel dominio, perché non iniettiva

Verificare se le seguenti funzioni sono monotòne nel loro dominio

21. a) $f(x) = 4x + 1$; b) $f(x) = 2 - 3x$; c) $f(x) = \frac{1}{x}, x > 0$; d) $f(x) = \frac{1}{x}, x < 0$

a) Crescente: $4x + 1 > 4y + 1 \Rightarrow x > y$; b) Decrescente: $2 - 3x > 2 - 3y \Rightarrow x < y$;
c) Decrescente: $1/x > 1/y$ $(x > 0, y > 0) \Rightarrow x < y$; d) Decrescente: $1/x > 1/y$ $(x > 0, y > 0)$ $\Rightarrow x < y$

22. a) $f(x) = \sqrt{x}$; b) $f(x) = \sqrt[3]{-x}$; c) $f(x) = |4x + 1|$; d) $f(x) = |2x| - |3x|$

a) Crescente: $\sqrt{x} > \sqrt{y} \Rightarrow x > y$; b) Decrescente: $\sqrt[3]{-x} > \sqrt[3]{-y} \Rightarrow -x > -y \Rightarrow x < y$; c

c) non monotona: $0 > -1$ e $|4 \cdot 0 + 1| < |4(-1) + 1|$, mentre $1 > -1$ $|4 \cdot 1 + 1| > |4(-1) + 1|$;
d) non monotona: $0 > -1$ e $|2 \cdot 0| - |3 \cdot 0| = 0 > |2 \cdot (-1)| - |3 \cdot (-1)| = -1$, mentre $0 < 2$ e $0 > |2 \cdot 2| - |3 \cdot 2| = -2$

23. **a)** $f(x) = 2^{x+1}$; **b)** $f(x) = 3^{2-x}$; **c)** $f(x) = \lfloor x^2 \rfloor$; **d)** $f(x) = \lceil x \rceil + \lfloor x \rfloor$
a) Crescente: $2^{x+1} > 2^{y+1} \Rightarrow x > y$; b) Decrescente: $3^{2-x} > 3^{2-x} \Rightarrow 2 - x > 2 - y \Rightarrow x < y$;
c) non monotona: $\lfloor (-1)^2 \rfloor > \lfloor 0^2 \rfloor = 0 = \lfloor 0{,}3^2 \rfloor < \lfloor 1^2 \rfloor$; d) Non decrescente: si consideri il grafico

24. **a)** $f(x) = \begin{cases} x+1 & x<1 \\ 3x+2 & x \geq 1 \end{cases}$; **b)** $f(x) = \begin{cases} 3-x & x<2 \\ 2-3x & x>3 \end{cases}$; **c)** $f(x) = \begin{cases} -3x+1 & x<0 \\ x-2 & x \geq 0 \end{cases}$

a) Crescente, le due semirette hanno coefficienti angolari positivi, quindi sono crescenti e $3 + 2 = 5 > 1 + 1 = 2$; b) Decrescente: le due semirette hanno coefficienti angolari negativi, quindi sono decrescenti e $3 - 2 = 1 > 2 - 9 = -7$; c) Non monotona: $0 > -1$ e $-2 < 4$, mentre $0 < 1$ e $-2 < -1$

25. **a)** $f(x) = \begin{cases} x^2 & x<0 \\ x+1 & x \geq 0 \end{cases}$; **b)** $f(x) = \begin{cases} 2^x & x<0 \\ 2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 3^x & x>1 \end{cases}$; **c)** $f(x) = \begin{cases} -x^2 & x<0 \\ x+2 & x \geq 0 \end{cases}$

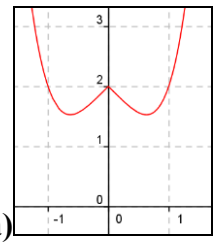
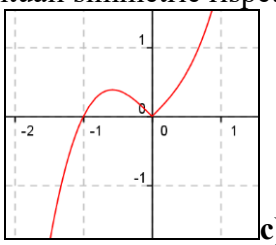
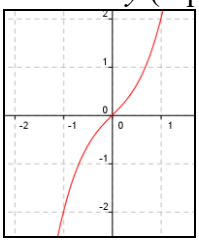
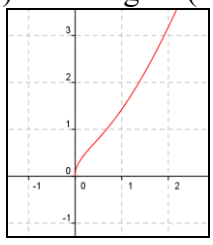
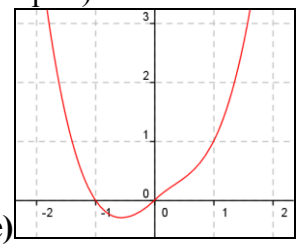
a) Non monotona: $0 > -2$ e $1 < (-2)^2 = 4$, mentre $5 > -2$ e $6 > (-2)^2 = 4$;
b) Non decrescente: perché $2^x < 2 < 3^x$ nei domini indicati, ma in $[0; 1]$ la funzione è costante;
c) Crescente: dato che $x + 2$ è crescente, così come $-x^2$ per $x < 0$, e la prima è sempre maggiore della seconda, tenendo conto che $0^2 = 0 < 0 + 2 = 2$

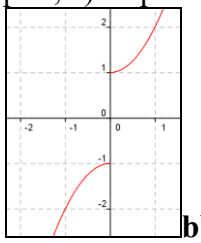
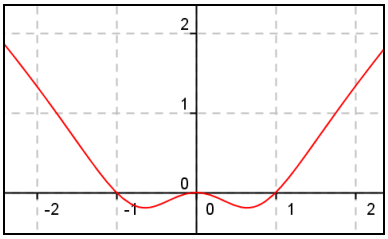
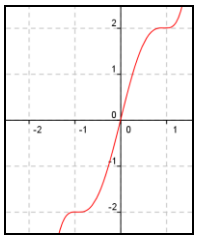
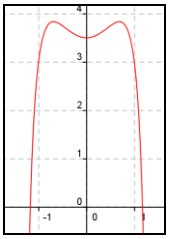
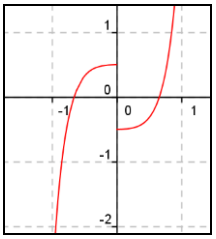
26. **a)** $f(x) = \begin{cases} ln(x) & x<1 \\ 2-3x & x \geq 1 \end{cases}$; **b)** $f(x) = \begin{cases} x & x<1 \\ ln(x)+1 & x \geq 1 \end{cases}$; **c)** $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & x<2 \\ 3^{-x} & x \geq 2 \end{cases}$; **d)** $f(x) = \begin{cases} 3^{-x} & x<0 \\ -2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 2^{-x} & x>1 \end{cases}$

a) Non monotona perché non iniettiva, si tenga conto che entrambe le funzioni singolarmente sono decrescenti, ma sono entrambe negative; b) Crescente: si tenga conto che entrambe le funzioni singolarmente sono crescenti e $ln(1) + 1 = 1$; c) Decrescente: dato che 2^{-x} è decrescente, così come 3^{-x} e $2^{-2} = 1/4 > 3^{-2} = 1/9$; d) Non monotona perché mentre $-2 < ½$ e $3^{-(-2)} = 9 > 2 > 2^{-x}$, per $x < 0$, ma $0 < ½$ e $3^0 = 1 < 2$

Particolari simmetrie delle funzioni

Tenuto conto dei grafici, determinare quale di essi rappresentano funzioni pari o dispari
Dobbiamo controllare eventuali simmetrie rispetto all'asse y (f. pari) o all'origine (f. dispari)

1. **a)**  **b)**  **c)**  **d)**  **e)** 
a) pari; c) dispari

2. **a)**  **b)**  **c)**  **d)**  **e)** 
a) dispari; b) pari; c) dispari; d) pari; e) dispari

Determinare quali delle seguenti funzioni sono pari o dispari

3. **a)** $f(x) = 3x^2 + |x + 2|$; **b)** $f(x) = \sqrt{2x^4 - x^2 + 1}$; **c)** $f(x) = |3x^2 - 1| + |x^2 - 1|$

a) $f(-x) = 3x^2 + |-x + 2| \neq f(x)$ e $\neq -f(x)$
b) pari perché contiene solo potenze pari di x
c) pari perché contiene solo potenze pari di x

4. **a)** $f(x)=\sqrt[3]{x^3+x}$ **; b)** $f(x)=\dfrac{x^2+1}{2x^4-3}$ **; c)** $f(x)=\dfrac{x^3+x}{2}$

a) dispari perché contiene solo potenze dispari di x;
b) pari perché contiene solo potenze pari di x;
c) dispari perché contiene solo potenze dispari di x

5. **a)** $f(x) = sin(2x + 1)$**; b)** $f(x) = ln(x^2 + 1)$**; c)** $f(x) = |cos(3|x - 2)|$

a) $f(-x) = sin(-2x + 1) \neq f(x)$ e $\neq -f(x)$
b) pari perché contiene solo potenze pari di x
c) $f(-x) = |cos(3|-x - 2)| \neq f(x)$ e $\neq -f(x)$

6. **a)** $f(x)=e^{x^2-x+1}$ **; b)** $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{3x^4-x^2-2}$ **; c)** $f(x) = |3x - 1| - |3x + 1|$

a) $f(-x)=e^{x^2+x+1}\neq \pm f(x)$

b) pari perché contiene solo potenze pari di x;
c) dispari: $f(-x) = |-3x - 1| - |-3x + 1| = |3x + 1| - |3x - 1| = -f(x)$. Si tenga conto che $|f(x)| = |-f(x)|$

7. **a)** $f(x) = sin(x^2)$**; b)** $f(x) = sin^{-1}(x^3)$**; c)** $f(x) = sin^{-1}(x^2)$

a) pari perché contiene solo potenze pari di x; b) dispari perché contiene solo potenze dispari di x; c) pari perché contiene solo potenze pari di x

8. **a)** $f(x)=\dfrac{|x^3+1|-|x+1|}{x}$ **; b)** $f(x) = |ax - b| - |ax + b|$**; c)** $f(x) = |ax - b| + |ax + b|$

a) $f(-x)=\dfrac{|-x^3+1|-|-x+1|}{-x}\neq \pm f(x)$

b) dispari: $f(-x) = |-ax - b| - |-ax + b| = |ax + b| - |ax - b| = -f(x)$
c) pari: $f(-x) = |-ax - b| + |-ax + b| = |ax + b| + |ax - b| = f(x)$

Determinare, se esistono, i valori reali da assegnare ai parametri affinché le date funzioni abbiano la simmetria richiesta

9. **a)** $f(x) = 3ax^3 - 2x + a - 1$**, dispari; b)** $f(x) = (2a + 1)x^3 - 2x^2 + 3$**, pari; c)** $f(x)=\dfrac{e^{ax}+1}{e^{2x}-1}$**, pari**

a) Dobbiamo eliminare l'unico termine di potenza non dispari, ossia il termine noto: $a = 1$;
b) Dobbiamo eliminare l'unico termine di potenza non pari: $2a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1/2$;
c) Non è possibile perché i termini noti non possono essere eliminati

10. **a)** $f(x) = (a - 1)x^4 + x^3 - x + 2$**, dispari; b)** $f(x) = (a - 1)x^4 + x^3 - x + 2$**, pari**

a) Non è possibile perché possiamo eliminare solo uno dei due termini di esponente pari e nessuno di quelli dispari; b) Stessa ragione di a)

11. **a)** $f(x) = 2x^5 - |2a + 1| \cdot x^2 + 1$**, pari; b)** $f(x) = |4a - 1|x^3 - x^2 + |x| - 1$**, pari; c)** $f(x)=\dfrac{e^{ax}+1}{e^{x^2}-1}$**, pari**

a) Non è possibile perché possiamo eliminare solo il termine di esponente pari e nessuno di quelli dispari;
b) Basta eliminare il termine di esponente 3, perché $|x|$ è pari: a = 1/4;
c) Basta far diventare e^{ax} un termine noto: $a = 0$

12. **a)** $f(x) = (a^2 - 1) \cdot x^6 - x^3 + x - b + 2$**, dispari; b)** $f(x) = (2a + b) \cdot x^3 - x^2 + (a - b) \cdot x + 1$**, pari**

a) Basta eliminare i termini di esponente pari: $a = \pm 1$, $b = 2$; b) Basta eliminare i termini di esponente dispari: $\begin{cases}2a+b=0\\a-b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a+a=0\\a=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\b=0\end{cases}$

13. **a)** $f(x)=3x^4-(2h-1)\cdot x^3+(k-2)\cdot\dfrac{\sqrt[5]{x^3}}{x}$**, dispari; b)** $f(x)=3x^4-(2h-1)\cdot x^3+(k-2)\cdot\dfrac{\sqrt[5]{x^3}}{x}$ **, pari**

a) Non è possibile perché non possiamo eliminare solo il termine di esponente pari;

b) $f(-x)=3x^4+(2h-1)\cdot x^3+(k-2)\cdot\dfrac{-\sqrt[5]{x^3}}{-x}=3x^4+(2h-1)\cdot x^3+(k-2)\cdot\dfrac{\sqrt[5]{x^3}}{x}$, quindi basta porre $2h - 1 = 0 \Rightarrow h = 1/2$, mentre k può assumere qualsiasi valore

14. $f(x)=\dfrac{(k-2)\cdot x}{x^2+1}+2h-cos\left[(h+k)x\right]$**, pari**

$f(-x)=\dfrac{-(k-2)\cdot x}{x^2+1}+2h-cos\left[-(h+k)x\right]=\dfrac{-(k-2)\cdot x}{x^2+1}+2h-cos\left[(h+k)x\right]$, basta annullare il primo addendo: $k = 2$, mentre h può assumere qualsiasi valore

15. **a)** $f(x)=\dfrac{(a-b)x^4+(2a-b)\cdot x^3-a}{(a+b)\cdot x-2b+1}$**, dispari; b)** $f(x)=\dfrac{(a-b)x^4+(2a-b)\cdot x^3-a}{(a+b)\cdot x-2b+1}$**, pari**

$$f(-x)=\frac{(a-b)x^4-(2a-b)\cdot x^3-a}{-(a+b)\cdot x-2b+1}=-f(x)=\frac{-(a-b)x^4-(2a-b)\cdot x^3+a}{(a+b)\cdot x-2b+1}\Rightarrow$$

a)
$$\Rightarrow \cancel{(a^2-b^2)x^5}-(a-b)(2b-1)x^4-(2a-b)(a+b)x^4+\cancel{(2a-b)(2b-1)x^3}\ \cancel{-a(a+b)\cdot x}+2ab-a=$$
$$=\cancel{(a^2-b^2)x^5}+(a-b)(2b-1)x^4+(2a-b)(a+b)x^4+\cancel{(2a-b)(2b-1)x^3}\ \cancel{-a(a+b)\cdot x}-2ab+a\Rightarrow \quad ;$$

$$\Rightarrow 2(a-b)(2b-1)x^4+2(2a-b)(a+b)x^4-4ab+2a=0\Rightarrow\begin{cases}(a-b)(2b-1)=0\\(2a-b)(a+b)=0\\-4ab+2a=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=b\vee b=1/2\\b=2a\vee a=-b\\a(1-2b)=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=b\\b=2b\vee b=-b\\b(1-2b)=0\end{cases}\vee\begin{cases}b=1/2\\a=1/4\vee a=-1/2\\a=0\end{cases}\Rightarrow(a=b=0)\vee\varnothing$$

per l'unica soluzione possibile abbiamo: $f(x)=0$, che è pari, quindi nessuna soluzione

b) Tenuto conto di quanto visto in a)

$$f(-x)=\frac{(a-b)x^4-(2a-b)\cdot x^3-a}{-(a+b)\cdot x-2b+1}=f(x)=\frac{(a-b)x^4+(2a-b)\cdot x^3-a}{(a+b)\cdot x-2b+1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(a^2-b^2)x^5\ \cancel{-(a-b)(2b-1)x^4}\ \cancel{-(2a-b)(a+b)x^4}+(2a-b)(2b-1)x^3-a(a+b)\cdot x\ \cancel{+2ab-a}=$$
$$=-(a^2-b^2)x^5\ \cancel{-(a-b)(2b-1)x^4}\ \cancel{-(2a-b)(a+b)x^4}-(2a-b)(2b-1)x^3+a(a+b)\cdot x\ \cancel{+2ab-a}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(a^2-b^2)x^5+2(2a-b)(2b-1)x^3-2a(a+b)\cdot x=0\Rightarrow\begin{cases}a^2-b^2=0\\(2a-b)(2b-1)=0\\2a(a+b)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=b\vee a=-b\\b=2a\vee b=1/2\\a=0\vee a=-b\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=b\\b=2b\vee b=1/2\\a=0\vee b=-b\end{cases}\vee\begin{cases}a=-b\\b=-2b\vee b=1/2\\a=0\vee a=-b\end{cases}\Rightarrow(a=b=0)\vee(a=-1/2,b=1/2)$$

Stavolta la soluzione $f(x) = 0$ è accettabile, mentre non lo è l'altra, perché si annulla il denominatore

16. **Spiegare perché una funzione definita in [–2; 3] non può essere né pari, né dispari.**
Perché l'intervallo non è simmetrico, così per esempio $f(3)$ esiste e $f(-3)$ no

17. **Spiegare perché una funzione il cui codominio è [0; +∞) oppure (–∞; 0] non può essere dispari.**
Perché sia $f(x)$ che $f(-x)$, se esistono, sono sempre dello stesso segno

18. **Una funzione non definita solo per $x = 0$ può essere pari o dispari? Giustificare la risposta.**
Solo pari perché l'unico caso è $f(0)$ che è ovviamente uguale a $f(-0)$

19. **Una funzione non definita solo per $x = 1$ può essere pari o dispari? Giustificare la risposta.**
No perché non esiste $f(-1)$

20. **Una funzione non definita solo per $x = \pm 1$ può essere pari o dispari? Giustificare la risposta.**
Sì perché esistono $f(-1)$ e $f(1)$

21. **Dimostrare che la somma algebrica di due funzioni pari è una funzione pari.**
Hp: $f(-x) = f(x)$ e $g(-x) = g(x) \Rightarrow f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x)$

22. **Dimostrare che la somma algebrica di due funzioni dispari è una funzione dispari.**
Hp: $f(-x) = -f(x)$ e $g(-x) = -g(x) \Rightarrow f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -[f(x) + g(x)]$

23. **Se una funzione è dispari, il suo valore assoluto che tipo di funzione è?**

Pari: $f(-x) = -f(x) \Rightarrow |f(-x)| = |-f(x)| = |f(x)|$

24. Affinché una funzione sia pari, la condizione che il suo dominio sia formato solo da numeri positivi, è necessaria o sufficiente?

Nessuna delle due perché il dominio deve essere simmetrico

25. Una funzione il cui codominio è formato solo da numeri positivi può essere dispari?

No perché il codominio deve essere simmetrico

26. Dimostrare che il prodotto di due funzioni pari è una funzione pari.

Hp: $f(-x) = f(x)$ e $g(-x) = g(x) \Rightarrow f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot g(x)$

27. Dimostrare che il prodotto di due funzioni dispari è una funzione pari.

Hp: $f(-x) = -f(x)$ e $g(-x) = -g(x) \Rightarrow f(-x) \cdot g(-x) = -f(x) \cdot [-g(x)] = f(x) \cdot g(x)$

28. Dimostrare che il prodotto di una funzione pari e una funzione dispari è una funzione dispari.

Hp: $f(-x) = f(x)$ e $g(-x) = -g(x) \Rightarrow f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot [-g(x)] = -f(x) \cdot g(x)$

29. La potenza ennesima di una funzione pari che tipo di funzione è? E quella di una funzione dispari?

Hp: $f(-x) = f(x) \Rightarrow [f(-x)]^n = [f(x)]^n$ se n è pari; Hp: $f(-x) = -f(x) \Rightarrow [f(-x)]^n = -[f(x)]^n$ se n dispari

30. Fornire un esempio che dimostri che la seguente affermazione non è corretta: *Una funzione si dice pari se la sua espressione analitica è formata solo da monomi di grado pari.*

No, per esempio $cos(x)$ è pari

31. Una funzione razionale contenente monomi di grado pari e grado dispari può essere dispari? Giustificare la risposta.

Sì, per esempio: $\dfrac{x^2+1}{x}$

Le seguenti funzioni sono simmetriche rispetto a un centro generico, determinarlo.

32. a) $f(x) = x^3 + 7x^2 + 15x + 10$; b) $f(x) = \dfrac{4x^2+9x+7}{2x^2+4x+3}$; c) $f(x) = \dfrac{x^2-5x+8}{x-2}$; d) $f(x) = \dfrac{1}{2x}$

a) Per la simmetria rispetto a un centro $(a; b)$ deve essere $f(x) + f(2a - x) = 2b \Rightarrow x^3 + 7x^2 + 15x + 10 + (2a - x)^3 + 7(2a - x)^2 + 15(2a - x) + 10 = 2b \Rightarrow \cancel{x^3} + 7x^2 + \cancel{15x} + 10 + 8a^3 - 12a^2x + 6ax^2 - \cancel{x^3} + 28a^2 - 28ax + 7x^2 + 30a - \cancel{15x} + 10 = 2b \Rightarrow (14 + 6a)x^2 - 4a(3a + 7)x + 8a^3 + 28a^2 + 30a + 20 - 2b = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} 14+6a=0 \\ a(3a+7)=0 \\ 8a^3+28a^2+30a+20-2b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-7/3 \\ a=0 \vee =-7/3 \\ b=11/27 \end{cases}$$

(–3;1); quindi vi è una simmetria di centro (–7/3; 11/27)

b)
$$\frac{x^2-5x+8}{x-2}+\frac{(2a-x)^2-5(2a-x)+8}{2a-x-2}-2b=0 \Rightarrow (a-b-3)x^2-2a(a-b-3)x+2a^2-2ab-9a+2b+8=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-b-3=0 \\ a(a-b-3)=0 \\ 2a^2-2ab-9a+2b+8=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b-3=0 \\ a=0 \vee a-b-3=0 \\ 2a^2-2ab-9a+2b+8=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-3 \\ a=0 \\ b=-4 \end{cases} \vee \begin{cases} b=a-3 \\ 2a^2-2a(a-3)-9a+2(a-3)+8=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varnothing \vee \begin{cases} b=a-3 \\ \cancel{2a^2-2a^2}+6a-9a+2a-6+8=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-1 \\ a=2 \end{cases}$$

Simmetrico rispetto a (2; –1)

c)
$$\frac{1}{2x}+\frac{1}{2(2a-x)}-2b=0 \Rightarrow \frac{2a-x+x-8abx+4bx^2}{2x(2a-x)}=0 \Rightarrow \frac{2bx^2-4abx+a}{x(2a-x)} \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ ab=0 \Rightarrow a=b=0 \\ a=0 \end{cases}$$

Le seguenti funzioni sono simmetriche rispetto a una generica retta parallela all'asse y, determinarla

33. a) $f(x) = \dfrac{7x^2-28x+31}{2x^2-8x+9}$; b) $f(x) = ln(4x^2 + 24x + 37) - 2$; c) $f(x) = \dfrac{2x^2-4x+1}{x^2-2x+1}$; d) $f(x) = e^{x^2+4x+3}$

a) Per la simmetria rispetto alla retta di equazione $x = a$, deve essere $f(x) = f(2a - x)$:

$$\frac{7x^2-28x+31}{2x^2-8x+9}=\frac{7(2a-x)^2-28(2a-x)+31}{2(2a-x)^2-8(2a-x)+9}\Rightarrow\frac{7x^2-28x+31}{2x^2-8x+9}=\frac{7x^2+28x(1-a)+28a^2-56a+31}{2x^2+8(1-a)x+8a^2-16a+9}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(a-2)x-a(a-2)=0\Rightarrow\begin{cases}a-2=0\\a=0\vee a=2\end{cases}\Rightarrow a=2$$

simmetria rispetto la retta $x = 2$;

b) $ln(4x^2 + 24x + 37) - \cancel{2} = ln[4(2a - x)^2 + 24(2a - x) + 37] - \cancel{2} \Rightarrow \cancel{4x^2} + 24x + \cancel{37} = 16a^2 - 16ax + \cancel{4x^2} + 48a - 24x + \cancel{37} \Rightarrow (3 + a)x - a^2 - 3a = 0 \Rightarrow \begin{cases}3+a=0\\a^2+3a=0\end{cases}\Rightarrow a=-3$. Simmetria rispetto la retta $x = -3$;

$$\frac{2x^2-4x+1}{x^2-2x+1}=\frac{2(2a-x)^2-4(2a-x)+1}{(2a-x)^2-2(2a-x)+1}\Rightarrow\frac{2x^2-4x+1}{x^2-2x+1}=\frac{8a^2-8ax+2x^2-8a+4x+1}{4a^2-4ax+x^2-4a+2x+1}\Rightarrow$$

c) $\Rightarrow \cancel{8a^2x^2-8ax^3+2x^4-8ax^2+4x^3}+\cancel{2x^2}\cancel{-16a^2x+16ax^2-4x^3+16ax-8x^2}-4x+4a^2-4ax+\cancel{x^2}-4a+2x\cancel{+1}=$

$=\cancel{8a^2x^2-8ax^3+2x^4-8ax^2+4x^3}+\cancel{x^2}\cancel{-16a^2x+16ax^2-4x^3+16ax-8x^2}-2x+8a^2-8ax+\cancel{2x^2}-8a+4x\cancel{+1}\Rightarrow$

$$\Rightarrow 4(1-a)x+4a^2-4a=0\Rightarrow\begin{cases}1-a=0\\a^2-a=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\a=0\vee a=1\end{cases}\Rightarrow a=1$$

Simmetria rispetto alla retta: $x = 1$;

d) $e^{x^2+4x+3}=e^{(2a-x)^2+4(2a-x)+3}\Rightarrow x^2+4x+3=(2a-x)^2+4(2a-x)+3$, piuttosto che fare i calcoli osserviamo che equivale a trovare l'asse di simmetria della parabola di equazione $y = x^2 + 4x + 3$, che è $x = -4/2 \Rightarrow x = -2$

34. Provare che $f(x)=\frac{1}{2x}$ è simmetrica rispetto a entrambe le bisettrici dei quadranti.

$$y=\frac{1}{2x}\Rightarrow x=\frac{1}{2y}$$

35. Provare che $f(x)=\frac{4x^2+9x+7}{2x^2+4x+3}$ è simmetrica rispetto al centro (–1; 2)

$$\frac{4x^2+9x+7}{2x^2+4x+3}+\frac{4(-2-x)^2+9(-2-x)+7}{2(-2-x)^2+4(-2-x)+3}-4=\frac{4x^2+9x+7}{2x^2+4x+3}+\frac{16+16x+4x^2-18-9x+7}{8+8x+2x^2-8-4x+3}-4=$$

$$=\frac{4x^2+9x+7}{2x^2+4x+3}+\frac{4x^2+7x+5}{2x^2+4x+3}-4=\frac{8x^2+16x+12}{2x^2+4x+3}-4=4-4=0$$

36. Provare che $f(x)=\frac{1}{x^2-8x+17}$ è simmetrica rispetto alla retta $x = 4$

Composizione di due o più funzioni

Dopo aver determinato dominio e codominio delle seguenti coppie di funzioni, stabilire per quali valori di x è possibile effettuare le composizioni f °g, g° f, quindi determinare le due composizioni. Nelle risposte è indicata l'eventuale restrizione del dominio.

1. $f(x) = 3x - 2$, $g(x) = 1/x$

Facilmente si vede che $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$, si ha: $cod(g) \subseteq dom(f)$, quindi possiamo effettuare $f[g[(x)]] = 3/x - 2$, definito in $g\circ f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$; mentre $cod(f) \not\subset dom(g)$, quindi dobbiamo effettuare una restrizione sul dominio di f, per la composizione in ordine inverso. Dobbiamo fare in modo che sia $cod(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, quindi: $3x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2/3$, perciò: $f_r:\mathbb{R}\setminus\{2/3\}\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$, così: $g[f[(x)]] = 1/(3x - 2)$, e $f\circ g:\mathbb{R}\setminus\{2/3\}\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$

2. $f(x) = x^2 - 2$, $g(x) = 3x^3 - 1$

Si ha: $dom(f) = \mathbb{R}$, $y=x^2-2\Rightarrow x=\pm\sqrt{y+2}\Rightarrow cod(f)=[-2;+\infty)$; $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Dato che $cod(g) \subseteq$

dom(*f*), quindi possiamo effettuare $f[g[(x)]] = (3x^3 - 1)^2 - 2$, definito in $g \circ f : \mathbb{R} \to [-2; +\infty)$; si ha anche *cod*(*f*) ⊆ *dom*(*g*), quindi possiamo effettuare $g[f[(x)]] = 3 \cdot (x^2 - 2)^3 - 1$ e $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

3. $f(x) = \sqrt{4x+1}, g(x) = x^2 - x$

Si ha: *dom*(*f*) = [–¼; + ∞), *cod*(*f*) = [0; + ∞); *dom*(*g*) = $\mathbb{R}$, $cod(g) = \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$, dato che si ha: $y = x^2 - x \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4y}}{2} \Rightarrow y \geq -\frac{1}{4}$. Dato che *cod*(*g*) ⊆ *dom*(*f*), quindi possiamo effettuare $f[g(x)] = \sqrt{4(x^2 - x) + 1} = \sqrt{4x^2 - 4x + 1} = \sqrt{(2x-1)^2} = |2x - 1|$, definito in $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$; si ha anche *cod*(*f*) ⊆ *dom*(*g*), quindi possiamo effettuare $g[f(x)] = \left(\sqrt{4x+1}\right)^2 - (4x+1) = 4x + 1 - \sqrt{4x+1}$ e $f \circ g : \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right) \to \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$

4. $f(x) = \sqrt{2-x}, g(x) = \sqrt{9x+1}$

Si ha: *dom*(*f*) = (–∞; 2], *cod*(*f*) = [0; + ∞); *dom*(*g*) = [–1/9; + ∞), *cod*(*g*) = [0; + ∞). Dato che *cod*(*g*) ⊄ *dom*(*f*), dobbiamo far diventare *cod*(*g*) = [0; 2], per fare ciò deve essere $\sqrt{9x+1} \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1/9 \\ 9x + 1 \leq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1/9 \\ x \leq 1/3 \end{cases} \Rightarrow dom(g_r) = \left[-\frac{1}{9}; \frac{1}{3}\right]$, adesso perciò possiamo comporre: $f[g(x)] = \sqrt{2 - \sqrt{9x+1}}$; definito in $g \circ f : \left[-\frac{1}{9}; \frac{1}{3}\right] \to \mathbb{R}_0^+$; mentre *cod*(*f*) ⊆ *dom*(*g*), quindi possiamo effettuare $g[f(x)] = \sqrt{9 \cdot \sqrt{2-x} + 1}$, con $f \circ g$: (–∞; 2] → [0; + ∞).

5. ***f*(*x*) = *sin*(*x*), *g*(*x*) = *cos*(*x*)**

Si ha: *dom*(*f*) = *dom*(*g*) = $\mathbb{R}$, *cod*(*f*) = *cod*(*g*) = [–1; 1]. Dato che *cod*(*g*) ⊆ *dom*(*f*) e che *cod*(*f*) ⊆ *dom*(*g*), quindi possiamo effettuare, *f*[*g*[(*x*)] = *sin*[*cos*(*x*)] e *g*[*f*[(*x*)] = *cos*[*sin*(*x*)], entrambi definiti in $\mathbb{R}$ → [–1; 1]

6. ***f*(*x*) = *tan*(*x*), *g*(*x*) = 2*x* – 3**

Si ha: *dom*(*f*) = $\mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}_d\right\}$ ($\mathbb{Z}_d$ sono gli interi dispari), *cod*(*f*) = *dom*(*g*) = *cod*(*g*) = $\mathbb{R}$. Dato che *cod*(*g*) ⊄ *dom*(*f*), dobbiamo far diventare *cod*(*g*) = *dom*(*f*) quindi $2x - 3 \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}_d \Rightarrow x \neq 3 + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}_d$, perciò nella restrizione *dom*(g_r) = $\mathbb{R} \setminus \left\{3 + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}_d\right\}$, possiamo effettuare *f*[*g*[(*x*)]] = *tan*(2*x* – 3), definito in $g \circ f : \mathbb{R} \setminus \left\{3 + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}_d\right\} \to \mathbb{R}$; si ha *cod*(*f*) ⊆ *dom*(*g*), quindi possiamo effettuare *g*[*f*[(*x*)] = 2*tan*(*x*) – 3 definito in $f \circ g : \mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}_d\right\} \to \mathbb{R}$.

7. ***f*(*x*) = *sin*$^{-1}$(2*x*), *g*(*x*) = 2*x* – 1**

Si ha: *dom*(*f*) = [–1/2; 1/2], *cod*(*f*) =[–π/2; π/2], perché –1 ≤ 2*x* ≤ 1 ⇒ –1/2 ≤ *x* ≤ 1/2; *dom*(*g*) = *cod*(*g*) = $\mathbb{R}$. Dato che *cod*(*g*) ⊄ *dom*(*f*), dobbiamo restringere il *dom*(*g*) in modo che sia *cod*(*g*) = [–1/2; 1/2], cioè –1/2 ≤ 2*x* – 1 ≤ 1/2 ⇒ 1/4 ≤ *x* ≤ 3/4, adesso possiamo comporre: *f*[*g*[(*x*)]] = *sin*$^{-1}$(4*x* 2), definito in $g \circ f : \left[\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right] \to \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; mentre si ha *cod*(*f*) ⊆ *dom*(*g*), quindi *g*[*f*[(*x*)] = 2*sin*$^{-1}$(2*x*) – 1, definito in $f \circ g$: [–1/2; 1/2] → [2 · (–π/2) – 1; 2 · (π/2) – 1] = [–π – 1; π – 1]

8. $f(x) = ln(x^2 - 1), g(x) = \sqrt{x^2 - x}$

Si ha: *dom*(*f*) = (–∞; –1) ∪ (1; + ∞), *cod*(*f*) = $\mathbb{R}$; *dom*(*g*) = (–∞; 0) ∪ (1; + ∞), *cod*(*g*) = [0; + ∞). Dato che *cod*(*g*) ⊄ *dom*(*f*), restringiamo *dom*(*g*) in modo che

$\sqrt{x^2-x}>1 \Rightarrow \begin{cases} x\le 0 \vee x\ge 1 \\ x^2-x-1>0 \end{cases} \Rightarrow x<\frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee x>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, adesso si ha: $f\left[g(x)\right]=ln\left(x^2-x-1\right)$, definito in $g\circ f:\left(-\infty;\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)\to\mathbb{R}$; si ha anche *cod*(*f*) $\not\subset$ *dom*(*g*), restringiamo *dom*(*f* in modo che $\begin{matrix} ln\left(x^2-1\right)<0 \vee ln\left(x^2-1\right)>1 \Rightarrow 0<x^2-1<1 \vee x^2-1>e \Rightarrow 1<x^2<2 \vee x^2>1+e \Rightarrow \\ \Rightarrow -\sqrt{2}<x<-1 \vee 1<x<\sqrt{2} \vee -\sqrt{1+e}<x<\sqrt{1+e} \end{matrix}$, adesso: $g\left[f(x)\right]=\sqrt{ln^2\left(x^2-1\right)-ln\left(x^2-1\right)}$, definito in $f\circ g:\left(-\infty;-\sqrt{e+1}\right]\cup\left[\sqrt{e+1};+\infty\right)\to\mathbb{R}$

9. ***f*(*x*) = *e*$^{2x-1}$, *g*(*x*) = *ln*(4*x* – 1)**

Si ha: *dom*(*f*) = $\mathbb{R}$, *cod*(*f*) = (0; + ∞); *dom*(*g*) = (1/4; + ∞), *cod*(*g*) = $\mathbb{R}$. Dato che *cod*(*g*) ⊆ *dom*(*f*), possiamo effettuare $\left[g(x)\right]=\frac{(4x-1)^2}{e}$, definito in $g\circ f:\left(\frac{1}{4};+\infty\right)\to\mathbb{R}_0^+$; si ha invece *cod*(*f*) ⊄ *dom*(*g*), quindi restringiamo *dom*(*f*) in modo che *cod*(*f*) = (1/4; + ∞): e^{2x-1} > ¼ ⇒ $x>\frac{ln(1/4)+1}{2}=\frac{ln(1/4)+ln(e)}{2}=ln\left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right)$, adesso possiamo effettuare $g\left[f(x)\right]=ln\left(4e^{2x-1}-1\right)$ definito in $f\circ g:\left(ln\left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right);+\infty\right)\to\mathbb{R}$

10. ***f*(*x*) = *sin*(4*x* + 1), *g*(*x*) = *sin*$^{-1}$(3*x* – 2)**

Si ha: *dom*(*f*) = $\mathbb{R}$, *cod*(*f*) = [–1; 1]; *dom*(*g*) = [1/3; 1], *cod*(*g*), =[–π/2; π/2], perché –1 ≤ 3*x* – 2 ≤ 1 ⇒ 1/3 ≤ *x* ≤ 1;. Dato che *cod*(*g*) ⊆ *dom*(*f*), possiamo effettuare $f\left[g(x)\right]=sin\left[4sin^{-1}(3x-2)+1\right]$, definito in $g\circ f:[1/3;1]\to[-1;1]$; si ha invece *cod*(*f*) [1/3; 1]: *sin*(4*x* + 1) ≥ 1/3 ⇒ $x\ge\frac{sin^{-1}(1/3)-1}{4}$, adesso possiamo effettuare $g\left[f(x)\right]=sin^{-1}\left[3sin(4x+1)-2\right]$ definito in $f\circ g:\left[\frac{sin^{-1}(1/3)-1}{4};1\right]\to\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

11. $f(x)=\sqrt{x}, g(x)=x^2+1$

Si ha: *dom*(*f*) = *cod*(*f*) = [0; + ∞); *dom*(*g*) = $\mathbb{R}$, *cod*(*g*) = [1; + ∞). Dato che *cod*(*g*) ⊆ *dom*(*f*), possiamo effettuare $f\left[g(x)\right]=\sqrt{x^2+1}$, definito in $g\circ f:\mathbb{R}_0^+\to[1;+\infty)$; si ha anche *cod*(*f*) ⊆ *dom*(*g*), quindi possiamo effettuare $g\left[f(x)\right]=x+1$ definito in $f\circ g:[0,+\infty)\to[1;+\infty)$

12. $f(x)=\begin{cases} x & x<0 \\ 2x & x\ge 0 \end{cases}, g(x)=3x+1$

Si ha: *dom*(*f*) = *cod*(*f*) = *dom*(*g*) = *cod*(*g*) = $\mathbb{R}$, Possiamo effettuare tutte le composizioni: $f\left[g(x)\right]=\begin{cases} 3x+1 & x<0 \\ 6x+2 & x\ge 0 \end{cases}$ e $g\left[f(x)\right]=\begin{cases} 3x+1 & x<0 \\ 6x+1 & x\ge 0 \end{cases}$, definito in $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

13. $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x<0 \\ -x^2+1 & x\ge 0 \end{cases}, g(x)=\sqrt{x}$

Si ha: *dom*(*f*) = *cod*(*f*) = $\mathbb{R}$; *dom*(*g*) = *cod*(*g*) = [0; + ∞),. Dato che *cod*(*g*) ⊆ *dom*(*f*), quindi possiamo effettuare $f\left[g(x)\right]=-x+1, x\ge 0$, definito in $g\circ f:\mathbb{R}_0^+\to(-\infty;1]$; si ha *cod*(*f*) ⊄ *dom*(*g*), quindi restringiamo *dom*(*f*) in modo che *cod*(*f*) = *dom*(*g*): $\begin{cases} x^2+1\ge 0 \\ x<0 \end{cases} \vee \begin{cases} -x^2+1\ge 0 \\ x\ge 0 \end{cases} \Rightarrow x<0 \vee 0\le x\le 1 \Rightarrow x\le 1$

quindi possiamo effettuare $g\left[f(x)\right]=\begin{cases}\sqrt{x^2+1} & x<0\\ \sqrt{-x^2+1} & 0\le x\le 1\end{cases}$ definito in $f\circ g:(-\infty;1]\to[0;+\infty)$

14. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & x<0\\ \sqrt{x} & x\ge 0\end{cases}, g(x)=ln(x)$

Si ha: *dom*(*f*) = *cod*(*f*) = $\mathbb{R}$; *dom*(*g*) = (0; + ∞), *cod*(*g*) = $\mathbb{R}$. Dato che *cod*(*g*) ⊆ *dom*(*f*) possiamo effettuare $f\left[g(x)\right]=\begin{cases}\dfrac{1}{ln(x)} & 0<x<1\\ \sqrt{ln(x)} & x\ge 1\end{cases}$, definito in $g\circ f:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$; si ha invece *cod*(*f*) ⊄ *dom*(*g*), quindi restringiamo *dom*(*f*) in modo che *cod*(*f*) = *dom*(*g*): $\sqrt{x}>0\Rightarrow x>0$, adesso possiamo effettuare $g\left[f(x)\right]=ln\left(\sqrt{x}\right)$ con $f\circ g:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$

15. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & x<0\\ x & x\ge 0\end{cases}, g(x)=\begin{cases}x & x\le 0\\ \dfrac{1}{x} & x>0\end{cases}$

Si ha: *dom*(*f*) = = *cod*(*f*) = *dom*(*g*) = *cod*(*g*) = $\mathbb{R}$. Dato che *cod*(*g*) ⊆ *dom*(*f*), possiamo effettuare *f*[*g*[(*x*)] = 1/*x*, definito in $g\circ f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$; si ha anche *cod*(*f*) ⊆ *dom*(*g*), quindi possiamo effettuare *g*[*f*[(*x*)] = 1/*x*, definito in $f\circ g:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$

16. Se una funzione è invertibile, possiamo dire che essa può essere sempre composta con la propria inversa? E in caso di risposta affermativa, che tipo di funzione è la composta?
Sì, la funzione *f*(*x*) = *x*

Calcolare quanto richiesto

17. a) *f*(*x*) = *x* + 1, *f*²(–2) = ?; b) *f*(*x*) = 2*x* – 1, *f*³(1) = ?; c) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}, f^3(0)=?$

a) $f^2(x)=f(f(x))=f(x+1)=x+1+1=x+2\Rightarrow f^2(-2)=-2+2=0$;
b) $f^3(x)=f(f(f(x)))=f(f(2x-1)=f(2(2x-1)-1)=f(4x-3)=2(4x-3)-1=8x-7\Rightarrow f^3(1)=8-7=1$;
c) $f^3(x)=f\left(f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)\right)=f\left(\dfrac{\dfrac{x+1}{x-1}+1}{\dfrac{x+1}{x-1}-1}\right)=f\left(\dfrac{\dfrac{x+1+x-1}{\cancel{x-1}}}{\dfrac{x+1-x+1}{\cancel{x-1}}}\right)=f\left(\dfrac{2x}{2}\right)=f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}\Rightarrow f^3(0)=\dfrac{1}{-1}=-1$

18. a) *f*(*x*) = (*x* + 1)², *f*⁴(–1) = ? b) *f*(*x*) = *x*² – *x*, $f^3\left(\dfrac{1}{2}\right)=?$

a) $f^4(x)=f(f(f(f(x))))=f(f(f((x+1)^2)))=f(f[(x+1)^2+1)^2])=f(\{[(x+1)^2+1]^2+1\}^2)=\{[((x+1)^2+1)^2+1]^2+1\}^2\Rightarrow f^4(-1)=[(1+1)^2+1]^2=[(4+1)]^2=25$
b) $f^3(x)=f(f(x^2-x))=f[(x^2-x)^2-(x^2-x)]=f[x^4-2x^3+x^2-x^2+x]=f[x^4-2x^3+x]=(x^2-x)^4-2(x^2-x)^3+(x^2-x)\Rightarrow$

$$f^3\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)^4-2\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{4}\right)^4-2\left(-\frac{1}{4}\right)^3+\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{256}+2\frac{1}{64}-\frac{1}{4}=\frac{1+8-64}{256}=-\frac{55}{256}$$

19. a) $f(x)=\sqrt{x^2+1}, f^2(-2)=?$ **; b) *f*(*x*) = *x* + |*x*|, *f*²(–1) = ? c) *f*(*x*) = *sin*(*x*), *f*³(π) = ?**

a) $f\left(f(x)\right)=f\left(\sqrt{x^2+1}\right)=\sqrt{\sqrt{x^2+1}^2+1}=\sqrt{x^2+2}\Rightarrow f^2(-2)=\sqrt{4+2}=\sqrt{6}$;

b) $f(f(x))=f(x+|x|)=x+|x|+|x+|x||\Rightarrow f^2(-1)=-1+|-1|+|-1+|-1||=-1+1+|-1+1|=0$
c) $f^3(x)=f(f(sin(x)))=f(sin[sin(x)])=sin\{sin[sin(x)]\}\Rightarrow f^3(\pi)=sin\{sin[sin(\pi)]\}=sin(sin[0])=sin(0)=0$

20. a) *f*(*x*) = *x*², *f*³(*x*) = ?; b) *f*(*x*) = *x* + |*x*|, *f*ⁿ(–1) = ?; c) *f*(*x*) = *sin*(*x*), *f*ⁿ(π) = ?

a) $f(f(f(x))) = f(f(x^2)) = f(x^4) = x^8$; b) $f(f(x)) = x + |x| + |x + |x|| \Rightarrow f(f(-1)) = -1 + |-1| + |-1 + |-1|| = 0 \Rightarrow f(f(f(-1))) = f(0) = 0 \Rightarrow f^n(-1) = 0$; c) $f(sin(x)) = sin[sin(x)] \Rightarrow f^2(\pi) = sin[sin(x)] = sin(0) = 0 \Rightarrow f^3(\pi) = f[sin(0)] = sin(0) = 0 \Rightarrow f^n(\pi) = 0$

La sfida

1. **Possiamo dire che $\lceil x \rceil^2 = \lceil x^2 \rceil$? In caso di risposta negativa fornire un esempio.**

   No, p.e. $\left\lceil \sqrt{2} \right\rceil^2 = 1^2 = 1, \left\lceil \left(\sqrt{2}\right)^2 \right\rceil = 2$

2. **Dato $f(x) = log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, dimostrare che $f(a) + f(b) = f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$.**

   $$log\left(\frac{1+a}{1-a}\right) + log\left(\frac{1+b}{1-b}\right) = log\left[\left(\frac{1+a}{1-a}\right)\left(\frac{1+b}{1-b}\right)\right] = log\left(\frac{1+b+a+ab}{1-b-a+ab}\right)$$

   $$log\left(\frac{1+\frac{a+b}{1+ab}}{1-\frac{a+b}{1+ab}}\right) = log\left(\frac{\frac{1+ab+a+b}{\cancel{1+ab}}}{\frac{1+ab-a-b}{\cancel{1+ab}}}\right) = og\left(\frac{1+b+a+ab}{1-b-a+ab}\right)$$

3. **Determinare la legge della funzione $\lceil k \cdot x \rceil$, $k \in \mathbb{N}$**

   Noi sappiamo che la funzione rappresenta il massimo intero contenuto nell'argomento, così $\lceil 0{,}7 \rceil = 0$ e $\lceil 1{,}2 \rceil = 1$. Pertanto moltiplicando per un numero naturale k non facciamo altro che suddividere l'originale intervallo largo 1 (nel caso di $k = 1$) in k intervalli di larghezza $1/k$. Per esempio $\lceil 2 \cdot 0{,}4 \rceil = \lceil 0{,}8 \rceil = 0$ e $\lceil 2 \cdot 0{,}7 \rceil = \lceil 1{,}4 \rceil = 1$; $\lceil 3 \cdot 0{,}3 \rceil = \lceil 0{,}9 \rceil = 0$, $\lceil 3 \cdot 0{,}5 \rceil = \lceil 1{,}5 \rceil = 1$ e $\lceil 3 \cdot 0{,}8 \rceil = \lceil 2{,}4 \rceil = 2$ e così via, quindi non è difficile capire che la legge generale è
   $$\begin{cases} k \cdot n + 1 & n \le x < n + \frac{1}{k} \\ k \cdot n + 2 & n + \frac{1}{k} \le x < n + \frac{2}{k} \\ & \dots \\ k \cdot n + k & n + \frac{k-1}{k} \le x < n + 1 \end{cases}$$

4. **Determinare la legge della funzione $\lfloor k \cdot x \rfloor$, $k \in \mathbb{N}$**

   Possiamo tenere conto che si ha $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil - 1$ e quindi per quanto visto nell'esercizio precedente la legge generale è
   $$\begin{cases} k \cdot n & n < x \le n + \frac{1}{k} \\ k \cdot n + 1 & n + \frac{1}{k} < x \le n + \frac{2}{k} \\ & \dots \\ k \cdot n + (k-1) & n + \frac{k-1}{k} < x < n + 1 \end{cases}$$

5. **Esprimere il generico elemento della successione {1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, …} usando le funzioni *floor* o *ceiling*.**

   Vogliamo che si abbia $a_n = k$ quando $k(k-1)/2 < n \le k(k+1)/2$, dato che *né* intero ciò equivale a $k(k-1)/2 + 1/8 < n < k(k+1)/2 + 1/8 \Leftrightarrow (k - ½)^2 < 2n < (k + ½)^2 \Leftrightarrow k - 1/2 < \sqrt{2n} < k + 1/2$ e quindi che $a_n = \left\lfloor \sqrt{2n} + \frac{1}{2} \right\rfloor \vee a_n = \left\lceil \sqrt{2n} - \frac{1}{2} \right\rceil$. Sono possibili infinite altre soluzioni.

6. **Determinare tutte le radici reali della funzione *f*, che verifica la proprietà: $f(x^{1/9}) = x^2 - 3x - 4$.**

   Abbiamo $f(x) = f[(x^9)^{1/9}] = (x^9)^2 - 3(x^9) - 4x$ le cui radici sono: $x^9 = 4 \vee x^9 = -1$, quindi $x = 4^{1/9} \vee x = -1$

7. **Sia una funzione *f* che verifica $f(1/x) - 3f(x) = x$, $x \neq 0$. Determinare $f(2)$.**

Si ha: $\begin{cases} f(1/2)-3f(2)=2 \\ f(2)-3f(1/2)=1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1/2)=3f(2)+2 \\ f(2)-3[3f(2)+2]=1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1/2)=3f(2)+2 \\ 8f(2)=-13/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1/2)=-7/16 \\ f(2)=-13/16 \end{cases}$

8. Se $f(x) = ax + b$ e $f^{-1}(x) = bx + a$, con a e b numeri reali, quanto vale $a + b$?

Si ha: $f^{-1}(x) = (x - b)/a$ quindi: $(x - b)/a = bx + a \Rightarrow x - b - abx - a^2 = 0 \Rightarrow (1 - ab)x = a^2 + b \Rightarrow$

$\begin{cases} 1-ab=0 \\ a^2+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+a^3=0 \\ b=-a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow a+b=-2$

9. Qual è il massimo numero di punti d'intersezione dei grafici di due diverse funzioni polinomiali di quarto grado $y = p(x)$ e $y = q(x)$, ciascuna di coefficiente direttore 1?

In pratica si chiede il numero di soluzioni dell'equazione $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = x^4 + ex^3 + fx^2 + gx + h$, che è un'equazione di III grado e quindi ha al massimo 3 soluzioni

10. Tenuto conto che $f(2x)=\dfrac{2}{2+x}, \forall x>0$, determinare $2 \cdot f(x)$.

$$f(2x)=\frac{2}{2+x} \Rightarrow f(x)=\frac{2}{2+x/2}=\frac{4}{4+x} \Rightarrow 2\cdot f(x)=\frac{8}{4+x} \quad f(2x)=\frac{2}{2+x},\ \forall x>0$$

11. Data $f(x)=ax^2-\sqrt{2},\quad a\in\mathbb{Z}$, risolvere l'equazione in a: $f\left(f\left(\sqrt{2}\right)\right)=-\sqrt{2}$.

$$f\left(f\left(\sqrt{2}\right)\right)=f\left(a\left(\sqrt{2}\right)^2-\sqrt{2}\right)=f\left(2a-\sqrt{2}\right)=a\left(2a-\sqrt{2}\right)^2-\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(f\left(\sqrt{2}\right)\right)=-\sqrt{2} \Rightarrow a\left(2a-\sqrt{2}\right)^2=0 \Rightarrow a=0, a=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ non accettabile}$$

12. Se $f(x) = ax^7 + bx^3 + cx - 5$, e $f(-7) = 7$, calcolare $f(7)$.

$f(7) = a7^7 + b7^3 + c7 - 5$, e $f(-7) = -a7^7 - b7^3 - c7 - 5 \Rightarrow f(7) + f(-7) = -10 \Rightarrow f(7) + 7 = -10 \Rightarrow f(7) = -17$

13. Se $f(x) = ax^4 + bx^2 + x + 5$ e $f(-3) = 2$, allora $f(3)$ è A) −5 B) −2 C) 1 D) 3 E) 8

$f(3) - f(-3) = a3^4 + b3^2 + 3 + 5 - a3^4 - b3^2 + 3 - 5 = 6 \Rightarrow f(3) - 2 = 6 \Rightarrow f(3) = 8$, risposta E

14. Una funzione $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è definita dalla legge: $f(n)=\begin{cases} n+3 & se\ n\ è\ dispari \\ n/2 & se\ n\ è\ pari \end{cases}$. Supponiamo k dispari e $f\{f[f(k)]\} = 27$. Quanto vale la somma delle cifre di k? A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 15

$f\{f[f(k)]\} = f[f(k + 3)] = (k + 3$ è pari$) f[(k + 3)/2] = (k + 3)/2 + 3$ se $k + 3$ non è multiplo di 4, oppure se lo è. Vediamo i due casi: $(k + 3)/2 + 3 = 27 \Rightarrow (k + 3)/2 = 24 \Rightarrow k + 3 = 48$, che non va bene perché 48 è multiplo di 4. Oppure: $(k + 3)/4 = 27 \Rightarrow k + 3 = 108$, che è multiplo di 4 e quindi va bene. Allora $k = 105$, la somma delle cui cifre è 6: risposta B

15. Tenuto conto che $f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=\dfrac{1}{x}, \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0, 1\}$, determinare $f[sec^2(\theta)]$, $0 < \theta < \pi/2$.

$$\frac{x}{x-1}=sec^2(\theta) \Rightarrow \left[1-sec^2(\theta)\right]x=-sec^2(\theta) \Rightarrow x=\frac{sec^2(\theta)}{sec^2(\theta)-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{sec^2(\theta)-1}{sec^2(\theta)}=1-\frac{1}{sec^2(\theta)}=1-cos^2(\theta)=sin^2(\theta)$$

16. Sapendo che $f(x) + 2 \cdot f(1/x) = 3x$, risolvere $f(x) = f(-x)$. *Suggerimento*: sostituire nella prima uguaglianza $1/x$ a x, quindi eliminare $f(1/x)$.

$$\begin{cases} f(x)+2f(1/x)=3x \\ f(1/x)+f(x)=3/x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1/x)=\dfrac{3x-f(x)}{2} \\ \dfrac{3x-f(x)}{2}+f(x)=\dfrac{3}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1/x)=\dfrac{3x-f(x)}{2} \\ \dfrac{f(x)+3x}{2}=\dfrac{3}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1/x)=\dfrac{3x-f(x)}{2} \\ f(x)=\dfrac{6}{x}-3x \end{cases}$$

pertanto: $f(x)=f(-x) \Leftrightarrow \dfrac{6}{x}-3x=-\dfrac{6}{x}+3x \Rightarrow 6x-\dfrac{12}{x}=0 \Rightarrow x^2-2=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$

17. Sia f una funzione tale che $f(x/3) = x^2 + x + 1$. Determinare la somma di tutti gli z per i quali: $f(3z) = 7$.

$x/3 = 3z \Rightarrow x = 9z$. $f(3z) = (9z)^2 + (9z) + 1 \Rightarrow 81z^2 + 9z + 1 - 7 = 0 \Rightarrow 81z^2 + 9z - 6 = 0 \Rightarrow 27z^2 + 3z - 2 = 0$. La somma delle radici dell'equazione è $-3/27 = -1/9$.

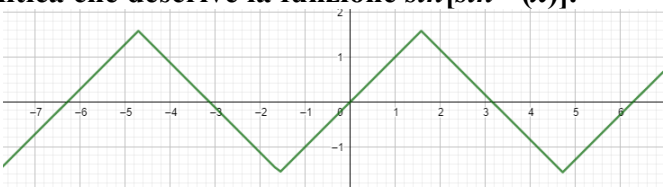
18. $p(x)$ è un generico polinomio, determinare tutti i polinomi che verificano: $p(x^2) = [p(x)]^2 = p[p(x)]$. Suggerimento: due polinomi sono identici se hanno lo stesso grado e gli stessi coefficienti dei termini di uguale grado.

Sia $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \text{---} + a_1x + a_0$; $p(x^2) = a_nx^{2n} + a_{n-1}x^{2(n-1)} + \text{---} + a_1x^2 + a_0$; $[p(x)]^2 = [a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \text{---} + a_1x + a_0]^2$. Dall'uguaglianza $p(x^2) = [p(x)]^2$ e dal suggerimento osserviamo che $a_nx^{2n} = a^2_nx^{2n} \Rightarrow a_n = a^2_n$, quindi $a_n = 0$ oppure 1, ma il termine di massimo grado del polinomio, anche se è solo il termine noto, non può essere nullo, quindi $a_n = 1$. Inolte $p(x^2)$ ha solo termini di grado pari, mentre $[p(x)]^2$ ne ha anche di grado dispari, che perciò devono annullarsi. In particolare si annulla $2x^n \cdot a_{n-1}x^{n-1} = 2a_{n-1}x^{2n-1}$, perciò $a_{n-1} = 0$, continuando questo ragionamento avremo che anche tutti gli altri coefficienti saranno nulli: quindi $p(x) = x^2$

19. Se $f(x) = \sqrt[n]{a - x^n}$ e $x \geq 0$, determinare $f[f(x)]$.

$$f[f(x)] = f\left(\sqrt[n]{a-x^n}\right) = \sqrt[n]{a - \left(\sqrt[n]{a-x^n}\right)^n} = \sqrt[n]{a - (a - x^n)} = \sqrt[n]{x^n} = x$$

20. Trovare una legge analitica che descrive la funzione $sin[sin^{-1}(x)]$.

Consideriamo il grafico 

e osserviamo che abbiamo l'alternanza di segmenti di rette parallele alle due bisettrici degli assi, in particolare, negli intervalli $[-\pi/2 + k\pi; \pi/2 + k\pi]$ con k pari sono paralleli a $y = x$, per k dispari a $y = -x$. Quindi dobbiamo premettere $(-1)^k$ per "regolare" l'alternanza di questi segni. Dopo di che è facile capire che il periodo dei segmenti paralleli è π, quindi la legge cercata è: $y = (-1)^k(x - k\pi)$, $x \in [-\pi/2 + k\pi; \pi/2 + k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$

Temi assegnati agli esami di stato

1. (Liceo scientifico 2001/02) In un piano, riferito a un sistema di assi cartesiani (Oxy), è assegnato il luogo geometrico dei punti che soddisfano alla seguente equazione: $y = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{1 - x^2}$. Tale luogo è costituito da: A) un punto; B) due punti; C) infiniti punti; D) nessun punto. Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un esauriente spiegazione della risposta.

La risposta è B), infatti l'I.d.E. della funzione associata all'equazione è $x = \pm 1$, quindi i punti $(-1; 0)$ e $(1; 0)$, del resto la somma di due quantità non negative è nulla solo quando entrambe le quantità lo sono.

2. (Liceo scientifico 2002/03) Il dominio della funzione $f(x) = ln\left[\sqrt{x+1} - (x-1)\right]$ è l'insieme degli x reali tali che: A) $-1 < x \leq 3$; B) $-1 \leq x < 3$; C) $0 < x \leq 3$; D) $0 \leq x < 3$. Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una esauriente spiegazione della scelta effettuata.

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - (x-1) > 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} > (x-1) \\ x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 < 0 \\ x \geq -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x + 1 > (x-1)^2 \\ x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow$$

Si ha:

$$\Rightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \geq -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 1 \\ x + \cancel{1} > x^2 - 2x + \cancel{1} \\ x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow -1 \leq x < 1 \vee \begin{cases} x \geq 1 \\ 0 < x < 3 \\ x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow -1 \leq x < 1 \vee 1 \leq x < 3 \Rightarrow -1 \leq x < 3$$

Risposta B

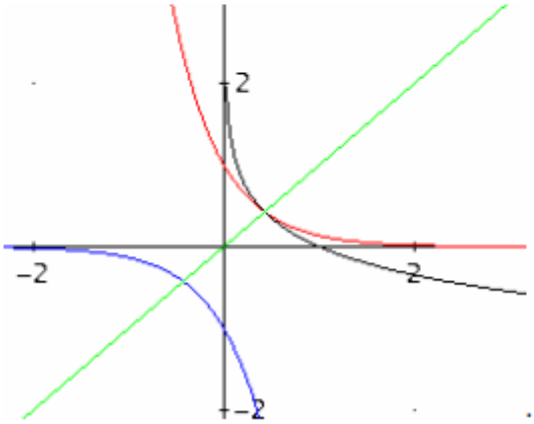
3. (Liceo scientifico PNI 2007/2008) Qual è l'equazione della curva simmetrica rispetto all'origine di $y = -e^{2x}$? Quale quella della curva simmetrica rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante?

La simmetria rispetto all'origine ha equazioni: $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$, quindi la curva simmetrica è:

$-y = e^{2x} \Rightarrow y = -e^{2x}$.

La simmetria rispetto alla prima bisettrice ha equazioni: $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$, quindi la curva simmetrica è:

$x = e^{-2y} \Rightarrow -2y = \ln(x) \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \cdot \ln(x)$.



$y =$

4. **(Liceo scientifico 2008/09) Sono dati gli insiemi A = {1, 2, 3, 4} e B = {a, b, c}. Tra le funzioni (o applicazioni) di A in B, ce ne sono di suriettive? Di iniettive? Di biiettive?**
Suriettive sì, biiettive no perché i due insiemi hanno diversa cardinalità; iniettive dipende se si vuole che il dominio sia tutto A no, diversamente sì

5. **(Liceo scientifico 2010/11) Il profitto di una azienda, in milioni di euro, è stato rappresentato nella tabella sottostante designando con x_i l'anno di osservazione e con y_i il corrispondente profitto**

Anno	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	1,97	3,02	3,490	3,71	3,80	3,76	3,65

Si cerca una funzione che spieghi il fenomeno dell'andamento del profitto giudicando accettabile una funzione g definita su $\mathbb{R}^+$ se per ciascun x_i oggetto dell'osservazione si ha $|g(x_i) - y_i| \leq 10^{-1}$. Si verifichi, con l'aiuto di una calcolatrice, che è accettabile la funzione $f(x) = (x - 1) \cdot e^{-x/3} + 3$ e si dica, giustificando la risposta, se è vero che, in tal caso, l'evoluzione del fenomeno non potrà portare a profitti inferiori ai 3 milioni di euro.
Questo quesito è molto interessante, specie perché fa entrare nell'esame di stato, finalmente, la modellizzazione matematica. Risolviamo la questione con Excel, piuttosto che una calcolatrice, solo perché il procedimento è più veloce.

Anno	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	1,97	3,02	3,49	3,71	3,8	3,76	3,65
f	2	3	3,51342	3,73576	3,79079	3,7555	3,67668
f-yi	0,03	0,02	0,02342	0,02576	0,00921	0,0045	0,02668

Per $x > 1$ certamente si ha: $(x - 1) \cdot e^{-x/3} > 0$, e quindi $(x - 1) \cdot e^{-x/3} + 3 > 3$.

6. **(Liceo scientifico 2012/13) Si calcoli il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{2 - \sqrt{3 - x}}}$.**

Basta risolvere il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} 3-x\ge 0 \\ 2-\sqrt{3-x}\ge 0 \\ 1-\sqrt{2-\sqrt{3-x}}\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\le 3 \\ \sqrt{3-x}\le 2 \\ \sqrt{2-\sqrt{3-x}}\le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\le 3 \\ 3-x\le 4 \\ 2-\sqrt{3-x}\le 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x\le 3 \\ x\ge -1 \\ \sqrt{3-x}\ge 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\le 3 \\ x\ge -1 \\ 3-x\ge 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\le 3 \\ x\ge -1 \\ x\le 2 \end{cases} \Rightarrow -1\le x\le 2$$

Abbiamo semplicemente innalzato al quadrato senza porre condizioni di realtà perché erano insite nello stesso sistema.

7. **(Liceo scientifico 2014/15) Si determini il dominio della funzione:** $f(x)=\sqrt{3-log_2(x+5)}$**.**

Basta imporre le condizioni di esistenza:

$$\begin{cases} 3-log_2(x+5)\ge 0 \\ x+5>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} log_2(x+5)\le log_2(2^3) \\ x>-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+5\le 8 \\ x>-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\le 3 \\ x>-5 \end{cases} \Rightarrow -5<x\le 3$$

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

1. **(AHSME 1995) Sia *f* una funzione lineare con le proprietà seguenti: $f(1)\le f(2)$, $f(3)\le f(4)$, e $f(5)=5$. Quale delle seguenti è vera? A) $f(0)<0$ B) $f(0)=0$ C) $f(1)<f(0)<f(-1)$ D) $f(0)=5$ E) $f(0)>5$**

Una funzione lineare ha equazione $f(x)=mx+b$. Dato che $f(1)\le f(2)$, si ha $m\ge 0$. Analogamente $f(3)\le f(4)$ implica $m\le 0$. Quindi $m=0$, e f è costante, perciò $f(0)=f(5)=5$. Risposta D

2. **(AHSME 1997) Consideriamo le funzioni *f* che verificano $f(x+4)+f(x-4)=f(x)$ per tutti i numeri reali *x*. Tali funzioni sono periodiche e hanno un minimo periodo comune *p*. Quanto vale *p*? A) 8 B) 12 C) 16 D) 24 E) 32**

Sostituendo x con $x+4$ abbiamo $f(x+8)+f(x)=f(x+4)$. Tenuto conto che $f(x+4)+f(x-4)=f(x)$, sostituendo otteniamo $f(x+8)=-f(x-4)$. Sostituendo x con $x+4$, la precedente diventa $f(x+12)=-f(x)$. Adesso sostituendo x con $x+12$: $f(x+24)=-f(x+12)$. Di conseguenza $f(x+24)=f(x)$ per ogni x, così un minimo periodo p esiste ed è al più 24. D'altro canto, la funzione $f(x)=sin(\pi x/12)$ ha periodo 24, e soddisfa la richiesta iniziale, quindi p = 24. Risposta D

3. **(AHSME 1998) Sia $f(x)$ una funzione che verifica le seguenti proprietà:**
a) comunque siano i numeri reali *x* e *y*, $f(x+y)=x+f(y)$; b) $f(0)=2$. Calcola $f(1998)$.

Si ha: $2=f(0)=f(-1998+1998)=-1998+f(1998)$. Quindi $f(1998)=2000$

4. **(HSMC 1999) Determinare il dominio della funzione** $f(x)=\dfrac{2}{\lfloor x\rfloor^2+\lfloor x\rfloor-56}$**.**

Deve essere $\lfloor x\rfloor^2+\lfloor x\rfloor-56\ne 0\Rightarrow \lfloor x\rfloor\ne\dfrac{1\pm\sqrt{1+224}}{2}=\dfrac{1\pm 15}{2}=\prec\begin{matrix}8\\-7\end{matrix}$, tenuto conto del significato della funzione floor abbiamo: $(-\infty;-8)\cup[-7;7)\cup[8;+\infty)$

5. **(HSMC 1999) Data la funzione** $f(x)=\dfrac{c\cdot x}{2x+3}$**, determinare i valori di *c* per cui: $f[f(x)]=x$, $x\ne -3/2$.**

Si ha: $f[f(x)]=f\left(\dfrac{c\cdot x}{2x+3}\right)=\dfrac{c\cdot\dfrac{c\cdot x}{2x+3}}{2\dfrac{c\cdot x}{2x+3}+3}=\dfrac{c^2x}{2cx+6x+9}$, da cui

$$\frac{c^2x}{2cx+6x+9}=x\Rightarrow c^2x=2cx^2+6x^2+9x\Rightarrow\begin{cases} c^2=9 \\ 2c+6=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} c=\pm 3 \\ c=-3 \end{cases}\Rightarrow c=-3\,c$$

6. **(HSMC 2000) Sia *f* una funzione tale che $f(3)=1$ e $f(3x)=x+f(3x-3)$, per ogni *x*. Calcolare $f(300)$.**

Si ha: $f(3\cdot 2)=2+f(3\cdot 2-3)\Rightarrow f(6)=2+f(3)=2+1=3$; $f(3\cdot 3)=3+f(3\cdot 3-3)\Rightarrow f(9)=3+f(6)=3+3=6$; $f(3\cdot 4)=4+f(3\cdot 4-3)\Rightarrow f(12)=4+f(9)=4+6=10$. A questo punto si capisce

che in generale si ha: $f(3 \cdot n) = 1 + 2 + \ldots + n = n \cdot (n + 1)/2$, quindi $f(300) = 100 \cdot 101/2 = 5050$

7. **(HSMC 2004) Sia f una funzione polinomiale tale che si abbia: $f(x^2 + 1) = x^4 + 5x^2 + 3$ per ogni x reale. Calcolare $f(x^2 - 1)$.**

$$f\left(x^2-1\right)=f\left[\left(x^2-2\right)+1\right]=f\left[\left(\sqrt{x^2-2}\right)^2+1\right]=\left(\sqrt{x^2-2}\right)^4+5\left(\sqrt{x^2-2}\right)^2+3=$$

$$=\left(x^2-2\right)^2+5x^2-10+3=x^4-4x^2+4+5x^2-7=x^4+x^2-3$$

8. **(HSMC 2005) Sia $f(t)=\dfrac{t+2}{t-2}$, calcolare $f^{-1}(c^{-1} - 1)$.**

$$y=\frac{t+2}{t-2}\Rightarrow(y-1)t=2y+2\Rightarrow f^{-1}(t)=\frac{2t+2}{t-1}\Rightarrow f^{-1}\left(c^{-1}-1\right)=\frac{2c^{-1}-2+2}{c^{-1}-1-1}=\frac{2c^{-1}}{c^{-1}-2}=\frac{2/c}{1/c-2}=\frac{2}{1-2c}$$

9. **(HSMC 2002) Siano le funzioni f e g tali che si abbia $f(x) = 2x - 6$ e $f[g[(x)] = g[f[(x)] = x$ per ogni x, determinare l'ascissa dell'intersezione delle curve $y = f(x)$ e $y = g(x)$.**

$f[g[(x)] = 2g(x) - 6 \Rightarrow x = 2g(x) - 6 \Rightarrow g(x) = x/2 + 3 \Rightarrow f(x) = g(x) \Rightarrow 2x - 6 = x/2 + 3 \Rightarrow 4x - x = 18 \Rightarrow x = 6$

10. **(HSMC 2006) Scrivere la funzione $f(x) = 1 - x^3 - x^4 - 2x^5$ come somma di una funzione pari e una dispari.**

Facilmente si ha: $f(x) = (1 - x^4) + (- x^3 - 2x^5)$

11. **(HSMC 2007) Sia f una funzione che verifica l'uguaglianza $f(x\cdot y)=\dfrac{f(x)}{y}$, per tutti i numeri reali positivi x e y. Se $f(300) = 2$, qual è il valore di $f(800)$?**

$$f(800)=f\left(300\cdot\frac{8}{3}\right)=\frac{f(300)}{8/3}=\frac{2}{8/3}=\frac{3}{4}$$

12. **(HSMC 2001) Let $F(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$. Form a new function $G(x)$ by replacing x in $F(x)$ with the expression $\dfrac{3x+x^3}{1+3x^2}$. Express $G(x)$ in terms of $F(x)$.**

Traduzione: Sia $F(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$. Formare una nuova funzione $G(x)$ sostituendo x in $F(x)$ con l'espressione $\dfrac{3x+x^3}{1+3x^2}$. Esprimere $G(x)$ in termini di $F(x)$.

$$G(x)=F\left(\frac{3x+x^3}{1+3x^2}\right)=\frac{1+\dfrac{3x+x^3}{1+3x^2}}{1-\dfrac{3x+x^3}{1+3x^2}}=\frac{1+3x^2+3x+x^3}{1+3x^2-3x-x^3}=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3=\left[F(x)\right]^3$$

13. **(NC 2001) Which of the following functions is neither odd nor even?**
A) $x^3 - 2x$ B) $x^3 - x\,|x|$ C) $x^5 - x^3 + 3x$ D) $x^4 - 2x^2 + x + 1$ E) $3x^2 - x + 6$

Traduzione: Quale fra le seguenti funzioni non è né pari né dispari?
Ovviamente D poiché contiene sia potenze pari che dispari

14. **(CMC 2001) Calculate the value of the sum $\lfloor\sqrt{1}\rfloor+\lfloor\sqrt{2}\rfloor+\lfloor\sqrt{3}\rfloor+\ldots+\lfloor\sqrt{50}\rfloor$.**

Traduzione: Calcolare il valore della somma
Ricordiamo che la funzione *floor* è il più grande numero intero contenuto nell'argomento, pertanto

$$\lfloor\sqrt{1}\rfloor=\lfloor\sqrt{2}\rfloor=\lfloor\sqrt{3}\rfloor=1;\lfloor\sqrt{4}\rfloor=\lfloor\sqrt{5}\rfloor=\ldots=\lfloor\sqrt{8}\rfloor=2;\lfloor\sqrt{9}\rfloor=\lfloor\sqrt{10}\rfloor=\ldots=\lfloor\sqrt{15}\rfloor=3;$$

$$\lfloor\sqrt{16}\rfloor=\lfloor\sqrt{17}\rfloor=\ldots=\lfloor\sqrt{24}\rfloor=4;\lfloor\sqrt{25}\rfloor=\lfloor\sqrt{26}\rfloor=\ldots=\lfloor\sqrt{35}\rfloor=5;$$

$$\lfloor\sqrt{36}\rfloor=\lfloor\sqrt{37}\rfloor=\ldots=\lfloor\sqrt{48}\rfloor=6;\lfloor\sqrt{49}\rfloor=\lfloor\sqrt{50}\rfloor=7$$

Quindi la somma cercata equivale a $1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 9 + 5 \cdot 11 + 6 \cdot 13 + 7 \cdot 2 = 217$

15. (HSMC 2001) If $f(x) = 3x + 4$, find a function $g(x)$ such that $f(g(x)) = 4x - 1$.
Traduzione: Se $f(x) = 3x + 4$, trovare una funzione $g(x)$ tale che si abbia
$f(g(x)) = 3\,g(x) + 4 = 4x - 1 \Rightarrow g(x) = \frac{4x-5}{3}$

16. (HSMC 2002) Given functions $f(x) = 2x - 6$ and $g = f^{-1}$, solve $f(x) = g(x)$.
Traduzione: Date le funzioni $f(x) = 2x - 6$ e $g = f^{-1}$, risolvere $f(x) = g(x)$
$f^{-1}(x) = x/2 + 3 \Rightarrow 2x - 6 = x/2 + 3 \Rightarrow x = 6$

17. (HSMC 2004) Consider the function $f(x)$ such that $f(mn) = f(m + n)$ for all real numbers m and n. If $f(2) = 4$, find $f(64)$.
Traduzione: Considerare la funzione $f(x)$ tale che $f(mn) = f(m + n)$ per tutti i numeri reali m ed n. Se $f(2) = 4$, calcolare $f(64)$
$f(2 \cdot 1) = f(2 + 1) \Rightarrow f(3) = 4$; $f(3 \cdot 1) = f(3 + 1) \Rightarrow f(4) = 4$. A questo punto si capisce che la funzione è costante, quindi anche $f(64) = 4$

18. (NC 2004) A dress that is size x in France is size $s(x)$ in the United States, where $s(x) = x - 32$. A dress that is size x in the United States is size $y(x)$ in Italy, where $y(x) = 2(x + 12)$. Which function $h(x)$ will convert French dress sizes to Italian dress sizes?
Traduzione: Un abito di taglia x in Francia ha taglia $s(x)$ negli USA, dove $s(x) = x - 32$. Un abito di taglia x negli USA ha taglia $y(x)$ in Italia, dove $y(x) = 2(x + 12)$. Quale funzione $h(x)$ converte la taglia francese in una taglia Italiana?
Si ha: $s(x) = x - 32$ e $y(x) = 2[s(x) + 12] = 2[x - 32 + 12] = 2x - 40$

19. (SC 2008) Suppose that $f(x) = x^x$ and $g(x) = x^{2x}$. Which of the functions below is equal to $f[g[(x)]$?
A) x^{3x} B) $x^{x^{2x}}$ C) $x^{2x^{2x}}$ D) $x^{2x^{3x}}$ E) $x^{2x^{2x+1}}$
Traduzione:
Supponi che $f(x) = x^x$ e $f(x) = x^{2x}$. Quale fra le funzioni seguenti è uguale a $f[g[(x)]$?
$f[g[(x)] = f\left(x^{2x}\right) = \left(x^{2x}\right)^{x^{2x}} = x^{2x \cdot x^{2x}} = x^{2x^{2x+1}}$, che è la risposta E

20. (HSMC 2008) Let $f(x)$ be a function such that $f(x) + 3f(-x) = cos(x)$ for every real number x. What is the value of $f(\pi)$?
Traduzione: Sia $f(x)$ una funzione tale che sia $f(x) + 3f(-x) = cos(x)$ per ogni numero reale x. Quanto vale $f(\pi)$?
Si ha: $\begin{cases} f(\pi)+3f(-\pi)=cos(\pi) \\ f(-\pi)+3f(\pi)=cos(-\pi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(\pi)+3f(-\pi)=-1 \\ f(-\pi)=-3f(-\pi)-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(\pi)-9f(\pi)-3=-1 \\ f(-\pi)=-3f(\pi)-1 \end{cases} \Rightarrow f(\pi)=\frac{2}{-8}=-\frac{1}{4}$

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. (Accademia militare) Stabilire il dominio di definizione della funzione $\frac{log(x-2)}{\sqrt{1-x}}$
A) Nessun x B) $-2 < x < 1$ C) $x > 2$ D) Qualunque x
Si ha: $\begin{cases} x-2>0 \\ 1-x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>2 \\ x<1 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$. Risposta A

2. (Accademia militare) Il dominio della funzione $f(x) = \frac{ln(x+1)}{x-2}$ è uguale a:
A) $(-1; +\infty)$ B) $(-1; 2) \cup (2; +\infty)$ C) $(0; +\infty)$ D) $(1; +\infty)$
Si ha: $\begin{cases} x+1>0 \\ x-2\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x\neq 2 \end{cases} \Rightarrow (-1;2)\cup(2;+\infty)$. Risposta B

3. (Odontoiatria 1998) Data la funzione $y = a + bx$, se x raddoppia, di quanto aumenta y?
A) b B) $2b$ C) $2a$ D) bx E) x.
Si ha: $y' = a + 2bx$ e $y' - y = a + 2bx - (a + bx) = bx$. Risposta D

4. (Odontoiatria 2000) La curva di equazione $y = -\frac{\sqrt{7}+1}{|x|}$ ha il grafico contenuto nei quadranti:
A) I e III B) I e II C) II e III D) III e IV E) I e IV

Risposta D, dato che la frazione è sempre positiva, quindi la funzione è sempre negativa.

5. **(Odontoiatria 2001) Data una funzione *f*(*x*) tale che** $f(x+1)=\frac{2\cdot f(x)+2}{2}$ **e *f*(1) = 2, quant'è *f*(2)? A) 3 B) 0 C) 1/2 D) 2 E) 1**

$f(2)=f(1+1)=\frac{2\cdot f(1)+2}{2}=\frac{2\cdot 2+2}{2}=3$. Risposta A

6. **(Odontoiatria 2002) Quale fra gli insiemi seguenti rappresenta il dominio della funzione** $y=\frac{\sqrt{1-e^x}}{ln(x)}$ **?**

A) insieme dei numeri reali B) insieme dei numeri razionali C) (0; 1) ∪ (1; +∞) D) (–∞; 0) E) ∅

Si ha: $\begin{cases}1-e^x\ge 0\\ x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}e^x\le 1\\ x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\le 0\\ x>0\end{cases}\Rightarrow\varnothing$. Risposta E

7. **(Medicina 2002) Data una funzione *y* = *f*(*x*) è sempre vero che**
A) la funzione reciproca ha lo stesso dominio della funzione *f*(*x*) B) la funzione inversa ha lo stesso dominio della funzione *f*(*x*) C) la funzione inversa è data da *y* = 1/*f*(*x*) D) la funzione inversa è data da *y* = *f*(–*x*) E) la funzione reciproca è data da *y* = 1/*f*(*x*)

$f(x) = x$, nega la verità di A; $f(x) = sin(x)$, $x \in [-\pi/2; \pi/2]$ nega la verità di B, C e D; Risposta corretta E

8. **(Veterinaria 2002) L'espressione matematica *b* = *f*(*a*) è la traduzione in simboli della frase:**
A) il valore di *a* è in funzione di quello di *b* B) il valore di *b* è uguale a quello di *a* C) il valore di *b* è ottenuto moltiplicando *f* per *a* D) il valore di *a* è ottenuto moltiplicando *b* per l'inverso di *f* E) il valore di *b* è in funzione di quello di *a*

Risposta E

9. **(Veterinaria 2003) La funzione $y = a^{-x}$, con *a* > 0:**
A) è sempre positiva B) può essere sia positiva che negativa C) è sempre negativa D) interseca l'asse delle ascisse E) non interseca l'asse delle ordinate

Risposta A, gli esponenziali sono sempre positivi

10. **(Veterinaria 2004) La funzione inversa di** $f(x)=\frac{2x-3}{x}$ **è**

A) $x=\frac{y}{2y-3}$ **B)** $x=\frac{3}{2-y}$ **C)** $x=\frac{3-2y}{y}$ **D)** $x=\frac{-2y+3}{-y}$ **E)** $x=\frac{3}{y-2}$

$y=\frac{2x-3}{x}\Rightarrow xy-2x=-3\Rightarrow x=\frac{-3}{y-2}\Rightarrow x=\frac{3}{2-y}$. Risposta B

11. **(Odontoiatria 2004) Quale fra le seguenti funzioni ha il grafico simmetrico rispetto all'origine degli assi?** **A)** $y=x^5\cdot\sqrt{3}-\frac{1}{3x}$ **B)** $y=\frac{2}{5}x^7-x^5\cdot\sqrt{2}+\frac{1}{6}$ **C)** $y = x^4 - 7x^2 + 1$

D) $y=\sqrt{x^2+|x|+4}$ **E)** $y=\sqrt{x^2+|x+4|}$

Ossia una funzione dispari, l'unica fra quelle mostrate è la Risposta A

12. **(Medicina 2004) Data la funzione** $f(x)=\sqrt{|x|+3x-1}$ **, *f* (2*x*) vale:**

A) $\sqrt{2|x|+6x-2}$ **B)** $2\cdot\sqrt{|x|+3x-1}$ **C)** $\sqrt{2|x|+6x-1}$ **D)** $\sqrt{|2x|+3x-1}$ **E)** $2\cdot\sqrt{2|x|+6x-1}$

$f(2x)=\sqrt{|2x|+3(2x)-1}=\sqrt{2|x|+6x-1}$. Risposta C

13. **(Odontoiatria 2005) Essendo *x* e *y* due variabili reali, la funzione** $y=\sqrt{|x|-1}$

A) è definita solo per *x* ≥ 1 B) non è definita –1 ≤ *x* ≤ 1 C) è definita solo per *x* ≤ 1
D) è sempre definita e positiva E) è positiva in ogni punto del suo dominio

Si ha: $|x| - 1 \ge 0 \Rightarrow |x| \ge 1 \Rightarrow x \le -1 \vee x \ge 1$. Risposta B

14. **(Veterinaria 2005) Una fabbrica di bulloni sostiene una spesa fissa mensile media di € 120000,00 (il mese commerciale è inteso di 30 giorni) e un costo di produzione di € 3,15 per ogni bullone**

prodotto. Indicata con y la spesa giornaliera complessiva e con x il numero di bulloni prodotti in un giorno, individuare la relazione tra le variabili x e y

A) $y = 120000{,}00 + 3{,}15x$ B) $y = 4000{,}00 + 3{,}15/x$ C) $y = 3{,}15x - 120000{,}00$
D) $y = 4000{,}00 + 3{,}15x$ E) $y = 3{,}15/x - 4000{,}00$

$y = 120000{,}00/30 + 3{,}15x = 4000{,}00 + 3{,}15x$. Risposta D

15. (Odontoiatria 2005) Quale delle seguenti equazioni rappresenta una funzione lineare $y = f(x)$, tale che $f(-2) = 3$, $f(3) = -2$? A) $y = -x + 1$ B) $y = x + 5$ C) $y = x - 5$ D) $y = -2x - 1$ E) $y = -2x + 4$

Basta calcolare i valori. Risposta A

16. (Medicina 2005) Quale delle seguenti equazioni rappresenta una funzione $y = f(x)$ tale che $f(2) = -1$ e $f(-1) = 5$? A) $y = -x^2 + 2x - 1$ B) $y = -2x^2 + x + 8$ C) $y = 2x^2 - x - 7$ D) $y = x^2 - 3x + 1$ E) $y = 3x^2 - 2x$

Basta calcolare i valori. Risposta D

17. (Odontoiatria 2006) La funzione $y = \dfrac{x+2}{log(x-1)}$ è definita per

A) $x > 1 \wedge x \neq 2$ B) $1 < x \leq 2$ C) $x \geq 1 \wedge x \neq 2$ D) $x \leq 1$ E) $x > 1$

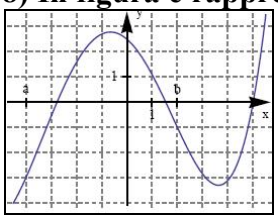
$\begin{cases} x-1>0 \\ log(x-1) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ x-1 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ x \neq 2 \end{cases}$. Risposta A

18. (Odontoiatria 2007) Essendo x e y due variabili reali, la funzione: $y = ln(x - 1)$

A) non è definita per $-1 \leq x \leq 1$ B) è definita solo per $x \geq 1$ C) è definita solo per $x \leq 1$
D) è sempre definita e positiva E) è positiva in ogni punto del suo dominio

$x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$. Risposta A, perché è l'unica corretta, facciamo attenzione che non è detto che non è definita **solo per**, in questo caso non sarebbe corretta.

19. (Facoltà scientifiche, Roma La Sapienza 2008) In figura è rappresentato il grafico di una funzione f. Quanto vale il rapporto $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$?



A) –1/3 B) 1 C) 1/3 D) –2/3

Dal grafico: $f(b) = -1$, $f(a) = -3$, $a = -4$, $b = 2$, quindi: $\dfrac{-1-(-3)}{2-(-4)} = \dfrac{-1+3}{2+4} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$. Risposta C

20. (Facoltà scientifiche, Roma La Sapienza 2008) Sia f la funzione definita da $f(x) = x^3 + 8$. Per quale x si ha che $f(x)$ è il doppio del valore della funzione in $x = 0$? A) 16 B) 0 C) 2 D) –2

$f(0) = 0^3 + 8 = 8$, quindi deve essere $f(x) = 16 \Rightarrow x^3 + 8 = 16 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$. Risposta C

21. (Facoltà scientifiche, Roma La Sapienza 2008) Due grandezze F ed R sono legate dalla relazione $F = 2/R^2$. Se F triplica, allora R diventa

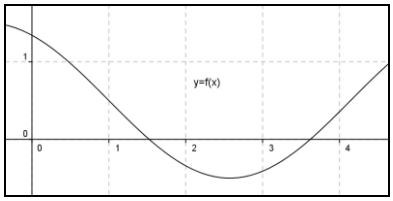
A) 2/3 del valore iniziale B) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ del valore iniziale C) 1/3 del valore iniziale D) 1/9 del valore iniziale

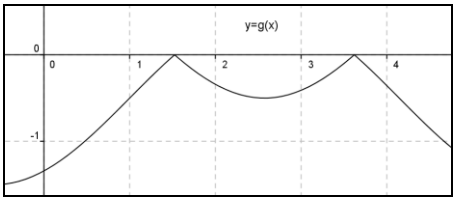
Si ha: $R^2 = \dfrac{2}{F} \Rightarrow R = \sqrt{\dfrac{2}{F}}$, quindi triplicando $F \Rightarrow R = \sqrt{\dfrac{2}{3F}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\dfrac{2}{F}}$. Risposta B

***22.* (Facoltà scientifiche, Roma La Sapienza 2008) Una ditta di elettrodomestici ha venduto in un anno 2000 forni a microonde di un certo modello, al prezzo di 100 euro l'uno. È stato stimato che, se nell'anno successivo il prezzo di vendita di quel modello aumenterà di x euro, allora il numero di forni venduti in un anno diminuirà di $30x$. Quale delle seguenti funzioni $I(x)$ descrive l'incasso annuo della ditta al variare dell'aumento x? A) $I(x) = 100 \cdot (2000 - 30x)$ B) $I(x) = (2000 + 30x) \cdot (100 + x)$ C) $I(x) = (100 + x) \cdot (2000 - 30x)$ D) $I(x) = (2000 - 30x) \cdot 100x$**

Risposta C

23. (Architettura 2009) Nella figura sono rappresentati i grafici delle funzioni $y = f(x)$, $y = g(x)$. Quale delle seguenti relazioni è compatibile con le informazioni deducibili dai grafici così come disegnati.





A) $g(x) = |-f(x)|$ **B)** $g(x) = -|f(x)|$ **C)** $g(x) = f(|x|)|$ **D)** $g(x) = -f(|x|)$ **E)** $g(x) = f(|-x|)$

Risposta B, dato che il valore assoluto fa diventare positivo ciò che non lo è, pertanto $|f(x)|$ starebbe tutta nel semipiano positivo delle y, quindi il suo opposto nel semipiano negativo.

24. (Facoltà scientifiche, Roma La Sapienza) Indica quale delle seguenti funzioni ha la proprietà *per ogni coppia di numeri* (x_1, x_2) *del dominio, se* $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

A) $f(x) = |x|$ **B)** $f(x) = cos(x)$ **C)** $f(x) = log(x)$ **D)** $f(x) = 1/x$

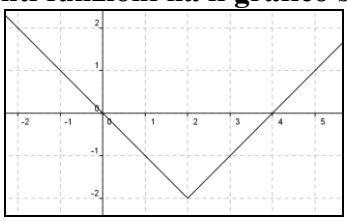
Risposta C, dato che $|x|$ cresce solo per $x > 0$; $cos(x)$ è periodica, quindi non è monotona; $1/x$ cresce solo per $x < 0$

25. (Ingegneria 2009) Se $f(x) = x^2 - x^3$, allora $f(x - 2)$ vale

A) $x^2 - x^3 + 2$ **B)** $(3 - x)(x - 2)^2$ **C)** $x^2 - x^3 - 2$ **D)** $x^2 - 2 - x^3 + 2$ **E) Nessuna delle altre**

$f(x) = (x - 2)^2 - (x - 2)^3 = (x - 2)^2 (1 - x + 2) = (x - 2)^2 (3 - x)$. Risposta B

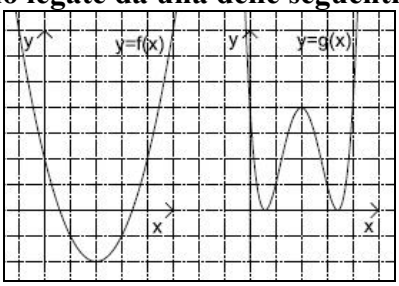
26. (Test Bocconi) Quale fra le seguenti funzioni ha il grafico seguente?



A) $f(x) = |x + 2| + 2$ **B)** $f(x) = |x - 2| + 2$ **C)** $f(x) = |x + 2| - 2$ **D)** $f(x) = |x - 2| - 2$ **E)** $f(x) = |x - 2|$

Per esclusione. A, B ed E sono sempre non negative; per C $f(4) = 4$. Quindi Risposta D

27. (Facoltà scientifiche CISIA 2010) In figura sono rappresentati, usando la stessa scala, i grafici di due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, che sono legate da una delle seguenti relazioni. Quale?



A) $g(x) = -f(x)$ **B)** $g(x) = f(x)^2$ **C)** $g(x) = \sqrt{f(x)}$ **D)** $g(x) = |f(x)|$ **E)** $g(x) = 1/x$

Risposta B