

9. Successioni di numeri reali e funzioni reali di una variabile reale

9.3 Continuità delle funzioni

Topologia della retta

Stabilire quali dei seguenti insiemi sono intorni dei punti accanto indicati

1. a) (1; 2) di 0,5; b) (1; 2) di 2; c) (1; 2) di 0; d) (1; 2) di $\sqrt{2}$; e) (-1; 1,4) di $\sqrt{2}$

Un intorno completo di un punto è un insieme che contiene il punto, cosa che accade solo per d)

2. a) $[0; \sqrt{2}]$ di $1/\sqrt{2}$; b) (3; 3,14) di π ; c) (0; 1) di $1/3$; d) (0; 1) di $1/\pi$

Tenuto conto di quanto detto: a), c) e d)

3. a) (2; 3) di $\sqrt{2} + \sqrt{3}$; b) $(\sqrt{1+\sqrt{2}}; \sqrt{1+\sqrt{3}})$ di 1; c) (1; 1,5) di $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}$

Nessuno

Scrivere gli intorni circolari dei punti di raggio r indicati

4. a) $I_1(2)$; b) $I_2(-1)$; c) $I_{1/2}(0)$; d) $I_{1/3}(2/5)$; e) $I_\pi(\pi)$; f) $I_{2/5}(1/3)$

Basta scrivere $(a - r; a + r)$, con a il centro indicato ed r il raggio, quindi: a) $(2 - 1; 2 + 1) = (1; 3)$; b) $(-1 - 2; -1 + 2) = (-3; 1)$; c) $(0 - \frac{1}{2}; 0 + \frac{1}{2}) = (-1/2; 1/2)$; d) $(2/5 - 1/3; 2/5 + 1/3) = (1/15; 11/15)$; e) $(\pi - \pi; \pi + \pi) = (0; 2\pi)$; f) $(1/3 - 2/5; 1/3 + 2/5) = (-1/15; 11/15)$

5. a) $I_{1/3}(-2/5)$; b) $I_{1/4}(2/3)$; c) $I_{\sqrt{2}}(1)$; d) $I_1(\sqrt{2})$; e) $I_{\sqrt{2}}(\sqrt{3})$

$$\text{a) } \left(-\frac{2}{5} - \frac{1}{3}; -\frac{2}{5} + \frac{1}{3} \right) = \left(-\frac{11}{15}; -\frac{1}{5} \right); \text{ b) } \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}; \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) = \left(\frac{5}{12}; \frac{11}{12} \right); \text{ c) } (1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}); \\ \text{d) } (\sqrt{2} - 1; 1 + \sqrt{2}); \text{ e) } (\sqrt{3} - \sqrt{2}; \sqrt{2} + \sqrt{3})$$

Determinare centro e raggio dei seguenti intorni

6. a) (2; 5); b) (-5; -2); c) (1; 4); d) (-3; -1); e) (1/2; 3); f) (-1/2; 3)

Il centro è la media aritmetica degli estremi, il raggio la metà della differenza fra gli estremi

$$\text{a) } I_{\frac{5-2}{2}}\left(\frac{2+5}{2}\right) = I_{\frac{3}{2}}\left(\frac{7}{2}\right); \text{ b) } I_{\frac{-2+5}{2}}\left(\frac{-5-2}{2}\right) = I_{\frac{3}{2}}\left(-\frac{7}{2}\right); \text{ c) } I_{\frac{4-1}{2}}\left(\frac{4+1}{2}\right) = I_{\frac{3}{2}}\left(\frac{5}{2}\right);$$

$$\text{d) } I_{\frac{-1+3}{2}}\left(\frac{-3-1}{2}\right) = I_1(-2); \text{ e) } I_{\frac{3-1}{2}}\left(\frac{3+1/2}{2}\right) = I_{\frac{5}{4}}\left(\frac{7}{4}\right); \text{ f) } I_{\frac{3+1}{2}}\left(\frac{-1/2+3}{2}\right) = I_{\frac{7}{2}}\left(\frac{5}{4}\right)$$

7. a) $(1/4; 3/2)$; b) $(-3/2; -1/4)$; c) $(0; \sqrt{2})$; d) $(1 - \sqrt{2}; 1)$; e) $(-\sqrt{2}; \sqrt{3})$

$$\text{a) } I_{\frac{3/2-1/4}{2}}\left(\frac{3/2+1/4}{2}\right) = I_{\frac{5}{8}}\left(\frac{7}{8}\right); \text{ b) } I_{\frac{-1/4+3/2}{2}}\left(\frac{-3/2-1/4}{2}\right) = I_{\frac{5}{8}}\left(-\frac{7}{8}\right); \text{ c) } I_{\frac{\sqrt{2}-0}{2}}\left(\frac{\sqrt{2}+0}{2}\right) = I_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right);$$

$$\text{d) } I_{\frac{1-1+\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{1-\sqrt{2}+1}{2}\right) = I_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right); \text{ e) } I_{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}\right)$$

Determinare punti di accumulazione ed isolati degli insiemi seguenti, nelle risposte scriviamo solo gli eventuali punti di accumulazione.

8. a) $X = \left\{ \frac{2n+3}{5n}; n \in \mathbb{N} \right\}$; b) $X = \left\{ \frac{n-1}{n}; n \in \mathbb{N} \right\}$; c) $X = \left\{ n + \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N} \right\}$

$$X = \left\{ \frac{2n+3}{5n}; n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \frac{1}{5}, \frac{7}{15}, \frac{9}{25}, \dots \right\} = \left\{ \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \dots \right\}$$

$\frac{2}{5}$ è un numero minimo
 $\frac{3}{5}$ è di accumulazione perché $I_2(\frac{3}{5}) \forall n > 0$ contiene elementi di X .
 Il punto $\frac{3}{5}$ è circondato da elementi di X .

Perché $\forall n > 0 \exists m$: $\frac{2}{5} + \frac{3}{5n} < \frac{3}{5} + 1 \Rightarrow \frac{3}{5n} < 1 \Rightarrow \frac{5n}{3} > 3$
 $n > \frac{3}{5}$. Tutti gli elementi sono isolati p.e. $\frac{3}{5}$ è isolato.

Perché l'elemento $\frac{3}{5}$ è punto di accumulazione perché ogni intorno contiene elementi di X , mentre tutti gli altri sono isolati.

a)

b) $X = \left\{ \frac{n-1}{n}; n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 1 - \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N} \right\}$, 1 è di accumulazione, tutti gli altri sono punti isolati;

c) sono tutti punti isolati

9. a) $X = \{x \in \mathbb{Q} : 2 < x < 3\}$; b) $X = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : 2 < x < 3\}$; c) $X = \{x \in \mathbb{Z} : x < 3\}$

a) Sono tutti punti di accumulazione perché in ogni intorno di un numero razionale vi sono numeri razionali, compresi gli estremi, anche se non appartenenti a X ; b) Coma a), dato che anche in ogni intorno di un numero irrazionale vi sono numeri irrazionali; c) tutti punti isolati perché tutti numeri interi

10. Provare che ogni intervallo (a; b) di numeri reali è formato da punti di accumulazione per lo stesso intervallo.

Ogni intorno di un numero reale contiene numeri reali

11. Possiamo dire che ogni sottoinsieme infinito di numeri reali ammette punti di accumulazione? Giustificare la risposta.

No, basta pensare ai numeri naturali

12. Possiamo dire che ogni sottoinsieme infinito e limitato di numeri reali non ammette punti isolati? Giustificare la risposta.

No, per esempio $[1; 2] \cup \{3\}$

13. Possiamo costruire un sottoinsieme infinito di numeri reali formato solo da punti isolati? Giustificare la risposta.

Sì, basta prendere un sottoinsieme formato da numeri interi

14. Dato un sottoinsieme infinito A di numeri reali limitato superiormente, il cui sup non appartiene ad A, provare che sup(A) è di accumulazione per A.

Una proprietà del sup è che ogni suo intorno sinistro è formato da punti di A.

15. Dato un sottoinsieme infinito A di numeri reali limitato inferiormente, il cui inf non appartiene ad A, provare che inf(A) è di accumulazione per A.

Una proprietà dell'inf è che ogni suo intorno destro è formato da punti di A

16. Provare che ogni successione di numeri reali può ammettere da 0 a infiniti punti di accumulazione. Fornire un esempio di una successione che ha solo 2 punti di accumulazione.

La successione $\{n\}$ non ha punti di accumulazione; $\left\{ 1 - \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N} \right\}$ ha un punto di accumulazione;

$\left\{ \frac{1 + (-1)^n}{n}; n \in \mathbb{N} \right\}$ ha due punti di accumulazione, 0 e 1; $\{\sin(n)\}$ ha infiniti punti di accumulazione

Determinare estremo superiore ed estremo inferiore degli insiemi seguenti, dire se eventualmente ci sono massimo o minimo

17. a) $\left\{ \frac{2n+3}{5n}; n \in \mathbb{N} \right\}$; b) $\left\{ \frac{n-1}{n}; n \in \mathbb{N} \right\}$; c) $\left\{ n + \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N} \right\}$

a) $\frac{2}{5} < \frac{2}{5} + \frac{3}{n} \leq \frac{2}{5} + 3 = \frac{17}{2} \Rightarrow \inf = 2/5, \max = 17/2$; b) $0 \leq 1 - \frac{1}{n} < 1 \Rightarrow \min = 0, \sup = 1$;

- c) $2 \leq n + \frac{1}{n} \Rightarrow \min = 2, \sup = +\infty$
18. a) $\left\{ \frac{1-n^2}{n}; n \in \mathbb{N} \right\}$; b) $\left\{ \frac{3n^2-1}{2n^2}; n \in \mathbb{N} \right\}$; c) $\left\{ \frac{3n^2+1}{2n^2}; n \in \mathbb{N} \right\}$
- a) $\frac{1}{n} - n \geq 0 \Rightarrow \inf = -\infty, \max = 0$; b) $\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2} < \frac{3}{2} \Rightarrow \min = 1, \sup = 3/2$;
- c) $\frac{3}{2} < \frac{3}{2} + \frac{1}{2n^2} \leq \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \Rightarrow \inf = 3/2, \max = 2$
19. a) $\left\{ (-1)^n \cdot \frac{2n+3}{5n}; n \in \mathbb{N} \right\}$; b) $\left\{ (-1)^n \cdot \frac{n-1}{n}; n \in \mathbb{N} \right\}$; c) $\left\{ (-1)^n \cdot \frac{3n^2+1}{4n-1}; n \in \mathbb{N} \right\}$; d) $\left\{ \frac{n^2+n-1}{n^2-n+1}; n \in \mathbb{N} \right\}$
- a) $\frac{2}{5} < \frac{2}{5} + \frac{3}{10n} \leq \frac{2}{5} + \frac{3}{10} = \frac{7}{10}; -\frac{2}{5} - \frac{3}{5} = -1 \leq -\frac{2}{5} - \frac{3}{10n-5} < -\frac{2}{5}$, abbiamo considerato n pari ($2n$) ed n dispari ($2n-1$) $\Rightarrow \min = -1, \max = 7/10$; b) $\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2n} < 1; -1 < -1 + \frac{1}{2n-1} \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow \inf = -1, \sup = 1$;
- c) $\frac{3n^2+1}{4n-1} > \frac{3}{4}n; -\frac{3n^2+1}{4n-1} < -\frac{3}{4}n \Rightarrow \inf = -\infty, \sup = +\infty$;
- d) $\frac{n^2+n-1}{n^2-n+1} = \frac{(n^2-n+1)+2n-2}{n^2-n+1} = 1 + \frac{2n-2}{n^2-n+1} \Rightarrow 1 \leq 1 + \frac{2n-2}{n^2-n+1} \leq 1 + \frac{4-2}{2^2-2+1} = \frac{5}{3} \Rightarrow \min = 1; \max = 5/3$

I limiti delle funzioni reali di una variabile reale

Congetturate, giustificando la risposta, se i seguenti limiti rappresentano convergenza (C), divergenza (D) o oscillazione (O)

1. a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 15x - 14}{x^2 - 4}$; b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 - 9}$; c) $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x^2 - 2}{3 \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{5})}$; d) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x - 15}{x^2 - 25}$

Basta usare un foglio elettronico o un software che calcola alcuni valori delle funzioni vicini al limite.

a) C; b) C; c) D; d) C

2. a) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x - 15}{x^2 - 25}$; b) $\lim_{x \rightarrow 2} \cos\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$; c) $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^2 - 1}{5 \cdot (\sqrt{x} - 2)}$; d) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{5 \cdot (\sqrt{x} - 1)}$

a) D; b) O; c) D; d) C

3. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x-1}{x^2-4}$; b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^2+1}{x-2}$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^2+x-1}{3x^2}$; d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-x^2+1}{3x+1}$

a) C; b) D; c) C; d) D

4. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x-1} - \sqrt{7x+2})$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{13x-2} - \sqrt{13x+8})$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x+1}$; d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \sin(x)$

a) D; b) C; c) C; d) O

5. a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{\frac{1}{x-2}}$; b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{\frac{1}{x-2}}$; c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^{x+1}-1}{(x+1)^2}$; d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^{x+1}-1}{x+1}$

a) D; b) C; c) D; d) C

6. a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x), f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$; b) $\lim_{x \rightarrow 3} \lfloor x \rfloor$; c) $\lim_{x \rightarrow 1,5} \lfloor x \rfloor$

a) O; b) O; c) C

7. a) $\lim_{x \rightarrow 2} (\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor)$; b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \lceil x \rceil$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x), f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ -\frac{1}{x} & x < 0 \end{cases}$

a) C; b) D; c) C

8. Se x_0 è un punto di accumulazione per un generico sottoinsieme X dei numeri reali, possiamo sempre calcolare il limite per x che tende a x_0 ? Giustificare la risposta.

Sì, ovviamente calcolare non significa determinare, il limite potrebbe anche non esistere

9. Provare che condizione necessaria e sufficiente affinché una successione sia convergente a un numero a è che a sia l'unico punto di accumulazione per la successione.

Per definizione di limite e di punto di accumulazione ovviamente il limite è di accumulazione e viceversa. Non vi può essere un altro punto di accumulazione perché allora ci sarebbe un altro limite.

10. Provare che condizione necessaria affinché una successione sia divergente è che sia priva di punti di accumulazione.

Per quanto detto prima se ci fosse un punto di accumulazione la successione convergerebbe ad esso

11. Provare che condizione necessaria e sufficiente affinché una successione sia oscillante è che abbia più punti di accumulazione.

Si tenga conto di quanto detto in precedenza

12. Sapendo che $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 3}{x + 1} = +\infty$, determinare l'intorno destro di -1 in cui si ha $f(x) > 1014$.

Dalla definizione, dobbiamo trovare un numero $\varepsilon > 0$, in modo che si abbia $\frac{x^2 + 3}{x + 1} > 1014 \Rightarrow -1 < x < -1 + \varepsilon$, risolviamo: $x^2 + 3 > 1014x + 1014 \Rightarrow x^2 - 1014x - 1011 > 0$, osserviamo che abbiamo potuto eliminare il denominatore perché stiamo lavorando per ipotesi con $x > -1$ e pertanto il detto denominatore è positivo e non incide quindi sul segno da determinare. Continuiamo:

$$-1 < x < 507 - 2\sqrt{64515} = -1 + (506 - 2\sqrt{64515}) \approx -0,996 \Rightarrow \varepsilon = 506 - 2\sqrt{64515}$$

13. Sapendo che $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$, determinare l'intorno di 2 in cui si ha $3,99999 < f(x) < 4,00001$.

Stavolta deve essere $3,99999 < \frac{x^2 - 4}{x - 2} < 4,00001 \Rightarrow 2 - \varepsilon < x < 2 + \varepsilon$. Risolviamo tenendo conto che stavolta non possiamo eliminare il denominatore, però possiamo semplificare perché supponiamo $x \neq 2$, quindi: $3,99999 < x + 2 < 4,00001 \Rightarrow 1,99999 < x < 2,00001$, che è effettivamente un intorno completo di 2, di raggio $\varepsilon = 0,00001$.

14. Sapendo che $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x^2 + 1}{x + 2} = +\infty$, determinare l'intorno destro di -2 in cui si ha $f(x) > 3547$.

$$\frac{2x^2+1}{x+2} > n \Rightarrow -2n < -2 + 2, n > 0$$

$$2x^2+1 > nx + 2n \Rightarrow 2x^2 - nx + 1 - 2n > 0;$$

$$x < \frac{M - \sqrt{M^2 - 8 + 16n}}{4} \vee x > \frac{M + \sqrt{M^2 - 8 + 16n}}{4}$$

$$M^2 + 16n - 8 = M^2 + 16M + 64 - 72 = (M+8)^2 - 72 < (M+8)^2$$

$$\sqrt{M^2 + 16n - 8} < \sqrt{(M+8)^2} = M+8 \Rightarrow -\sqrt{M^2 + 16n - 8} > -M - 8$$

$$\frac{M - \sqrt{M^2 - 8 + 16n}}{4} > \frac{M - (M+8)}{4} = -2 \Rightarrow \frac{M - \sqrt{M^2 - 8 + 16n}}{4} = -2 + n$$

$$M = 3547; \quad 2x^2 - 3547x + 1 - 7094 > 0; \quad x = \frac{3547 \pm \sqrt{3547^2 + 8 \cdot 7093}}{4} \Rightarrow$$

$$x < \frac{3547 - \sqrt{3547^2 + 8 \cdot 7093}}{4} \approx -1,997$$

15. Sapendo che $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$, determinare l'intorno di 1 in cui si ha $1,999 < f(x) < 2,001$.

$$1,999 < \frac{x^2 - 1}{x - 1} < 2,001 \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1 \quad \forall x \neq 1$$

$$1,999 < x + 1 < 2,001 \Rightarrow 0,999 < x < 1,001 \Rightarrow -0,001 < x < 1 + 0,001$$

In generale $2 - \varepsilon < f(x) < 2 + \varepsilon \quad \forall x; \quad 1 - \delta < x < 1 + \delta; \quad \varepsilon, \delta > 0$

$$2 - \varepsilon < \frac{x^2 - 1}{x - 1} < 2 + \varepsilon \Rightarrow 2 - \varepsilon < x + 1 < 2 + \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < x < \varepsilon, \quad \varepsilon = \delta.$$

16. Sapendo che $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+5}{x-2} = -\infty$, determinare l'intorno sinistro di 2 in cui si ha $f(x) < -540$.

$$\begin{cases} \frac{x+5}{x-2} < -540 \\ x < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+5 > -540x + 1080 \\ x < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{1075}{541} = \frac{1075}{541} & < x < 2 \\ x < 2 \end{cases}$$

17. Sapendo che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$, determinare il minimo k per cui si ha $0,999 < f(x) < 1,001, \forall x > k$.

$$0,999 < \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} < 1,001 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 > 0,999x^2 + 0,999 \\ x^2 - 1 < 1,001x^2 + 1,001 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0,001x^2 > 1,999 \\ 0,001x^2 > -2,001 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -\sqrt{1999} \vee x > \sqrt{1999} \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{il}$$

k cercato è ovviamente quello positivo,

18. Sapendo che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{3x+2} = +\infty$, determinare il minimo k per cui si ha $f(x) > 72548, \forall x > k$.

$\frac{x^2}{3x+2} > 72548 \Rightarrow x^2 - 217644x - 145096 > 0 \Rightarrow x > 108822 + 2\sqrt{2960593195}$, anche in questo caso abbiamo eliminato il denominatore perché ci interessano valori che lo rendono certamente positivo

19. Sapendo che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x^2}{x+3} = -\infty$, determinare il minimo k per cui si ha $f(x) < -25478, \forall x > k$.

$$\frac{1-x^2}{x+3} < -25478 \Rightarrow x > 12379 + 2\sqrt{40589639}$$

Spiegare perché i seguenti limiti non hanno significato

20. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{2-x})$; b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-2}{\sqrt{1-x}}$; c) $\lim_{x \rightarrow 2} \sin^{-1}(x)$; d) $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x+3}}$; e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x+1)^3$

a) l'I.d.E. della funzione è $[-1; 2]$; b) l'I.d.E. della funzione è $x < 1$; c) la funzione non è definita in intorni di 2 di raggio minore di 1; d) l'I.d.E. della funzione è $x > -1$; e) l'I.d.E. della funzione è $x > -1/2$

21. a) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \sec^{-1}(x)$; b) $\lim_{x \rightarrow 4} \ln[\sin(x)]$; c) $\lim_{x \rightarrow 2} \cos^{-1}[\log_2(x^2)]$; d) $\lim_{x \rightarrow 2} \log_{1-x}(x)$

a) l'I.d.E. della funzione è $x \leq -1 \vee x \geq 1$; b) $\sin(4) < 0$; c) $\log_2(2^2) = 2$; d) l'I.d.E. della funzione è $(0; 1)$

Verificare la validità delle seguenti uguaglianze

22. a) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - x + 1) = 1$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(2x+1) = 0$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0$; d) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (3x+1) = \frac{5}{2}$; e) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{3}$

a) Dobbiamo verificare che $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 1 - \varepsilon < x^2 - x + 1 < 1 + \varepsilon \Rightarrow 1 - \delta < x < 1 + \delta$, risolviamo la

disequazione:
$$\begin{cases} x^2 - x + 1 < 1 + \varepsilon \\ x^2 - x + 1 > 1 - \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{1 + 4\varepsilon}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{1 + 4\varepsilon}}{2} \\ x < \frac{1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon}}{2} \vee x > \frac{1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon}}{2} \end{cases} \Rightarrow$$
, abbiamo tenuto conto del

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon}}{2} < x < \frac{1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon}}{2} \vee \frac{1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{1 + 4\varepsilon}}{2}$$

fatto che si ha: $\frac{1 - \sqrt{1 + 4\varepsilon}}{2} < \frac{1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon}}{2} < \frac{1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon}}{2} < \frac{1 + \sqrt{1 + 4\varepsilon}}{2}$. La seconda disequazione è quella

che ci interessa perché: $\frac{1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon}}{2} < \frac{1 + 1}{2} = 1; \frac{1 + \sqrt{1 + 4\varepsilon}}{2} > \frac{1 + 1}{2} = 1$

b)
$$\begin{cases} \ln(2x+1) < \varepsilon \\ \ln(2x+1) > -\varepsilon \\ x > -1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+1 < e^\varepsilon \\ 2x+1 > e^{-\varepsilon} \\ x > -1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{e^\varepsilon - 1}{2} \\ x > \frac{e^{-\varepsilon} - 1}{2} \Rightarrow \frac{e^{-\varepsilon} - 1}{2} < x < \frac{e^\varepsilon - 1}{2} \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases}$$
, data la scelta di ε positivo

ma “piccolo”, avremo: $\frac{e^{-\varepsilon} - 1}{2} < 0; \frac{e^\varepsilon - 1}{2} > 0$, per esempio $\frac{e^{-0,0001} - 1}{2} \approx 0,0005; \frac{e^{0,0001} - 1}{2} \approx 0,0005$, che sono effettivamente un intorno “piccolo” di 0,

c) $-\varepsilon < \sin(x) < \varepsilon \Rightarrow \sin^{-1}(-\varepsilon) < x < \sin^{-1}(\varepsilon)$ e per ε positivo ma “piccolo” i due valori sono prossimi a zero.

d) $5/2 - \varepsilon < 3x + 1 < 5/2 + \varepsilon \Rightarrow 3/2 - \varepsilon < 3x < 3/2 + \varepsilon \Rightarrow 1/2 - \varepsilon/3 < x < 1/2 + \varepsilon/3$

e) $\frac{1}{3} - \varepsilon < \frac{x+1}{x-1} < \frac{1}{3} + \varepsilon \Rightarrow \left(\frac{1}{3} + \varepsilon\right)(x-1) < x+1 < \left(\frac{1}{3} - \varepsilon\right)(x-1)$, abbiamo scambiato i due estremi perché in prossimità di $-2, x-1 < 0$.

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{1}{3} - \varepsilon\right)x > -\frac{1}{3} - \varepsilon - 1 \\ \left(1 - \frac{1}{3} + \varepsilon\right)x < -\frac{1}{3} + \varepsilon - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2-3\varepsilon}{3}x > -\frac{4+3\varepsilon}{3} \\ \frac{2+3\varepsilon}{3}x < \frac{3\varepsilon-4}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -\frac{4+3\varepsilon}{\cancel{\varepsilon}} \cdot \frac{\cancel{2}}{2-3\varepsilon} \\ x < -\frac{4-3\varepsilon}{\cancel{\varepsilon}} \cdot \frac{\cancel{3}}{2+3\varepsilon} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > -\frac{4+3\varepsilon}{2-3\varepsilon} = -\frac{4-6\varepsilon}{2-3\varepsilon} - \frac{9\varepsilon}{2-3\varepsilon} = -2 - \frac{9\varepsilon}{2-3\varepsilon} \\ x < -\frac{4-3\varepsilon}{2+3\varepsilon} = -\frac{4+6\varepsilon}{2+3\varepsilon} + \frac{3\varepsilon}{2+3\varepsilon} = -2 + \frac{3\varepsilon}{2+3\varepsilon} \end{cases} \Rightarrow -2 - \frac{9\varepsilon}{2-3\varepsilon} < x < -2 + \frac{3\varepsilon}{2+3\varepsilon}$$

23. a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{3x+1} = 2$; b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{2x} = 0$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{x+1} = e$; d) $\lim_{x \rightarrow 2} (x+1)^3 = 27$; e) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = +\infty$

$$2 - \varepsilon < \sqrt{3x+1} < 2 + \varepsilon \Rightarrow (2 - \varepsilon)^2 < 3x + 1 < (2 + \varepsilon)^2 \Rightarrow \frac{4 - 4\varepsilon + \varepsilon^2 - 1}{3} < x < \frac{4 + 4\varepsilon + \varepsilon^2 - 1}{3} \Rightarrow$$

a) $\Rightarrow \frac{3 - 4\varepsilon + \varepsilon^2}{3} < x < \frac{3 + 4\varepsilon + \varepsilon^2}{3} \Rightarrow 1 - \frac{4\varepsilon - \varepsilon^2}{3} < x < 1 + \frac{4\varepsilon + \varepsilon^2}{3}$

fatti abbiamo provato che più in generale si ha: $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{3x+1} = 2$;

b) $-\varepsilon < \frac{x+1}{2x} < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < \frac{1}{2} + \frac{1}{2x} < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon - \frac{1}{2} < \frac{1}{2x} < \varepsilon - \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{2\varepsilon + 1}{2} < \frac{1}{2x} < \frac{2\varepsilon - 1}{2} \Rightarrow$
 $\Rightarrow -\frac{2}{1-2\varepsilon} < 2x < -\frac{2}{2\varepsilon + 1} \Rightarrow -\frac{1}{1-2\varepsilon} < x < -\frac{1}{2\varepsilon + 1} \Rightarrow -1 - \frac{2\varepsilon}{1-2\varepsilon} < x < -1 + \frac{2\varepsilon}{2\varepsilon + 1}$

c) $e - \varepsilon < e^{x+1} < e + \varepsilon \Rightarrow \ln(e - \varepsilon) < x + 1 < \ln(e + \varepsilon) \Rightarrow -1 + \ln(e - \varepsilon) < x < -1 + \ln(e + \varepsilon)$, per vedere che effettivamente siamo in un intorno di 0 osserviamo che $\ln(e - \varepsilon) < 1$ e $\ln(e + \varepsilon) > 1$, entrambi però molto prossimi a 1;

d) $27 - \varepsilon < (x+1)^3 < 27 + \varepsilon \Rightarrow \sqrt[3]{27 - \varepsilon} < x + 1 < \sqrt[3]{27 + \varepsilon} \Rightarrow -1 + \sqrt[3]{27 - \varepsilon} < x < -1 + \sqrt[3]{27 + \varepsilon}$, anche in questo caso osserviamo che $\sqrt[3]{27 + \varepsilon} > 3$, $\sqrt[3]{27 - \varepsilon} < 3$ e molto prossimi a 3;

e) $\frac{x+1}{x-1} > M \Rightarrow x + 1 > Mx - M \Rightarrow (1 - M)x > -1 - M \Rightarrow (M - 1)x < 1 + M \Rightarrow x < \frac{1+M}{M-1} = 1 + \frac{2}{M-1}$,

del resto si ha anche $\frac{x+1}{x-1} > 1, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

24. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 1) = +\infty$; b) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \ln(x-3) = -\infty$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$; d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$; e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x}{2} = +\infty$

a) $(x^2 - 1) > M \Rightarrow x > \sqrt{M+1}$;

b) $\begin{cases} \ln(x-3) < -M \\ x > 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln(x-3) < \ln(e^{-M}) \\ x > 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 3 + \ln(e^{-M}) \\ x > 3 \end{cases} \Rightarrow 3 < x < 3 + \ln(e^{-M})$;

c) $-\varepsilon < \frac{1}{x} < \varepsilon \Rightarrow x > \frac{1}{\varepsilon}$ dato che x tende a $+\infty$ ovviamente è sempre $1/x > -\varepsilon$;

d) $-\varepsilon < \sin\left(\frac{1}{x}\right) < \varepsilon \Rightarrow \sin^{-1}(-\varepsilon) < \frac{1}{x} < \sin^{-1}(\varepsilon) \Rightarrow \frac{1}{x} < \sin^{-1}(\varepsilon) \Rightarrow x > \frac{1}{\sin^{-1}(\varepsilon)}$, ancora una volta la diseguaglianza sinistra è sempre verificata per valori di x molto grandi;

e) $\frac{1-x}{2} > M \Rightarrow 1 - x > 2M \Rightarrow x < 1 - 2M$

25. a) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 1}{x+1} = -2$; b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x^2 - 1} = -\infty$; c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x-2} = 1$; d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 9} = -\infty$; e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x-2} = 12$

a) Dato che ci muoviamo in un intorno destro di -1 , possiamo semplificare:

$$-2 - \varepsilon < \frac{x^2 - 1}{x + 1} < -2 + \varepsilon \Rightarrow -2 - \varepsilon < x - 1 < -2 + \varepsilon \Rightarrow -1 - \varepsilon < x < -1 + \varepsilon \Rightarrow -1 < x < -1 + \varepsilon$$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x^2-1} = -\infty$; Dato che ci muoviamo in un intorno sinistro di 1, possiamo semplificare:

$$\frac{x+1}{x^2-1} < -M \Rightarrow \frac{1}{x-1} < -M \Rightarrow \frac{1}{1-x} > M \Rightarrow 1-x < \frac{1}{M} \Rightarrow x > 1 - \frac{1}{M}$$

$$c) 1 - \varepsilon < \frac{x^2 - 3x + 2}{x-2} < 1 + \varepsilon \Rightarrow 1 - \varepsilon < x - 1 < 1 + \varepsilon \Rightarrow 2 - \varepsilon < x < 2 + \varepsilon;$$

$$d) \frac{x^2 - 4}{x^2 - 9} < -M \Rightarrow x^2 - 4 > M(9 - x^2) \Rightarrow (1 + M)x^2 > 9M + 4 \Rightarrow x < \sqrt{\frac{9M+4}{M+1}} = \sqrt{\frac{9M+9-5}{M+1}} = \sqrt{9 - \frac{5}{M+1}}, \text{ il radicando è minore di } 3, \text{ pertanto la radice è minore di } 3, \text{ siamo quindi in un intorno sinistro di } 3;$$

$$12 - \varepsilon < \frac{x^2 - 8}{x-2} < 12 + \varepsilon \Rightarrow 12 - \varepsilon < \frac{(x-2)(x+2+4)}{x-2} < 12 + \varepsilon \Rightarrow$$

$$12 - \varepsilon < x^2 + 2x + 4 < 12 + \varepsilon \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 + 2x - 8 + \varepsilon \geq 0 \\ x^2 + 2x - 8 - \varepsilon \leq 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x < -1 - \sqrt{9-\varepsilon} \vee x > -1 + \sqrt{9+\varepsilon} \\ -1 - \sqrt{9+\varepsilon} < x < -1 + \sqrt{9+\varepsilon} \end{array} \right.$$

$$-1 - \sqrt{9+\varepsilon} < x < -1 + \sqrt{9+\varepsilon} \quad \left| \begin{array}{l} \varepsilon = 0,001 \\ 1,99998 < x < 2,0016 \end{array} \right.$$

$$\sqrt{9+\varepsilon} < 3 \Rightarrow \sqrt{9+\varepsilon} = 3 - \delta_1, \sqrt{9+\varepsilon} > 3 \Rightarrow \sqrt{9+\varepsilon} = 3 + \delta_2 \quad \left| \begin{array}{l} \delta_1 = -1 + \sqrt{9+\varepsilon} < x < -1 + \sqrt{9+\varepsilon} = 2 + \delta_2 \\ \delta_2 = \frac{\sqrt{9,001} + \sqrt{9,009}}{2} = 1,67 \cdot 10^{-4} \end{array} \right.$$

e)

$$26. \quad a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2} = 1; \quad b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{3x-1} = \frac{2}{3}; \quad c) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)+1}{\sin(x)} = +\infty; \quad d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{x-2} = -\infty; \quad e) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x+1}{e^x-1} = +\infty$$

a) Dato che $\frac{x^2 - x + 1}{x^2} = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} < 1$, quindi dobbiamo considerare solo

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^2} > 1 - \varepsilon \Rightarrow x^2 - x + 1 > x^2 - \varepsilon x^2 \Rightarrow \varepsilon x^2 - x + 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon}}{2\varepsilon}, \text{ dato che } \varepsilon \text{ è un valore positivo prossimo a zero, la frazione rappresenta un } M \text{ che diventa grande a dismisura;}$$

$$b) \frac{2}{3} - \varepsilon < \frac{2x+1}{3x-1} < \frac{2}{3} + \varepsilon \Rightarrow \begin{cases} \frac{2x+1}{3x-1} > \frac{2-3\varepsilon}{3} \\ \frac{2x+1}{3x-1} < \frac{2+3\varepsilon}{3} \end{cases}, \text{ dato che } x \text{ tende a meno infinito i denominatori sono negativi: } \begin{cases} 6x + 1 < 6x - 2 - 9\varepsilon x + 3\varepsilon \\ 6x + 1 > 6x + 9\varepsilon x - 2 - 3\varepsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{3\varepsilon - 3}{9\varepsilon} \\ x < \frac{3+3\varepsilon}{9\varepsilon} \end{cases} \Rightarrow x < \frac{3\varepsilon - 3}{9\varepsilon} < 0, \text{ e l'ultima frazione rappresenta un numero arbitrariamente piccolo}$$

$$c) \frac{\sin(x)+1}{\sin(x)} > M \Rightarrow (\sin(x) > 0) \sin(x) + 1 > M \cdot \sin(x) \Rightarrow (1 - M) \sin(x) > -1 \Rightarrow \sin(x) < \frac{1}{M-1} \Rightarrow 0 < x < \sin^{-1}\left(\frac{1}{M-1}\right);$$

$$d) \frac{3x^2}{x-2} < -M \Rightarrow \frac{3x^2}{2-x} > M \Rightarrow 3x^2 > 2M - Mx \Rightarrow 3x^2 + Mx - 2M > 0 \Rightarrow x < \frac{-M - \sqrt{M^2 + 24M}}{6};$$

$$e) \frac{e^x+1}{e^x-1} > M \Rightarrow e^x + 1 > Me^x - M \Rightarrow (1 - M)e^x > -1 - M \Rightarrow (M - 1)e^x < 1 + M \Rightarrow 0 < e^x < \frac{1+M}{M-1} \Rightarrow 0 < x < \ln\left(\frac{1+M}{M-1}\right) = \ln\left(\frac{M-1+2}{M-1}\right) = \ln\left(1 + \frac{2}{M-1}\right) \quad \text{e l'ultima espressione}$$

ne è prossima a zero ma positiva

27. a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln(x)+1}{\ln(x)} = -\infty$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}-1}{2 \cdot \sqrt{x+1}} = \frac{1}{2}$; c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{2x}-1}{e^x-1} = e+1$; d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x+3} = +\infty$; e)

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)} = -\infty$$

a) $\frac{\ln(x)+1}{\ln(x)} < -M \Rightarrow 1 + \frac{1}{\ln(x)} < -M \Rightarrow \frac{1}{\ln(x)} < -M-1 \Rightarrow \ln(x) > -\frac{1}{1+M} \Rightarrow 0 < x < e^{-\frac{1}{1+M}}$, abbiamo

tenuto conto del fatto che $\ln(x) < 0$;

b) $\frac{\sqrt{x}-1}{2 \cdot \sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x}+1/2-3/2}{2 \cdot \sqrt{x+1}} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2(2 \cdot \sqrt{x+1})} < \frac{1}{2}$, quindi dobbiamo considerare solo

$$\frac{\sqrt{x}-1}{2 \cdot \sqrt{x+1}} > \frac{1}{2} - \varepsilon \Rightarrow 2\sqrt{x} - 2 > 2\sqrt{x} + 1 - 4\varepsilon\sqrt{x} - 2\varepsilon \Rightarrow 4\varepsilon\sqrt{x} > 3 - 2\varepsilon \Rightarrow \sqrt{x} > \frac{3-2\varepsilon}{4\varepsilon} \Rightarrow x > \left(\frac{3}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}\right)^2$$

, che per ε positivo prossimo a zero rappresenta un numero arbitrariamente grande

c) $e+1-\varepsilon < \frac{e^{2x}-1}{e^x-1} < e+1+\varepsilon \Rightarrow e+1-\varepsilon < e^x < e+1+\varepsilon \Rightarrow \ln(e-\varepsilon) < x < \ln(e+\varepsilon)$ ed effettivamente $(\ln(e-\varepsilon); \ln(e+\varepsilon))$ è un intorno completo di 1;

d) $\frac{x^2}{x+3} > M \Rightarrow x^2 - Mx - 3M > 0 \Rightarrow x > \frac{M + \sqrt{M^2 + 12M}}{2}$;

e) $\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)} < -M \Rightarrow 1-\cos(x) < -M-M\cos(x) \Rightarrow (M-1)\cos(x) < -M-1 \Rightarrow \cos(x) < -\frac{M+1}{M-1} \Rightarrow x < \cos^{-1}\left(-\frac{M+1}{M-1}\right) = \cos^{-1}\left(-1 + \frac{2}{M-1}\right)$ e l'ultimo argomento fornisce

un angolo poco più grande di π

Verificare la falsità delle seguenti uguaglianze

28. a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-1} = 1$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x+1}{2x-1} = 3$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+2x} = 47$; d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-1}{3x+2} = \frac{3}{2}$; e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 1$

a) $\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1} > 1$ e al tendere di x a 1 il secondo addendo diventa prossimo a più o meno infinito, secondo che ci avviciniamo da destra o da sinistra

b) Sostituendo 0 a x la funzione vale -1

c) $\frac{x^2}{1+2x} > 47 \Rightarrow x^2 - 94x - 47 > 0 \Rightarrow x > 47 + 4\sqrt{141} > 94,5$, quindi per valori superiori a 94,5 superiamo 47 già per $x = 1000$ otteniamo circa 500

d) Sostituendo 0 a x la funzione vale $2/3$

e) Per $x \neq 1$ la funzione vale $x+1$, che per x in un intorno di 1 si muove in un intorno di 2

29. a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1+2x} = +\infty$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} = 2$; c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+x^2}{2x-1} = 1$; d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x+2} = 4$

a) $\frac{x}{1+2x} < \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$;

b) $\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} \approx \sqrt{\frac{2x}{x}} = \sqrt{2}$;

c) $\frac{2x+x^2}{2x-1} = 1 + \frac{x^2+1}{2x-1} > 1+x$, all'aumentare di x superiamo abbondantemente 1

d) Per $x \neq 2$ la funzione vale $x-2$, che per x in un intorno di 2 si muove in un intorno di 0

Operazioni aritmetiche con i limiti e forme indeterminate

Calcolare i seguenti limiti

Fra parentesi quadre scriviamo un'espressione simbolica che non ha significato algebrico

1. a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{x-1}$; b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2}{x-1}$; c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{(x-1)^2}$; d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{\sqrt{x}}$; e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}$; f) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x)$

a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{x-1} = \left[\frac{2}{0^+} \right] = +\infty$; b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2}{x-1} = \left[\frac{2}{0^-} \right] = -\infty$; c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{(x-1)^2} = \left[\frac{-1}{0^+} \right] = -\infty$;

d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{\sqrt{x}} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$; e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \left[\frac{1}{+\infty} \right] = 0$; f) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = \left[\tan\left(\frac{\pi}{2}^-\right) \right] = +\infty$

2. a) $\lim_{x \rightarrow 1} \sin^{-1}(x)$; b) $\lim_{x \rightarrow -1} \sin^{-1}(x)$; c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \csc^{-1}(x)$; d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan(x)$; e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x)$; f) $\lim_{x \rightarrow 0} \cot(x^2)$

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \sin^{-1}(x) = \sin^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}$; b) $\lim_{x \rightarrow -1} \sin^{-1}(x) = \sin^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{2}$;

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \csc^{-1}(x) = \left[\csc^{-1}(0^+) \right] = +\infty$; d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = \left[\tan\left(\frac{\pi}{2}^+\right) \right] = +\infty$;

e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = \left[\ln(0^+) \right] = +\infty$; f) $\lim_{x \rightarrow 0} \cot(x^2) = \left[\cot(0^+) \right] = +\infty$

3. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x)$; b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{-x}$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{-x}$; d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{x}\right)$; e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x$; f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{-x}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = \left[\ln(+\infty) \right] = +\infty$; b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{-x} = \left[2^{+\infty} \right] = +\infty$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{-x} = \left[2^{-\infty} \right] = 0$;

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \left[\ln\left(\frac{1}{+\infty}\right) \right] = \left[\ln(0^+) \right] = -\infty$; e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-\infty} \right] = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{+\infty} \right] = +\infty$;

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{-x} = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-\infty} \right] = +\infty$

4. a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \log_x(2)$; b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \log_x(2)$; c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_x(3)$; d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cot^{-1}(x)$; e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cot^{-1}(x)$; f) $\lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}} \sin^{-1}(x)$

a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \log_x(2) = \left[\log_{1^+}(2) \right] = +\infty$; b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \log_x(2) = \left[\log_{1^-}(2) \right] = -\infty$;

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_x(3) = \left[\log_{0^+}(3) \right] = 0^-$; d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cot^{-1}(x) = \left[\cot^{-1}(+\infty) \right] = 0$;

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cot^{-1}(x) = \left[\cot^{-1}(-\infty) \right] = \pi$; f) $\lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}} \sin^{-1}(x) = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$

Stabilire quali dei seguenti limiti esistono, giustificando la risposta

5. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x)$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{x}\right)$; c) $\lim_{x \rightarrow 2} \sin(x)$; d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cot\left(\frac{1}{x}\right)$; e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cot\left(\frac{1}{x}\right)$

a) Non esiste perché $\sin(x)$ è periodica; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \left[\ln\left(\frac{1}{+\infty}\right) \right] = \left[\ln(0^+) \right] = -\infty$;

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \sin(x) = \sin(2)$; d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cot\left(\frac{1}{x}\right) = \left[\cot\left(\frac{1}{0^+}\right) \right] = \left[\cot(+\infty) \right] = ?$, perché $\cot(x)$ è periodica;

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cot\left(\frac{1}{x}\right) = \left[\cot\left(\frac{1}{+\infty}\right) \right] = \left[\cot(0) \right] = +\infty$

6. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{x}}$; b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{-x^2 - x - 1})$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{-x^2 - x - 1})$; d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{-x - 1})$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{x}} = \left[\sqrt{\frac{1}{+\infty}} \right] = 0^+$; b) Il radicando al tendere di x a meno infinito assume valori negativi per-

ché x^2 cresce molto più di x ; c) Come il precedente; d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{-x-1}) = +\infty$

Calcolare i seguenti limiti (non tutti sono forme indeterminate)

Livello 1

7. a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$; b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1}$; c) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{(x - 1)^2}$; d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$; e) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$; f) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 1}{x^2 + 2x + 1}$

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)} \cdot (x+1)}{\cancel{x-1}} = 2$; b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)} \cdot (x+1)} = \frac{1}{2}$; c) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\cancel{(x-1)} \cdot (x+1)}{(x-1)^2} = \left[\frac{2}{0^+} \right] = +\infty$;

d) $\frac{(-1)^2 - 1}{-1 - 1} = 0$; e) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cancel{(x+1)} \cdot (x^2 - x + 1)}{(x-1) \cdot \cancel{(x+1)}} = \frac{(-1)^2 - (-1) + 1}{-1 - 1} = -\frac{3}{2}$; f) $\frac{(-1)^2 - (-1) - 1}{(-1)^2 + 2(-1) + 1} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$

8. a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 + 4}$; b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 - 4}$; c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 4x^2 + 9}{x^2 + x - 12}$; d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x}{x^4 + x}$; e) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{4x^2 - 2x}$; f) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x^2 - \pi^2}{x - \pi}$

a) $\frac{2^3 - 8}{2^2 + 4} = 0$;

b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\cancel{(x+2)} \cdot (x^2 - 2x + 4)}{\cancel{(x+2)} \cdot (x-2)} = \frac{4+4+4}{-4} = -3$;

c) $3 \begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 \\ & 3 & -3 \\ & -9 \end{vmatrix} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cancel{(x-3)} \cdot (x^2 - x - 3)}{\cancel{(x-3)} \cdot (x+4)} = \frac{9-3-3}{3+4} = \frac{3}{7}$

$$\begin{matrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ & 1 & -1 & -3 & 0 \end{matrix}$$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x}(x^2 - 1)}{\cancel{x}(x^3 + 1)} = -1$;

e) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\cancel{(2x-1)} \cdot (2x+1)}{2x \cancel{(2x-1)}} = \frac{1+1}{1} = 2$;

f) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cancel{(x-\pi)} \cdot (x+\pi)}{\cancel{x-\pi}} = 2\pi$

9. a) $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x^2 - 4}{x + 2} \right)^{\frac{x^3 + 8}{x^2 - 4}}$; b) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \left(\frac{2x-1}{x^2-1} \right)^{\frac{3x-1}{9x^2+3x-2}}$; c) $\lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} \left(\frac{9x^2 - 4}{12x^2 - x - 6} \right)^{\frac{2x-1}{3x+2}}$; d) $\lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}^+} \left(\frac{9x^2 - 4}{12x^2 - x - 6} \right)^{\frac{2x-1}{3x+2}}$

a) $\lim_{x \rightarrow -2} \left[\frac{\cancel{(x-2)} \cdot \cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}} \right]^{\frac{\cancel{(x+2)} \cdot (x^2 - 2x + 4)}{(x-2) \cdot \cancel{(x+2)}}} = (-4)^{\frac{4+4+4}{-4}} = (-4)^{-3} = -\frac{1}{64}$;

b) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \left(\frac{2/3 - 1}{1/9 - 1} \right)^{\frac{3x-1}{(3x-1) \cdot (3x+2)}} = \left(-\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{9}{8} \right) \right)^{\frac{1}{1+2}} = \left(\frac{3}{8} \right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{3}{8}}$;

c) $\lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} \left[\frac{\cancel{(3x-2)} \cdot \cancel{(3x+2)}}{\cancel{(3x+2)} \cdot (4x-3)} \right]^{\frac{2x-1}{3x+2}} = \left(\frac{-4}{-17/3} \right)^{\left[\frac{-7/3}{0^-} \right]} = \left[\left(\frac{12}{17} \right)^{+\infty} \right] = 0$;

d) $\lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}^+} \left[\frac{\cancel{(3x-2)} \cdot \cancel{(3x+2)}}{\cancel{(3x+2)} \cdot (4x-3)} \right]^{\frac{2x-1}{3x+2}} = \left(\frac{-4}{-17/3} \right)^{\left[\frac{-7/3}{0^+} \right]} = \left[\left(\frac{12}{17} \right)^{-\infty} \right] = +\infty$

10. a) $\lim_{x \rightarrow 4^+} \left(\frac{x^3 - 3x^2 - 5x + 4}{x^3 - 5x^2 + 3x + 4} \right)^{\frac{x+2}{x^2-16}}$; b) $\lim_{x \rightarrow 4^-} \left(\frac{x^3 - 3x^2 - 5x + 4}{x^3 - 5x^2 + 3x + 4} \right)^{\frac{x+2}{x^2-16}}$; c) $\lim_{x \rightarrow 5^+} \left(\frac{x^3 - 4x^2 - 6x + 5}{x^3 - 7x^2 - 5x + 75} \right)^{\frac{x^2-7x+10}{x^2+6x-55}}$

a) $\frac{1 \begin{array}{|ccc|} & -3 & -5 \\ & 4 & 4 \end{array} | 4}{1 \begin{array}{|ccc|} & 1 & -1 \\ & 4 & 4 \end{array} | -4} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4^+} \left(\frac{\cancel{(x-4)} \cdot (x^2 + x - 1)}{\cancel{(x-4)} \cdot (x^2 - x - 1)} \right)^{\frac{x+2}{x^2-16}} = \left[\left(\frac{19}{11} \right)^{\frac{6}{0^+}} \right] = \left[\left(\frac{19}{11} \right)^{\infty} \right] = +\infty;$

b) $\lim_{x \rightarrow 4^-} \left(\frac{\cancel{(x-4)} \cdot (x^2 + x - 1)}{\cancel{(x-4)} \cdot (x^2 - x - 1)} \right)^{\frac{x+2}{x^2-16}} = \left[\left(\frac{19}{11} \right)^{\frac{6}{0^-}} \right] = \left[\left(\frac{19}{11} \right)^{-\infty} \right] = 0;$

c) $\frac{1 \begin{array}{|ccc|} & -4 & -6 \\ & 5 & 5 \end{array} | 5}{1 \begin{array}{|ccc|} & 1 & -7 \\ & 5 & 5 \end{array} | -5} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 5^+} \left(\frac{\cancel{(x-5)} \cdot (x^2 + x - 1)}{\cancel{(x-5)} \cdot (x^2 - 2x - 15)} \right)^{\frac{(x-2)(x-5)}{(x+11)(x-5)}} = \left[\left(\frac{29}{0^+} \right)^{\frac{3}{16}} \right] = \left[+\infty^{\frac{3}{16}} \right] = +\infty$

11. a) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x^3 - 8x^2 + 21x - 18} \right)^{\frac{x^2-8x+15}{x^3+x^2-8x-12}}$; b) $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}{x^3 - 3x - 2} \right)^{\frac{x^2+6x+5}{x^2-2x-3}}$; c) $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4} \right)^{\frac{x^2+3x+2}{x^2-3x-10}}$

a) $\frac{1 \begin{array}{|ccc|} & -5 & 3 \\ & 3 & -6 \end{array} | 9}{1 \begin{array}{|ccc|} & 1 & -8 \\ & 3 & 3 \end{array} | -9} \Rightarrow \frac{1 \begin{array}{|ccc|} & -8 & 21 \\ & 3 & 3 \end{array} | -18}{1 \begin{array}{|ccc|} & 1 & -12 \\ & 3 & 12 \end{array} | 18} ;$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\cancel{(x-3)} \cdot (x^2 - 2x - 3)}{\cancel{(x-3)} \cdot (x^2 - 5x + 6)} \right)^{\frac{(x-5)(x-3)}{(x^2+4x+4)(x-3)}} = \left[\left(\frac{0}{0} \right)^{\frac{-2}{25}} \right] = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\cancel{(x-3)} \cdot (x+1)}{\cancel{(x-3)} \cdot (x-2)} \right)^{-\frac{2}{25}} = 4^{-\frac{2}{25}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}{x^3 - 3x - 2} \right)^{\frac{x^2+6x+5}{x^2-2x-3}} ; \left(\frac{-1+4-5+2}{-1+3-2} \right)^{\frac{1-6+5}{1+2-3}} = \left(\frac{0}{0} \right)^{\frac{0}{0}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x-2)} \right]^{\frac{(x+1)(x+5)}{(x+1)(x-3)}} = \frac{1 \begin{array}{|ccc|} & 4 & 5 \\ & 1 & 2 \end{array} | 2}{1 \begin{array}{|ccc|} & 1 & 3 \\ & 1 & 2 \end{array} | 0} ; \frac{1 \begin{array}{|ccc|} & 0 & -3 \\ & 1 & 2 \end{array} | -2}{1 \begin{array}{|ccc|} & 1 & 2 \\ & 1 & 2 \end{array} | 0}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x-2)} \right]^{\frac{4}{4}} = \left(\frac{1}{-3} \right)^1 = -3$$

b)

c) $\frac{1 \begin{array}{|ccc|} & 2 & -4 \\ & -2 & 0 \end{array} | -8}{1 \begin{array}{|ccc|} & 1 & 3 \\ & 1 & 3 \end{array} | 2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{\cancel{(x+2)} \cdot (x^2 - 4)}{\cancel{(x+2)} \cdot (x^2 + 3x + 2)} \right)^{\frac{(x+1)(x+2)}{(x-5)(x+2)}} = \left[\left(\frac{0}{0} \right)^{\frac{1}{7}} \right] = \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{\cancel{(x+2)} \cdot (x-2)}{\cancel{(x+2)} \cdot (x+1)} \right)^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{4}$

12. a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$; b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{x^3-1}$; c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}}$; d) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x+2}-4}{x^2-4}$; e) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{1-3x}-2}{\sqrt{2x+3}-1}$

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x})^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{\sqrt{x}-1}}{\cancel{(\sqrt{x}-1)} \cdot (\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{2} ;$ b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\cancel{\sqrt{x}-1}}{\cancel{(\sqrt{x}-1)} \cdot (\sqrt{x}+1) \cdot (x^2+x+1)} = \frac{1}{6} ;$

c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{\sqrt{x-2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{\frac{(x-2)^2}{x-2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0 ;$

d) $\left[\frac{\sqrt{2+2}-4}{2^2-4} = \frac{2-4}{0^+} \right] = -\infty ;$

$$e) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{1-3x}-2}{\sqrt{2x+3}-1} \cdot \frac{\sqrt{1-3x}+2}{\sqrt{2x+3}+1} \cdot \frac{\sqrt{2x+3}+1}{\sqrt{1-3x}+2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1-3x-4}{2x+3-1} \cdot \frac{\sqrt{2x+3}+1}{\sqrt{1-3x}+2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-3 \cdot (x+1)}{2(x+1)} \cdot \frac{1+1}{2+2} = -\frac{3}{4}$$

13. a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{6}}{\sqrt{x-2}-1}$; b) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-2}$; c) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{2x-\sqrt{12}}{\sqrt{x^2+1}-2}$; d) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{5}} \frac{\sqrt{x^2+20}-5}{1-\sqrt{x^2-4}}$

$$\text{a)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{6}}{\sqrt{x-2}-1} \cdot \frac{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{6}}{\sqrt{x^2-x}+1} \cdot \frac{\sqrt{x-2}+1}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{6}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-x-6}{x-2-1} \cdot \frac{\sqrt{x-2}+1}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{6}} = \\ = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3) \cdot (x+2)}{x-3} \cdot \frac{1+1}{\sqrt{6}+\sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{6}}$$

$$\text{b)} \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-2} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x-\sqrt{2}}{(\cancel{x-\sqrt{2}}) \cdot (x+\sqrt{2})} = \frac{1}{2\sqrt{2}};$$

$$\text{c)} \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{2(x-\sqrt{3})}{\sqrt{x^2+1}-2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+2}{\sqrt{x^2+1}+2} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{2(x-\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{x^2+1}+2)}{x^2+1-4} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{2(\cancel{x-\sqrt{3}}) \cdot (2+2)}{(\cancel{x-\sqrt{3}}) \cdot (x+\sqrt{3})} = \frac{4}{\sqrt{3}};$$

$$\text{d)} \lim_{x \rightarrow \sqrt{5}} \frac{\sqrt{x^2+20}-5}{1-\sqrt{x^2-4}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+20}+5}{1+\sqrt{x^2-4}} \cdot \frac{1+\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2+20}+5} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{5}} \frac{x^2+20-25}{1-(x^2-4)} \cdot \frac{1+1}{5+5} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{5}} \frac{x^2-5}{5-x^2} \cdot \frac{1}{5} = -\frac{1}{5}$$

14. a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3-5x^2+4x-1}{2x^3-3x^2+1}$; b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^3-10x^2+4x+8}{x^3-2x^2+x-2}$; c) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x^3+10x^2+11x+4}{x^3-x^2+3x-3}$

$$\text{a)} \begin{array}{r|rrrrr} 2 & -5 & 4 & | & -1 & \\ \hline 1 & 2 & -3 & | & 1 & \\ & 2 & -3 & | & 1 & \\ \hline & 2 & -3 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \end{array} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\cancel{x-1}) \cdot (2x^2-3x+1)}{(\cancel{x-1}) \cdot (2x^2-x-1)} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\cancel{x-1}) \cdot (2x-1)}{(\cancel{x-1}) \cdot (2x+1)} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3};$$

$$\text{b)} \begin{array}{r|rrrrr} 3 & -10 & 4 & | & 8 & \\ \hline 2 & 6 & -8 & | & -8 & 2 \\ & 3 & -4 & | & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\cancel{x-2}) \cdot (3x^2-4x-4)}{(\cancel{x-2}) \cdot (x^2+1)} = \frac{3 \cdot 4 - 4 \cdot 2 - 4}{4+1} = 0;$$

$$\text{c)} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x^3+10x^2+11x+4}{x^3-x^2+3x-3} = \left[\begin{pmatrix} 28 \\ 0^+ \end{pmatrix} \right] = +\infty$$

15. a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4-7x^3+17x^2-17x+6}{x^4+2x^3-4x^2-2x+3}$; b) $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^4+6x^3+12x^2+10x+3}{x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3}$; c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^5+6x^4+11x^3+2x^2-12x-8}{x^5+6x^4+13x^3+14x^2+12x+8}$

$$\text{b)} \begin{array}{r|rrrrr} 1 & -7 & 17 & -17 & | & 6 & \\ \hline 1 & 1 & -6 & 11 & | & -6 & 1 \\ & 1 & -6 & 11 & | & 1 & 3 & -1 & -3 & 0 \end{array} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\cancel{x+1}) \cdot (x^3-6x^2+11x-6)}{(\cancel{x+1}) \cdot (x^3+3x^2-x-3)} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \Rightarrow$$

$$\text{a)} \begin{array}{r|rrrrr} 1 & -6 & 11 & -6 & 0 & 1 & 3 & -1 & -3 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -5 & 6 & | & -6 & 1 \\ & 1 & -5 & 6 & | & 1 & 4 & 3 \end{array} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\cancel{x-1}) \cdot (x^2-5x+6)}{(\cancel{x-1}) \cdot (x^2+4x+3)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 6 & 12 & 10 & 3 \\ -1 & -1 & -5 & -7 & -3 \end{array} \right| \begin{array}{c} 3 \\ -1 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -6 & -14 & -11 \\ -1 & 0 & 6 & 8 & 3 \end{array} \right| \begin{array}{c} -3 \\ 3 \end{array} \end{array} ; \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\cancel{(x+1)} \cdot (x^3 + 5x^2 + 7x + 3)}{\cancel{(x+1)} \cdot (x^4 - 6x^2 - 8x - 3)} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 5 & 7 & 3 & 0 & 1 & 0 & -6 & -8 & -3 & 0 \end{array}$$

$$b) \Rightarrow \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 5 & 7 & 3 \\ -1 & -1 & -4 & -3 \end{array} \right| \begin{array}{c} 3 \\ -1 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -6 & -8 \\ -1 & 1 & 5 & 3 \end{array} \right| \begin{array}{c} -3 \\ 3 \end{array} \end{array} ; \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cancel{(x+1)} \cdot (x^2 + 4x + 3)}{\cancel{(x+1)} \cdot (x^3 - x^2 - 5x - 3)} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & -1 & -5 & -3 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccccc} 1 & -1 & -5 \\ -1 & -1 & 2 \end{array} \right| \begin{array}{c} -3 \\ 3 \end{array} \end{array} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cancel{(x+1)} \cdot (x+3)}{\cancel{(x+1)} \cdot (x^2 - 2x - 3)} = \left[\begin{array}{c} 2 \\ 0^+ \end{array} \right] = +\infty$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & -2 & -3 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 6 & 11 & 2 & -12 \\ -2 & -2 & -8 & -6 & 8 \end{array} \right| \begin{array}{c} -8 \\ 8 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 6 & 13 & 14 & 12 \\ -2 & -2 & -8 & -10 & -8 \end{array} \right| \begin{array}{c} 8 \\ -8 \end{array} \end{array} ; \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\cancel{(x+2)} \cdot (x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4)}{\cancel{(x+2)} \cdot (x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4)} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 4 & 3 & -4 & -4 & 0 & 1 & 4 & 5 & 4 & 4 & 0 \end{array}$$

$$c) \Rightarrow \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 3 & -4 \\ -2 & -2 & -4 & 2 \end{array} \right| \begin{array}{c} -4 \\ 4 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 5 & 4 \\ -2 & -4 & -2 & -4 \end{array} \right| \begin{array}{c} 4 \\ -4 \end{array} \end{array} ; \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\cancel{(x+2)} \cdot (x^3 + 2x^2 - x - 2)}{\cancel{(x+2)} \cdot (x^3 + 2x^2 + x + 2)} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{array} \right| \begin{array}{c} -2 \\ -2 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{array} \right| \begin{array}{c} 2 \\ -2 \end{array} \end{array} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\cancel{(x+2)} \cdot (x^2 - 1)}{\cancel{(x+2)} \cdot (x^2 + 1)} = \frac{4-1}{4+1} = \frac{3}{5}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

[a) 1/4; b) $+\infty$; c) 3/5]

16. a) $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^5 + 6x^4 + 8x^3 - 2x^2 - 9x - 4}{4x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 12x^2 - 6x - 9}$; b) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^5 + 25x^4 - 9x^3 - 9x^2 - 54x + 54}{4x^5 - 25x^4 + 46x^3 - 34x^2 + 42x - 9}$

$$\begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 6 & 8 & -2 & -9 \\ -1 & -1 & -5 & -3 & 5 \end{array} \right| \begin{array}{c} -4 \\ 4 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccccc} 4 & 5 & 10 & 12 & -6 \\ -4 & -4 & -1 & -9 & -3 \end{array} \right| \begin{array}{c} -9 \\ 9 \end{array} \end{array} ; \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cancel{(x+1)} \cdot (x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 5x - 4)}{\cancel{(x+1)} \cdot (4x^4 + x^3 + 9x^2 + 3x - 9)} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right] \Rightarrow$$

a) $\begin{array}{ccccccccc} 1 & 5 & 3 & -5 & -4 & 0 & 4 & 1 & 9 & 3 & -9 & 0 \end{array}$;

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 5 & 3 & -5 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{c} -4 \\ 4 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccccc} 4 & 1 & 9 & 3 \\ -4 & 3 & -12 & 9 \end{array} \right| \begin{array}{c} -9 \\ 9 \end{array} \end{array} ; \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cancel{(x+1)} \cdot (x^3 + 4x^2 - x - 4)}{\cancel{(x+1)} \cdot (4x^3 - 3x^2 + 12x - 9)} = \frac{0}{-28} = 0$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 4 & -1 & -4 & 0 & 4 & -3 & 12 & -9 & 0 \end{array}$$

b) $\left[\begin{array}{c} \frac{1836}{0} \end{array} \right] = \infty$

17. a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^5 - 19x^4 + 24x^3 + 7x^2 - 28x + 12}{7x^5 - 29x^4 + 39x^3 - 33x^2 + 32x - 4}$; b) $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^4 + 7x^3 + 16x^2 + 15x + 9}{x^5 + 10x^4 + 37x^3 + 63x^2 + 54x + 27}$

a)

$$\begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccccc} 4 & -19 & 24 & 7 & -28 \\ 8 & -22 & 4 & 22 & -12 \end{array} \right| \begin{array}{c} 12 \\ -12 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccccc} 7 & -29 & 39 & -33 & 32 \\ 14 & -30 & 18 & -30 & 4 \end{array} \right| \begin{array}{c} -4 \\ 4 \end{array} \end{array} ; \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)} \cdot (4x^4 - 11x^3 + 2x^2 + 11x - 6)}{\cancel{(x-2)} \cdot (7x^4 - 15x^3 + 9x^2 - 15x + 2)} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 4 & -11 & 2 & 11 & -6 & 0 & 7 & -15 & 9 & -15 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccccc} 4 & -11 & 2 & 11 \\ 8 & -6 & -8 & 6 \end{array} \right| \begin{array}{c} -6 \\ 6 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccccc} 7 & -15 & 9 & -15 \\ 14 & -2 & 14 & -2 \end{array} \right| \begin{array}{c} 2 \\ -2 \end{array} \end{array} ; \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)} \cdot (4x^3 - 3x^2 - 4x + 3)}{\cancel{(x-2)} \cdot (7x^3 - x^2 + 7x - 1)} = \frac{15}{65} = \frac{3}{13}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 4 & -3 & -4 & 3 & 0 & 7 & -1 & 7 & -1 & 0 \end{array}$$

;

b)

$$\begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 7 & 16 & 15 & 9 \\ -3 & -3 & -12 & -12 & -9 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 10 & 37 & 63 & 54 \\ -3 & -3 & -21 & -48 & -45 \end{array} \right| \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{\cancel{(x+3)} \cdot (x^3 + 4x^2 + 4x + 3)}{\cancel{(x+3)} \cdot (x^4 + 7x^3 + 16x^2 + 15x + 9)} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right] \Rightarrow \\
 \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 7 & 16 & 15 & 9 \\ 1 & 4 & 4 & 3 & 0 \end{array} \right] \quad \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{\cancel{(x+3)} \cdot (x^2 + x + 1)}{\cancel{(x+3)} \cdot (x^3 + 4x^2 + 4x + 3)} = \left[\begin{array}{c} \frac{7}{0^-} \\ 0^- \end{array} \right] = -\infty
 \end{array}$$

18. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{e^{3x} - 1}$; c) $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln^2(x) + \ln(x) - 2}{\ln^2(x) - 4\ln(x) + 3}$; d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin(x) - 1}{6\sin^2(x) - \sin(x) - 1}$

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{(e^x - 1)} \cdot (e^x + 1)}{\cancel{e^x - 1}} = 1 + 1 = 2$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{(e^x - 1)} \cdot (e^x + 1) \cdot (e^{2x} + 1)}{\cancel{(e^x - 1)} \cdot (e^{2x} + e^x + 1)} = \frac{(1+1) \cdot (1+1)}{1+1+1} = \frac{4}{3}$;

c) $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\cancel{\ln(x) - 1} \cdot [\ln(x) + 2]}{\cancel{\ln(x) - 1} \cdot [\ln(x) - 3]} = \frac{1+2}{1-3} = -\frac{3}{2}$; d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin(x) - 1}{(2\sin(x) - 1) \cdot (3\sin(x) + 1)} = \frac{1}{3 \cdot \frac{1}{2} + 1} = \frac{2}{5}$

Determinare il valore del parametro k in modo tale che sia vera l'uguaglianza

19. a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{k \cdot x^3 - 4x^2 + x + 6}{x^3 - (k+6)x + 6} = -\frac{3}{5}$; b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{k \cdot x^3 - 4x^2 + x + 6}{x^3 - (k+6)x + 6} = -4$; c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(2k+1) \cdot x^3 + 4x^2 + x - 6}{x^3 - 7x + k - 6} = -1$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{kx^3 - 4x^2 + x + 6}{x^3 - (k+6)x + 6} &= -\frac{3}{5} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{8k - 16 + 2 + 6}{8 - 2(k+6) + 6} = \frac{8k - 8}{2 - 2k} = \\
 &= \frac{8(k-1)}{-2(k-1)} = \begin{cases} -4 & \text{se } k \neq 1 \\ ? & \text{se } k = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{k=1} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x^3 - 7x + 6} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 3)}{(x-2)(x^2 + 2x - 3)} = -\frac{3}{5} \\
 \begin{array}{r} 1 \ 4 \ 1 \\ 2 \ 2 \ 4 \end{array} \begin{array}{r} 1 \ 0 \ 7 \\ 2 \ 2 \ 4 \end{array} &\quad \begin{array}{r} 6 \\ 6 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 6 \\ 6 \\ \hline 0 \end{array}
 \end{aligned}$$

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{k \cdot x^3 - 4x^2 + x + 6}{x^3 - (k+6)x + 6} = \frac{k \cdot 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 2 + 6}{2^3 - (k+6) \cdot 2 + 6} = \frac{8k - 8}{2 - 2k}, k \neq 1 \Rightarrow \frac{8(k-1)}{2(1-k)} = -4 \text{ se } k \neq 1$

b) Se $k = 1$: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x^3 - 7x + 6} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right] \Rightarrow \left| \begin{array}{ccccc} 1 & -4 & 1 & 6 & 6 \\ 2 & 2 & -4 & -6 & -6 \end{array} \right|_2 \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -7 & 6 & 6 \\ 2 & 2 & 4 & -6 & -6 \end{array} \right|_2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)} \cdot (x^2 - 2x - 3)}{\cancel{(x-2)} \cdot (x^2 + 2x - 3)} = -\frac{3}{5}$

c) $\frac{(2k+1) \cdot (-2)^3 + 4 \cdot (-2)^2 + (-2) - 6}{(-2)^3 - 7 \cdot (-2) + k - 6} = \frac{-16k - 8 + 16 - 2 - 6}{-8 + 14 + k - 6} = \frac{-16k}{k} = -16 \text{ se } k \neq 0$, vediamo cosa accade se $k = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 4x^2 + x - 6}{x^3 - 7x - 6} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right] \Rightarrow \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 1 & -6 & -6 \\ -2 & -2 & -4 & 6 & -2 \end{array} \right|_{-2} \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -7 & -6 & -6 \\ -2 & -2 & 4 & 6 & -2 \end{array} \right|_{-2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\cancel{(x+2)} \cdot (x^2 + 2x - 3)}{\cancel{(x+2)} \cdot (x^2 - 2x - 3)} = \frac{-3}{5} \neq -1,$$

quindi non succede per alcun valore di k .

20. a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2k+1) \cdot x^3 + 4x^2 + x - 6}{x^3 - 7x + k - 6} = -\frac{3}{5}$; b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{k \cdot x^3 - 7x^2 + 4x + 2k}{(k+1) \cdot x^4 - 19x^3 + 42x + 4k} = \frac{1}{2}$

a) Tenuto conto del quesito precedente la risposta è $k = 0$;

b) $\frac{k \cdot 2^3 - 7 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 2k}{(k+1) \cdot 2^4 - 19 \cdot 2^3 + 42 \cdot 2 + 4k} = \frac{8k - 28 + 8 + 2k}{16k + 16 - 152 + 84 + 4k} = \frac{10k - 20}{20k - 52} = \frac{5k - 10}{10k - 26}$ deve perciò essere

$$\frac{5k - 10}{10k - 26} = \frac{1}{2} \Rightarrow 5k - 10 = 5k - 13 \Rightarrow 10 = 13 \Rightarrow \emptyset, \text{ anche in questo caso non vi sono soluzioni}$$

21. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^5 + (3k-2) \cdot x^4 + 19x^3 + 25x^2 + 16x + 4}{x^5 + 8x^4 + 25x^3 + (7k+3) \cdot x^2 + 28x + 8} = 0$

$$\frac{-1 + 3k - 2 - 19 + 25 - 16 + 4}{-1 + 8 - 25 + 7k + 3 - 28 + 8} = \frac{3k - 9}{7k - 35} = 0 \Rightarrow k = 3$$

Studiare i limiti seguenti al variare del parametro reale k

22. a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{k \cdot x^3 - x^2 + 1}{(2k+1) \cdot x^2 - 1}$; b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{k \cdot x^4 - k}{(3k+2) \cdot x - 2}$; c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3k \cdot x^2 - x + k}{x^3 + 1}$; d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(k+1) \cdot x^2 - 4k - 4}{(k+2) \cdot x - k - 2}$

a) $\frac{k-1+1}{2k+1-1} = \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}, k \neq 0; k = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 + 1}{x^2 - 1} = -1$;

b) $\frac{k-k}{3k+2-2} = 0, k \neq 0; k = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{0}{2x-2} = 0$;

$$\frac{3k+1+k}{-1+1} = \left[\frac{4k+1}{0} \right] \Rightarrow k \neq -\frac{1}{4}, \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3k \cdot x^2 - x + k}{x^3 + 1} = \infty;$$

c) $k = -\frac{1}{4} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-3/4 \cdot x^2 - x - 1/4}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-3x^2 - 4x - 1}{4(x^3 + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-3(x+1/3)(x+1)}{4(x+1)(x^2 - x + 1)} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$;

d) $\frac{(k+1) \cdot 4 - 4k - 4}{(k+2) \cdot 2 - k - 2} = \frac{0}{k+2} = 0, k \neq -2$, se $k = -2$ il denominatore si annulla e il limite non ha senso

Usando il principio di sostituzione degli infiniti calcolare i seguenti limiti

23. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 - x^3 + 7x^2 - 6}{2x^3 - x^4 - x^2 - x}$; b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^4 + x^5 + 2x^2 + 3}{2x^4 - x^5 - 4x^2 - x}$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^5 - x^4 + x^3 + 18}{-5x^4 + 3x^3 + 18x^2 - 3x + 23}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4}{-x^4} = -3$; b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5}{-x^5} = -1$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^5}{-5x^4} = -\infty$

24. a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^4 + x^3 - 32x^2 - 49x - 4478}{2x - 3x^4 + x^3 + 2x^5 - 1}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2}x^4 - \sqrt{3}x^3 + x^2 - x}{1 - \sqrt{5}x^4 + \pi \cdot x^3 - 3}$; c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2ex^5 - \sqrt{2}x^4 + \pi^2 x^3 + x^2 - 2}{\pi^5 x^4 + 3x^3 - \sqrt{3}x^2 + ex^5 - 1}$

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^4}{2x^5} = 0$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2}x^4}{-\sqrt{5}x^4} = -\sqrt{\frac{2}{5}}$; c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2ex^5}{ex^5} = 2$

25. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x^2 + 1}{3x^2 - x} \right)^{\frac{7x-2}{3x+1}}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x+1}{7x-3} \right)^{\frac{x^2-x}{3x^2+x-1}}$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x+3}{7x} \right)^{\frac{x-2}{x+3x^2-1}}$; d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{11x+1}{5x-1} \right)^{\frac{-9x^2}{2x+1}}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x^2}{3x^2} \right)^{\frac{7x}{3x}} = \left(\frac{5}{3} \right)^{\frac{7}{3}}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x}{7x} \right)^{\frac{x^2}{3x^2}} = \left(\frac{4}{7} \right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{4}{7}}$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x}{7x} \right)^{\frac{x}{3x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{7} \right)^{\frac{1}{3x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{7} \right)^0 = 1$;

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{11x}{5x} \right)^{\frac{-9x^2}{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{11}{5} \right)^{\frac{-9x}{2}} = 0$

26. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{12x+1}{41x-1} \right)^{\frac{2-3x^2}{2x+5}}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{12x+1}{41x-1} \right)^{\frac{2+3x^2}{2x+5}}$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^3 - x^2 - 5}{3x^3 - x^2 + x} \right)^{\frac{3x+2}{x-1}}$; d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^3 - x^4 - 2x + 1}{-2x^4 + x^2 + x^3} \right)^{\frac{x}{x^2-6}}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{12x}{41x} \right)^{\frac{-3x^2}{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{12}{41} \right)^{\frac{-3x}{2}} = +\infty$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{12x}{41x} \right)^{\frac{3x^2}{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{12}{41} \right)^{\frac{3}{2}} = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^3}{3x^3} \right)^{\frac{3x}{x}} = \left(\frac{2}{3} \right)^3 = \frac{8}{27}$; d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x^4}{-2x^4} \right)^{\frac{x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = 1$

27. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^3 - x^2 - x}{7x^2 - 5} \right)^{\frac{3x^2 - x + 1}{x^2 + 3x - 5}}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^3 - x^2 + 2x}{x^3 - x^2 + 2x - 1} \right)^{\frac{-2x^3 - x + 5}{47x^2 - x - 1}}$; c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^3 + x^2 + 4x}{3x^3 - x - 2} \right)^{\frac{2x^2 + x + 4}{-x - 2}}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^3}{7x^2} \right)^{\frac{3x^2}{x^2}} = +\infty$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^3}{x^3} \right)^{\frac{-2x^3}{47x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3^{\frac{-2x}{47}} = 0$; c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^3}{3x^3} \right)^{\frac{2x^2}{-x}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^{-2x} = 0$

28. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[7]{x^5} + 2\sqrt[4]{x^7} + 8\sqrt[3]{x^2} - 4x}{2\sqrt[4]{x^5} - 5\sqrt[3]{x^4} + 3\sqrt[4]{x^7} + \sqrt[3]{x^2} - 13}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5\sqrt[13]{x^4} - \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[3]{x^2} - 2x}{\sqrt[7]{x^2} - 2\sqrt[3]{x^2} + 8\sqrt[7]{x^8} - 3x}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt[4]{x^7}}{3\sqrt[4]{x^7}} = \frac{2}{3}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{8\sqrt[7]{x^8}} = 0$

29. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^3 + x^2 - 8}{3x^3 + x^2 + 8x} \right)^{\frac{3x^2 + x + 2}{3x - 10}}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt[3]{x^4} - 7\sqrt[7]{x^4} + 2\sqrt[4]{x^3} + 18\sqrt[3]{x^2} - 2}{21\sqrt[4]{x^5} - 51\sqrt[3]{x^4} + 32\sqrt[4]{x^3} + 13x + 3}$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-7\sqrt[3]{x^{11}} + 12\sqrt[4]{x^3} - \sqrt[3]{x^2} - 1}{2\sqrt[9]{x^7} + 5\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^5} - 5}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^3 + x^2 - 8}{3x^3 + x^2 + 8x} \right)^{\frac{3x^2 + x + 2}{3x - 10}}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^{\frac{4}{3}} - 7x^{\frac{7}{3}} + 2x^{\frac{3}{4}} + 18x^{\frac{2}{3}} - 2}{21x^{\frac{5}{4}} - 51x^{\frac{3}{3}} + 32x^{\frac{3}{4}} + 13x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^{\frac{4}{3}}}{-51x^{\frac{4}{3}}} = -\frac{2}{51}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-7\sqrt[3]{x^{11}}}{\sqrt[3]{x^5}} = -\infty$

30. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12\sqrt[3]{x^5} - 17\sqrt[7]{x^4} - 8\sqrt[3]{x^8} - 24}{2\sqrt[4]{x^5} - 5\sqrt[3]{x^8} + \sqrt[3]{x^7} - 3x}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[7]{x^2} + 2\sqrt[4]{x^3} + 2x + 9}{2\sqrt[4]{x^3} - 5\sqrt[7]{x^4} + 18\sqrt[6]{x^5} - 13}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-8\sqrt[3]{x^8}}{-5\sqrt[3]{x^8}} = \frac{8}{5}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{18\sqrt[6]{x^5}} = +\infty$

31. a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x - 1}{x^{5000} + 2}$; d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2^x}$; e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$; f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{3x+2}{x^2-x}}$

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x} = -1$, $\sqrt{x^2} = -x$ perché x tende a meno infinito;

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{x^{5000}} = +\infty$; d) 0; e) 0; f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{3x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{3}{x}} = 0$

32. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2+x)}{\ln(x^2-x-1)}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(3x^2+x-2) + \ln(x+2)]$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(2x^3+x-2) - \ln(x^4+3x^2)]$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2+x)}{\ln(x^2-x-1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2)}{\ln(x^2)} = 1$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln[(3x^2+x-2)(x+2)] = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{2x^3+x-2}{x^4+3x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{2x^3}{x^4} \right) = [\ln(0^+)] = -\infty$

Determinare il valore del parametro k in modo tale che sia vera l'uguaglianza

33. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2+5k)x^3 + x - 1}{(5k-2)x^3 + x} = \frac{7}{3}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(5k+3)x^5 - x^3 + x^2}{(2-7k)x^5 - x^4 + 3} = -\frac{5}{6}$

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2+5k)x^3+x-1}{(5k-2) \cdot x^3+x} = \frac{2+5k}{5k-2}, k \neq \pm \frac{2}{5}; \Rightarrow \frac{2+5k}{5k-2} = \frac{7}{3} \Rightarrow 6+15k=35k-14 \Rightarrow k=1;$
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(5k+3)x^5-x^3+x^2}{(2-7k) \cdot x^5-x^4+3} = \frac{5k+3}{2-7k}, k \notin \left\{-\frac{3}{5}; \frac{2}{7}\right\} \Rightarrow \frac{5k+3}{2-7k} = -\frac{5}{6} \Rightarrow 30k+18=-10+35k \Rightarrow k=\frac{28}{5}$
34. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(8-3k) \cdot x^4-2x^2+1}{(5+2k) \cdot x^4-3x^3} = \frac{11}{3};$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(4k+1) \cdot x^3-x^2+1}{(5k-8) \cdot x^3-2x+3} = \frac{9}{5}$
- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(8-3k) \cdot x^4-2x^2+1}{(5+2k) \cdot x^4-3x^3} = \frac{8-3k}{5+2k}, k \notin \left\{-\frac{5}{2}; \frac{8}{3}\right\} \Rightarrow \frac{8-3k}{5+2k} = \frac{11}{3} \Rightarrow 24-9k=55+22k \Rightarrow k=-1;$
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(4k+1) \cdot x^3-x^2+1}{(5k-8) \cdot x^3-2x+3} = \frac{4k+1}{5k-8}, k \notin \left\{-\frac{1}{4}; \frac{8}{5}\right\} \Rightarrow \frac{4k+1}{5k-8} = \frac{9}{5} \Rightarrow 20k+5=45k-72 \Rightarrow k=\frac{77}{25}$
35. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2k-1) \cdot x^3-3x^2}{(4k+2) \cdot x^2-x+3} = -\frac{3}{4};$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3-4k) \cdot x^3-x^2+1}{(2k+1) \cdot x^2-2x} = +\infty;$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(8k+1) \cdot x^2-x+1}{(5k+3) \cdot x+3} = -\infty$
- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2k-1) x^3-3x^2}{(4k+2) \cdot x^2-x+3} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2k-1) x^3}{(4k+2) \cdot x^2} & k \neq \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2}{(4/2+2) \cdot x^2} & k = \frac{1}{2} \end{cases} = \begin{cases} \infty & k \neq \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} & k = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow k = \frac{1}{2};$
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3-4k) \cdot x^3-x^2+1}{(2k+1) \cdot x^2-2x} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3-4k) \cdot x^3}{(2k+1) \cdot x^2} = \infty & k \neq \frac{3}{4} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{(2 \cdot 3/4+1) \cdot x^2} = -\frac{2}{5} & k = \frac{3}{4} \end{cases} = \begin{cases} -\infty & k \leq -\frac{1}{2} \vee k > \frac{3}{4} \\ +\infty & -\frac{1}{2} < k < \frac{3}{4} \Rightarrow -\frac{1}{2} < k < \frac{3}{4} \\ -\frac{2}{5} & k = \frac{3}{4} \end{cases};$
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(8k+1) \cdot x^2-x+1}{(5k+3) \cdot x+3} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(8k+1) \cdot x^2}{(5k+3) \cdot x} & k \neq -\frac{1}{8} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x+1}{(-5/8+3) \cdot x+3} & k = -\frac{1}{8} \end{cases} = \begin{cases} \infty & k \neq -\frac{1}{8} \\ \frac{8}{19} & k = -\frac{1}{8} \end{cases} = \begin{cases} -\infty & k < -\frac{1}{8} \\ +\infty & k > -\frac{1}{8} \Rightarrow k < -\frac{1}{8} \\ \frac{8}{19} & k = -\frac{1}{8} \end{cases}$
36. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(4-3k) \cdot x^3-1}{(7-2k) \cdot x^4-2x+3} = 0;$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3-4k) \cdot x^3-2x^2}{(7k+3) \cdot x^2+2x-1} = 0;$ c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(11k+1) \cdot x^3-x^2+2x-1}{(5k+7) \cdot x^4-2x^5+1} = 0$
- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(4-3k) \cdot x^3-1}{(7-2k) \cdot x^4-2x+3} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(4-3k) \cdot x^3}{(7-2k) \cdot x^4} = 0 & k \neq \frac{7}{2} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(4-21/2) \cdot x^3-1}{-2x+3} = +\infty & k = \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow k \neq \frac{7}{2};$
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3-4k) \cdot x^3-2x^2}{(7k+3) \cdot x^2+2x-1} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3-4k) \cdot x^3}{(7k+3) \cdot x^2} = \infty & k \neq \frac{3}{4} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{(21/4+3) \cdot x^2} = -\frac{8}{33} & k = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \emptyset;$

c) Il limite è sempre zero perché il denominatore ha sempre denominatore maggiore del numeratore, indipendentemente dal valore di k

Studiare il valore del limite al variare del parametro k

37. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(k+1) \cdot x^3 - x^2 + x}{x^3 - (k+1) \cdot x}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2k-1) \cdot x^3 - x^2 + 1}{(k+6) \cdot x^3 + 1}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(k+1) \cdot x^3 - x^2 + x}{x^3 - (k+1) \cdot x} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(k+1) \cdot x^3}{x^3} = k+1 & k \neq -1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x^3} = 0 & k = -1 \end{cases};$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2k-1) \cdot x^3 - x^2 + 1}{(k+6) \cdot x^3 + 1} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2k-1) \cdot x^3}{(k+6) \cdot x^3} = \frac{2k-1}{k+6} & k \notin \left\{ -6; \frac{1}{2} \right\} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 + 1}{(1/2 + 6) \cdot x^3 + 1} = 0 & k = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(-12-1) \cdot x^3 - x^2 + 1}{1} = -\infty & k = -6 \end{cases}$

38. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2k+1) \cdot x^4 + 4x^3}{k \cdot x^3 - 7 \cdot x + k}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(k^2-1) \cdot x^3 + x^2 + k}{(k+1) \cdot x^3 - x}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2k+1) \cdot x^4 + 4x^3}{k \cdot x^3 - 7 \cdot x + k} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2k+1) \cdot x^4}{k \cdot x^3} = \infty & k \neq -\frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3}{x^3/2 - 7 \cdot x + k} = 8 & k = -\frac{1}{2} \end{cases} = \begin{cases} +\infty & k > 0 \vee k < -1/2 \\ -\infty & -1/2 < k \leq 0 \\ 8 & k = 1/2 \end{cases}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(k^2-1) \cdot x^3 + x^2 + k}{(k+1) \cdot x^3 - x} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(k^2-1) \cdot x^3}{(k+1) \cdot x^3} = k-1 & k \neq \pm 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{-x} = -\infty & k = -1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x^3} = 0 & k = 1 \end{cases} = \begin{cases} k-1 & k \neq -1 \\ -\infty & k = -1 \\ 0 & k = 1 \end{cases}$

Calcolare i seguenti limiti

39. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{13x-2} - \sqrt{13x+8})$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+2x})$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x^2-x-1} - \sqrt{4x^2+5})$

a) 0 perché le due espressioni, all'infinito sono sostanzialmente uguali;

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+2x}) \cdot (\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2+2x})}{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2+2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1 - (x^2 + 2x)}{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2+2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x+x} = -1$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{3x^2-x-1} - \sqrt{4x^2+5}) \cdot (\sqrt{3x^2-x-1} + \sqrt{4x^2+5})}{\sqrt{3x^2-x-1} + \sqrt{4x^2+5}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2-x-1-4x^2-5}{\sqrt{3x^2-x-1} + \sqrt{4x^2+5}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2-x-6}{\sqrt{3x^2-x-1} + \sqrt{4x^2+5}} = -\infty$

40. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x^2-3} - \sqrt{2x^2+x})$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x-8} - \sqrt{17x+3})$; c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2-3} - \sqrt{x^2+x-1})$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{2x^2-3} - \sqrt{2x^2+x}) \cdot (\sqrt{2x^2-3} + \sqrt{2x^2+x})}{\sqrt{2x^2-3} + \sqrt{2x^2+x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2-3-(2x^2+x)}{\sqrt{2x^2-3} + \sqrt{2x^2+x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3-x}{\sqrt{2x^2} + \sqrt{2x^2}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{2\sqrt{2}x} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - \sqrt{17x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \sqrt{17})\sqrt{x} = -\infty$;

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2-3} - \sqrt{x^2+x-1}) \cdot (\sqrt{x^2-3} + \sqrt{x^2+x-1})}{\sqrt{x^2-3} + \sqrt{x^2+x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-3-(x^2+x-1)}{\sqrt{x^2-3} + \sqrt{x^2+x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2-x}{\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{2x} = -\frac{1}{2}$

41. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{3x^2-x+1} - \sqrt{x^2+2x-4})$; b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{-x^3-x+3} - \sqrt{-2x^3+x^2})$

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x^2} - \sqrt{x^2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3}-1)x = +\infty;$
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{-x^3} - \sqrt{-2x^3}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1-\sqrt{2})\sqrt{-x^3} = -\infty$
42. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2} - \sqrt{5x+3}}{\sqrt{7x^2+2} - \sqrt{x-2}}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x^2+5} - \sqrt{2x^2-x}}{\sqrt{2x^2+1} - \sqrt{x-1}}$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + 3^x - 1}{10^{58} \cdot x^5 + 1}$; d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x - 3^x}{4^x + x}$
- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2}}{\sqrt{7x^2}} = \sqrt{\frac{2}{7}}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x^2} - \sqrt{2x^2}}{\sqrt{2x^2}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - 2}{2}$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x}{10^{58} \cdot x^5} = +\infty$;
- d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3^x}{4^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-3}{4}\right)^x = 0$
43. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-1} - \sqrt{3x-1}}{\sqrt{3x^2-x} - \sqrt{4x}}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x-1} - \sqrt{2x+3}}{\sqrt{4x^2-2x+1} - \sqrt{x+2}}$; c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-x+1} - \sqrt{2x-1}}{\sqrt{5x+1} - \sqrt{x^2-2x}}$; d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{5x^2+2} - \sqrt{4x+3}}{\sqrt{7x^2-5} - \sqrt{3x+1}}$
- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{4x^2}} = \frac{1}{2}$; c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{-\sqrt{x^2}} = -1$; d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{5x^2}}{\sqrt{7x^2}} = \sqrt{\frac{5}{7}}$
44. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8^x - 1}{3^x - 1}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \cdot 2^x + 1}{7 \cdot 2^x + x - 1}$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 5^x}{4^x}$; d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 \cdot \pi^x + \sqrt{3^x}}{\pi^{x+1} + x^2}$
- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8^x}{3^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{8}{3}\right)^x = +\infty$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \cdot 2^x}{7 \cdot 2^x} = \frac{3}{7}$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{5^x}{4^x}\right) = -\infty$; d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 \cdot \pi^x}{\pi^{x+1}} = \frac{5}{\pi}$
45. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-x} - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{5x+3} - \sqrt{5x-2}}$; b)
- $$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^3-1} - \sqrt{2x^3+3}}{\sqrt{3x^2-3} - \sqrt{3x^2-x+1}}$$
- $$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2-x} - \sqrt{x^2+1}) \cdot (\sqrt{x^2-x} + \sqrt{x^2+1})}{(\sqrt{5x+3} - \sqrt{5x-2}) \cdot (\sqrt{5x+3} + \sqrt{5x-2})} \cdot \frac{\sqrt{5x+3} + \sqrt{5x-2}}{\sqrt{x^2-x} + \sqrt{x^2+1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2} - x - \cancel{x^2} - 1}{\cancel{5x} + 3 - \cancel{5x} + 2} \cdot \frac{\sqrt{5x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\cancel{x}}{1} \cdot \frac{\sqrt{5x}}{\cancel{x}} = -\infty \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{2x^3-1} - \sqrt{2x^3+3}) \cdot (\sqrt{2x^3-1} + \sqrt{2x^3+3})}{(\sqrt{3x^2-3} - \sqrt{3x^2-x+1}) \cdot (\sqrt{3x^2-3} + \sqrt{3x^2-x+1})} \cdot \frac{\sqrt{2x^3-1} + \sqrt{2x^3+3}}{\sqrt{3x^2-3} + \sqrt{3x^2-x+1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{2x^3} - 1 - \cancel{2x^3} - 3}{\cancel{3x^2} - 3 - \cancel{3x^2} + x - 1} \cdot \frac{\sqrt{2x^3}}{\sqrt{3x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{x-4} \cdot \sqrt{\frac{2x}{3}} = 0 \end{aligned}$$
46. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{4x^2-3}}{3\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{9x^2+1}}$; b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{5-x}}{5\sqrt{x^2-1} - \sqrt{25x^2+x+3}}$
- $$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{4x^2-3}) \cdot (2\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{4x^2-3})}{(3\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{9x^2+1}) \cdot (3\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{9x^2+1})} \cdot \frac{3\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{9x^2+1}}{2\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{4x^2-3}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{4x^2} + 4x + 4 - \cancel{4x^2} + 3}{\cancel{9x^2} + 9x + 9 - \cancel{9x^2} - 1} \cdot \frac{3\sqrt{x^2}}{2\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{4}^2 x}{\cancel{9}^3 x} \cdot \frac{3}{\cancel{2}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \lim_{x \rightarrow +\infty} & \frac{(\sqrt{1-x} - \sqrt{5-x}) \cdot (\sqrt{1-x} + \sqrt{5-x})}{(5\sqrt{x^2-1} - \sqrt{25x^2+x+3}) \cdot (5\sqrt{x^2-1} + \sqrt{25x^2+x+3})} \cdot \frac{5\sqrt{x^2-1} + \sqrt{25x^2+x+3}}{\sqrt{1-x} + \sqrt{5-x}} = \\
 & = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cancel{x} - 5 + \cancel{x}}{\cancel{25x^2} - 25 - \cancel{25x^2} - x - 3} \cdot \frac{5\sqrt{x^2}}{\sqrt{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{-x} \cdot 5\sqrt{-x} = 0
 \end{aligned}$$

Determinare il valore del parametro k in modo tale che sia vera l'uguaglianza

47. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{2x^2 - (k-1)x} - \sqrt{k \cdot x^2 - 2} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{4}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{(4k+1)x^2 + 3x - 1} - \sqrt{x^2 + (3k-1)x - 2} \right) = 1$

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - (k-1)x - k \cdot x^2 + 2}{\sqrt{2x^2 - (k-1)x} + \sqrt{k \cdot x^2 - 2}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2-k)x^2 - (k-1)x + 2}{\sqrt{2x^2 - (k-1)x} + \sqrt{k \cdot x^2 - 2}} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2-k)x^2}{\sqrt{2x^2} + \sqrt{k \cdot x^2}} = +\infty & k \neq 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 2}{\sqrt{2x^2 - x} + \sqrt{2x^2 - 2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} & k = 2 \end{cases} \Rightarrow k = 2 \\
 \text{b)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(4k+1)x^2 + 3x - 1 - x^2 - (3k-1)x + 2}{\sqrt{(4k+1)x^2 + 3x - 1} + \sqrt{x^2 + (3k-1)x - 2}} &= \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4kx^2}{\sqrt{(4k+1)x^2} + \sqrt{x^2}} = \infty & k \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + 1}{\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2}} = 2 & k = 0 \end{cases} \Rightarrow \emptyset
 \end{aligned}$$

48. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{(4k+1)x^2 + 3x - 1} - \sqrt{x^2 + (3k-1)x - 2} \right) = 2$

Dal precedente quesito si ha $k = 0$

49. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{(4k+1)x^2 + 3x - 1} - \sqrt{x^2 + (3k-1)x - 2} \right) = +\infty$

Dal quesito 47 si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4kx^2}{\sqrt{(4k+1)x^2} + \sqrt{x^2}} = +\infty$ per $k > 0$

Studiare il valore del limite al variare del parametro k

50. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 - (k-1)x} - \sqrt{(k+1)x^2 - 1} \right)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - (k-1)x - (k+1)x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - (k-1)x} + \sqrt{(k+1)x^2 - 1}} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-kx^2}{\sqrt{x^2} + \sqrt{(k+1)x^2}} = \infty & k \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{2} & k = 0 \end{cases} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-kx^2}{(1 + \sqrt{k+1})x} = -\infty & k > 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-kx^2}{(1 + \sqrt{k+1})x} = +\infty & -1 < k < 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{2} & k = 0 \end{cases}$$

51. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{(4k-1)x^2 + 3} - \sqrt{x^2 + (k-1)x - 2} \right)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(4k-2)x^2}{(\sqrt{4k-1} + 1)x} = +\infty \quad k > \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(4k-1)x^2 + 3 - x^2 - (k-1)x + 2}{\sqrt{(4k-1)x^2 + 3} + \sqrt{x^2 + (k-1)x - 2}} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(4k-2)x^2}{(\sqrt{4k-1} + 1)x} = -\infty & \frac{1}{4} \leq k < \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/2x}{\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2}} = \frac{1}{4} & x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

52. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{(2k+1)x^2 + x} - \sqrt{(2k-1)x^2 - 2} \right)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2k+1)x^2 + x - (2k-1)x^2 + 2}{\sqrt{(2k+1) \cdot x^2 + x} + \sqrt{(2k-1) \cdot x^2 - 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x + 2}{(\sqrt{2k+1} + \sqrt{2k-1})x} = +\infty \quad k > \frac{1}{2}$$

53.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{kx^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - 3}}{\sqrt{(k+1) \cdot x^2 + x + 1} - \sqrt{(k+1) \cdot x^2 + 1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{kx^2 + x + 1 - x^2 + 3}{(k+1) \cdot x^2 + x + 1 - (k+1) \cdot x^2 - 1} \cdot \frac{\sqrt{(k+1) \cdot x^2 + x + 1} + \sqrt{(k+1) \cdot x^2 + 1}}{\sqrt{kx^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - 3}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(k-1)x^2 + x + 4}{x} \cdot \frac{2\sqrt{k+1} \cancel{x}}{(\sqrt{k+1})\cancel{x}} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(k-1)x^2}{x} \cdot \frac{2\sqrt{k+1}}{\sqrt{k+1}} = +\infty & k > 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(k-1)x^2}{x} \cdot \frac{2\sqrt{k+1}}{\sqrt{k+1}} = -\infty & 0 \leq k < 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+4}{x} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} & k = 1 \end{cases}$$

54.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{(k-1)x^2 + k \cdot x} - \sqrt{(k-1) \cdot x^2 + 1}}{\sqrt{(2k-1) \cdot x^2 + 2} - \sqrt{(2k-1) \cdot x^2 + k \cdot x - 1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{(k-1)x^2} + k \cdot x - \cancel{(k-1)x^2} - 1}{\cancel{(2k-1)x^2} + 2 - \cancel{(2k-1)x^2} - k \cdot x + 1} \cdot \frac{\sqrt{(2k-1) \cdot x^2 + 2} + \sqrt{(2k-1) \cdot x^2 + k \cdot x - 1}}{\sqrt{(k-1)x^2 + k \cdot x} + \sqrt{(k-1) \cdot x^2 + 1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k \cdot x - 1}{-k \cdot x + 3} \cdot \frac{\sqrt{2k-1} \cancel{x}}{\sqrt{k-1} \cancel{x}} = \begin{cases} -\sqrt{\frac{2k-1}{k-1}} & k > 1 \\ -\infty & k = 1 \end{cases}$$

Continuità di una funzione

Determinare e classificare gli eventuali punti di discontinuità delle seguenti funzioni

1. a) $f(x) = \frac{x \cdot \sqrt{x}}{6-x^2}$; b) $g(x) = \frac{4x}{2-x^2}$; c) $h(x) = \frac{4}{\sqrt{1-2x^2}}$

a) calcoliamo il dominio della funzione: $\begin{cases} x \geq 0 \\ 6-x^2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq \pm\sqrt{6} \end{cases} \Rightarrow x \geq 0, x \neq \sqrt{6}$, quindi l'unica discontinuità possibile è in $x = \sqrt{6}$, stabiliamone il tipo: $\lim_{x \rightarrow \sqrt{6}} \frac{x \cdot \sqrt{x}}{6-x^2} = \left[\frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt[4]{6}}{0^+} \right] = +\infty$, quindi discontinuità di II specie

b) $\lim_{x \rightarrow \pm\sqrt{2}} \frac{4x}{2-x^2} = \infty$ $g(x) = \frac{4x}{2-x^2}$, quindi $x = \pm\sqrt{2}$, II specie; c) $\lim_{x \rightarrow \pm 1/\sqrt{2}} \frac{4}{\sqrt{1-2x^2}} = \infty \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, II specie

2. a) $f(x) = \frac{7 \cdot \sqrt{x}}{1+x}$; b) $g(x) = \frac{x}{\sin(x)}$; c) $h(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

a) $\text{dom}(f) : \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq -1 \end{cases} \Rightarrow x \geq 0$, quindi non ci sono discontinuità nel dominio;

b) $\text{dom}(g) : \sin(x) \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, distinguiamo il caso $x = 0$ dagli altri: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1$, poiché però non esiste $g(0)$, abbiamo una discontinuità di III specie. Mentre per $x = k\pi, k \neq 0$,

$\lim_{x \rightarrow k\pi} \frac{x}{\sin(x)} = \left[\frac{k\pi}{0} \right] = \infty$, in questo caso la discontinuità è di II specie; c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$,

non esiste $h(1)$, quindi $x = 1$, III specie

3. a) $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$; b) $g(x) = \frac{\tan(x)}{3+x^4}$; c) $h(x) = \sin(\sqrt{x})$; d) $m(x) = \cos\left(\frac{1}{x-1}\right)$

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$, ma non esiste $f(2)$, quindi $x = 2$, III specie;

b) $\lim_{x \rightarrow \pi/2+k\pi} \frac{\tan(x)}{3+x^4} = \infty \Rightarrow x = \pi/2 + k\pi$, II specie; c) non ci sono discontinuità nel dominio;

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \cos\left(\frac{1}{x-1}\right) \Rightarrow x = 1$, II specie

4. a) $f(x) = \frac{1-|x-1|}{x}$; b) $g(x) = \frac{|x-2|}{x^2-4}$; c) $h(x) = \frac{x-3}{|x-3|}$; d) $m(x) = \frac{x+1-|2x-1|}{x-2}$

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-|x-1|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-(1-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1 \Rightarrow x = 0$, III specie;

b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2|}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{4}; \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)}{(x-2)(x+2)} = -\frac{1}{4} \Rightarrow x = 2$, I specie;

$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{|x-2|}{x^2-4} = \infty \Rightarrow x = -2$, II specie; c) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-3}{|x-3|} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-3}{3-x} = -1; \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{|x-3|} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{x-3} = 1 \Rightarrow x = 3$, I specie;

specie; d) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1-|2x-1|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1-2x+1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2-x}{x-2} = -1; \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1-|2x-1|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2-x}{2-x} = 1 \Rightarrow x = 2$, III specie

5. a) $f(x) = \begin{cases} -x^2 - x^3 + 3 & x < 0 \\ 2x^3 + x^4 - 5 & x \geq 0 \end{cases}$; b) $g(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4x + 1 & x < -1 \\ x^3 + 2x^2 + x & x \geq -1 \end{cases}$

a) L'unica discontinuità possibile è nell'ascissa in cui cambia la legge di definizione, cioè $x = 0$:

$\lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2 - x^3 + 3) = 3; \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x^3 + x^4 - 5) = -5 = f(0)$, quindi discontinuità di I specie.

b) $\lim_{x \rightarrow -1^-} (2x^2 - 4x + 1) = 7; \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^3 + 2x^2 + x) = 4 \Rightarrow x = -1$, I specie

6. a) $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & se x < 0 \\ x^2 + 3x + 3 & se x \geq 0 \end{cases}$; b) $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$

a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} (2x+3) = 3; \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 3x + 3) = 3 \Rightarrow$ funzione continua anche in $x = 0$;

b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty; \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \Rightarrow x = 0$ II specie

7. a) $f(x) = \frac{1+|x-3|}{1-|x-3|}$; b) $g(x) = \frac{1-|x-1|}{|x+1|-1}$

$$\text{dom}: 1-|x-3| \neq 0 \Rightarrow |x-3| \neq 1 \Rightarrow x-3 \neq \pm 1 \Rightarrow x \neq 4 \vee x \neq 2$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+x-3}{1-x+3} & x \geq 3 \\ \frac{1+3-x}{1+x-3} & x < 3 \end{cases} = \begin{cases} \frac{x-2}{4-x} & x \geq 3 \\ \frac{4-x}{x-2} & x < 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4-x}{x-2} = \infty ; \quad x=2 \text{ discontinuità di I specie}$$

$$\text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{4-x}{4-x} = \infty ; \quad x=4 \quad // \quad //$$

$$g(x) = \frac{1-|x-1|}{|x+1|-1} ; \quad \text{dom}: |x+1| \neq 1 \Rightarrow x+1 \neq \pm 1 \Rightarrow x=0 \vee x \neq -2$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1-|x-1|}{x+1-1} & x \geq -1 \\ \frac{1-|x-1|}{-x-1-1} & x < -1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1-|x-1|}{x} & x \geq -1 \\ \frac{1-|x-1|}{-x-2} & x < -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-|x-1|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1 \quad x=0 \text{ discontinuità di III specie}$$

$$\text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x}{-x-2} = \infty \quad x=-2 \text{ di II specie}$$

$$8. \quad \text{a)} \quad f(x) = \begin{cases} x+1 & x < 1 \\ x & 1 \leq x < 2 \\ x^2 - 2 & x > 2 \end{cases} ; \quad \text{b)} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \leq 1 \\ \frac{x}{x-1} & 1 < x \leq 2 \\ \frac{x-1}{x} & x > 2 \end{cases}$$

$$\text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) = 2; \lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1 \Rightarrow x=1, \text{ I specie}; \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} x = 2; \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 2) = 2 \Rightarrow x=2 \text{ continua};$$

$$\text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty \Rightarrow x=0 \text{ II specie}; \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x} = 1; \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x-1} = +\infty \Rightarrow 1, \text{ II specie}; \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x-1} = 2; \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-1}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x=2, \text{ I specie}$$

$$9. \quad \text{a)} \quad f(x) = \frac{|x+3|+1}{|x-1|-|x+2|}; \quad \text{b)} \quad g(x) = \frac{|x+3|+1}{|x-1|+|x+2|}$$

$$\text{a)} \quad |x-1| - |x+2| \neq 0 \Rightarrow |x-1| \neq |x+2| \Rightarrow x-1 \neq x+2 \vee x-1 \neq -x-2 \Rightarrow -1 \neq 2 \vee x \neq -1/2, \quad \text{quindi:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{|x+3|+1}{|x-1|-|x+2|} = \infty \Rightarrow x=-1/2, \text{ II specie}; \quad \text{b)} \quad \text{Stavolta il denominatore è sempre positivo, quindi non ci sono discontinuità}$$

Determinare l'eventuale valore reale dei parametri in modo che le funzioni siano continue nel loro dominio

$$10. \quad \text{a)} \quad f(x) = \begin{cases} k \cdot x + 3 & \text{se } x < 0 \\ x^2 + x + 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}; \quad \text{b)} \quad f(x) = \begin{cases} x+k & \text{se } x < 1 \\ x^2 + 2x + 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{a)} \quad \text{L'unica discontinuità può esserci in } x=0: \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} (kx+3) = 3; \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + x + 1) = 1 \Rightarrow \text{vi è sempre discontinuità per ogni } k; \quad \text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+k) = 1+k; \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 2x + 1) = 4 \Rightarrow 1+k = 4 \Rightarrow k = 3$$

$$11. \quad \text{a)} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + k \cdot x + 1 & \text{se } x < 2 \\ x^2 + x - 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}; \quad \text{b)} \quad f(x) = \begin{cases} k \cdot \sin(x) & \text{se } x < 0 \\ x^2 + x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + kx + 1) = 5 + 2k; \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + x - 1) = 5 \Rightarrow 5 + 2k = 5 \Rightarrow k = 0;$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} k \cdot \sin(x) = 0; \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + x) = 0$ continua $\forall k \in \mathbb{R}$

12. a) $f(x) = \begin{cases} 2kx^3 - 3x + k & \text{se } x < 1 \\ 3kx^2 + 2x - 3k & \text{se } x \geq 1 \end{cases};$ b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x > 1 \\ kx^2 + x & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$

a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} (2kx^3 - 3x + k) = 3k - 3; \lim_{x \rightarrow 1^+} (3kx^2 + 2x - 3k) = 2 \Rightarrow 3k - 3 = 2 \Rightarrow k = 5/3;$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x} = 1; \lim_{x \rightarrow 1^+} (kx^2 + x) = k + 1 \Rightarrow 1 = k + 1 \Rightarrow k = 0$

13. a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - kx - 2 & \text{se } x < 0 \\ x^3 + k^2 x^2 + 3kx - 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases};$ b) $f(x) = \begin{cases} (k+1) \cdot x^2 - x - 3 & \text{se } x < 1 \\ (k^2 - 2)x^2 + x - 2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

$f(x)$ e' continua $\forall k \in \mathbb{R}$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e' possibile

che sia continua anche in $x=0$?

$\lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - kx - 2) = -2; \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3 + k^2 x^2 + 3kx - 1) = -1$

a) in $x=0$ non e' una discontinuita' di I specie di salto $\forall k \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} ((k+1)x^2 - x - 3) = (k+1) - 1 - 3 = k - 3$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} (k^2 - 2)x^2 + x - 2 = (k^2 - 2) + 1 - 2 = k^2 - 3$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} (k^2 - 2)x^2 + x - 2 = k^2 - 3 \Rightarrow k = k^2 \Rightarrow k = 0 \vee k = 1$

14. a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + (3k+1) \cdot x + 1 & \text{se } x < 2 \\ (2k^2 + 1) \cdot x^2 + 2x - k & \text{se } x \geq 2 \end{cases};$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + (1-2k) \cdot x & \text{se } x < -1 \\ 2kx^2 + x + 1 & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} [x^2 + (3k+1)x + 1] = 7 + 6k; \lim_{x \rightarrow 2^+} [(2k^2 + 1)x^2 + 2x - k] = 8 + 8k^2 - k \Rightarrow$

a) $\Rightarrow 7 + 6k = 8 + 8k^2 - k \Rightarrow 8k^2 - 7k + 1 = 0 \Rightarrow k = \frac{7 \pm \sqrt{17}}{16}$

b) $\lim_{x \rightarrow -1^-} [x^2 + (1-2k) \cdot x] = 2k; \lim_{x \rightarrow -1^+} (2kx^2 + x + 1) = 2k \Rightarrow 2k = 2k \Rightarrow \forall k \in \mathbb{R}$

15. a) $f(x) = \begin{cases} ax^2 + (3b+1) \cdot x & \text{se } x < 2 \\ (2a+1) \cdot x^2 + x - b & \text{se } x \geq 2 \end{cases};$ b) $f(x) = \begin{cases} a \cdot x^2 + b \cdot x + 1 & \text{se } x < 1 \\ b \cdot x^2 + 2x - a & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} [ax^2 + (3b+1)x] = 4a + 6b + 2; \lim_{x \rightarrow 2^+} [(2a+1)x^2 + x - b] = 8a + 6 - b \Rightarrow$

$\Rightarrow 8a + 6b + 2 = 4a + 6 - b \Rightarrow 4a + 7b - 4 = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} [ax^2 + bx + 1] = a + b + 1; \lim_{x \rightarrow 1^+} (bx^2 + 2x - a) = 2 \Rightarrow a + b + 1 = b + 2 - a \Rightarrow a = 1/2, \forall b \in \mathbb{R}$

16. a) $f(x) = \begin{cases} a \cdot x^2 + b \cdot x & \text{se } x < -1 \\ x^2 + a \cdot x - b & \text{se } x \geq -1 \end{cases};$ b) $f(x) = \begin{cases} kx + 2 & x \leq -2 \\ \frac{kx - h}{x - 1} & -2 < x < 0 \\ \sqrt{x+h} + \sqrt{kx} & x \geq 0 \end{cases}$

a) $\lim_{x \rightarrow -1^-} [ax^2 + bx] = a - b; \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 + ax - b) = 1 - a - b \Rightarrow a - b = 1 - a - b \Rightarrow a = 1/2, \forall b \in \mathbb{R};$

b) $\lim_{x \rightarrow -2^-} (kx + 2) = -2k + 2; \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{kx - h}{x - 1} = \frac{2k + h}{3} \Rightarrow -2k + 2 = \frac{2k + h}{3} \Rightarrow h = 6 - 8k;$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{kx - h}{x - 1} = h; \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x+h} + \sqrt{kx}) = h \Rightarrow h = h$$

$$17. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{k}{x+k} & x \leq 0 \\ \sin^{-1}(x) & 0 < x < 1 \\ \ln(kx) & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{k}{x+k} = 1; \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin^{-1}(x) = 0 \text{ discontinua in } x=0, \text{ sempre}$$

18. Dare l'esempio di una funzione continua soltanto per $x > 3, x \neq 5$. Giustificare la risposta.

$$f(x) = \frac{\ln(x-3)}{x-5}$$

19. Dare l'esempio di una funzione continua soltanto per $x \geq 3, x \neq 4$ Giustificare la risposta.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-3}}{x-4}$$

20. Esistono funzioni con infiniti punti di discontinuità? Giustificare la risposta.

Sì, p.e. $\tan(x)$

21. Esistono funzioni discontinue in ogni punto del loro dominio? Giustificare la risposta.

Sì, p.e. la funzione di Dirichlet

Calcolare i seguenti limiti

$$22. \quad \mathbf{a)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{x}\right); \mathbf{b)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \tan\left[\left(\frac{2}{3}\right)^x\right]; \mathbf{c)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \tan^{-1}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-x}\right]$$

$$\mathbf{a)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = [\ln(0^+)] = -\infty; \mathbf{b)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \tan\left[\left(\frac{2}{3}\right)^x\right] = [\tan(+\infty)] = +\infty;$$

$$\mathbf{c)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \tan^{-1}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-x}\right] = [\tan^{-1}(+\infty)] = \frac{\pi}{2}$$

$$23. \quad \mathbf{a)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right); \mathbf{b)} \lim_{x \rightarrow 0^-} \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right); \mathbf{c)} \lim_{x \rightarrow 2} \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\mathbf{a)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \tan^{-1}(0) = 0; \mathbf{b)} \lim_{x \rightarrow 0^-} \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = [\tan^{-1}(-\infty)] = -\frac{\pi}{2};$$

$$\mathbf{c)} \lim_{x \rightarrow 2} \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Teoremi sulle funzioni continue

Stabilire a quali delle seguenti funzioni si può applicare il teorema della permanenza del segno nel punto indicato

$$1. \quad \mathbf{a)} f(x) = x^2 + x + 1, x_0 = 1; \mathbf{b)} f(x) = x^2 + x, x_0 = 0; \mathbf{c)} f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}, x_0 = 1; \mathbf{d)} f(x) = \sqrt{x+1}, x_0 = -1$$

Il teorema afferma che se il limite di una funzione continua in un dato punto non è zero, allora vi è un intorno completo del punto in cui la funzione ha il segno del limite. a) $f(1) = 3 > 0$: sì; b) $f(0) = 0$: no;

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \infty$: no; d) $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{x+1} = 0$: no

$$2. \quad \mathbf{a)} f(x) = \sin(2x + 1), x_0 = 0; \mathbf{b)} f(x) = \tan(x - 2), x_0 = 2 + \pi/2; \mathbf{c)} f(x) = \ln(x^2 - 2), x_0 = \sqrt{3}$$

a) $f(0) = \sin(1) > 0$: sì; b) $f(2 + \pi/2) = \tan(0) = 0$: no; c) $f(\sqrt{3}) = 0$: no

3. a) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}, x_0 = 0$; b) $f(x) = \sin^{-1}(x+1), x_0 = 1$; c) $f(x) = \sqrt[3]{1-x^3}, x_0 = -2$

- a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 1, \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$: no, perché la funzione non è continua in 0; b) $f(x)$ non esiste in un intorno di 1; c) $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt[3]{1-x^3} = -\sqrt[3]{7}$: sì

Stabilire a quali delle seguenti funzioni si può applicare il teorema di Weierstrass, nell'intervallo indicato. Laddove possibile determinare minimo o massimo assoluti

4. a) $f(x) = x^2 + x + 1, x \in [1; +\infty)$; b) $f(x) = \lceil x \rceil, x \in [2; 5]$

Il teorema afferma: Se $f(x)$ è continua in $[a; b]$, allora essa ammette in $[a; b]$ minimo e massimo

- a) No perché l'intervallo non è finito; ma $x_m = 3$ dato che $x \geq 1 \Rightarrow x^2 + x + 1 \geq 1 + 1 + 1 = 3$; non vi è Max perché $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x + 1) = +\infty$; b) No perché la funzione non è continua per x intero; $x_m = 2; x_M = 5$

5. a) $f(x) = x + 2, x \in (1; 3)$; b) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, x \in [-2; 2]$

- a) No perché l'intervallo non è chiuso; no min e no Max perché $1 + 2 = 3 < f(x) < 3 + 2 = 5$;
b) Sì: min = $1/(2^2 + 1) = 1/5$; Max = 1

6. a) $f(x) = \sin\left(\frac{3x+1}{x-2}\right), x \in [1; 3]$; a) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}, x \in [2; 3]$

Non si può applicare il T. di Weierstrass perché la funzione non è definita per $x = 2 \in [1; 3]$. Però si ha $\sin\left(\frac{3x+1}{x-2}\right) = 1$

$$\begin{cases} \frac{3x+1}{x-2} = \frac{1}{2} + 2k\pi \\ 1 \leq x \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+1 = \frac{1}{2}x - \pi + 2k\pi x - 4k\pi \\ (3 - \frac{1}{2} - 2k\pi)x = -1 - \pi - 4k\pi \end{cases} \Rightarrow$$

$$x = \frac{-1 - \pi - 4k\pi}{3 - \frac{1}{2} - 2k\pi} \quad 1 \leq \frac{-1 - \pi - 4k\pi}{3 - \frac{1}{2} - 2k\pi} \leq 3 \quad \begin{cases} \frac{1}{2} - 3 + 2k\pi \leq 1 + \pi + 4k\pi \leq \frac{3}{2} - 9 + 5k\pi \\ \frac{1}{2} - 3 + 2k\pi \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2k\pi \geq -\frac{\pi}{2} - 4 \\ 2k\pi > 3 - \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} k \geq \frac{\pi}{4} - 2 \\ k > \frac{3}{2\pi} - \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow k > \frac{3}{2\pi} - \frac{1}{4} \geq 1$$

$$a) \begin{cases} 2k\pi \geq 10 - \frac{\pi}{2} \\ k > \frac{3}{2\pi} - \frac{1}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} k \geq \frac{5 - \pi}{4} \\ k > \frac{3}{2\pi} - \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow k \geq \frac{5 - \pi}{4} = ④$$

b) Sì: $2 \leq x \leq 3 \Rightarrow 4 \leq x^2 \leq 9 \Rightarrow 3 \leq x^2 - 1 \leq 8 \Rightarrow \frac{1}{8} \leq \frac{1}{x^2 - 1} \leq \frac{1}{3}$

7. a) $f(x) = \frac{x+2}{x^2 - 4}, x \in [1; 3]$; b) $f(x) = \frac{x+2}{x^2 - 4}, x \in [3; 5]$

- a) No perché non è continua per $x = 2$: non ha minimo né massimo: $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty; \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$;

b) Sì: $f(x) = \frac{1}{x-2}; 3 \leq x \leq 5 \Rightarrow 1 \leq x-2 \leq 3 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{x-2} \leq 1$

8. a) $f(x) = \frac{x+2}{x^2 - 4}, x \in [-3; -1]$; b) $f(x) = \sin^{-1}(2x+1), x \in [-1; 0]$

- a) No, non è continua in $x = -2$;

$$f(x) = \frac{1}{x-2}, x \neq -2; \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\frac{1}{4}; -3 \leq x \leq -1 \Rightarrow -5 \leq x-2 \leq -3 \Rightarrow -\frac{1}{3} \leq \frac{1}{x-2} \leq -\frac{1}{5};$$

- b) Sì: $-1 \leq x \leq 0 \Rightarrow -1 = -2 + 1 \leq 2x + 1 \leq 0 + 1 = 1 \Rightarrow \sin^{-1}(-1) = -\pi/2 \leq \sin^{-1}(2x+1) \leq \sin^{-1}(1) = \pi/2$

Stabilire a quali delle seguenti funzioni si può applicare il teorema di esistenza degli zeri, nell'intervallo indicato. Per quelle per le quali non è possibile, dire se però si annullano nel dato intervallo

9. a) $f(x) = x^2 + x, x \in [-1; 1]$; b) $f(x) = \lfloor x+2 \rfloor, x \in [0; 5]$

- Il teorema afferma che la $f(x)$ deve essere continua in $[a; b]$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora esiste $a < c < b$: $f(c) = 0$.

- a) No: $f(-1) = 0$, quindi $x_0 = -1$; b) No: non è continua nei valori interi. Non si annulla perché i valori vanno da $\lfloor 0+2 \rfloor = 2$ a $\lfloor 5+2 \rfloor = 7$

10. a) $f(x) = x^3 + 2x - 1$, $x \in [-2; 2]$; b) $f(x) = e^{2x+1}$, $x \in [-5000; 7000]$

a) Sì; b) No: la funzione è sempre positiva, quindi non ha neanche valori in cui si annulla

11. a) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$, $x \in [-k; k]$, $k \neq 0$; b) $f(x) = \frac{x+1}{x^2 - 1}$, $x \in [-1; 2]$

a) No perché è una funzione pari che ha perciò gli stessi valori agli estremi di intervalli simmetrici. Non si annulla perché il reciproco di una quantità non nulla non è mai zero; b) non è continua in $x = \pm 1$; e per $x \neq -1$, $f(x) = 1/(x-1)$ che non si annulla mai

12. a) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, $x \in [-3; 3]$; b) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, $x \in [-1; 1]$

a) Non è continua in $x = 2$; ma per $x \neq 2$, $f(x) = x + 2$ che si annulla per $x = -2$;

b) No: $f(-1) = 1$, $f(1) = 3$; Non si annulla perché $f(x) = x + 2$ che va appunto da 1 a 3

13. a) $f(x) = (x+1)^{x-1}$, $x \in [1; 2]$; b) $f(x) = (x+1)^{x-1}$, $x \in [-1; 1]$

a) No gli esponenziali se esistono sono sempre positivi; b) Non è neanche continua per $x = -1$

14. a) $f(x) = \log_2(x+1)$, $x \in [-1/2; 1]$; b) $f(x) = \log_{x+1}(2)$, $x \in [-1/2; 1]$

a) Sì: $\log_2(x+1) = 0 \Rightarrow x+1 = 1 \Rightarrow x = 0$; b) Non è continua per $x = 0$; Non si annulla mai, dato che l'argomento è costante e vale 2

Determinare una soluzione approssimata al primo decimale delle equazioni seguenti

15. a) $3x^3 - x^2 + x - 4 = 0$; b) $3x^3 + x^2 + 3x - 4 = 0$

*3x³-x²+x-4=0 tento di risolvere con il T. di Ruffini.
se che le radici del vettore possono essere i divisori
del termine noto, cioè ±1, ±2, ±4. Poco
 $f(1) = -1 < 0$, $f(-1) = -9 < 0$, $f(2) = 18 > 0$, $f(-2) < 0$ e $f(-4) < 0$ e $f(4) < 0$.
Non posso usare Ruffini, per ho trovato l'intervalllo
[1; 2] a cui posso applicare il T. di esiste alle仁
perché $f(1) < 0$ e $f(2) > 0$, posso di applicare il metodo di
bisezione, dato che $|f(1)| << |f(2)|$ solo un vettore vicino a 1.
p.e. 1,2; $f(1,2) = 0,944 > 0 \Rightarrow$ $x_0 \in (1; 1,2)$
poniamo $f(1,1) = -0,117 < 0 \Rightarrow$ $x_0 \in (1,1; 1,2)$. Soluzione
della prima cifra decimale di $x_0 \approx 1,1$.*

a)

b) $3 \cdot 0^3 + 0^2 + 3 \cdot 0 - 4 = -4 < 0$; $3 \cdot 1^3 + 1^2 + 3 \cdot 1 - 4 = 3 > 0 \Rightarrow 0 < x_0 < 1 \Rightarrow 3 \cdot 0,5^3 + 0,5^2 + 3 \cdot 0,5 - 4 = -1,875 < 0 \Rightarrow 0,5 < x_0 < 1 \Rightarrow 3 \cdot 0,75^3 + 0,75^2 + 3 \cdot 0,75 - 4 \approx 0,078 > 0 \Rightarrow 0,5 < x_0 < 0,75 \Rightarrow 0,6 < x_0 < 0,75 \Rightarrow 3 \cdot 0,7^3 + 0,7^2 + 3 \cdot 0,7 - 4 \approx -0,38 < 0 \Rightarrow x_0 \approx 0,7$

16. a) $2x^3 + 4x^2 + 3x - 4 = 0$; b) $2x^3 - 4x^2 + 3x - 5 = 0$

a) $2 \cdot 0^3 + 4 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 - 4 = -4 < 0$; $2 \cdot 1^3 + 4 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 4 = 5 > 0 \Rightarrow 0 < x_0 < 1 \Rightarrow 2 \cdot 0,5^3 + 4 \cdot 0,5^2 + 3 \cdot 0,5 - 4 = -1,25 < 0 \Rightarrow 0,5 < x_0 < 1 \Rightarrow 2 \cdot 0,7^3 + 4 \cdot 0,7^2 + 3 \cdot 0,7 - 4 = 0,746 > 0 \Rightarrow 0,5 < x_0 < 0,7 \Rightarrow x \approx 0,6$;

b) $2 \cdot 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 5 = -4 < 0$; $2 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 5 = 1 > 0 \Rightarrow 1 < x_0 < 2$ $1,8 < x_0 < 2 \Rightarrow 2 \cdot 1,9^3 - 4 \cdot 1,9^2 + 3 \cdot 1,9 - 5 = -0,896 < -0,022 \Rightarrow x \approx 1,9$

17. a) $4x^3 + x^2 - 3x - 5 = 0$; b) $5x^3 - 7x^2 - x - 5 = 0$

a) $4 \cdot 1^3 + 1^2 - 3 \cdot 1 - 5 = -3 < 0$; $4 \cdot 2^3 + 2^2 - 3 \cdot 2 - 5 = 25 > 0 \Rightarrow 1 < x_0 < 2 \Rightarrow 4 \cdot 1,2^3 + 1,2^2 - 3 \cdot 1,2 - 5 \approx -0,25 < 0 \Rightarrow 1 < x_0 < 1,2 \Rightarrow 4 \cdot 1,1^3 + 1,1^2 - 3 \cdot 1,1 - 5 \approx -1,8 < 0 \Rightarrow x \approx 1,2$

b) $5 \cdot 1^3 - 7 \cdot 1^2 - 1 - 5 = -8 < 0$; $5 \cdot 2^3 - 7 \cdot 2^2 - 2 - 5 = 5 > 0 \Rightarrow 1 < x_0 < 2 \Rightarrow 5 \cdot 1,6^3 - 7 \cdot 1,6^2 - 1,6 - 5 \approx -4 > 0 \Rightarrow 1,6 < x_0 < 2 \Rightarrow 5 \cdot 1,8^3 - 7 \cdot 1,8^2 - 1,8 - 5 \approx -0,3 < 0 \Rightarrow 1,8 < x_0 < 2 \Rightarrow 5 \cdot 1,9^3 - 7 \cdot 1,9^2 - 1,9 - 5 \approx 2,2 > 0 \Rightarrow x \approx 1,8$

18. a) $x^4 - x^2 - x - 5 = 0$; b) $x^4 + x^2 - 2x - 1 = 0$

a) $1^4 - 1^2 - 1 - 5 = -6 < 0$, $2^4 - 2^2 - 2 - 5 = 5 > 0 \Rightarrow 1 < x_0 < 2 \Rightarrow 1,5^4 - 1,5^2 - 1,5 - 5 \approx -3,7 < 0 \Rightarrow 1,5 < x_0 < 2 \Rightarrow 1,7^4 - 1,7^2 - 1,7 - 5 \approx -1,2 < 0 \Rightarrow 1,7 < x_0 < 2 \Rightarrow 1,8^4 - 1,8^2 - 1,8 - 5 \approx 0,45 > 0 \Rightarrow x \approx 1,7$

b) $(-1)^4 + (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 1 = 3 > 0$, $0^4 + 0^2 - 2 \cdot 0 - 1 = -1 < 0 \Rightarrow -1 < x_0 < 0 \Rightarrow (-0,5)^4 + (-0,5)^2 - 2 \cdot (-0,5) - 1 = 0$

- 0,5) - 1 ≈ 0,3 > 0 ⇒ -1 < x_0 < -0,5 ⇒ $(-0,4)^4 + (-0,4)^2 - 2 \cdot (-0,4) - 1 \approx -0,01 < 0 \Rightarrow x \approx -0,4$
19. a) $x^5 + x^3 - 1 = 0$; b) $x^5 - x^3 - x - 2 = 0$
- a) $0^5 + 0^3 - 1 = -1 < 0$, $1^5 + 1^3 - 1 = 1 > 0 \Rightarrow 0 < x_0 < 1 \Rightarrow 0,5^5 + 0,5^3 - 1 \approx -0,84 < 0 \Rightarrow 0,5 < x_0 < 1 \Rightarrow 0,7^5 + 0,7^3 - 1 \approx -0,5 < 0 \Rightarrow 0,7 < x_0 < 1 \Rightarrow 0,8^5 + 0,8^3 - 1 \approx -0,2 < 0 \Rightarrow x \approx 0,8$
- b) $1^5 - 1^3 - 1 - 2 = -3 < 0$, $2^5 - 2^3 - 2 - 2 = 20 > 0 \Rightarrow 1 < x_0 < 2 \Rightarrow 1,5^5 - 1,5^3 - 1,5 - 2 \approx 0,7 > 0 \Rightarrow 1 < x_0 < 1,5 \Rightarrow 1,4^5 - 1,4^3 - 1,4 - 2 \approx -0,8 < 0 \Rightarrow x \approx 1,4$
20. a) $x - \sin(x - 1) = 0$; b) $x + \ln(x + 2) = 0$; c) $x + 2 - e^x = 0$
- $x - \sin(x - 1) = 0$; $f(0) = 0 - \sin(-1) \approx 0,84 > 0$
- $f(1) = 1 - \sin(0) = 1 \geq 0$; $f(2) = 2 - \sin(1) \geq 0$; $f(x_0) \geq 0 \forall x_0 \geq 1$
- $f(-1) = -1 - \sin(-2) \approx -0,09 < 0$. $x_0 - \sin(x_0 - 1) = 0$,
- $x_0 \in (-1; 0) \Rightarrow x_0 \approx 0$. A. Dato $f(-1) \approx 0$ cerca x_0 nella vicina di -1, p.e. $x_0 = -0,9 \Rightarrow f(-0,9) \approx 0,05 > 0 \Rightarrow$
- $x_0 \in (-1; -0,9) \Rightarrow x_0 \approx -0,9$
- Se regole le 2° appr decimale continua, perde $f(-0,9)$ e -
guad zero, circa p.e. $x_0 = -0,91 \Rightarrow f(-0,91) \approx 0,0370 \Rightarrow$
- $x_0 \in (-1; -0,91)$; $x_0 = -0,93 \Rightarrow f(-0,93) \approx 0,00670$; $x_0 \in (-1; -0,93)$
- $x_0 = -0,95$; $f(-0,95) = -0,02 < 0 \Rightarrow$ mette $(-0,95; -0,93)$; $x_0 = -0,94$; $f(-0,94) < 0$
- a) $x_0 \in (-0,94; -0,93) \Rightarrow x_0 \approx -0,93$.
- b) $0 + \ln(0 + 2) \approx 0,7$; $-1 + \ln(-1 + 2) = -1 < 0 \Rightarrow -1 < x_0 < 0 \Rightarrow -0,5 + \ln(-0,5 + 2) \approx -0,01 < 0 \Rightarrow -0,5 < x_0 < 0 \Rightarrow -0,4 + \ln(-0,4 + 2) \approx 0,07 > 0 \Rightarrow x \approx -0,4$
- c) $1 + 2 - e^1 \approx 0,3 > 0$, $2 + 2 - e^2 \approx -3,3 < 0 \Rightarrow 1 < x_0 < 2 \Rightarrow 1,1 + 2 - e^{1,1} \approx 0,1 > 0 \Rightarrow x \approx 1,1$
21. a) $\sin(x) = e^x$; b) $\sin(x) = \ln(x)$; c) $e^x + \ln(x) - 4 = 0$
- a) $\sin(-3) = e^{-3} \approx -0,2 < 0$, $\sin(-4) = e^{-4} \approx 0,7 > 0 \Rightarrow -4 < x_0 < -3 \Rightarrow \sin(-3,1) = e^{-3,1} \approx -0,09 < 0 \Rightarrow x \approx -3,1$
- b) $\sin(2) - \ln(2) \approx 0,22 > 0$, $\sin(3) - \ln(3) \approx -0,96 < 0 \Rightarrow 2 < x_0 < 3 \Rightarrow \sin(2,2) - \ln(2,2) \approx 0,02 > 0 \Rightarrow x \approx 2,2$
- c) $e^1 + \ln(1) - 4 \approx -1,3 < 0$, $e^2 + \ln(2) - 4 \approx 4,1 > 0 \Rightarrow 1 < x_0 < 2 \Rightarrow e^{1,2} + \ln(1,2) - 4 \approx -0,5 < 0 \Rightarrow 1,2 < x_0 < 2 \Rightarrow e^{1,3} + \ln(1,3) - 4 \approx -0,07 < 0 \Rightarrow x \approx 1,3$

I limiti notevoli

Calcolare i seguenti limiti, usando, laddove possibile, i limiti notevoli

1. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{3x}$; b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sin(x+2)}{x-2}$; c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x^2-4}$; d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x^2}$; e) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin^2(x-3)}{x-3}$;
- f) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-\sin(x-1)}{x-1}$
- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} \cdot \frac{2}{3} = 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$; b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sin(x+2)}{x-2} = \frac{\sin(0)}{-4} = 0$; c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{(x-2)} \cdot \frac{1}{x+2} = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$
- d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$; e) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{x-3} \cdot \sin(x-3) = \lim_{x \rightarrow 3} \sin(x-3) = 0$;
- f) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-\sin(x-1)}{x-1} = \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty$
2. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x \cdot \sin\left(\frac{3}{x}\right) \right]$; b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin(x^3+1)}{x+1}$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{\sin(7x)}$; d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(\sqrt{2}x)}{\tan^2(\sqrt{3}x)}$; e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{x}$

$\lim_{n \rightarrow 0} [x \cdot \sin\left(\frac{3}{n}\right)] = 0 \cdot ? \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3/x)}{x} = ?$
 Non è limite notevole. Lo stesso però calcolare il
 limite ed dire che $\lim_{x \rightarrow 0} [x \cdot \sin\left(\frac{3}{x}\right)] = 0$ perché
 $\sin\left(\frac{3}{x}\right)$ è limitata!
 Se invece usommo, magari moltiplichiamo, il limite resterebbe
 diverso: $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sin(3/n) \cdot 3}{3/x} = 3$ ma $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sin(3/n)}{3/x} \neq 1$
 Non è limite notevole!!!!

a)

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin(x^3+1)}{x+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin(x^3+1)}{x^3+1} \cdot \frac{x^3+1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1} =$$

b) $= 1 + 1 + 1 = 3$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{5x} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{7x}{\sin(7x)} = \frac{5}{7};$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(\sqrt{2}x)}{(\sqrt{2}x)^2} \cdot \frac{2x^2}{3x^2} \cdot \frac{(\sqrt{3}x)^2}{\tan^2(\sqrt{3}x)} = \frac{2}{3};$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

3. a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{\sin(x^2-1)}; \quad$ b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x^2-4)}{\sin(x+2)}; \quad$ c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x^2-4)}{\sin(x^3-8)}; \quad$ d) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sin(x^3-1)}{\sin(x^2-x-2)};$

e) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sin(x-5)}{\sin(x^2-x-20)}$

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} \cdot \frac{x-1}{x^2-1} \cdot \frac{x^2-1}{\sin(x^2-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1) \cdot (x+1)} = \frac{1}{2};$

b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sin(x^2-4)}{x^2-4} \cdot \frac{x^2-4}{x+2} \cdot \frac{x+2}{\sin(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-2) \cdot (x+2)}{x+2} = -4;$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x^2-4)}{x^2-4} \cdot \frac{x^2-4}{x^3-8} \cdot \frac{x^3-8}{\sin(x^3-8)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cdot (x+2)}{(x-2) \cdot (x^2+2x+4)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3};$

d) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sin(x^3-1)}{\sin(x^2-x-2)} = \left[\frac{\sin(-2)}{0^-} \right] = +\infty;$

e) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sin(x-5)}{x-5} \cdot \frac{x-5}{x^2-x-20} \cdot \frac{x^2-x-20}{\sin(x^2-x-20)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{(x-5) \cdot (x+4)} = \frac{1}{9}$

4. a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^3-2x+1)}{\sin(4x^2-3x-1)}; \quad$ b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin(2x^3+3x+5)}{\sin(x^2-4x-5)}; \quad$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2-2x-3)}{\sin(2x^2-7x+3)}; \quad$ d) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x)}{\sin(x+\pi)}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^3 - 2x + 1)}{x^3 - 2x + 1} \cdot \frac{4x^2 - 3x - 1}{\sin(4x^2 - 3x - 1)} \cdot \frac{x^3 - 2x + 1}{4x^2 - 3x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x + 1}{4x^2 - 3x - 1} =$$

a) $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot (x^2 + x - 1)}{(x-1) \cdot (4x+1)} = \frac{1+1-1}{4+1} = \frac{1}{5}$;

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin(2x^3 + 3x + 5)}{\sin(x^2 - 4x - 5)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin(2x^3 + 3x + 5)}{\sin(x^2 - 4x - 5)} \cdot \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 4x - 5} \cdot \frac{2x^3 + 3x + 5}{2x^3 + 3x + 5} = \\ & = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x^2 - 2x + 5)}{(x+1)(x-5)} = \frac{9}{-6} = -\frac{3}{2} \quad \begin{array}{r|rrr} -1 & 2 & 0 & 3 \\ & -2 & -2 & -5 \\ \hline & 2 & -2 & 0 \end{array} \end{aligned}$$

b)

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 - 2x - 3)}{\sin(2x^2 - 7x + 3)} = \frac{\sin(-3)}{\sin(3)} = \frac{-\sin(3)}{\sin(3)} = -1$; d) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x)}{-\sin(x)} = -1$

5. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(15\pi x)}{\sin(23\pi x)}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(17\pi/2 - x)}{\cos(25\pi/2 + x)}$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1}(x)}{x}$; d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^{-1}(x)}{x}$

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(15\pi x)}{15\pi x} \cdot \frac{23\pi x}{\sin(23\pi x)} \cdot \frac{15\cancel{\pi x}}{23\cancel{\pi x}} = \frac{15}{23}$;

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(17\pi/2 - x)}{\cos(25\pi/2 + x)} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{17\pi}{2} + x)}{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{25\pi}{2} - x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x - 8\pi)}{\sin(-x)} = \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\sin(-x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{-\sin(x)} = -1 \end{aligned}$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1}(x)}{x} = 1$; d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^{-1}(x)}{x} = 1$;

6. a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos^{-1}(x)}{x}$; b) $\lim_{x \rightarrow -3} (x+3) \cdot \csc(x+3)$; c) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(\pi - x)}{\sin(x)}$

a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos^{-1}(x)}{x} = \left[\frac{\pi/2}{0^-} \right] = -\infty$; b) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{\sin(x+3)} = 1$; c) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x)}{\sin(x)} = 1$

Calcolare i seguenti limiti, usando, laddove possibile, i limiti notevoli. Può essere utile conoscere la formula di prostaferesi per la tangente: $\tan(x) \pm \tan(y) = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos(x) \cdot \cos(y)}$

7. a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1}$ (si ha: $\sin(x) = \sin(\pi - x)$); b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(\pi x/2)}{x-2}$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-5 \cdot \sin(x^2) - 3x}{3 \cdot \sin(5x) + 2x}$

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi - \pi x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin[\pi(1-x)]}{-\pi(1-x)} \cdot \pi = -\pi$;

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(\pi - \pi x/2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin[\pi/2 \cdot (2-x)]}{\pi/2 \cdot (2-x)} \cdot \frac{-\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$;

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-5 \cdot \frac{\sin(x^2)}{x^2} \cdot x^2 - 3x}{3 \cdot \frac{\sin(5x)}{5x} \cdot 5x + 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-5x^2 - 3x}{15x + 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-5x - 3}{17} = -\frac{3}{17}$

8. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \sin(2x) - 4x}{7 \cdot \sin(9x) + 2x}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-7 \cdot \sin(9x) + 3}{\sin(6x) + 4x^2}$; c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(x)}{x^3}$; d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x-1)}{\sin(x^2 - 1)}$

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \frac{\sin(2x)}{2x} \cdot 2x - 4x}{7 \cdot \frac{\sin(9x)}{9x} \cdot 9x + 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - 4x}{63x + 2x} = \frac{2}{65}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{4x^2} = +\infty$;
- c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \cdot \frac{1}{x} = \left[\frac{1}{2} \cdot (+\infty) \right] = +\infty$; d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x-1)}{\sin(x^2-1)} = \frac{\sin^2(-1)}{\sin(-1)} = \sin(-1) = -\sin(1)$
9. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cdot \sin(x) - 3x}{-2 \cdot \tan(9x) + 5x}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos(x)}}{x}$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos(x)}}{x^2}$; d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cdot \sin(x^2) - x^2}{2 \cdot \sin^2(5x) + 2x^2}$
- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cdot \frac{\sin(x)}{x} \cdot x - 3x}{-2 \cdot \frac{\tan(9x)}{9x} \cdot 9x + 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x - 3x}{-18x + 5x} = -\frac{1}{13}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{x^2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$;
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos(x)}}{x^2} \cdot \frac{1 + \sqrt{\cos(x)}}{1 + \sqrt{\cos(x)}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{\cos(x)}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$;
- d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cdot \frac{\sin(x^2)}{x^2} \cdot x^2 - x^2}{2 \cdot \frac{\sin^2(5x)}{25x^2} \cdot 25x^2 + 2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 - x^2}{50x^2 + 2x^2} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$
10. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8 \cdot \sin(2x) - 3x}{-7 \cdot \sin(5x) + 1}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \sin^{-1}(4x) - x}{\sin(6x) + x^3}$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3(x) - 5x}{5 \cdot \sin(3x) + 7x}$; d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \cos(x^2 - 4)}{\sin(x - 2)}$
- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8 \cdot \sin(2x) - 3x}{-7 \cdot \sin(5x) + 1} = \frac{0}{0+1} = 0$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \frac{\sin^{-1}(4x)}{4x} \cdot 4x - x}{\frac{\sin(6x)}{6x} \cdot 6x + x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12x - x}{6x + x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{11}{6+x^2} = \frac{11}{6}$;
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin^3(x)}{x^3} \cdot x^3 - 5x}{5 \cdot \frac{\sin(3x)}{3x} \cdot 3x + 7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 5x}{15x + 7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 5}{22} = -\frac{5}{22}$;
- d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \cos(x^2 - 4)}{x^2 - 4} \cdot \frac{x - 2}{\sin(x - 2)} \cdot (x + 2) = 0 \cdot 1 \cdot 4 = 0$
11. a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1 - \cos^2(x^2 - 9)}{\sin(2x - 6)}$; b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin(2x^2 - 2)}{1 - \cos^2(x - 1)}$; c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \cos^2(x - 2)}{\sin(3x^2 - 4x - 4)}$; d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin^2\left(\frac{3x-1}{2x^2-3}\right)}{\sin\left(\frac{1}{x^3-1}\right)}$
- Handwritten solution for part a):*
- $$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1 - \cos^2(x^2 - 9)}{\sin(2x - 6)} = \left[\frac{0}{0} \right] \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin^2(x^2 - 9)}{\sin(2x - 6)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin^2(x^2 - 9)}{(x^2 - 9)^2} \cdot [x^2 - 9]^2 \cdot \frac{2x - 6}{\sin(2x - 6)} \cdot \frac{1}{2x - 6} = \\ & \quad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 9)^2}{2(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)^2(x+3)^2}{2(x-3)} = 0 \end{aligned}$$
- a)

b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin(2x^2 - 2)}{2x^2 - 2} \cdot \frac{x-1}{1-\cos(x-1)} \cdot \frac{2x^2 - 2}{(x-1) \cdot [1+\cos(x-1)]} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{1-\cos(x-1)} \cdot \frac{\cancel{x} \cdot (\cancel{x-1}) \cdot (x+1)}{\cancel{(x-1)} \cdot 2} = [+\infty \cdot 2] = +\infty;$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1-\cos^2(x-2)}{x-2} \cdot \frac{3x^2-4x-4}{\sin(3x^2-4x-4)} \cdot \frac{x-2}{3x^2-4x-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1-\cos^2(x-2)}{x-2} \cdot \frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)} \cdot (3x+2)} = 0 \cdot \frac{1}{8} = 0;$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin^2\left(\frac{3x-1}{2x^2-3}\right)}{\sin\left(\frac{1}{x^3-1}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin^2\left(\frac{3}{2x}\right)}{\sin\left(\frac{1}{x^3}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin^2\left(\frac{3}{2x}\right)}{\frac{3}{2x}} \cdot \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{x^3}\right)} \cdot \frac{3}{2\cancel{x}} \cdot x^{\cancel{3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} 3x^2 = +\infty;$

12. a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(2x-1)-\sin(x)}{x-1}$ (Applicare le formule di prostaferesi); b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x)-\sin(\pi/3)}{3x-\pi}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(2x-1)-\sin(x)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sin\left(\frac{2x-1-x}{2}\right)\cos\left(\frac{2x+x}{2}\right)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sin\left(\frac{x-1}{2}\right)\cos\left(\frac{3x-1}{2}\right)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin\left(\frac{x-1}{2}\right)}{\frac{x-1}{2}} \cdot \cos\left(\frac{3x-1}{2}\right) = \cos\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

a)

$$b) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2\sin\left(\frac{x-\pi/3}{2}\right)\cos\left(\frac{x+\pi/3}{2}\right)}{3x-\pi} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(\frac{3x-\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\frac{3x-\pi}{6} \cdot 3} = \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

13. a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(3x)-\cos(4x)}{x^3}$; b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cos(x)-\cos(2)}{x-2}$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(5x+\pi)+\cos(x)}{x}$

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2\sin\left(\frac{3x+4x}{2}\right)\sin\left(\frac{3x-4x}{2}\right)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin\left(\frac{7x}{2}\right)}{\frac{7}{2}x} \cdot 7 \cdot \frac{\sin\left(-\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{7}{2x} = +\infty;$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2\sin\left(\frac{x+2}{2}\right)\sin\left(\frac{x-2}{2}\right)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin\left(\frac{x-2}{2}\right)}{\frac{x-2}{2}} \cdot [-\sin(2)] = \sin(-2);$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos\left(\frac{5x+\pi+x}{2}\right)\cos\left(\frac{5x+\pi-x}{2}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2[-\sin(3x)][-\sin(2x)]}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} \cdot 4\sin(3x) = 0$$

14. a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \cdot \sin(x) - \sqrt{3}}{\cos(x) - \frac{1}{2}}$; b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \cdot \sin(x) - \sqrt{2}}{\tan(x) - 1}$; c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x) + \sqrt{3}/2}{2\cos(x) - 1}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2\sin(x) - \sqrt{3}}{\cos(x) - \frac{1}{2}} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2[\sin(x) - \sqrt{3}/2]}{\cos(x) - \frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2[\sin(x) - \sin(\pi/3)]}{\cos(x) - \cos(\pi/3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \cdot \cancel{2} \sin\left(\frac{x-\pi/3}{2}\right) \cos\left(\frac{x+\pi/3}{2}\right)}{-\cancel{2} \sin\left(\frac{x-\pi/3}{2}\right) \sin\left(\frac{x+\pi/3}{2}\right)} = -2 \frac{\cos(\pi/3)}{\sin(\pi/3)} = -2 \cos(\pi/3) = -2 \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

a)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} 2 \cdot \frac{\sin(x) - \sqrt{2}/2}{\tan(x) - \tan(\pi/4)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} 2 \cdot \frac{\sin(x) - \sin(\pi/4)}{\tan(x) - \tan(\pi/4)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{4 \cdot \sin\left(\frac{x-\pi/4}{2}\right) \cos\left(\frac{x+\pi/4}{2}\right)}{\frac{\sin(x-\pi/4)}{\cos(x)\cos(\pi/4)}} =$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(\frac{x-\pi/4}{2}\right)}{\frac{x-\pi/4}{2}} \cdot \frac{x-\pi/4}{\sin(x-\pi/4)} \cdot 2\cos^3(\pi/4) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = 2 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x) + \sin(\pi/3)}{2 \cdot [\cos(x) - \cos(\pi/3)]} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cancel{\sin\left(\frac{x+\pi/3}{2}\right)} \cos\left(\frac{x-\pi/3}{2}\right)}{\cancel{4^2} \sin\left(\frac{x-\pi/3}{2}\right) \cancel{\sin\left(\frac{x+\pi/3}{2}\right)}} = -\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cot\left(\frac{x-\pi/3}{2}\right)}{2} = -\frac{-\sqrt{3}}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

15. a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin(x) - 1/2}{2 \cdot \cos(x) - \sqrt{3}}$; b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin(x)}{\cot(x)}$; c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x) - \sqrt{2}/2}{\tan(x) - 1}$; d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x+2) - \sin(3)}{\cos(8-x) - \cos(7)}$

$$a) a) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin(x) - \sin(\pi/6)}{2 \cdot [\cos(x) - \cos(\pi/6)]} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\cancel{\sin\left(\frac{x-\pi/6}{2}\right)} \cos\left(\frac{x+\pi/6}{2}\right)}{\cancel{4^2} \sin\left(\frac{x-\pi/6}{2}\right) \sin\left(\frac{x+\pi/6}{2}\right)} = -\frac{1}{2} \cot\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\pi/2) - \sin(x)}{\cot(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2\sin\left(\frac{\pi/2-x}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi/2+x}{2}\right) \cdot \sin(x)}{\cos(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2\sin\left(\frac{\pi/2-x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} \cos\left(\frac{\pi/2+x}{2}\right) =$$

b)

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi/2-x}{2}\right)}{\frac{\pi/2-x}{2}} \cdot \frac{\frac{\pi}{2}-x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} \cdot \cos\left(\frac{\pi/2+x}{2}\right) = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x) - \cos(\pi/4)}{\tan(x) - \tan(\pi/4)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-2\sin\left(\frac{x-\pi/4}{2}\right) \cos\left(\frac{x+\pi/4}{2}\right)}{\frac{\sin(x-\pi/4)}{\cos(x)\cos(\pi/4)}} =$$

c)

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-2\sin\left(\frac{x-\pi/4}{2}\right) \cos\left(\frac{x+\pi/4}{2}\right) \cos^2(\pi/4)}{2\sin\left(\frac{x-\pi/4}{2}\right) \cos\left(\frac{x-\pi/4}{2}\right)} = \frac{-\cos^3(\pi/4)}{\cos(0)} = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x+2) - \sin(3)}{\cos(8-x) - \cos(7)} = \frac{0}{0} \\ & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{\sin(x+2)} - \cancel{\sin(3)}}{\cancel{\cos(8-x)} - \cancel{\cos(7)}} = \frac{\cancel{\sin(x+2)}}{\cancel{\cos(8-x)}} \cdot \frac{1}{\cancel{\cos(7)}} \\ & = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot \sin\left(\frac{x+2-3}{2}\right) \cos\left(\frac{x+2+3}{2}\right)}{-x \cdot \sin\left(\frac{8-x-7}{2}\right) \sin\left(\frac{8-x+7}{2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{\sin\left(\frac{x-1}{2}\right)} \cos\left(\frac{x+5}{2}\right)}{\cancel{\sin\left(\frac{15-x}{2}\right)} \sin\left(\frac{15-x}{2}\right)} = \end{aligned}$$

d) $= \frac{\cos(3)}{\sin(7)}$

16. a) $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{\tan(x)+1}{2 \cdot \sin(x)+\sqrt{2}}$; b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)-\cos(x)}{4x-\pi}$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin(x)}-\sqrt{1-\sin(x)}}{x+\sin(x)}$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan(x)+1}{2 \cdot \sin(x)+\sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan(x)+\tan(\pi/4)}{2 \cdot [\sin(x)+\sin(\pi/4)]} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sin(x+\pi/4)}{\cos(x)\cos(\pi/4)}}{4 \cdot \sin\left(\frac{x+\pi/4}{2}\right) \cos\left(\frac{x-\pi/4}{2}\right)} =$$

a)

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cancel{2} \sin\left(\frac{x+\pi/4}{2}\right) \cos\left(\frac{x+\pi/4}{2}\right)}{\cancel{4^2} \sin\left(\frac{x+\pi/4}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\cos^3(\pi/4)} = \frac{1}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)-\sin(\pi/2-x)}{4x-\pi} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2\sin\left(\frac{x-\pi/2+x}{2}\right) \cos\left(\frac{x+\pi/2-x}{2}\right)}{4x-\pi} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2\sin\left(\frac{4x-\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{4x-\pi} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(\frac{4x-\pi}{4}\right) \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{4x-\pi}{4} \cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin(x)}-\sqrt{1-\sin(x)}}{x+\sin(x)} \cdot \frac{\sqrt{1+\sin(x)}+\sqrt{1-\sin(x)}}{\sqrt{1+\sin(x)}+\sqrt{1-\sin(x)}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+\sin(x)-1-\sin(x)}{x+\sin(x)} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{2} \sin(x)}{x+\sin(x)} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)/x}{1+\sin(x)/x} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

17. a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sqrt{\sin(x)}}{\cos(x)}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)-1}{3x^2+4x^3}$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2x+1}\right)$; d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(2-x)-\cos(\pi/2-x+2)}{1-\cos^2(x^2-4)}$

a)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sqrt{\sin(x)}}{\cos(x)} \cdot \frac{1+\sqrt{\sin(x)}}{1+\sqrt{\sin(x)}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin(x)}{\cos(x)} \cdot \frac{1}{1+1} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin(x)}{2\cos(x)} \cdot \frac{1+\sin(x)}{1+\sin(x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2(x)}{2\cos(x)} \cdot \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(x)}{4\cos(x)} = 0$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)-1}{3x^2+4x^3} \cdot \frac{\cos(x)+1}{\cos(x)+1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2(x)-1}{3x^2+4x^3} \cdot \frac{1}{1+1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2(x)}{6x^2+8x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2(x)/x^2}{6+8x} = -\frac{1}{6};$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2x+1}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2x+1}\right)}{\frac{\pi}{2x+1}} \cdot \frac{\pi}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi x}{2x+1} = \frac{\pi}{2};$$

d)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(2-x)-\sin(x-2)}{1-\cos^2(x^2-4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2\sin(x-2)}{\sin^2(x^2-4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2 \frac{\sin(x-2)}{x-2}}{\sin^2(x^2-4)} \cdot \frac{x-2}{(x-2)^2 \cdot (x+2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2}{16(x-2)} = \infty$$

18. Tre amici, Aldo, Berto e Carlo discutono sul valore di $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x}$, ecco le loro affermazioni.

Aldo: Il limite è notevole ed il risultato è 1. **Berto:** Il limite non esiste perché la funzione $\sin(x)$ è periodica. **Carlo:** Il limite è nullo perché $1/x$ è infinitesima e $\sin(x)$ pur essendo periodica è limitata. Uno solo dei tre ha ragione. Discutere ciascuna delle tre affermazioni spiegando perché

è corretta o errata.

Aldo ha torto perché non è limite notevole, dato che non è forma indeterminata 0/0; Berto ha torto perché il limite esiste e vale quanto dice Carlo

Calcolare i seguenti limiti, usando, laddove possibile, i limiti notevoli

19. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x}$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{3x}$; d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$; e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x/2}\right)^{x/2} \right]^2 = e^2$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right]^2 = e^2$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{5x} \right]^{3/5} = e^{3/5}$;

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{-x} \right]^{-1} = e^{-1}$; e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{-x} \right]^{\frac{\sqrt{x}}{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\sqrt{\frac{x}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\sqrt{\frac{1}{x}}} = e^0 = 1$

20. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^x$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x-1}$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x-2}\right)^x$; d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right)^{3x}$; e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{3x}\right)^{-5x}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}} \right]^{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\sqrt{x}} = +\infty$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x}{1 + \frac{1}{x}} = e$;

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x-2}\right)^{x-2} \right]^{\frac{x}{x-2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x}{x-2}} = e$; d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{3x} = +\infty$; e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{3/2x}\right)^{3/2x} \right]^{-5 \cdot \frac{2}{3}} = e^{-\frac{10}{3}}$

21. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{11x}\right)^{\frac{2}{3}x}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{7}{4x}\right)^{3x}$; c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{3}{8x}\right)^{-2x}$; d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{37}{5x^2}\right)^{2x}$; e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{17}{3x}\right)^{-\frac{1}{2}x^2}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{11/3x}\right)^{\frac{11}{3}x} \right]^{\frac{2}{11}} = e^{\frac{2}{11}}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-4/7x}\right)^{-4/7x} \right]^{3 \left(\frac{-7}{4} \right)} = e^{-\frac{21}{4}}$;

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-8/3x}\right)^{-8/3x} \right]^{\frac{3}{4}} = e^{\frac{3}{4}}$; d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-5/37x^2}\right)^{-5/37x^2} \right]^{2 \left(\frac{-37}{5x} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{74}{5x}} = e^0 = 1$;

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{3/17x}\right)^{3/17x} \right]^{-\frac{1}{2}x^{\frac{17}{3}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{17}{6}x} = +\infty$

22. a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(1 - \frac{x-2}{x+2}\right)^{\frac{2}{-3(x-2)}}$; b) $\lim_{x \rightarrow -1^-} \left(1 - \frac{x^3+1}{x-1}\right)^{\frac{3x}{x^2-1}}$; c) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \left(1 + \frac{13}{2x-5}\right)^{\frac{-5x}{x-3}}$; d) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(1 + \frac{x^2-4}{x^2-2}\right)^{\frac{x}{x^3-8}}$

a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left[\left(1 + \frac{1}{-\frac{x-2}{x+2}}\right)^{\frac{x+2}{x-2}} \right]^{\frac{2}{-3(x-2)}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} e^{\frac{2}{-3(x-2)}} = e^{\frac{1}{6}}$;

b) $\lim_{x \rightarrow -1^-} \left[\left(1 + \frac{1}{-\frac{x-1}{x^3+1}}\right)^{\frac{x-1}{x^2-1}} \right]^{\frac{-3x \cdot x^3+1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow -1^-} e^{\frac{-3x}{(x-1) \cdot (x^3+1)} \cdot \frac{(x+1) \cdot (x^2-x+1)}{x-1}} = e^{\frac{3 \cdot 1+1+1}{-2 \cdot -2}} = e^{\frac{9}{4}}$;

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 3^+} (1+13)^{\frac{-15}{x-3}} = 0; \text{ d) } \lim_{x \rightarrow 2^+} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x^2-2}{x^2-4}} \right)^{\frac{x^2-2}{x^2-4}} \right]^{\frac{x^2-4}{x^3-8}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} e^{\frac{\frac{1}{x^2-2}(x^2-2)}{(x^2-2)(x^2+2x+4)} \cdot \frac{(x-2)(x+2)}{x}} = e^{\frac{4}{12}} = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}$$

23. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{\sin(x)}{x+2} \right)^{\pi/x};$ b) $\lim_{x \rightarrow 4} \left(1 + \frac{x^2-16}{7x^2-1} \right)^{\frac{3}{5x-20}}$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{2}{x}}$; d) $\lim_{x \rightarrow 3} (2x-5)^{\frac{4}{x-3}}$; e) $\lim_{x \rightarrow -2} (x^3+x^2-x+3)^{\frac{x+3}{x+2}}$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x+2}{\sin(x)}} \right)^{\frac{\sin(x)}{\sin(x)}} \right]^{\frac{\pi}{x+2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{\pi}{x+2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{\pi}{x+2}} = e^{-\frac{\pi}{2}};$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 4} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{7x^2-1}{x^2-16}} \right)^{\frac{7x^2-1}{x^2-16}} \right]^{\frac{3}{5x-20}} = \lim_{x \rightarrow 4} e^{\frac{3}{5 \cdot (x-4)} \cdot \frac{(x-4)(x+4)}{7x^2-1}} = e^{\frac{3}{5} \cdot \frac{8}{11^3}} = e^{185};$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{x}} \right)^{\frac{1}{x}} \right]^2 = e^2; \text{ d) } \lim_{x \rightarrow 3} \left[1 + (2x-6) \right]^{\frac{4}{x-3}} = \lim_{x \rightarrow 3} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{2x-6}} \right)^{\frac{1}{2x-6}} \right]^{\frac{4(2x-6)}{x-3}} = \lim_{x \rightarrow 3} e^{\frac{8}{x-3}} = e^8;$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow -2} \left[1 + (x^3+x^2-x+2) \right]^{\frac{x+3}{x+2}} = \lim_{x \rightarrow -2} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{x^3+x^2-x+2}} \right)^{\frac{1}{x^3+x^2-x+2}} \right]^{\frac{(x+3)(x^3+x^2-x+2)}{x+2}} = \lim_{x \rightarrow -2} e^{\frac{(x+3)(x+2)(x^2-x+1)}{x+2}} = e^7$$

Calcolare i seguenti limiti, usando, laddove possibile, i limiti notevoli

24. a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+1}{2x-1} \right)^{\frac{2x-1}{x+4}}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-3x+1}{x^2-x-2} \right)^{\frac{x^2+3}{5x}}$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^3-x+1}{3x^3+x^2} \right)^{\frac{7x^2+x}{x-2}}$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{2x} \right)^{\frac{2x}{x}} = \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4};$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-x-2}{x^2-x-2} + \frac{-2x+3}{x^2-x-2} \right)^{\frac{x^2+3}{5x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x^2-x-2}{-2x+3}} \right)^{\frac{x^2-x-2}{-2x+3}} \right]^{\frac{x^2+3}{5x} \cdot \frac{-2x+3}{x^2-x-2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{-2x^2}{5x}} = e^{-\frac{2}{5}};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^3+x^2}{3x^3+x^2} + \frac{-x^2-x+1}{3x^3+x^2} \right)^{\frac{7x^2+x}{x-2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{3x^3+x^2}{-x^2-x+1}} \right)^{\frac{3x^3+x^2}{-x^2-x+1}} \right]^{\frac{7x^2+x}{x-2} \cdot \frac{-x^2-x+1}{3x^3+x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{-7x^4}{3x^4}} = e^{-\frac{7}{3}}$$

25. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^2-x}{3x^2+x+3} \right)^{\frac{5x^3+1}{x^2+1}}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3-1}{x^3-x^2-2} \right)^{\frac{3x^2+x-3}{5x+2}}$; c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+\sin(x))^{\frac{3x-1}{x^3}}$

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^2}{3x^2} \right)^{\frac{5x^3}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{3} \right)^{5x} = +\infty;$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{x^3-x^2-2}{x^3-x^2-2} + \frac{x^2+1}{x^3-x^2-2} \right) \right]^{\frac{3x^2+x-3}{5x+2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x^3-x^2-2}{x^2+1}} \right)^{\frac{x^3-x^2-2}{x^2+1}} \right]^{\frac{3x^2+x-3}{5x+2} \cdot \frac{x^2+1}{x^3-x^2-2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{3x^4}{5x^4}} = e^{\frac{3}{5}};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{\sin(x)}} \right)^{\frac{1}{\sin(x)}} \right]^{\frac{3x-1}{x^3} \cdot \sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{3x-1}{x^2} \cdot \frac{\sin(x)}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{3x-1}{x^2}} = 0$$

26. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^2+1}{4x^2-3x+5} \right)^{\frac{3x^2+2x-1}{4x-3}}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{11x^2-3x+1}{11x^2+4x-3} \right)^{\frac{x^2+x+4}{5x+7}}$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} [\cos(x)]^{\frac{4x+1}{x^2}}$

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^2-3x+5}{4x^2-3x+5} + \frac{3x-4}{4x^2-3x+5} \right)^{\frac{3x^2+2x-1}{4x-3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{4x^2-3x+5}{3x-4}} \right)^{\frac{4x^2-3x+5}{3x-4}} \right]^{\frac{3x^2+2x-1}{4x-3} \cdot \frac{3x-4}{4x^2-3x+5}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{9x^4}{16x^4}} = e^{\frac{9}{16}};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{11x^2+4x-3}{11x^2+4x-3} + \frac{-7x+4}{11x^2+4x-3} \right)^{\frac{x^2+x+4}{5x+7}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{11x^2+4x-3}{-7x+4}} \right)^{\frac{11x^2+4x-3}{-7x+4}} \right]^{\frac{x^2+x+4}{5x+7} \cdot \frac{-7x+4}{11x^2+4x-3}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{-7x^4}{55x^4}} = e^{\frac{-7}{55}};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} [1+\cos(x)-1]^{\frac{4x+1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{\cos(x)-1}} \right)^{\frac{1}{\cos(x)-1}} \right]^{\frac{(4x+1)[\cos(x)-1]}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1-\cos(x)}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

27. a) $\lim_{x \rightarrow \pi} (1-\sin(x))^{\frac{x^2}{\tan(x)}}$; b) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2x^2-5}{x+1} \right)^{\frac{x+2}{x-2}}$; c) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{4x^2-x+1}{x+3} \right)^{\frac{5x-1}{x-1}}$; d) $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x^2+1}{x-7} \right)^{\frac{7x+1}{x+2}}$

$$a) \lim_{x \rightarrow \pi} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{-1}{\sin(x)}} \right)^{\frac{-1}{\sin(x)}} \right]^{\frac{-x^2}{\cos(x)}} = \lim_{x \rightarrow \pi} e^{\frac{-x^2}{\cos(x)}} = e^{\pi^2};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x+1}{x+1} + \frac{2x^2 - x - 6}{x+1} \right)^{\frac{x+2}{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x+1}{2x^2 - x - 6}} \right)^{\frac{x+1}{2x^2 - x - 6}} \right]^{\frac{x+2}{x-2} \cdot \frac{2x^2 - x - 6}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 2} e^{\frac{x+2}{x-2} \cdot \frac{(x+2)(2x+3)}{x+1}} = e^{\frac{4}{3}} = e^{\frac{28}{3}};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+3}{x+3} + \frac{4x^2 - 2x - 2}{x+3} \right)^{\frac{5x-1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x+3}{4x^2 - 2x - 2}} \right)^{\frac{x+3}{4x^2 - 2x - 2}} \right]^{\frac{5x-1}{x-1} \cdot \frac{4x^2 - 2x - 2}{x+3}} = \lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{5x-1}{x-1} \cdot \frac{(x+1)(4x+2)}{x+3}} = e^{\frac{46}{4}} = e^6;$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x^2 + 1}{x-7} \right)^{\frac{7x+1}{x+2}} = \left[\left(-\frac{5}{9} \right)^{\frac{-13}{0}} \right], \text{ il limite non ha senso perché la base è negativa}$$

28. a) $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x^2 + 1}{x+7} \right)^{\frac{7x+1}{x+2}}$; b) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{2x^2 + 1}{x+16} \right)^{\frac{2x+5}{x-3}}$; c) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{5x+2}{x^2 + 8} \right)^{\frac{x+1}{x-2}}$; d) $\lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{2x+1}{x-2} \right)^{\frac{4x+1}{x+3}}$; e) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin(x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}}$

$$a) \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x+7}{x+7} + \frac{x^2 - x - 6}{x+7} \right)^{\frac{7x+1}{x+2}} = \lim_{x \rightarrow -2} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x+7}{x^2 - x - 6}} \right)^{\frac{x+7}{x^2 - x - 6}} \right]^{\frac{7x+1}{x+2} \cdot \frac{x^2 - x - 6}{x+7}} = \lim_{x \rightarrow -2} e^{\frac{7x+1}{x+2} \cdot \frac{(x+2)(x-3)}{x+7}} = e^{\frac{-13(-5)}{5}} = e^{13};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x+16}{x+16} + \frac{2x^2 - x - 15}{x+16} \right)^{\frac{2x+5}{x-3}} = \lim_{x \rightarrow 3} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x+16}{2x^2 - x - 15}} \right)^{\frac{x+16}{2x^2 - x - 15}} \right]^{\frac{2x+5}{x-3} \cdot \frac{2x^2 - x - 15}{x+16}} = \lim_{x \rightarrow 3} e^{\frac{2x+5}{x-3} \cdot \frac{(x+3)(2x+5)}{x+16}} = e^{\frac{121}{19}};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 + 8}{x^2 + 8} + \frac{-x^2 + 5x - 6}{x^2 + 8} \right)^{\frac{x+1}{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x^2 + 8}{-x^2 + 5x - 6}} \right)^{\frac{x^2 + 8}{-x^2 + 5x - 6}} \right]^{\frac{x+1}{x-2} \cdot \frac{-x^2 + 5x - 6}{x^2 + 8}} = \lim_{x \rightarrow 2} e^{\frac{x+1}{x-2} \cdot \frac{(x-2)(-x+3)}{x^2 + 8}} = e^{\frac{3}{12}} = \sqrt[4]{e};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{x-2}{x-2} + \frac{x+3}{x-2} \right)^{\frac{4x+1}{x+3}} = \lim_{x \rightarrow -3} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x-2}{x+3}} \right)^{\frac{x-2}{x+3}} \right]^{\frac{4x+1}{x+3} \cdot \frac{x+3}{x-2}} = e^{\frac{-11}{-5}} = e^{\frac{11}{5}};$$

29. a) $\lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{x+1}{2x-4} \right)^{\frac{3x+1}{x-5}}$; b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} [1 - \cos(x)]^{\tan(x)}$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} [1 + \sin^2(2x)]^{\frac{x^2+1}{x}}$

$$a) \lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{2x-4}{2x-4} + \frac{-x+5}{2x-4} \right)^{\frac{3x+1}{x-5}} = \lim_{x \rightarrow 5} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{2x-4}{-x+5}} \right)^{\frac{2x-4}{-x+5}} \right]^{\frac{3x+1-(x-5)}{2x-4}} = e^{\frac{-16}{6}} = e^{-\frac{8}{3}};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{-1}{\cos(x)}} \right)^{\frac{-1}{\cos(x)}} \right]^{\sin(x)} = e^{-1};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{\sin^2(2x)}} \right)^{\frac{1}{\sin^2(2x)}} \right]^{\frac{x^2+1 \cdot \sin^2(2x)}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{4(x^3+x) \cdot \frac{\sin^2(2x)}{4x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{4(x^3+x)} = e^0 = 1$$

Calcolare i seguenti limiti, usando, laddove possibile, i limiti notevoli

30. a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(x^2 - 8)}{3 - x^2}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + x^2 + 1)}{x - x^2}$; c) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\ln(2x^2 + 3x + 1)}{x^3 + 1}$; d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1 + 4x)}{3x^2}$; e) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\ln(x^2)}{x^3 + 1}$

$$a) \frac{\ln(9-8)}{3-9} = \frac{0}{-6} = 0; b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[1+(x^2+x)]}{x^2+x} \cdot \frac{x^2+x}{x-x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot (x+1)}{x \cdot (1-x)} = 1;$$

$$c) \left[\frac{\ln(2-3+1)}{-1^+ + 1} \right] = \left[\frac{-\infty}{0^+} \right] = -\infty; d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1+4x)}{4x} \cdot \frac{4x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{3x} = \infty;$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\ln[1+(x^2-1)]}{x^2-1} \cdot \frac{x^2-1}{x^3+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{(x+1) \cdot (x^2-x+1)} = -\frac{2}{3}$$

31. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2x^2 - 3x + 1)}{4x^3}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(4x^2 + 1)}{5x^2 - 2x}$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x^2)}{1 - \cos(x)}$; d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(3x - 2)}{\sin(\pi x)}$; e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_{\sqrt{2}}(1 + \pi x)}{e \cdot x}$

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[1+(2x^2-3x)]}{2x^2-3x} \cdot \frac{2x^2-3x}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot (2x-3)}{4x^3} = -\infty;$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x^2)}{4x^2} \cdot \frac{4x^2}{5x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{5x^2-2x} = 0;$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x^2)}{2x^2} \cdot \frac{2x^2}{1-\cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{x^2}{1-\cos(x)} = 2 \cdot 2 = 4;$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln[1+(3x-3)]}{3x-3} \cdot \frac{3x-3}{\sin(\pi x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 \cdot (x-1)}{\sin(\pi - \pi x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi \cdot (1-x)}{\sin[\pi(1-x)]} \cdot \frac{-3}{\pi} = -\frac{3}{\pi};$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_{\sqrt{2}}(1 + \pi x)}{\pi x} \cdot \frac{\pi x}{e \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(\sqrt{2})} \cdot \frac{\pi x}{e \cdot x} = \frac{2\pi}{e \cdot \ln(2)}$$

32. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{3x}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x}$; c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x^2}$; d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x^2-1}$; e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x^2-3)}{x-2}$; f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin(x)}$

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{2x} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}; b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \cdot x = \lim_{x \rightarrow 0} (x) = 0; c) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty;$$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln[1+(x-1)]}{x-1} \cdot \frac{1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$; e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln[1+(x^2-4)]}{x^2-4} \cdot (x+2) = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4$;

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \cdot \frac{x}{\sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1$

33. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(x^2+1)}{x+x^2}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log_3(x^2+x+1)}{x^2}$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_{1/2}(1+\sqrt{2}x)}{\sqrt{3}x}$; d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log_2(x^2)}{x^2-1}$; e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_\pi(x^2+2x+1)}{4x}$

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(1+x^2)}{x^2} \cdot \frac{x^2}{x+x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(2)} \cdot \frac{x}{1+x} = 0$;

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log_3[1+(x^2+x)]}{x^2+x} \cdot \frac{x^2+x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln(3)} \cdot \frac{x^2+x}{x^2} = +\infty$;

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_{1/2}(1+\sqrt{2}x)}{\sqrt{2}x} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\ln(1/2)} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{-1}{\ln(2)} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = -\frac{\sqrt{6}}{\ln(9)}$; d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log_2[1+(x^2-1)]}{x^2-1} = \frac{1}{\ln(2)}$;

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_\pi[1+(x^2+2x)]}{x^2+2x} \cdot \frac{x^2+2x}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(\pi)} \cdot \frac{x^2+2x}{4x} = \frac{1}{2\ln(\pi)} = \frac{1}{\ln(\pi^2)}$

34. a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(5x^2-8x-3)}{x-2}$; b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x^2-x+1)}{x-1}$; c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\ln(4x^2+3x)}{x^3+2x^2-1}$; d) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\ln(x^2+3x+3)}{x^2-4}$

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln[1+(5x^2-8x-4)]}{5x^2-8x-4} \cdot \frac{5x^2-8x-4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)} \cdot (5x+2)}{\cancel{x-2}} = 12$;

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln[1+(x^2-x)]}{x \cdot (x-1)} \cdot x = \lim_{x \rightarrow 1} (x) = 1$;

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\ln[1+(4x^2+3x-1)]}{4x^2+3x-1} \cdot \frac{4x^2+3x-1}{x^3+2x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cancel{(x+1)} \cdot (4x-1)}{\cancel{(x+1)} \cdot (x^2+x-1)} = \frac{-5}{-1} = 5$;

d) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\ln[1+(x^2+3x+2)]}{x^2+3x+2} \cdot \frac{x^2+3x+2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\cancel{(x+2)} \cdot (x+1)}{\cancel{(x+2)} \cdot (x-2)} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$

35. a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\ln(7x^2+x-5)}{x+1}$; b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(7x^2-6x)}{x^3-1}$; c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x^3+2x-2)}{x-1}$; d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(2x^2-4x+1)}{x-2}$; e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(4x^2-5x-5)}{x^2-4}$

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\ln[1+(7x^2+x-6)]}{7x^2+x-6} \cdot \frac{7x^2+x-6}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cancel{(x+1)} \cdot (7x-6)}{\cancel{x+1}} = -13$;

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln[1+(7x^2-6x-1)]}{7x^2-6x-1} \cdot \frac{7x^2-6x-1}{x^3-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)} \cdot (7x+1)}{\cancel{(x-1)} \cdot (x^2+x+1)} = \frac{8}{3}$;

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln[1+(x^3+2x-3)]}{x^3+2x-3} \cdot \frac{x^3+2x-3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)} \cdot (x^2+x+3)}{\cancel{x-1}} = 5$;

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln[1+(2x^2-4x)]}{2x \cdot (x-2)} \cdot 2x = \lim_{x \rightarrow 2} (2x) = 4$;

e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln[1+(4x^2-5x-6)]}{4x^2-5x-6} \cdot \frac{4x^2-5x-6}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)} \cdot (4x+3)}{\cancel{(x-2)} \cdot (x+2)} = \frac{11}{4}$

36. a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x^3 + x^2 - x)}{4x^3 - x^2 - 3}$; b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(4x^3 - x - 2)}{x^3 - 2x^2 + 1}$; c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x^3 - 4x + 1)}{x^3 + x^2 + 3x - 18}$; d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\log_2(x^3 - 3x - 1)}{x^3 - x^2 - 4}$

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln[1 + (x^3 + x^2 - x - 1)]}{x^3 + x^2 - x - 1} \cdot \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{4x^3 - x^2 - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)^2 \cdot (\cancel{x-1})}{(4x^2 + 3x + 3) \cdot (\cancel{x-1})} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5};$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln[1 + (4x^3 - x - 3)]}{4x^3 - x - 3} \cdot \frac{4x^3 - x - 3}{x^3 - 2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\cancel{x-1}) \cdot (4x^2 + 4x + 3)}{(\cancel{x-1}) \cdot (x^2 - x - 1)} = \frac{11}{-1} = -11;$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x^3 - 4x + 1)}{x^3 + x^2 + 3x - 18} = \left[\frac{0}{0} \right]$ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(1 + \cancel{4x})}{\cancel{4x}} = 1 \text{ se } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) > 0$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln[1 + (x^3 - 4x)]}{x^3 - 4x} \stackrel{x^3 - 4x}{\longrightarrow} 1 = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x^2 - 4)}{(x-2)(x^2 + 3x + 9)} \approx$

c) $\begin{array}{r|rrr} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 & 18 \\ \hline 1 & 3 & 9 & 0 \end{array} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x+2)}{x^2 + 3x + 9} = \frac{2 \cdot 4}{4 + 6 + 9} = \frac{8}{19};$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\log_2[1 + (x^3 - 3x - 2)]}{x^3 - 3x - 2} \cdot \frac{x^3 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\ln(2)} \cdot \frac{(\cancel{x-2}) \cdot (x^2 + 2x + 1)}{(\cancel{x-2}) \cdot (x^2 + x + 2)} = \frac{1}{\ln(2)} \cdot \frac{9}{8}$

37. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_{\sqrt{2}}(x^4 + 1)}{\sqrt{3} \cdot x}$; b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\log_{\pi}(x^3 - 7)}{x^2 + x - 6}$; c) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\log_{\frac{1}{\pi}}(x^2 - 1)}{x^2 + x - 2}$; d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\log_4(x^3 + 4x + 6)}{2x^3 + 3x + 5}$

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_{\sqrt{2}}(1 + x^4)}{x^4} \cdot \frac{x^3}{\sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(\sqrt{2})} \cdot \frac{x^3}{\sqrt{3}} = 0;$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\log_{\pi}[1 + (x^3 - 8)]}{x^3 - 8} \cdot \frac{x^3 - 8}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\ln(\pi)} \cdot \frac{(\cancel{x-2}) \cdot (x^2 + 2x + 4)}{(\cancel{x-2}) \cdot (x+3)} = \frac{1}{\ln(\pi)} \cdot \frac{12}{5};$

c) $\left[\frac{\log_{\frac{1}{\pi}}(0^+)}{0^+} \right] = -\infty;$

d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\log_4[1 + (x^3 + 4x + 5)]}{x^3 + 4x + 5} \cdot \frac{x^3 + 4x + 5}{2x^3 + 3x + 5} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{\ln(4)} \cdot \frac{(\cancel{x+1}) \cdot (x^2 - x + 5)}{(\cancel{x+1}) \cdot (2x^2 - 2x + 5)} = \frac{1}{\ln(4)} \cdot \frac{7}{9}$

38. a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln[1 + \sin(x)]}{1 - \cos(x)}$; b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\ln[2 \cdot \sin(x)]}{3 \cdot \tan(x) - \sqrt{3}}$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2[1 - \sin(x)]}{x}$; d) $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{\log_{\frac{1}{3}}[\tan(-x)]}{\sin(x) + \cos(x)}$

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln[1 + \sin(x)]}{\sin(x)} \cdot \frac{\sin(x)}{1 - \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{x}{1 - \cos(x)} = +\infty;$

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\ln \left[1 + (2 \tan(x) - 1) \right]}{2 \tan(x) - 1} \stackrel{x \rightarrow \frac{\pi}{6}}{\longrightarrow} \frac{(2 \tan(\frac{\pi}{6}) - 1)}{3 \left[\tan(\frac{\pi}{6}) - \frac{\sqrt{3}}{3} \right]} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \tan(x) - 1}{3 \left[\tan(x) - \frac{\sqrt{3}}{3} \right]} \cdot \cos(x) = \\
 & = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \left[\tan(x) - \frac{1}{2} \right] \frac{\sqrt{3}}{2}}{3 \left[\tan(x) - \frac{\sqrt{3}}{3} \right]} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\tan(x) - \tan(\frac{\pi}{6})}{3 \left(\tan(x) - \tan(\frac{\pi}{6}) \right)} = \\
 & = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \tan\left(\frac{x-\pi/6}{2}\right) \cos\left(\frac{x+\pi/6}{2}\right)}{3 \tan\left(\frac{x-\pi/6}{2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \tan\left(\frac{x-\pi/6}{2}\right) \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(x) \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{3 \tan\left(\frac{x-\pi/6}{2}\right)} = \\
 & = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\tan\left(\frac{x-\pi/6}{2}\right) \sqrt{3} \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)}{3 \cdot 2 \tan\left(\frac{x-\pi/6}{2}\right) \cos\left(\frac{x-\pi/6}{2}\right)} = \frac{\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{6 \cdot 1} = \frac{3\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{4}
 \end{aligned}$$

b)

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2 [1 + (-\sin(x))]}{-\sin(x)} \cdot \frac{-\sin(x)}{x} = \frac{1}{\ln(2)} \cdot (-1) = -\frac{1}{\ln(2)};$$

$$\begin{aligned}
 d) \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{\log_{\frac{1}{3}} [1 + (\tan(-x) - 1)]}{\tan(-x) - 1} \cdot \frac{\tan(-x) - 1}{\sin(x) + \cos(x)} &= \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\ln(1/3)} \cdot \frac{-\tan(x) + 1}{\sin(x) + \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{-1}{\ln(3)} \cdot \frac{-\cos(x)}{\sin(x) + \cos(x)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{-1}{\ln(3)} \cdot \frac{\cos(x)}{\cancel{\sin(x) + \cos(x)}} = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\ln(3)} \cdot \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\ln(3)} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\ln(3)}
 \end{aligned}$$

$$39. \quad a) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln [\sin(x)]}{\cos(x)}; \quad b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\log_3 (x^2 - 3)}{\sin(x) - \sin(2)}; \quad c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln (x^2 - 3)}{(x-1)^{\frac{1}{2-x}} - e}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln [1 + (\sin(x) - 1)]}{\sin(x) - 1} \cdot \frac{\sin(x) - 1}{\cos(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\pi/2 - x) - 1}{\sin(\pi/2 - x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\pi/2 - x) - 1}{\pi/2 - x} \cdot \frac{\pi/2 - x}{\sin(\pi/2 - x)} = 0 \cdot 1 = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\log_3 [1 + (x^2 - 4)]}{x^2 - 4} \cdot \frac{x^2 - 4}{\sin(x) - \sin(2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\ln(3)} \cdot \frac{(x-2)(x+2)}{2 \sin\left(\frac{x-2}{2}\right) \cos\left(\frac{x+2}{2}\right)} =$$

$$b) \quad \frac{(x-2)}{\frac{2}{\sin\left(\frac{x-2}{2}\right)} \cdot \frac{4}{\cos(2)}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\ln(3)} \cdot \frac{4}{\ln(3) \cdot \cos(2)} =$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} (x-1)^{\frac{1}{2-x}} = \lim_{x \rightarrow 2} (1+x-2)^{\frac{1}{2-x}} = \lim_{x \rightarrow 2} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x-2}{2}} \right)^{\frac{1}{x-2}} \right]^{-1} = e^{-1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x^2 - 3)}{(x-1)^{\frac{1}{2-x}} - e} = \frac{0}{e^{-1} - e} = 0$$

Calcolare i seguenti limiti, usando, laddove possibile, i limiti notevoli

$$40. \quad a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x}; \quad b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{5^x - 1}{x^2}; \quad c) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2^{2x} - 2}{x-1}; \quad d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \cdot x = 1 \cdot 0 = 0; \quad b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{5^x - 1}{x} \cdot \frac{1}{x} = [\ln(5) \cdot +\infty] = +\infty; \quad c) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2^{2x} - 2}{x-1} = \left[\frac{2^2 - 2}{0^-} \right] = -\infty;$$

- d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{-x} \cdot (-1) = -1$
- 41.** a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x^2} - 1}{2x^2}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{4x}$; c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{e^{x+1} - e^4}{x^2 + 2x - 14}$; d) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{9^x - 3}{4x^2 - 1}$
- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x^2} - 1}{x^2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \ln(3) = \ln(\sqrt{3})$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$; c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{e^{x+1} - e^4}{x^2 + 2x - 14} = \frac{e^4 - e^4}{9 + 6 - 14} = \frac{0}{1} = 0$;
- d) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{3 \cdot (3^{2x-1} - 1)}{2x-1} \cdot \frac{1}{2x+1} = \frac{3 \ln(3)}{2} = \ln(\sqrt{27})$
- 42.** a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{x^2 - 1}$; b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4^{x^2-4} - 1}{x^3 - 8}$; c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^{x+1} - 1}{x^4 - 1}$; d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1}$
- a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{x-1} \cdot \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$;
- b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4^{x^2-4} - 1}{x^2 - 4} \cdot \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \left[\ln(4) \frac{\cancel{x-2}}{\cancel{x-2}} \cdot \frac{x+2}{x^2 + 2x + 4} \right] = \frac{4}{12} \ln(4) = \frac{1}{3} \ln(4) = \ln(\sqrt[3]{4})$;
- c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^{x+1} - 1}{x+1} \cdot \frac{1}{(x-1) \cdot (x^2 + 1)} = \frac{1}{-2 \cdot 2} = -\frac{1}{4}$; d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e \cdot (e^{x-1} - 1)}{x-1} = e$
- 43.** a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\pi^{2x^2} - 1}{x^3}$; b) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}^-} \frac{e^x - \sqrt[3]{e}}{3x+1}$; c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4^{2x} - 16}{x^2 + x - 2}$
- a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\pi^{2x^2} - 1}{2x^2} \cdot \frac{2}{x} = [\ln(\pi) \cdot +\infty] = +\infty$; b) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}^-} \frac{e^x - \sqrt[3]{e}}{3x+1} = \left[\frac{e^{-1/3} - e^{1/3}}{0^-} = +\infty \right]$;
- c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{16 \cdot (4^{2x-2} - 1)}{2 \cdot (x-1) \cdot (x+2)} \cdot 2 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4^{2x-2} - 1}{2 \cdot (x-1)} \cdot \frac{32}{x+2} = \ln(4) \cdot \frac{32}{3} = \frac{64 \ln(2)}{3}$
- 44.** a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x^2-x-2} - 1}{x^3 + 1}$; b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{2x^2-x-1} - 1}{x^3 - 1}$; c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{3x^3-2x-1} - 1}{2x^3-x^2+4x-5}$; d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{e^{x^2-4x+3} - 1}{x^2-x-6}$
- a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x^2-x-2} - 1}{x^2-x-2} \cdot \frac{x^2-x-2}{x^3+1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1) \cdot (x-2)}{(x+1) \cdot (x^2+x+1)} = \frac{-3}{3} = -1$;
- b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{2x^2-x-1} - 1}{2x^2-x-1} \cdot \frac{2x^2-x-1}{x^3-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot (2x+1)}{(x-1) \cdot (x^2+x+1)} = \frac{3}{3} = 1$;
- c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{3x^3-2x-1} - 1}{3x^3-2x-1} \cdot \frac{3x^3-2x-1}{2x^3-x^2+4x-5} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot (3x^2+3x+1)}{(x-1) \cdot (2x^2+x+5)} = \frac{7}{8}$;
- d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{e^{x^2-4x+3} - 1}{x^2-4x+3} \cdot \frac{x^2-4x+3}{x^2-x-6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3) \cdot (x-1)}{(x-3) \cdot (x+2)} = \frac{2}{5}$
- 45.** a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{e^{3x^2-8x-3} - 1}{x-3}$; b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2^{2x^2-3x-1} - 1}{x^3-1}$; c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{e})^{2x^3-5x^2+4} - 1}{x^2-3x+2}$; d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\pi^{3x^2-7x+2} - 1}{2x^2-3x-2}$
- a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{e^{3x^2-8x-3} - 1}{3x^2-8x-3} \cdot \frac{3x^2-8x-3}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3) \cdot (3x+1)}{x-3} = 10$;
- b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2^{2x^2-3x-1} - 1}{x^3-1} = \left[\frac{2^{2-3-1} - 1}{1^+ - 1} = \frac{-3/4}{0^+} \right] = -\infty$; c)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{\frac{2x^3-5x^2+4}{2}} - 1}{\frac{2x^3-5x^2+4}{2}} \cdot \frac{\frac{2x^3-5x^2+4}{2}}{\frac{x^2-3x+2}{2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cdot (2x^2-x-2)}{(x-2) \cdot (x-1)} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2;$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\pi^{3x^2-7x+2} - 1}{3x^2-7x+2} \cdot \frac{3x^2-7x+2}{2x^2-3x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \left[\ln(\pi) \cdot \frac{(x-2) \cdot (3x-1)}{(x-2) \cdot (2x+1)} \right] = \ln(\pi)$$

46. a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4^{x^3+2x+3} - 1}{x^4 - x^2 + 4x + 4}$; b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3}^{2x^3-x^2+x-14} - 1}{x^2 - x - 2}$; c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^{x^2+5x+4} - 1}{x + 1}$; d) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{e^{x^2-2} - 1}{x^4 - 4}$

$$a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4^{x^3+2x+3} - 1}{x^3 + 2x + 3} \cdot \frac{x^3 + 2x + 3}{x^4 - x^2 + 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow -1} \left[\ln(4) \cdot \frac{(x+1) \cdot (x^2 - x + 3)}{(x+1) \cdot (x^3 - x^2 + 4)} \right] = \frac{5}{2} \ln(4) = 5 \ln(\sqrt{4}) = \ln(32);$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3}^{2x^3-x^2+x-14} - 1}{2x^3 - x^2 + x - 14} \cdot \frac{2x^3 - x^2 + x - 14}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \left[\ln(\sqrt{3}) \cdot \frac{(x-2) \cdot (2x^2 + 3x + 7)}{(x-2) \cdot (x+1)} \right] = 7 \ln(\sqrt{3});$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^{x^2+5x+4} - 1}{x^2 + 5x + 4} \cdot \frac{x^2 + 5x + 4}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1) \cdot (x+4)}{x+1} = 3; \quad d) \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{e^{x^2-2} - 1}{x^2 - 2} \cdot \frac{1}{x^2 + 2} = \frac{1}{4}$$

47. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2-x} - 1}{\sin(x+x^2)}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3-2x} - 1}{\ln(1+x^3)}$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x^2-4x} - 1}{\tan(2x)}$; d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^{x^2+x} - 4}{\sin(x-1)}$

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2-x} - 1}{x^2 - x} \cdot \frac{x + x^2}{\sin(x+x^2)} \cdot \frac{x^2 - x}{x + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{1+x} = -1; b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3-2x} - 1}{x^3 - 2x} \cdot \frac{x^3}{\ln(1+x^3)} \cdot \frac{x^3 - 2x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2}{x^2} = -\infty;$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x^2-4x} - 1}{3x^2 - 4x} \cdot \frac{2x}{\tan(2x)} \cdot \frac{3x^2 - 4x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x-4}{2} = -2; d)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 \cdot (2^{x^2+x-2} - 1)}{x^2 + x - 2} \cdot \frac{x-1}{\sin(x-1)} \cdot \frac{x^2 + x - 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[4 \ln(2) \cdot \frac{x^2 + x - 2}{x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\ln(16) \cdot \frac{(x-1) \cdot (x+2)}{x-1} \right] = 3 \ln(16)$$

48. a) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{\sqrt{2}^{5-x^2} - 2}{\ln(x^2 - 2)}$; b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{7^{x^2-x-4} - 49}{\sin(\pi x) + \ln(3+x)}$; c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3^{x^2-2} - 9}{\log_{1/2}(x^2 - 3) + \sin(x-2)}$

$$a) \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{2^{\frac{5-x^2}{2}} - 2}{\ln[1+(x^2-3)]} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{2 \cdot \left(2^{\frac{3-x^2}{2}} - 1 \right)}{\frac{3-x^2}{2}} \cdot \frac{x^2-3}{\ln[1+(x^2-3)]} \cdot \frac{3-x^2}{x^2-3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \left[2 \ln(2) \cdot \frac{-\cancel{(x^2-3)}}{\cancel{2} \cdot \cancel{(x^2-3)}} \right] = -\ln(2) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{49 \cdot (7^{x^2-x-6} - 1)}{\sin(2\pi + \pi x) + \ln[1+(2+x)]} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{49 \cdot (7^{x^2-x-6} - 1)}{x^2 - x - 6} \cdot \frac{1}{\sin(2\pi + \pi x) \cdot \pi + \frac{\ln[1+(2+x)]}{2+x}} \cdot \frac{x^2 - x - 6}{2+x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \left[49 \ln(7) \cdot \frac{(2+x) \cdot (x-3)}{(\pi+1) \cdot (2+x)} \right] = -\frac{245 \ln(7)}{\pi+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{9 \cdot (3^{x^2-4} - 1)}{\log_{1/2}[1 + (x^2 - 4)] + \sin(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{9 \cdot (3^{x^2-4} - 1)}{x^2 - 4} \cdot \frac{x^2 - 4}{\log_{1/2}[1 + (x^2 - 4)] \cdot (x^2 - 4) + \frac{\sin(x-2)}{x-2} \cdot (x-2)} =$$

c)

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \left[9 \cdot \ln(3) \frac{(x-2) \cdot (x+2)}{\frac{1}{\ln(1/2)} \cdot (x-2) \cdot (x+2) + (x-2)} \right] = \frac{36 \cdot \ln(3)}{-\frac{4}{\ln(2)} + 1} = \frac{36 \cdot \ln(3) \cdot \ln(2)}{\ln(2) - 4}$$

49. a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3^{2x^2-x} - 27}{\ln(-x)}$; b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3^{x^2-2x+1} - 3}{\sin(\pi x)}$; c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x^2-1} - 1}{e^{2x+1} - e^{3 \cdot \sin(\frac{\pi}{2}x)}}$

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{27 \cdot (3^{2x^2-x-3} - 1)}{\ln[1 + (-x-1)]} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{27 \cdot (3^{2x^2-x-3} - 1)}{2x^2 - x - 3} \cdot \frac{-x-1}{\ln[1 + (-x-1)]} \cdot \frac{2x^2 - x - 3}{-x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[27 \ln(3) \cdot \frac{(x+1) \cdot (2x-3)}{-(x+1)} \right] = 135 \ln(3);$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 \cdot (3^{x^2-2x} - 1)}{x^2 - 2x} \cdot \frac{\pi x - 2\pi}{\sin(\pi x - 2\pi)} \cdot \frac{x^2 - 2x}{\pi x - 2\pi} = \lim_{x \rightarrow 2} \left[3 \ln(3) \cdot \frac{x \cdot (x-2)}{\pi(x-2)} \right] = \frac{6 \ln(3)}{\pi}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x^2-1} - 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{e^{3 \cdot \sin(\frac{\pi}{2}x)} \cdot \left(e^{2x+1-3 \cdot \sin(\frac{\pi}{2}x)} - 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{e^3} \cdot \frac{e^{2x+1-3 \cdot \sin(\frac{\pi}{2}x)} - 1}{2x+1-3 \cdot \sin(\frac{\pi}{2}x)} \cdot \left[2x+1-3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right] =$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{e^3} \cdot \frac{x^2 - 1}{2x-2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{e^3} \cdot \frac{(x+1) \cdot (x-1)}{2 \cdot (x-1)} = \frac{1}{e^3}$$

Calcolare i seguenti limiti, usando, laddove possibile, i limiti notevoli

Livello 1

50. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+3x)^{42} - 1}{2x}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+7x)^5 - 1}{-3x}$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+4x)^5 - 1}{7x}$; d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-2x)^{21} - 1}{7x}$; e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2)^{\frac{3}{4}} - 1}{5x^2}$

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+3x)^{42} - 1}{3x} \cdot \frac{3}{2} = 42 \cdot \frac{3}{2} = 63$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+7x)^5 - 1}{7x} \cdot \frac{7}{-3} = 5 \cdot \frac{-7}{3} = -\frac{35}{3}$;

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+4x)^5 - 1}{4x} \cdot \frac{4}{7} = 5 \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{7}$; d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-2x)^{21} - 1}{-2x} \cdot \frac{-2}{7} = 21 \cdot \frac{-2}{7} = -6$;

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2)^{\frac{3}{4}} - 1}{x^2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{20}$

51. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+6x^3} - 1}{\sqrt{2x^3}}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{(1+3x)^4} - 1}{x^2}$; c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(4x-3)^4 - 1}{x-1}$; d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(3x^2-2)^6 - 1}{x^3+1}$

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+6x^3)^{\frac{1}{2}} - 1}{6x^3} \cdot \frac{6x^3}{\sqrt{2x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{36x^{18}}{2x^3}} = 0$; b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1+3x)^{\frac{4}{3}} - 1}{3x} \cdot \frac{3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{x} = +\infty$;

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{[1+(4x-4)]^4 - 1}{4x-4} \cdot 4 = 4 \cdot 4 = 16$;

d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{[1+(3x^2-3)]^6 - 1}{3x^2-3} \cdot \frac{3x^2-3}{x^3+1} = \lim_{x \rightarrow -1} 6 \cdot \frac{3 \cdot (x-1) \cdot (x+1)}{(x+1) \cdot (x^2-x+1)} = \frac{-36}{3} = -12$

52. a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(3-x)^{\frac{2}{7}} - 1}{\sqrt{3} \cdot (x-2)}$; b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[5]{\left(\frac{1}{3}x\right)^3} - 1}{x^3 - 27}$; c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x^2 - 3)^7 - 1}{x^2 + 4}$; d) $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} \frac{(x^2 - 1)^{13} - 1}{x^4 - 4}$

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{[1+(2-x)]^{\frac{2}{7}} - 1}{2-x} \cdot \frac{1}{-\sqrt{3}} = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{2}{7\sqrt{3}}$;

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\left[1+\left(\frac{1}{3}x-1\right)\right]^{\frac{3}{5}} - 1}{\frac{1}{3}x-1} \cdot \frac{\frac{1}{3}x-1}{x^3-27} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cancel{x}}{5} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \frac{x-3}{(x-3) \cdot (x^2+3x+9)} = \frac{1}{135}$;

c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x^2 - 3)^7 - 1}{x^2 + 4} = \frac{0}{8} = 0$; d) $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} \frac{[1+(x^2 - 2)]^{13} - 1}{x^2 - 2} \cdot \frac{x^2 - 2}{x^4 - 4} = \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} 13 \cdot \frac{x^2 - 2}{(x^2 - 2) \cdot (x^2 + 2)} = \frac{13}{4}$

53. a) $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{(4x-1)^{3/8} - 1}{2x-1}$; b) $\lim_{x \rightarrow -3/4} \frac{(5+8x)^{4/3} - 1}{16x^2 - 9}$; c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(5x-14)^8 - 1}{x^2 - x - 6}$; d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(3-x)^7 - 1}{x^2 - 4}$

a) $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{[1+(4x-2)]^{3/8} - 1}{2(2x-1)} \cdot 2 = \frac{3}{\cancel{4}} \cdot \cancel{x} = \frac{3}{4}$; b) $\lim_{x \rightarrow -3/4} \frac{(5+8x)^{4/3} - 1}{16x^2 - 9} = \left[\frac{(5-6)^{4/3} - 1}{0} = \frac{-2}{0} = \infty \right]$;

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{[1+(5x-15)]^8 - 1}{5x-15} \cdot \frac{5x-15}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow 3} 8 \cdot \frac{5(x-3)}{\cancel{(x-3)} \cdot (x+2)} = \frac{40}{5} = 8$;

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{[1+(2-x)]^7 - 1}{2-x} \cdot \frac{-1}{x+2} \cdot \frac{-1}{4} = -\frac{7}{4}$

54. a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x-2)^5 - 1}{x^4 - 1}$; b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 3)^{10} - 1}{2x^2 - 5x + 2}$; c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(4x-7)^{15} - 1}{x^2 - 4}$; d) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x^2 - 3)^7 - 1}{3x^2 + 4x - 4}$

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{[1+(3x-3)]^5 - 1}{3x-3} \cdot \frac{3x-3}{x^4-1} = \lim_{x \rightarrow 1} 5 \cdot \frac{3(x-1)}{\cancel{(x-1)}(x+1) \cdot (x^2+1)} = \frac{15}{2 \cdot 2} = \frac{15}{4}$;

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{[1+(x^2 - 4)]^{10} - 1}{x^2 - 4} \cdot \frac{x^2 - 4}{2x^2 - 5x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} 10 \cdot \frac{(x-2) \cdot (x+2)}{\cancel{(x-2)} \cdot (2x-1)} = \frac{10 \cdot 4}{3} = \frac{40}{3}$;

c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(4x-7)^{15} - 1}{x^2 - 4} = \left[\frac{(-15)^{15} - 1}{0} = \infty \right]$;

d) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{[1+(x^2 - 4)]^7 - 1}{x^2 - 4} \cdot \frac{x^2 - 4}{3x^2 + 4x - 4} = \lim_{x \rightarrow -2} 7 \cdot \frac{(x-2) \cdot (x+2)}{(3x-2) \cdot \cancel{(x+2)}} = \frac{7 \cdot (-4)}{-8^2} = \frac{7}{2}$

55. a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(4x+5)^9 - 1}{\sin(x+1)}$; b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(3x-5)^{12} - 1}{\ln(x^4 - 15)}$; c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{(4x-7)^3} - 1}{\log_3(x^3 - 7)}$

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{[1+(4x+4)]^9 - 1}{4x+4} \cdot \frac{4x+4}{\sin(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} 9 \cdot \frac{4(x+1)}{\sin(x+1)} = 36$;

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{[1+(3x-6)]^{12} - 1}{3x-6} \cdot \frac{3x-6}{\ln(x^4 - 15)} = \lim_{x \rightarrow 2} 12 \cdot \frac{x^4 - 16}{\ln[1+(x^4 - 16)]} \cdot \frac{3(x-2)}{x^4 - 16} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{36(x-2)}{\cancel{(x-2)} \cdot (x+2) \cdot (x^2 + 4)} = \frac{36}{32} = \frac{9}{8}$

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\left[1+(4x-8)\right]^{3/2} - 1}{4x-8} \cdot \frac{4x-8}{\log_3(x^3-7)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{2} \cdot \frac{4 \cdot (x-2)}{\log_3\left[1+(x^3-8)\right]} = \\
 & c) \quad = \lim_{x \rightarrow 2} 6 \cdot \frac{x^3-8}{\log_3\left[1+(x^3-8)\right]} \cdot \frac{(x-2)}{x^3-8} = \lim_{x \rightarrow 2} 6 \ln(3) \cdot \frac{(x-2)}{(x-2) \cdot (x^2+2x+4)} = \frac{6 \cdot \ln(3)}{12} = \ln(\sqrt{3})
 \end{aligned}$$

56. a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(4-x)^{11}-1}{3^x-27}$; b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(5x+6)^{15}-1}{e^{-x}-e}$; c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(5x-9)^{12}-1}{1-\cos(x^2-5x+6)}$

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\left[1+(3-x)\right]^{11}-1}{3-x} \cdot \frac{3-x}{27 \cdot (3^{x-3}-1)} = \lim_{x \rightarrow 3} 11 \cdot \frac{-(x-3)}{27 \cdot (3^{x-3}-1)} = -\frac{11}{27 \cdot \ln(3)};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\left[1+(5x+5)\right]^{15}-1}{5x+5} \cdot \frac{5x+5}{e \cdot (e^{-x-1}-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} 15 \cdot \frac{-5 \cdot (-x-1)}{e \cdot (e^{-x-1}-1)} = \frac{-75}{e};$$

$$\begin{aligned}
 & c) \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\left[1+(5x-10)\right]^{12}-1}{5x-10} \cdot \frac{5x-10}{1-\cos(x^2-5x+6)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} 12 \cdot \frac{(x^2-5x+6)^2}{1-\cos(x^2-5x+6)} \cdot \frac{5 \cdot (x-2)}{(x^2-5x+6)^2} = \\
 & = \lim_{x \rightarrow 2^+} 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{x-2}{(x-2)^2 \cdot (x-3)^2} = +\infty
 \end{aligned}$$

57. a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2+x)^3-27}{4^x-4}$; b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3(x)-1}{\ln[1+\cos(x)]}$; c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2x)^7-1}{2^{\sin(x)-\cos(x)}-1}$

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2+x-3) \cdot \left[(2+x)^2 + 3 \cdot (2+x) + 9\right]}{4 \cdot (4^{x-1}-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2+x)^2 + 3 \cdot (2+x) + 9}{4} \cdot \frac{x-1}{(4^{x-1}-1)} = \frac{27}{4 \ln(4)};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(x)}{\ln[1+\cos(x)]} \cdot \frac{\sin^3(x)-1}{1+\cos(x)} = 1 \cdot \frac{0}{1} = 0;$$

$$\begin{aligned}
 & c) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)-\cos(x)}{2^{\sin(x)-\cos(x)}-1} \cdot \frac{\sin^7(2x)-1}{\sin(x)-\cos(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\ln(2)} \cdot \frac{\left[\sin(2x)-1\right] \cdot \left[\sin^6(2x)+\sin^5(2x)+\dots+\sin(2x)+1\right]}{\sin(x)-\cos(x)} = \\
 & = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\ln(2)} \cdot \frac{\left[2\sin(x)\cos(x)-\sin^2(x)-\cos^2(x)\right] \cdot 7}{\sin(x)-\cos(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{7}{\ln(2)} \cdot \frac{-\left[\sin(x)-\cos(x)\right]^2}{\sin(x)-\cos(x)} = \frac{-7}{\ln(2)} \cdot 0 = 0
 \end{aligned}$$

Determinare e classificare gli eventuali punti di discontinuità delle seguenti funzioni

58. a) $f(x) = (1+3x)^{\frac{1}{2x}}$; b) $f(x) = \frac{1-\cos^2(x)}{x^2}$; c) $f(x) = \frac{1-\cos^2(x)}{x}$; d) $f(x) = \frac{1-\cos^2(x+1)}{x^2-1}$

$$a) \text{ L'unica discontinuità è } x=0: \lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{1}{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{3x}} \right)^{\frac{1}{\frac{1}{3x}}} \right]^{\frac{3}{2}} = e^{\frac{3}{2}}, \text{ quindi discontinuità di III}$$

specie

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos^2(x)}{x^2} = \frac{1}{2}, x=0 \text{ discontinuità di III specie};$$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(x)}{x} = 0$, $x = 0$ discontinuità di III specie; d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \cos^2(x+1)}{x^2 - 1} = \left[\frac{1 - \cos^2(2)}{0} \right] = \infty$, $x = 1$

1, I specie; $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 - \cos^2(x+1)}{x+1} \cdot \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} = -\frac{1}{4}$, $x = -1$, III specie

59. a) $f(x) = (x)^{\frac{1}{x-1}}$; b) $f(x) = \frac{\sin(x)}{|x|}$; c) $f(x) = \frac{\tan(3x)}{5x}$, $x \in [0, \pi]$

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x)^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1} (x)^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} [1 + (x-1)]^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[1 + \frac{1}{\frac{x-1}{x-1}} \right]^{\frac{1}{x-1}} = e$; $x = 0$ discontinuità di II specie, $x = 1$ discontinuità di III specie

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(x)}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(x)}{-x} = -1$; $x = 0$ discontinuità di III specie;

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(3x)}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(3x)}{3x} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$, $\lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{\tan(3x)}{5x} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\tan(3x)}{5x} = \lim_{x \rightarrow 5\pi/6} \frac{\tan(3x)}{5x} = \infty$, $x = 0$ discontinuità di III specie; $x = \pi/6, \pi/2, 5\pi/6$: II specie

60. a) $f(x) = \frac{x - \pi/2}{\cos(x)}$; $x \in [0, 2\pi]$; b) $f(x) = \frac{\sin(|x|)}{x}$; c) $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x-1}}$

a) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{x - \pi/2}{\cos(x)} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{-(\pi/2 - x)}{\sin(\pi/2 - x)} = -1$; $\lim_{x \rightarrow 3\pi/2} \frac{x - \pi/2}{\cos(x)} = \left[\frac{\pi}{0} \right] = \infty$, $x = \pi/2$ discontinuità di III specie; $x = 3\pi/2$ discontinuità di II specie

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(|x|)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(|x|)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(-x)}{-x} = -1$ $x = 0$ discontinuità di III specie;

c) $\lim_{x \rightarrow -1^+} (1+x)^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} (1+x)^{\frac{1}{x-1}} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} (1+x)^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$, $x = -1, x = 1$ discontinuità di II specie

61. Correggere la seguente procedura errata. Sia $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x^3}$, applichiamo la formula di triplicazione del seno

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin(x) - 4\sin^3(x)}{x^3}, \text{ da cui } 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x^3} - 4 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^3 = 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x^3} - 4.$$

Da cui si ha: $3 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3t)}{(3t)^3} - 4 = \frac{1}{9} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3t)}{t^3} - 4 = \frac{1}{9} L - 4$. Quindi $L = 1/9L - 4$, cioè $L = -9/2$

Non possiamo sostituire $3t$ a x in $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x^3}$, perché con la sostituzione dobbiamo moltiplicare e dividere per 3.

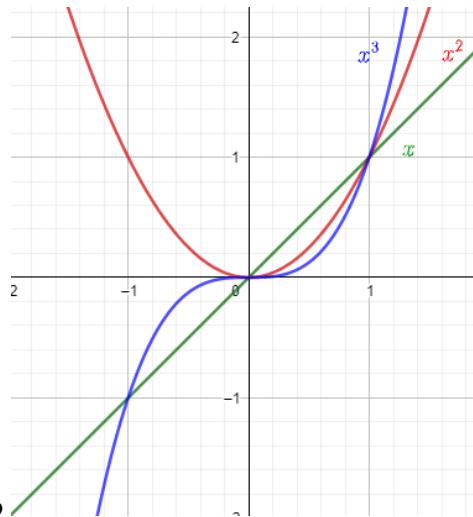
62. Consideriamo le funzioni: $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ e $h(x) = x^3$. Possiamo applicare ad esse, in un ordine qualsiasi, il teorema del confronto? Se si per calcolare quali limiti? Studiare tutte le possibilità.

Se $x > 1$ si ha: $x < x^2 < x^3$, quindi possiamo calcolare $\lim_{x \rightarrow p} x^2$, $p > 1$

Se $0 < x < 1$ si ha: $x^3 < x^2 < x$, quindi possiamo calcolare $\lim_{x \rightarrow p} x^2$, $0 < p \leq 1$

Se $-1 < x < 0$ si ha: $x < x^3 < x^2$, quindi possiamo calcolare $\lim_{x \rightarrow p} x^3$, $-1 < p \leq 0$

Se $x < -1$ si ha: $x^3 < x < x^2$, quindi possiamo calcolare $\lim_{x \rightarrow p} x$, $p \leq 1$



Mostriamo anche i grafici a confronto

La sfida

- Una funzione monotona può avere discontinuità di che tipo? Giustificare la risposta.

Solo di I e III specie perché se accadesse $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$ allora avremmo che sarebbe $f(x_1) > f(x_2)$ per $x_0 < x_1 < x_2$ ma ovviamente $f(x_1) < f(x_2)$ per $x_1 < x_2 < x_0$. Stesso discorso negli altri casi per la discontinuità di II specie. La III specie è possibile solo se $f(x_0)$ non esiste

- La funzione somma di due funzioni discontinue può essere continua? Giustificare la risposta, fornendo un esempio se positiva.

Sì, per esempio $f(x) = \tan(x)$, $g(x) = x - \tan(x)$, $f(x) + g(x) = x$

- La funzione prodotto di due funzioni discontinue può essere continua? Giustificare la risposta, fornendo un esempio se positiva.

Sì, per esempio $f(x) = \tan(x)$, $g(x) = \cot(x)$, $f(x) \cdot g(x) = 1$

- Se $\exists \lim_{x \rightarrow z} |f(x)|$, $z \in \overline{\mathbb{R}}$, possiamo dire che $\exists \lim_{x \rightarrow z} f(x)$, $z \in \overline{\mathbb{R}}$? Giustificare la risposta.

No, per esempio $\nexists \lim_{x \rightarrow 1} [(-1)^{\lceil x \rceil} \cdot x]$, ma $\lim_{x \rightarrow 1} [(-1)^{\lceil x \rceil} \cdot x] = \lim_{x \rightarrow 1} x = 1$

- Calcola $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{\sin(\sin(\sin(\dots \sin(x))))}^n}{x}$, dove i seni, uno dentro l'altro sono in numero di n .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{\sin(\sin(\sin(\dots \sin(x))))}^n}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{\sin(\sin(\sin(\dots \sin(x))))}^n}{\overbrace{\sin(\sin(\dots \sin(x))))}^{n-1}} \cdot \frac{\overbrace{\sin(\sin(\sin(\dots \sin(x))))}^{n-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{\sin(\sin(\sin(\dots \sin(x))))}^{n-1}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{\sin(\sin(\sin(\dots \sin(x))))}^{n-1}}{\overbrace{\sin(\sin(\dots \sin(x))))}^{n-2}} \cdot \frac{\overbrace{\sin(\sin(\sin(\dots \sin(x))))}^{n-2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{\sin(\sin(\sin(\dots \sin(x))))}^{n-2}}{x} = \dots = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin(x))}{\sin(x)} \cdot \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \end{aligned}$$

- Calcola al variare dei parametri $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + a^2} - a}{\sqrt{x^2 + b^2} - b}$.

Ricordiamo che $\sqrt{a^2} = |a|$, quindi: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + a^2} - a}{\sqrt{x^2 + b^2} - b} = \frac{|a| - a}{|b| - b}$, perciò se $a > 0$ e $b > 0$, allora:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + a^2} - a}{\sqrt{x^2 + b^2} - b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, da cui razionalizzando: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + a^2 - a^2}{x^2 + b^2 - b^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + b^2} + b}{\sqrt{x^2 + a^2} + a} = \frac{2b}{2a} = \frac{b}{a}$; se $a > 0$ e b

< 0 , allora: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + a^2} - a}{\sqrt{x^2 + b^2} - b} = \frac{0}{-2b} = 0$; se $a < 0$ e $b > 0$, allora: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + a^2} - a}{\sqrt{x^2 + b^2} - b} = \left[\frac{-2a}{0^-} \right] = +\infty$; infine se $a < 0$ e $b < 0$, allora: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + a^2} - a}{\sqrt{x^2 + b^2} - b} = \frac{-2a}{-2b} = \frac{a}{b}$

7. **Calcola** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[n]{a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots + a_n x^{n-1} + x^n} - x \right)$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2, a_n \neq 0$.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots + a_n x^{n-1} + x^n - x}{\sqrt[n]{(a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots + a_n x^{n-1} + x^n)^{n-1}} + x \sqrt[n]{(a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots + a_n x^{n-1} + x^n)^{n-2}} + \dots + x^{n-1}} = \\ & = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^{n-1}}{x^{n-1} + x \cdot x^{n-2} + x^2 \cdot x^{n-3} + \dots + x^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^{n-1}}{n \cdot x^{n-1}} = \frac{a_n}{n} \end{aligned}$$

8. **Calcola** $\lim_{x \rightarrow \infty} (3^x + 3^{2x})^{\frac{1}{x}}$.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left[(3^x + 3^{2x})^{\frac{1}{x}} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(3^x + 3^{2x})}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln[3^x(1+3^x)]}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(3^x) + \ln(1+3^x)}{x} = \\ & = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot \ln(3) + \ln(1+3^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot \ln(3) + x \cdot \ln(3)}{x} = 2\ln(3) = \ln(9) \end{aligned}$$

nuità possiamo dire che $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left[(3^x + 3^{2x})^{\frac{1}{x}} \right] = \ln(9) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (3^x + 3^{2x})^{\frac{1}{x}} = 9$

9. **Se si ha:** $\frac{x^2 + x - 2}{x + 3} \leq f(x) \leq \frac{x^2 + 2x - 1}{x + 3}$, supposto che esista calcolare $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$.

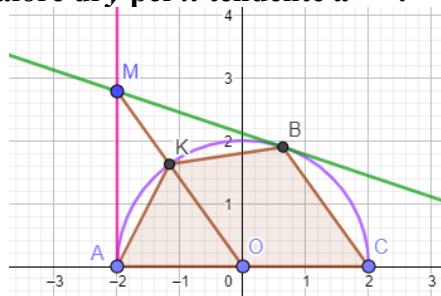
Poiché $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + x - 2}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 2x - 1}{x + 3} = -1$ per il teorema del confronto si ha:
 $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x)}{x^2} = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\lim_{x \rightarrow -1^-} x^2 = -1$

10. **Enuncia una condizione sufficiente che assicuri che se una funzione verifica il teorema di esistenza degli zeri ammetta un'unica soluzione.**

Basta che la funzione sia strettamente monotona perché in questo caso ovviamente può assumere una sola volta ogni ordinata, compresa 0

Temi assegnati agli esami di stato

1. **(Liceo scientifico 1989/90)** Data una semicirconferenza di diametro $\overline{AC} = 2r$ e centro O , tracciare la semiretta uscente da A , perpendicolare ad AC e giacente rispetto ad AC , dalla stessa parte della semicirconferenza. Detto M un punto generico su tale semiretta, indicare con x la distanza di M da A . Da M staccare l'ulteriore tangente in B alla semicirconferenza. Detta K l'intersezione della semicirconferenza con il segmento OM , determinare l'area y del quadrilatero $ACBK$ in funzione di x . Determinare il valore di y per x tendente a $+\infty$.



Consideriamo la figura a lato l'equazione della circonferenza è $x^2 +$

$$y^2 = r^2, M \equiv (-r; x), \text{ imponiamo la condizione di tangenza, ossia: } MA^2 = MB^2, \text{ con } B \equiv (b; \sqrt{r^2 - b^2}):$$

$$x^2 = (b+r)^2 + (\sqrt{r^2 - b^2} - x)^2 \Rightarrow x^2 = b^2 + r^2 + 2rb + r^2 - b^2 - 2x\sqrt{r^2 - b^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 + rb - x\sqrt{r^2 - b^2} = 0 \Rightarrow r^4 + r^2b^2 + 2r^3b = r^2x^2 - b^2x^2 \Rightarrow (r^2 + x^2)b^2 + 2r^3b + r^4 - r^2x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = \frac{-r^3 + \sqrt{r^6 - (r^2 + x^2)(r^4 - r^2x^2)}}{r^2 + x^2} = \frac{-r^3 + \sqrt{r^6 - r^6 + r^4x^2 - r^4x^2 + r^2x^4}}{r^2 + x^2} = \frac{-r^3 + rx^2}{r^2 + x^2} = \frac{r(x^2 - r^2)}{r^2 + x^2}$$

Quindi

$$B \equiv \left(\frac{r(x^2 - r^2)}{r^2 + x^2}; \sqrt{r^2 - \frac{r^2(x^2 - r^2)^2}{(r^2 + x^2)^2}} \right) \equiv \left(\frac{r(x^2 - r^2)}{r^2 + x^2}; r \frac{\sqrt{(r^2 + x^2)^2 - (x^2 - r^2)^2}}{r^2 + x^2} \right) \equiv \left(\frac{r(x^2 - r^2)}{r^2 + x^2}; \frac{2r^2x}{r^2 + x^2} \right)$$

Adesso determiniamo K , tenendo conto che $K \equiv (k; \sqrt{r^2 - k^2})$ e

$$\frac{\sqrt{r^2 - k^2}}{k} = \frac{x}{r} \Rightarrow \frac{r^2 - k^2}{k^2} = \frac{x^2}{r^2} \Rightarrow \frac{r^2}{k^2} - 1 = \frac{x^2}{r^2} \Rightarrow \frac{r^2}{k^2} = \frac{x^2 + r^2}{r^2} \Rightarrow k^2 = \frac{r^4}{x^2 + r^2} \Rightarrow k = \frac{r^2}{\sqrt{x^2 + r^2}}, \quad \text{quindi:}$$

$$K \equiv \left(\frac{r^2}{\sqrt{x^2 + r^2}}; \sqrt{r^2 - \frac{r^4}{x^2 + r^2}} \right) \equiv \left(\frac{r^2}{\sqrt{x^2 + r^2}}; \sqrt{\frac{r^2x^2}{x^2 + r^2}} \right) \equiv \left(\frac{r^2}{\sqrt{x^2 + r^2}}; \frac{rx}{\sqrt{x^2 + r^2}} \right)$$

Adesso calcoliamo l'area del quadrilatero come somma delle aree dei triangoli AKO , OKB e OBC , tenendo conto che i primi due triangoli sono ovviamente uguali:

$$y = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} r \cdot \frac{rx}{\sqrt{x^2 + r^2}} \right) + \frac{1}{2} r \cdot \frac{r^2x}{r^2 + x^2} = \frac{r^2x}{\sqrt{x^2 + r^2}} + \frac{r^3x}{r^2 + x^2}. \quad \text{Adesso passiamo al limite:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{r^2x}{\sqrt{x^2 + r^2}} + \frac{r^3x}{x^2 + r^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{r^2x}{x} + \frac{r^3x}{x^2} \right) = r^2$$

- 2.** (Liceo scientifico 2000/01) Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, si sa che $f(x) \rightarrow \ell$ per $x \rightarrow a$, essendo ℓ ed a numeri reali. Dire se ciò è sufficiente per concludere che $f(a) = \ell$ e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

No, per esempio $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, ma $f(0)$ non esiste

- 3.** (Liceo scientifico 2000/01) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x) - \cos(x)}{x}$ a) è uguale a 0; b) è uguale ad 1; c) è un valore diverso dai due precedenti; d) non è determinato. Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione.

Risposta a) perché è il prodotto fra una funzione limitata, $\sin(x) - \cos(x)$, e una funzione infinitesima, $1/x$.

- 4.** (Liceo scientifico PNI 2001/02) Data la funzione $f(x) = e^x - \sin(x) - 3x$ calcolarne i limiti per x tendente a $+\infty$ e $-\infty$ e provare che esiste un numero reale α con $0 < \alpha < 1$ in cui la funzione si annulla.

Per il principio di sostituzione degli infiniti si ha:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [e^x - \sin(x) - 3x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x - \sin(x) - 3x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x) = +\infty$, inoltre la funzione è continua in tutti i reali e si ha: $f(0) = e^0 - \sin(0) - 3 \cdot 0 = 1 > 0$ e $f(1) = e^1 - \sin(1) - 3 \cdot 1 < 0$, pertanto per il teorema di esistenza degli zeri, esiste almeno un numero reale α con $0 < \alpha < 1$, per cui si ha $f(\alpha) = 0$

- 5.** (Liceo scientifico 2001/02) Si consideri la funzione: $f(x) = (2x - 1)^7 \cdot (4 - 2x)^5$. Stabilire se ammette massimo o minimo assoluto nell'intervallo $1/2 \leq x \leq 2$.

La funzione è continua in tutti i reali, quindi in $[1/2; 2]$ possiamo applicare il Teorema di Weierstrass e fornire risposta positiva.

6. (Liceo scientifico 2003/04) Di una funzione $g(x)$, non costante, si sa che: $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3$ e $g(2) = 4$.

Trovate una espressione di $g(x)$.

Per esempio $g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \neq 2 \\ 4 & x = 2 \end{cases}$

7. (Liceo scientifico suppletiva 2004/05) Si consideri l'equazione $(k-2) \cdot x^2 - (2k-1) \cdot x + k + 1 = 0$, dove k è un parametro reale diverso da 2. Indicate con x' e x'' le sue radici, calcolare i limiti di $x' + x''$ quando k tende a 2, a $+\infty$ e a $-\infty$.

Troviamo le radici:

$$x = \frac{2k-1 \pm \sqrt{(2k-1)^2 - 4(k-2) \cdot (k+1)}}{2(k-2)} = \frac{2k-1 \pm \sqrt{4k^2 - 4k + 1 - 4k^2 + 4k + 8}}{2(k-2)} = \frac{2k-1 \pm 3}{2(k-2)} = \frac{k+1}{k-2}$$

Passiamo ai limiti: $\lim_{k \rightarrow 2} \left(\frac{k+1}{k-2} + 1 \right) = \left[\frac{3}{0} + 1 = \infty \right]$; $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{k+1}{k-2} + 1 \right) = \lim_{k \rightarrow -\infty} \left(\frac{k+1}{k-2} + 1 \right) = 2$

8. (Liceo scientifico suppletiva 2005/06) Il limite della funzione $f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ per x che tende a zero A) non esiste B) è 0 C) è un valore finito diverso da 0 D) è $+\infty$. Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

Risposta B, perché prodotto di una infinitesima, x , per una limitata

9. (Liceo Scientifico 2005/06) La funzione $f(x) = \tan(x)$ assume valori di segno opposto negli estremi dell'intervallo $I = [\pi/4; 3\pi/4]$, eppure non esiste alcun $x \in I$, tale che $f(x) = 0$. È così? Perché? Non si può applicare il Teorema di esistenza degli zeri perché la funzione non è continua in I , dato che non è definita per $x = \pi/2$

10. (Liceo scientifico suppletiva 2005/06) Considerata la funzione reale di variabile reale $f(x)$, affermare che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ significa che, per ogni numero reale M , esiste un numero reale N tale che, per ogni x , se $x > N$, allora $f(x) > M$. È vero o falso?

Vero è proprio la definizione

11. (Liceo scientifico suppletiva 2006/07) Si calcoli $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \cos(x)}{x^2 - \sin^2(x)}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1 - \frac{\sin^2(x)}{x^2}} = \left[\frac{1}{0} \right] = \infty$$

12. (Liceo scientifico 2007/08) Sia $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x-1|}$; esiste il $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$? Si giustifichi la risposta.

No, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(1-x) \cdot (x+1)}{1-x} = -2$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{x-1} = 2$

13. (Liceo scientifico suppletiva 2007/08) Si calcoli $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - \cos(2x)}{1 - \cos(x)}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 2\cos^2(x) + 1}{1 - \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{[\cos(x)]} \cdot [2\cos(x) + 1]}{\cancel{[\cos(x)]}} = 3$$

14. (Liceo scientifico 2008/09) Si calcoli $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x} = -1$$

15. (Liceo scientifico 2009/10) Si calcoli $\lim_{x \rightarrow \infty} 4x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 4 \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 4$$

16. (Liceo scientifico 2009/10) Per quale o quali valori di k la funzione seguente è continua in $x = 4$?

$$h(x) = \begin{cases} 3x^2 - 11x - 4 & x \leq 4 \\ k \cdot x^2 - 2x - 1 & x > 4 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} (3x^2 - 11x - 4) = 0; \lim_{x \rightarrow 4^+} (kx^2 - 2x - 1) = 16k - 9 \Rightarrow 16k - 9 = 0 \Rightarrow k = \frac{9}{16}$$

17. (Liceo scientifico PNI 2010/11) Si determini il limite di $f(x) = x + \ln(4) + \frac{2}{e^x + 1}$ per x che tende a $+\infty$ e a $-\infty$. Si calcoli $f(x) + f(-x)$ e si spieghi perché dal risultato si deduce che $A \equiv (0; 1 + \ln(4))$ è centro di simmetria di Γ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x + \ln(4) + \frac{2}{e^x + 1} \right] = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x + \ln(4) + \frac{2}{e^x + 1} \right] = -\infty;$$

$$f(x) + f(-x) = 2\ln(4) + \frac{2}{e^x + 1} + \frac{2e^x}{e^x + 1} = 2\ln(4) + \frac{2 \cdot (e^x + 1)}{e^x + 1} = 2 \cdot [1 + \ln(4)]$$

Se A è centro di simmetria allora è punto medio fra $(x; f(x))$ e $(-x; f(-x))$, e in effetti:

$$\begin{cases} \frac{x-x}{2} = 0 \\ \frac{f(x) + f(-x)}{2} = 1 + \ln(4) \end{cases}$$

18. (Liceo scientifico 2010/11) Si calcoli $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan(x) - \tan(a)}{x - a}$. (Sugg. usare la formula di sottrazione della tangente)

$$\begin{aligned} \tan(x-a) &= \frac{\tan(x) - \tan(a)}{1 + \tan(x)\tan(a)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan(x) - \tan(a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan(x-a) \cdot [1 + \tan(x)\tan(a)]}{x-a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} [1 + \tan(x)\tan(a)] = 1 + \tan^2(a) = \frac{1}{\cos^2(a)} \end{aligned}$$

19. (Liceo scientifico Suppletiva 2010/11) La funzione: $f(x) = \frac{1}{(e^{1/x} - 1)^2}$ non è definita per $x = 0$, che

è per essa un punto di discontinuità. Si precisi il tipo di questa discontinuità, dopo aver esaminato il limite della $f(x)$ per x tendente a zero da sinistra e per x tendente a zero da destra.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{(e^{1/x} - 1)^2} = 1; \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(e^{1/x} - 1)^2} = 0, \text{ quindi I specie con salto di discontinuità 1}$$

20. (Liceo scientifico PNI 2011/12) Si calcoli $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2^{3x} - 3^{4x}}{x^2}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 3^{4x} \cdot \frac{2^{3/x} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 3^{4x} \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 8/81} = -\infty$$

21. (Liceo scientifico 2012/13) Si calcoli: $\lim_{x \rightarrow 0} 4 \cdot \frac{\sin(x)\cos(x) - \sin(x)}{x^2}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} 4 \cdot \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{\cos(x) - 1}{x} = 4 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

22. (Liceo scientifico PNI 2012/13) Si mostri, che: $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^{\sin(x)} - e^{\sin(\pi)}}{x - \pi} = -1$.

$$\lim_{x \rightarrow \pi} e^{\sin(\pi)} \frac{e^{\sin(x)-\sin(\pi)} - 1}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^{\sin(x)-\sin(\pi)} - 1}{\sin(x) - \sin(\pi)} \cdot \frac{\sin(x) - \sin(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x) - \sin(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\sin(x-\pi)}{x - \pi} = -1$$

23. (Liceo scientifico PNI 2013/14) Si stabilisca per quali valori reali di a e b , si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a+bx}-2}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a+bx}-2}{x} = \begin{cases} \infty & a \neq 4 \\ 0/0 & a = 4 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+bx}-2}{x} \cdot \frac{\sqrt{4+bx}+2}{\sqrt{4+bx}+2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx}{x} \cdot \frac{1}{4} = \frac{b}{4} \Rightarrow b = 4$$

24. (Liceo scientifico 2016/17) Sapendo che: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+2b}-6}{x} = 1$ determinare i valori di a e b .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+2b}-6}{x} = \begin{cases} \infty & b \neq 18 \\ 0/0 & b = 18 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+36}-6}{x} \cdot \frac{\sqrt{ax+36}+6}{\sqrt{ax+36}+6} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{x} \cdot \frac{1}{12} = \frac{a}{12} \Rightarrow a = 12$$

25. (Liceo scientifico 2017/18) Considerata la funzione $f(x) = \frac{3x - e^{\sin(x)}}{5 + e^{-x} - \cos(x)}$, determinare, se esistono, i valori di $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ giustificando adeguatamente le risposte fornite.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - e^{\sin(x)}}{5 + e^{-x} - \cos(x)} = +\infty$ perché $e^{\sin(x)}$ è limitata, così come tutto il denominatore.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - e^{\sin(x)}}{5 + e^{-x} - \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{e^{-x}} = 0$ perché ovviamente e^{-x} è infinito di ordine superiore a $3x$

26. (Liceo scientifico 2022/23) Determinare i valori dei parametri reali a e b affinché:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - (ax^3 + bx)}{x^3} = 1.$$

Il limite è una forma indeterminata 0/0, appliciamo il Teorema di De L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 3ax^2 - b}{3x^2}, \text{ che per tendere ad 1, deve essere ancora una forma indeterminata 0/0, quindi}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} [\cos(x) - 3ax^2 - b] = 0 \Rightarrow 1 - b = 0 \Rightarrow b = 1, \text{ il limite è divenuto:}$$

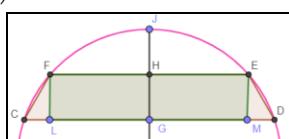
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 3ax^2 - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x) - 6ax}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos(x) - 6a}{6} = \frac{-1 - 6a}{6} = 1 \Rightarrow a = -\frac{7}{6}.$$

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

1. (AHSME 1969) Consideriamo l'ascissa $x(m)$ del punto intersezione della parabola $y = x^2 - 6$ e della retta $y = m$, con $-6 < m < 6$. Calcolare $\lim_{m \rightarrow 0} \frac{x(m) - x(-m)}{m}$.

$$\begin{cases} y = x^2 - 6 \\ y = m \end{cases} \Rightarrow x^2 - 6 - m = 0 \Rightarrow x(m) = \pm \sqrt{6+m}; \lim_{m \rightarrow 0} \frac{\sqrt{6+m} - \sqrt{6-m}}{m} =$$

$$= \lim_{m \rightarrow 0} \frac{6+m-6+m}{m \cdot (\sqrt{6+m} + \sqrt{6-m})} = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{6+m} + \sqrt{6-m}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$



2. (AHSME 1968) In figura vi è una semicirconferenza di raggio a , H è punto medio di GJ . Indichiamo con K l'area del trapezio $CDEF$, con R quella del rettangolo $LMEF$. Determinare il limite del rapporto K/R al tendere di \overline{OG} ad a , in modo che H sia sempre punto me-

dio di GJ .

Abbiamo: $\frac{K}{R} = \frac{\overline{FE} + \overline{CD}}{\overline{FE} \cdot \overline{EM}} = \frac{1}{2} + \frac{\overline{CD}}{2\overline{FE}}$. L'equazione della circonferenza nel sistema di riferimento in cui O è l'origine, l'asse x contiene AB e l'asse y contiene OJ , è $x^2 + y^2 = a^2$.

Abbiamo $G \equiv (0; g)$, $J \equiv (0; a)$, $H \equiv \left(0; \frac{g+a}{2}\right)$, $C \equiv \left(-\sqrt{a^2 - g^2}; g\right)$,

$$F \equiv \left(-\sqrt{a^2 - \left(\frac{g+a}{2}\right)^2}; \frac{g+a}{2}\right) \equiv \left(-\sqrt{\frac{4a^2 - g^2 - a^2 - 2ag}{4}}; \frac{g+a}{2}\right) \equiv \left(-\frac{\sqrt{3a^2 - g^2 - 2ag}}{2}; \frac{g+a}{2}\right),$$

$$\text{quindi } \overline{FE} = \sqrt{\frac{3a^2 - g^2 - 2ag}{2}} = \sqrt{3a^2 - g^2 - 2ag}; \overline{CD} = 2\sqrt{a^2 - g^2} \Rightarrow \frac{K}{R} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{a^2 - g^2}}{\sqrt{3a^2 - g^2 - 2ag}}.$$

$$\text{Infine: } \lim_{g \rightarrow a} \left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{a^2 - g^2}}{\sqrt{3a^2 - g^2 - 2ag}} \right] = \lim_{g \rightarrow a} \left[\frac{1}{2} + \frac{\cancel{\sqrt{a-g}} \cdot \sqrt{a+g}}{\cancel{\sqrt{a-g}} \cdot \sqrt{3a+g}} \right] = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{4a}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

3. (HSMC 2001) Data $f(x) = 3x + 4$, trovare una funzione $g(x)$ tale che si abbia $f(g(x)) = 4x - 1$.

$$f(g(x)) = 3g(x) + 4 = 4x - 1 \Rightarrow g(x) = \frac{4x - 5}{3}$$

4. (HSMC 2002) Calcolare $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi/3 + h) - \sin(\pi/3)}{\cos(\pi/3 + h) - \cos(\pi/3)}$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{2\sin\left(\frac{\pi/3 + h - \pi/3}{2}\right)} \cos\left(\frac{\pi/3 + h + \pi/3}{2}\right)}{-\cancel{2\sin\left(\frac{\pi/3 + h - \pi/3}{2}\right)} \sin\left(\frac{\pi/3 + h + \pi/3}{2}\right)} = -\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

5. (HSMC 2003) Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x \cdot \sin(2x)}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x \cdot \sin(2x)} \cdot \frac{\cos(x) + 1}{\cos(x) + 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2(x) - 1}{x \cdot \sin(2x)} \cdot \frac{1}{\cos(x) + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{2x \cdot \cancel{\sin(x) \cos(x)}} \cdot \frac{1}{2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

6. (HSMC 2005) Il polinomio $x^3 + x^2 + x - 20$ ha un solo zero, trovarlo con una precisione di 0,5.

Si ha:

$$2^3 + 2^2 + 2 - 20 < 0, 3^3 + 3^2 + 3 - 20 > 0 \Rightarrow 2 < x_0 < 3 \Rightarrow x_0 \approx 2,5 \pm 0,5$$

7. (HSMC 2009) Calcolare $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 4x^2 + 7x} - x \right)$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x^3} + 4x^2 + 7x - \cancel{x^3}}{\sqrt[3]{(x^3 + 4x^2 + 7x)^2} + x\sqrt[3]{x^3 + 4x^2 + 7x} + x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2}{x^2 + x^2 + x^2} = \frac{4}{3}$$

8. (AK 2009) Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|2x-1| - |2x+1|}{x}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|2x-1|^2 - |2x+1|^2}{x \cdot (|2x-1| + |2x+1|)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{4x^2} - 4x \cancel{+1} - \cancel{4x^2} - 4x \cancel{+1}}{x \cdot 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-8x}{2x} = -4$$

9. **(AK 2010) La funzione** $f(x) = \begin{cases} \frac{7|x|+5x}{7|x|-5x} & x \neq 0 \\ 6 & x=0 \end{cases}$ è continua in tutto \mathbb{R} ?

No: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{7|x|+5x}{7|x|-5x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-7x+5x}{-7x-5x} = \frac{1}{6}; \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{7|x|+5x}{7|x|-5x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{7x+5x}{7x-5x} = 6$

10. **(HSMC 2011) Calcolare** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) \cdot \sin(x) - \tan(x)}{x^2 \cdot \sin(x)}.$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cancel{\sin(x)} \cdot \frac{\cos(x) - 1/\cos(x)}{x^2 \cdot \cancel{\sin(x)}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2(x) - 1}{x^2} \cdot \frac{1}{\cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\sin^2(x)}{x^2} = -1$$

11. **(HSMC 1999) Compute the limit** $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(1) \cdot \cos(h) + \cos(1) \cdot \sin(h) - \sin(1)}{h}.$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(1+h) - \sin(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\sin\left(\frac{1+h-1}{2}\right)\cos\left(\frac{1+h+1}{2}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(\frac{2}{2}\right)}{h/2} = \cos(1)$$

12. **(HSMC 2003) Find all values of a such that** $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + ax - 6}{x^2 + x - 2}$ **exists and is finite.**

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + ax - 6}{x^2 + x - 2} = \left[\frac{-2a-2}{0} \right], \text{ quindi è infinito tranne se } a = -1, \text{ nel qual caso:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2) \cdot (x-3)}{(x+2) \cdot (x-1)} = \frac{5}{3}$$

13. **(HSMC 2004) Compute the following limit** $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x - \sqrt{x}} - \sqrt{x + \sqrt{x}} \right).$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x - \sqrt{x}} - \sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x - \sqrt{x}} + \sqrt{x + \sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = -1$$

14. **(HSMC 2008) Given** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+b}-2}{x} = 1$, **find a + b.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+b}-2}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{ax+b} - 2) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \Rightarrow \sqrt{b} = 2 \Rightarrow b = 4;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+4}-2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{ax+4-4}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{ax+4}+2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{x \cdot (\sqrt{ax+4}+2)} = \frac{a}{4} \Rightarrow a = 4 \Rightarrow a+b = 8$$

15. **(AK 2009) Let** $\lfloor x \rfloor$ **be the largest integer less than or equal to x. Find** $\lim_{x \rightarrow 2,5^-} \lfloor x+3 \rfloor$.

Sia $\lfloor x \rfloor$ il massimo intero minore o uguale a x .

$$\lim_{x \rightarrow 2,5^-} \lfloor x+3 \rfloor = \lfloor 2,5+3 \rfloor = 5$$

16. **(AK 2009) Compute** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan(x)} - e^x}{\tan(x) + x}.$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cdot (e^{\tan(x)-x} - 1) \cdot \frac{\tan(x)-x}{\tan(x)+x}}{\tan(x)-x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\tan(x)}{x} - 1}{\frac{\tan(x)}{x} + 1} = 0$$

17. (AK 2010) Find $h(2)$ such that the function $h(x) = \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2}$ is continuous at $x = 2$.

Trovare $h(2)$ tale che la funzione $h(x) = \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2}$ è continua in $x = 2$

$$h(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cdot (x+5)}{x-2} = 7$$

18. (AK 2010) For what values of x the function $f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ is continuous?

Per quali valori di x la funzione $f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ è continua?

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. (Facoltà scientifiche, Roma La Sapienza) Data la funzione $f(x) = x^2 - 1$, si consideri la successione così definita: $a_1 = 0$, $a_2 = f(a_1)$, ..., $a_{n+1} = f(a_n)$; per ogni numero naturale n . Quanto vale a_{64} ?
 A) -64 B) -1 C) 0 D) 63
 $a_1 = 0$, $a_2 = f(a_1) = f(0) = 0^2 - 1 = -1$; $a_3 = f(a_2) = f(-1) = (-1)^2 - 1 = 0$; $a_4 = f(a_3) = f(0) = -1$; non è difficile capire che otteniamo in sequenza 0 per indici dispari e -1 per quelli pari, quindi la risposta è B
2. (Scienze della formazione primaria, Università di Cagliari 2007–08) L’intervallo aperto $(0; 2)$ comprende A) un solo numero B) un solo numero reale ma nessun numero naturale C) un solo numero relativo ma nessun numero reale D) infiniti numeri naturali E) un solo numero naturale ed infiniti numeri reali
 Comprende 1 e infiniti reali, risposta E