1. Le basi del ragionamento

1.2 Verso il concetto di dimostrazione

Richiamiamo le conoscenze

Negli esercizi seguenti, enunciare le proposizioni $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \dot{\vee} q$, $p \Rightarrow q$, $p \Leftrightarrow q$ e stabilirne il valore di verità, giustificando le risposte.

1. a) (*p:* 3 > 4; *q:* 12 > 1); b) (*p:* 3 < 4; *q:* 12 > 1); c) (*p:* 3 > 4; *q:* 12 < 1); d) (*p:* 3 < 4; *q:* 12 < 1)

a) 3 > 4 Falsa e 12 > 1 Vera. 3 > 4 e 12 > 1 (F) 3 > 4 o 12 > 1 (V), o 3 > 4 o 12 > 1 (V), Se 3 > 4 allora 12 > 1 (V), Solo se 3 > 4 allora 12 > 1 F);

b) 3 < 4 vera e 12 > 1 vera. 3 < 4 e 12 > 1 (V), 3 < 4 o 12 > 1 (V), o 3 < 4 o 12 > 1 (F), Se 3 < 4 allora 12 > 1 (V), Solo se 3 < 4 allora 12 > 1 (V)

c) 3 > 4 falsa e 12 < 1 falsa. 3 > 4 e 12 < 1 (F), 3 > 4 o 12 < 1 (F), o 3 > 4 o 12 < 1 (F), Se 3 > 4 allora 12 < 1 (V), Solo se 3 > 4 allora 12 < 1 (V)

d) 3 < 4 vera e 12 < 1 falsa. 3 < 4 e 12 < 1 (F), 3 < 4 o 12 < 1 (V), o 3 < 4 o 12 < 1 (V), Se 3 < 4 allora 12 < 1 (F), Solo se 3 < 4 allora 12 < 1 (F)

2. *p:* 128 *è un quadrato perfetto*; *q:* 127 *è un numero primo*

128 *è un quadrato perfetto* falso e 127 *è un numero primo* vero. 128 *è un quadrato perfetto* e 127 *è un numero primo* (F), 128 *è un quadrato perfetto* o 127 *è un numero primo* (V), o 128 *è un quadrato perfetto* o 127 *è un numero primo* (V), Se 128 *è un quadrato perfetto* allora 127 *è un numero primo* (V), Solo se 128 *è un quadrato perfetto* allora 127 *è un numero primo* (F)

3. *p:* 113 *è divisibile per* 3; *q:* 115 *non è divisibile per* 3

113 *è divisibile per* 3 falso e 115 *non è divisibile per* 3 vero. 113 *è divisibile per* 3 e 115 *non è divisibile per* 3 (F), 113 *è divisibile per* 3 o 115 *non è divisibile per* 3 (V), o 113 *è divisibile per* 3 o 115 *non è divisibile per* 3 (V), Se 113 *è divisibile per* 3 allora 115 *non è divisibile per* 3 (V), Solo se 113 *è divisibile per* 3 allora 115 *non è divisibile per* 3 (F)

4. *p:* 16 *ha cinque divisori*; *q:* 17 *ha due divisori*

16 *ha cinque divisori* vero (s0no 1, 2, 4, 8, 16) e 17 *ha due divisori* vero (sono 1 e 17). 16 *ha cinque divisori* e 17 *ha due divisori* (V), 16 *ha cinque divisori* o 17 *ha due divisori* (V), o 16 *ha cinque divisori* oe 17 *ha due divisori* (F), Se 16 *ha cinque divisori* allora 17 *ha due divisori* (V), Solo se 16 *ha cinque divisori* allora 17 *ha due divisori* (V)

5. *p:* $2^{10} > 1000$; *q:* 729 *non è un quadrato perfetto*

$2^{10} > 1000$ vero ($2^{10} = 1028$) e 729 *non è un quadrato perfetto* falso ($729 = 27^2$). $2^{10} > 1000$ e 729 *non è un quadrato perfetto* (F), $2^{10} > 1000$ o 729 *non è un quadrato perfetto* (V), o $2^{10} > 1000$ o 729 *non è un quadrato perfetto* (V), Se $2^{10} > 1000$ allora 729 *non è un quadrato perfetto* (F), Solo se $2^{10} > 1000$ allora 729 *non è un quadrato perfetto* (F)

6. *p:* 1221 *è multiplo di* 11; *q:* 12321 *non è multiplo di* 11

1221 *è multiplo di* 11 è vero ($1221 = 11 \cdot 111$) e 12321 *non è multiplo di* 11 è vero. 1221 *è multiplo di* 11 e 12321 *non è multiplo di* 11 (V), 1221 *è multiplo di* 11 o 12321 *non è multiplo di* 11 (V), o 1221 *è multiplo di* 11 o 12321 *non è multiplo di* 11 (F), Se 1221 *è multiplo di* 11 e 12321 allora *non è multiplo di* 11 (V), Solo se 1221 *è multiplo di* 11 allora 12321 *non è multiplo di* 11 (V)

7. *p:* 2^{12} *ha quattro cifre*; *q:* 2^{13} *ha cinque cifre*

2^{12} *ha quattro cifre*, vero ($2^{12} = 4096$) e 2^{13} *ha cinque cifre* è falso ($2^{13} = 8196$). 2^{12} *ha quattro cifre* e 2^{13} *ha cinque cifre* (F), 2^{12} *ha quattro cifre* o 2^{13} *ha cinque cifre* (V), o 2^{12} *ha quattro cifre* o 2^{13} *ha cinque cifre* (V), Se 2^{12} *ha quattro cifre* allora 2^{13} *ha cinque cifre* (F), Solo se 2^{12} *ha quattro cifre* allora*:* 2^{13} *ha cinque cifre* (F)

8. *p: L'Etna è il vulcano attivo più alto d'Europa*; *q: L'Etna si trova in Sicilia*

L'Etna è il vulcano attivo più alto d'Europa è vero e *L'Etna si trova in Sicilia è vero* . *L'Etna è il vulcano attivo più alto d'Europa* e *si trova in Sicilia* (V), *L'Etna è il vulcano attivo più alto d'Europa* o *si trova in Sicilia* (V), o *L'Etna è il vulcano attivo più alto d'Europa* o *si trova in Sicilia* (F), Se l'*Etna è il vulcano attivo più alto d'Europa* allora *si trova in Sicilia* (V), Solo se l'*Etna è il vulcano attivo più alto d'Europa* allora *si trova in Sici-*

lia (V)

9. ***p: Cesare è vissuto prima della nascita di Gesù Cristo*; *q: Cesare ha combattuto contro Attila***

Cesare è vissuto prima della nascita di Gesù Cristo è vero (è morto nel 44°.C.) e *Cesare ha combattuto contro Attila* è falso (Attila è nato nel 406 d.C.). *Cesare è vissuto prima della nascita di Gesù Cristo* e *ha combattuto contro Attila* (F), *Cesare è vissuto prima della nascita di Gesù Cristo* o *ha combattuto contro Attila* (V), O *Cesare è vissuto prima della nascita di Gesù Cristo* o *ha combattuto contro Attila* (V), Se *Cesare è vissuto prima della nascita di Gesù Cristo* allora *ha combattuto contro Attila* (F), Solo se *Cesare è vissuto prima della nascita di Gesù Cristo* allora *ha combattuto contro Attila* (F)

10. ***p: Il canguro è un mammifero*; *q: Il canguro si trova abitualmente in Africa***

Il canguro è un mammifero è falso (è un marsupiale) e *Il canguro si trova abitualmente in Africa* è falso (di solito si trova in Australia). *Il canguro è un mammifero* e *si trova abitualmente in Africa* (F), *Il canguro è un mammifero* o *si trova abitualmente in Africa* (V), O *Il canguro è un mammifero* o *si trova abitualmente in Africa* (V), Se i*l canguro è un mammifero* allora *si trova abitualmente in Africa* (F), Solo se *Il canguro è un mammifero* allora *si trova abitualmente in Africa* (F)

11. ***p: Alessandro Manzoni è nato nel XVIII secolo*; *q: Alessandro Manzoni è nato a Milano***

Alessandro Manzoni è nato nel XVIII secolo è vero (è nato nel 1785) e *Alessandro Manzoni è nato a Milano è vero. Alessandro Manzoni è nato nel XVIII secolo* ed *è nato a Milano.* (V), *Alessandro Manzoni è nato nel XVIII secolo* o *è nato a Milano* (V), O *Alessandro Manzoni è nato nel XVIII secolo* o *è nato a Milano* (F), Se *Alessandro Manzoni è nato nel XVIII secolo* allora *è nato a Milano* (V), Solo se *Alessandro Manzoni è nato nel XVIII secolo* allora *è nato a Milano* (V)

12. ***p: Pablo Picasso ha dipinto il quadro Guernica*; *q: Pablo Picasso ha affrescato il Duomo di Milano***

Pablo Picasso ha dipinto il quadro Guernica è vero e *Pablo Picasso ha affrescato il Duomo di Milano è falso. Pablo Picasso ha dipinto il quadro Guernica* e *ha affrescato il Duomo di Milano* (F), *Pablo Picasso ha dipinto il quadro Guernica* o *ha affrescato il Duomo di Milano* (V), o *Pablo Picasso ha dipinto il quadro Guernica* o *ha affrescato il Duomo di Milano* (V), Se *Pablo Picasso ha dipinto il quadro Guernica* allora *ha affrescato il Duomo di Milano* (F), Solo se *Pablo Picasso ha dipinto il quadro Guernica* allora *ha affrescato il Duomo di Milano* (F)

Nelle seguenti frasi stabilire se il connettivo o è usato nel modo esclusivo (aut) o inclusivo (vel).

13. **a)** ***Al totocalcio si vince con* 13 *o con* 14; b)** ***x è multiplo di* 10 *o di* 15**

a) vel perché si può vincere con entrambi i punteggi ; b) vel, perché per esempio 30 è multiplo sia di 10 che di 15

14. ***Al concorso sono ammessi i laureati in matematica o in fisica***

Vel perché può esserci qualcuno che ha entrambe le lauree

15. **a)** ***I numeri naturali sono pari o dispari*; b)** ***x^2 è un numero positivo o nullo***

a) aut perché non vi sono numeri contemporaneamente pari e dispari b) aut perché solo 0 è nullo e non è positivo

16. ***I triangoli non rettangoli sono acutangoli o ottusangoli***

Aut perché i due concetti si escludono a vicenda

17. ***Il nome di battesimo di mio fratello è Piero o Luigi***

Vel perché qualcuno può chiamarsi Piero Luigi o Pierluigi

18. ***La frazione* 1/*n*, *per n numero naturale rappresenta un numero intero o decimale***

Vel perché i numeri interi sono anche decimali limitati con 0 cifre dopo la virgola

19. ***Quest'estate in vacanza andremo a Parigi o a Londra***

Vel perché possiamo andare in entrambi i posti anche se non nello stesso momento

20. ***La prossima volta che andrò a New York userò l'aereo o la nave***

Vel perché posso andare in Aereo per esempio fino a Buenos Aires e da lì in nave fino a New York

21. ***Nei musei statali italiani hanno ingresso gratuito i minorenni o i maggiori di* 65 *anni***

Aut perché se si è minorenni non si possono avere anche più di 65 anni

22. ***I triangoli in considerazione sono rettangoli o isosceli***

Vel perché esistono i triangoli rettangoli e isosceli, per esempio quello ottenuto traccinado una diagonale in un

quadrato

23. a) ***Sonia ha i capelli biondi o castani;*** **b)** ***Mattia indossa la maglia rossa o gialla***

a) aut perché non può averli contemporaneamente biondi e castani, almeno non naturalmente; b) vel perché si può indossare una maglia con entrambi i colori

24. ***Margherita ogni sera alle*** **20:00** ***legge un libro di Calvino o uno di Dante Alighieri***

Aut perché non può leggere contemporaneamente due libri

25. a) ***Domani è lunedì o martedì;*** **b)** ***Vado al cinema lunedì o martedì***

a) aut perché i due gioni sono distinti; b) vel perché posso andare anche entrambi i giorni

Utilizzando l'equivalenza $\neg p \vee q \equiv p \Rightarrow q$, enunciare in modo diverso le seguente proposizioni logiche

26. a) ***Se domani piove allora resto a casa*****; b)** ***Se Giovanni è sposato sua moglie si chiama Maria***

a) *Domani non piove oppure resto a casa*; b) *Giovanni non è sposato oppure sua moglie si chiama Maria*

27. a) ***Se Michelangelo ha dipinto la Gioconda allora Leonardo ha scolpito la Pietà*****; b)** ***Se l'elettrone ha carica negativa allora il protone ha carica positiva***

a) *Michelangelo non ha dipinto la Gioconda oppure Leonardo ha scolpito la Pietà*; b) *L'elettrone non ha carica negativa oppure il protone ha carica positiva*

28. a) ***Se un quadrilatero è un parallelogramma allora non è un rettangolo*****; b)** ***Se a e b non sono rette parallele allora a e b sono incidenti***

a) *Un quadrilatero non è un parallelogramma oppure non è un rettangolo*; b) *a e b sono rette parallele oppure a e b sono incidenti*

29. a) ***La balena è un mammifero oppure il canguro è un marsupiale*****; b)** ***L'Italia non confina con la Francia oppure il Belgio non confina con la Germania***

a) *Se la balena non è un mammifero allora il canguro è un marsupiale*; b) *Se l'Italia confina con la Francia, allora il Belgio non confina con la Germania*

30. a) ***Garibaldi non è nato ad Ajaccio oppure Napoleone è nato in Corsica*****; b)** ***ABC non è un triangolo rettangolo oppure è un triangolo isoscele.***

a) *Se Garibaldi è nato ad Ajaccio allora Napoleone è nato in Corsica*; b) *Se ABC è un triangolo rettangolo allora è un triangolo isoscele*

Provare che le seguenti coppie di enunciati sono equiveridici.

31. a) $p \wedge q \equiv \neg (p \Rightarrow \neg q)$**; b)** $p \vee q \equiv \neg p \Rightarrow q$

Costruiamo le tabelle di verità

a)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Rightarrow \neg q$	$\neg (p \Rightarrow \neg q)$
V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	V	F
F	F	V	V	V	F

b)

p	q	$\neg p$	$\neg p \Rightarrow q)$
V	V	F	V
V	F	F	V
F	V	V	V
F	F	V	F

Tenuto conto del precedente esercizio esprimere in modo equivalente le seguenti proposizioni logiche.

32. a) ***Katia è bionda e americana;*** **b)** ***Mark pratica calcio o boxe***

Basta usare l'equivalenza delle proposizioni: a) *Non è vero che se Katia è bionda allora non è americana*; b) *Se Mark non pratica calcio allora pratica boxe*

I quantificatori

Tradurre in linguaggio naturale i seguenti enunciati logici simbolici, quindi costruirne la negazione. Laddove possibile dire se l'enunciato è vero o falso

1. $a^2 > 0 \ \forall\ a \in A$

Tutti i numeri dell'insieme A hanno il quadrato positivo; $\exists a \in A$: $a^2 \leq 0$

2. $\exists b \in B$: $b^3 > b^4$

Almeno un numero di B ha il cubo maggiore della sua quarta potenza; $b^3 \leq b^4$, $\forall b \in B$

3. $\exists c \notin C$: $c^2 \in C$

Qualche numero non appartenente a C ha il quadrato appartenente a C; $c^2 \notin C$, $\forall c \in C$

4. $d^3 < 1, \forall d \notin D$

Tutti i numeri non appartenenti a D hanno il cubo minore di 1; $\exists d \in D$: $d^3 \geq 1$

5. $f \in F, \forall f \notin G$

Tutti gli elementi che non appartengono a G appartengono a F; $\exists f \in G$: $f \notin F$

6. $e^4 \leq 3, \forall e \notin E$

Tutti i numeri non appartenenti ad E hanno la quarta potenza minore o uguale a 3; $\exists e \notin$ E: $e^4 > 3$

7. $\exists g \in G$: $g \notin H$

Almeno un elemento di G non appartiene ad H; $g \in H$, $\forall g \in G$

8. $\exists h \notin H$: $h \notin K$

Qualche numero non appartenente ad H non appartiene a K; $h \in K$, $\forall h \notin H$

9. $a = 0 \Rightarrow a \cdot b = 0, \forall b \in \mathbb{R}$

Il prodotto di 0 per ogni numero reale è 0: Vero; $\nexists\ b \in \mathbb{R} : a = 0 \Rightarrow a \cdot b \neq 0$

10. $\exists n \in \mathbb{N} : n > 5 \Rightarrow n^2 > 100$

Almeno un naturale maggiore di 5 ha il quadrato maggiore di 100: Vero; $n > 5 \Rightarrow n^2 \leq 100$, $\forall n \in \mathbb{N}$

11. $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b, \forall\ a, b \notin \mathbb{R}^-$

Se due numeri reali non negativi hanno i quadrati uguali allora sono uguali: Vero; $\exists\ a, b \notin \mathbb{R}^-$: $a^2 = b^2 \Rightarrow a \neq b$

12. $\exists\ z \notin \mathbb{Z}$: $z > 1 \Rightarrow 1/z > 1$

Almeno un numero non intero maggiore di 1 ha il reciproco maggiore di 1 : Falso; $z > 1 \Rightarrow 1/z \leq 1$, $\forall z \notin \mathbb{Z}$

Nei seguenti esercizi tradurre in linguaggio naturale le seguenti espressioni simboliche:

a) $\forall x\ \exists y$: $A(x, y)$; ***b)*** $\forall y\ \exists x$: $A(x, y)$; ***c)*** $\exists x\ \forall y$: $A(x, y)$; ***d)*** $\exists y\ \forall x$: $A(x, y)$

13. $A(x, y)$: ***la squadra x ha incontrato la squadra y***

a) *Ogni squadra ha fatto almeno una partita*; b) *Ogni squadra ha fatto almeno una partita*; c) *Almeno una squadra ha incontrato tutte le altre*; d) *Almeno una squadra è stata incontrata da tutte le altre*

14. $A(x, y)$: ***la squadra x ha battuto la squadra y***

a) *Ogni squadra ha vinto almeno una partita*; b) *Ogni squadra ha perso almeno una partita*; c) *Almeno una squadra ha vinto tutte le partite*; d) *Almeno una squadra ha perso tutte le partite*

15. $A(x, y)$: ***l'attrice x ha recitato con l'attore y.***

a) *Ogni attrice ha recitato con almeno un attore*; b) *Ogni attore ha recitato con almeno un'attrice*; c) *Almeno un'attrice ha recitato con tutti gli attori*; d) *Almeno un attore ha recitato con tutte le attrici*

16. $A(x, y)$: ***la nazione x confina con la nazione y.***

a) *Ogni nazione confina con almeno un'altra*; b) *Ogni nazione confina con almeno un'altra*; c) *Almeno una nazione confina con tutte le altre*; d) *Almeno una nazione confina con tutte le altre*

17. $A(x, y)$: ***lo studente x raggiunge la sufficienza nella materia y.***

[a) *Ogni studente raggiunge la sufficienza in almeno una materia*; b) *In ogni materia almeno uno studente raggiunge la sufficienza*; c) *Almeno uno studente raggiunge la sufficienza in tutte le materie*; d) *In almeno una materia tutti raggiungono la sufficienza*

18. $A(x, y)$: ***il signor x ha letto il libro y.***

a) *Ogni persona ha letto almeno un libro*; b) *Ogni libro è stato letto da almeno una persona*; c) *Almeno una persona ha letto tutti i libri*; d) *Almeno un libro è stato letto da tutti*

19. *A*(*x*, *y*): *il ragazzo x ha baciato la ragazza y*.

a) *Ogni ragazzo ha baciato almeno una ragazza*; b) *Ogni ragazza è stata baciata almeno da un ragazzo*; c) *Almeno un ragazzo ha baciato tutte le ragazze;* d) *Almeno una ragazza è stata baciata da tutti i ragazzi*

20. *A*(*x*, *y*): *il signor x ha fatto gli auguri a y*.

a) *Ogni persona ha fatto gli auguri ad almeno un'altra persona*; b) *Ogni persona ha ricevuto gli auguri da almeno una persona*; c) *Almeno una persona ha fatto gli auguri a tutti*; d) *Almeno una persona ha ricevuto gli auguri da tutti gli altri*

21. *A*(*x*, *y*): *la ragazza x ha ballato con il ragazzo y*.

a) *Ogni ragazza ha ballato con almeno un ragazzo*; b) *Ogni ragazzo ha ballato con almeno una ragazza*; c) *Almeno una ragazzo ha ballato con tutti i ragazzi*; d) *Almeno un ragazzo ha ballato con tutte le ragazze*

22. Con riferimento agli esercizi precedenti in alcuni casi scambiare *x* con *y* non ha prodotto variazione del risultato, perché?

La relazione è simmetrica, nel senso che $A(x, y) = A(y, x)$

Tradurre in simboli matematici i seguenti enunciati logici, quindi costruirne la negazione. Per gli enunciati logici stabilire il valore di verità.

23. *Chi si ferma è perduto*. *F* è l'insieme di quelli che si fermano, *P* quello di chi si perde.

$x \in P$, $\forall x \in F$; $\exists x \in F$: $x \notin P$

24. *Chi dorme non piglia pesci*. *D* è l'insieme di chi dorme, *P* quello di chi piglia pesci.

$x \notin P$, $\forall x \in D$; $\exists x \in D$: $x \in P$

25. *Chi trova un amico trova un tesoro*. *A* è l'insieme di chi trova un amico, *T* quello di chi trova un tesoro.

$x \in T$, $\forall x \in A$; $\exists x \in A$: $x \notin T$

26. *Ognuno sta solo sul cuor della terra* (Quasimodo). *P* è l'insieme delle persone, *S* quello di chi sta solo sul cuor della terra.

$x \in S$, $\forall x \in P$; $\exists x \in P$: $x \notin S$

27. *Tutte le donne sono cattive guidatrici*. *D* è l'insieme delle donne, *G* quello di chi sa guidare bene l'automobile.

$x \notin G$, $\forall x \in D$; $\exists x \in D$: $x \in G$

28. *Chi la fa l'aspetti!* *F* è l'insieme di coloro che *fanno*, *A* quello di coloro che *aspettano*.

$x \in A$, $\forall x \in F$; $\exists x \in F$: $x \notin A$

29. *Chi sbaglia paga*. *S* è l'insieme di quelli che sbagliano, *P* quello di quelli che pagano.

$x \in P$, $\forall x \in S$; $\exists x \in S$: $x \notin P$

30. *Non dorme nessuno nel mondo* (Federico Garcia Lorca). *D* è l'insieme di quelli che dormono, *E* quello degli esseri del mondo.

$x \in D$, $\forall x \in E$; $\exists x \in E$: $x \notin D$

31. *Ogni triangolo equilatero non è acutangolo*. *E* è l'insieme dei triangoli equilateri, *A* quello dei triangoli acutangoli.

$x \notin A$, $\forall x \in E$ è falso tutti gli angoli misurano 60°; $\exists x \in E$: $x \in A$

32. *Alcuni insetti non sono ovipari*. *I* è l'insieme degli insetti, *O* quello degli ovipari.

$\exists x \in I$: $x \notin O$ è vero per esempio lo scorpione; $x \in O$, $\forall x \in I$

33. *Nessun equino ha due zampe*. *E* è l'insieme degli equini, *Z* quello degli animali a due zampe.

$x \notin Z$, $\forall x \in E$, è vero; $\exists x \in E$: $x \in Z$

34. *Tutti i quadrati perfetti sono pari*. *Q* è l'insieme dei quadrati perfetti, *P* quello dei numeri pari.

$x \in P$, $\forall x \in Q$ è falso, per esempio 9; $\exists x \in Q$: $x \notin P$

35. *Non tutti gli europei sono cristiani*. *E* è l'insieme degli europei, *C* quello dei cristiani.

$\exists x \in E$: $x \notin C$ è certamente vero; $x \in C$, $\forall x \in E$

36. *Alcune monete di corso legale in Italia non hanno una forma rotonda*. *M* è l'insieme delle monete di corso legale in Italia, *R* quello degli oggetti di forma rotonda.

$\exists x \in M$: $x \notin R$; è falso almeno con gli euro; $x \in R$, $\forall\, x \in M$

37. ***Qualche numero è multiplo di* 42 *ma non di* 43. *X* è l'insieme dei multipli di 42, *Y* dei multipli di 43.**

$\exists x \in X$: $x \notin Y$; Vero per esempio 42; $x \in Y$, $\forall x \in X$

38. ***Ogni poliedro regolare ha facce triangolari. P* è l'insieme dei poliedri regolari, *T* quello dei poliedri le cui facce sono triangolari.**

$x \in T$, $\forall x \in P$; è falso per esempio il cubo ha facce quadrate; $\exists x \in P$: $x \notin T$]

39. ***Comunque si considerino due numeri la loro media aritmetica è un numero non intero. A* è l'insieme delle medie aritmetiche di due numeri qualsiasi.**

[$x \notin \mathbb{Z}$,$\forall x \in A$; è falso per esempio la media di 2 e 4 è 3; $\exists x \in A$: $x \in \mathbb{Z}$

Negli esercizi seguenti, enunciare le proposizioni $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \veebar q$, $p \Rightarrow q$, $p \Leftrightarrow q$ e stabilirne il valore di verità, giustificando le risposte.

40. ***p: Tutti i numeri primi sono dispari*; *q: Alcuni numeri primi finiscono per* 7.**

Tutti i numeri primi sono dispari è falso (2 è pari) e *Alcuni numeri primi finiscono per* 7 è vero (7, 17). *Tutti i numeri primi sono dispari* e *Alcuni numeri primi finiscono per* 7 (F), *Tutti i numeri primi sono dispari* o *Alcuni numeri primi finiscono per* 7 (V), O *Tutti i numeri primi sono dispari* o *Alcuni numeri primi finiscono per* 7 (V), Se *Tutti i numeri primi sono dispari* allora *Alcuni numeri primi finiscono per* 7 (V), Solo se *Tutti i numeri primi sono dispari* allora *Alcuni numeri primi finiscono per* 7 (F)

41. ***p: Tutti i triangoli isosceli sono equilateri*; *q: Alcuni numeri pari sono divisibili per* 3.**

Tutti i triangoli isosceli sono equilateri è falso e *Alcuni numeri pari sono divisibili per* 3 è vero (per esempio 6). *Tutti i triangoli isosceli sono equilateri* e *Alcuni numeri pari sono divisibili per* 3 (F), *Tutti i triangoli isosceli sono equilateri* o *Alcuni numeri pari sono divisibili per* 3 (V), O *Tutti i triangoli isosceli sono equilateri* o *Alcuni numeri pari sono divisibili per* 3 (V), Se *Tutti i triangoli isosceli sono equilateri* allora *Alcuni numeri pari sono divisibili per* 3 (V), Solo se *Tutti i triangoli isosceli sono equilateri* allora *Alcuni numeri pari sono divisibili per* 3 (F)

42. ***p: Ogni numero quadrato perfetto non finisce per* 2; *q: Alcuni rettangoli sono quadrati.***

Ogni numero quadrato perfetto non finisce per 2 è vero e *Alcuni rettangoli sono quadrati è vero. Ogni numero quadrato perfetto non finisce per* 2 e *Alcuni rettangoli sono quadrati* (V), *Ogni numero quadrato perfetto non finisce per* 2 o *Alcuni rettangoli sono quadrati* (V), O *Ogni numero quadrato perfetto non finisce per* 2 o *Alcuni rettangoli sono quadrati* (F), Se *Ogni numero quadrato perfetto non finisce per* 2 allora *Alcuni rettangoli sono quadrati* (V), Solo se *Ogni numero quadrato perfetto non finisce per* 2 allora *Alcuni rettangoli sono quadrati* (V)

43. ***p: Alcuni trapezi hanno un angolo retto*; *q: Tutti i numeri multipli di* 7 *sono dispari.***

Alcuni trapezi hanno un angolo retto è vero (i trapezi rettangoli ne hanno 2) e *Tutti i numeri multipli di* 7 *sono dispari* è falso (per esempio 14). *Alcuni trapezi hanno un angolo retto* e *Tutti i numeri multipli di* 7 *sono dispari* (F), *Alcuni trapezi hanno un angolo retto* o *Tutti i numeri multipli di* 7 *sono dispari* (V), O *Alcuni trapezi hanno un angolo retto* o *Tutti i numeri multipli di* 7 *sono dispari* (V), Se *Alcuni trapezi hanno un angolo retto* allora *Tutti i numeri multipli di* 7 *sono dispari* (F), Solo se *Alcuni trapezi hanno un angolo retto* allora *Tutti i numeri multipli di* 7 *sono dispari* (F)

44. ***p: Tutti i rombi sono parallelogrammi*; *q: Alcune frazioni generano numeri periodici semplici.***

Tutti i rombi sono parallelogrammi è vero e *Alcune frazioni generano numeri periodici semplici è vero* (per esempio 1/3). *Tutti i rombi sono parallelogrammi* e *Alcune frazioni generano numeri periodici semplici* (V), *Tutti i rombi sono parallelogrammi* o *Alcune frazioni generano numeri periodici semplici* (V), O *Tutti i rombi sono parallelogrammi* o *Alcune frazioni generano numeri periodici semplici* (F), Se *Tutti i rombi sono parallelogrammi* allora *Alcune frazioni generano numeri periodici semplici* (V), Solo se *Tutti i rombi sono parallelogrammi* allora *Alcune frazioni generano numeri periodici semplici* (V)

45. ***p: Tutti i numeri che finiscono per* 4 *sono quadrati perfetti*; *q: Alcuni triangoli rettangoli sono equilateri.***

Tutti i numeri che finiscono per 4 *sono quadrati perfetti* è falso (per esempio 14) e *Alcuni triangoli rettangoli sono equilateri* è falso. *Tutti i numeri che finiscono per* 4 *sono quadrati perfetti* e *Alcuni triangoli rettangoli so-*

no equilateri (F), *Tutti i numeri che finiscono per* 4 *sono quadrati perfetti* o *Alcuni triangoli rettangoli sono equilateri* (F), O *Tutti i numeri che finiscono per* 4 *sono quadrati perfetti* o *Alcuni triangoli rettangoli sono equilateri* (F), Se *Tutti i numeri che finiscono per* 4 *sono quadrati perfetti* allora *Alcuni triangoli rettangoli sono equilateri* (V), Solo se *Tutti i numeri che finiscono per* 4 *sono quadrati perfetti* allora *Alcuni triangoli rettangoli sono equilateri* (V)

46. *p: Alcuni quadrati perfetti hanno un numero dispari di divisori*; *q: Tutti i quadrati perfetti hanno un numero dispari di divisori*.

Alcuni quadrati perfetti hanno un numero dispari di divisori è vero, in effetti tutti i quadrati perfetti e *Tutti i quadrati perfetti hanno un numero dispari di divisori quindi anche questo è vero. Alcuni quadrati perfetti hanno un numero dispari di divisori* e *Tutti i quadrati perfetti hanno un numero dispari di divisori* (V), *Alcuni quadrati perfetti hanno un numero dispari di divisori* o *Tutti i quadrati perfetti hanno un numero dispari di divisori* (V), O *Alcuni quadrati perfetti hanno un numero dispari di divisori* o *Tutti i quadrati perfetti hanno un numero dispari di divisori* (F), Se *Alcuni quadrati perfetti hanno un numero dispari di divisori* allora *Tutti i quadrati perfetti hanno un numero dispari di divisori* (V), Solo se *Alcuni quadrati perfetti hanno un numero dispari di divisori* allora *Tutti i quadrati perfetti hanno un numero dispari di divisori* (V)

47. *p: Tutti i ruminanti sono vegetariani*; *q: Alcuni vegetariani sono ruminanti*.

Tutti i ruminanti sono vegetariani è vero e *Alcuni vegetariani sono ruminanti* è vero . *Tutti i ruminanti sono vegetariani* e *Alcuni vegetariani sono ruminanti* (V), *Tutti i ruminanti sono vegetariani* o *Alcuni vegetariani sono ruminanti* (V), O *Tutti i ruminanti sono vegetariani* o *Alcuni vegetariani sono ruminanti* (F), Se *Tutti i ruminanti sono vegetariani* allora *Alcuni vegetariani sono ruminanti* (V), Solo se *Tutti i ruminanti sono vegetariani* allora *Alcuni vegetariani sono ruminanti* (V)

48. *p: Alcuni ruminanti sono vegetariani*; *q: Tutti i vegetariani sono ruminanti*.

Alcuni ruminanti sono vegetariani è vero e *Tutti i vegetariani sono ruminanti è falso. Alcuni ruminanti sono vegetariani* e *Tutti i vegetariani sono ruminanti* (F), *Alcuni ruminanti sono vegetariani* o *Tutti i vegetariani sono ruminanti* (V), O *Alcuni ruminanti sono vegetariani* o *Tutti i vegetariani sono ruminanti* (V), Se *Alcuni ruminanti sono vegetariani* allora *Tutti i vegetariani sono ruminanti* (F), Solo se *Alcuni ruminanti sono vegetariani* allora *Tutti i vegetariani sono ruminanti* (F)

49. *p: Qualche cittadino italiano abita negli U.S.A.*; *q: Qualche cittadino statunitense non abita in Italia*.

Qualche cittadino italiano abita negli U.S.A. è vero e *Qualche cittadino statunitense non abita in Italia è falso. Qualche cittadino italiano abita negli U.S.A.* e *Qualche cittadino statunitense non abita in Italia* (V), *Qualche cittadino italiano abita negli U.S.A.* o *Qualche cittadino statunitense non abita in Italia* (V), O *Qualche cittadino italiano abita negli U.S.A.* o *Qualche cittadino statunitense non abita in Italia* (F), Se *Qualche cittadino italiano abita negli U.S.A.* allora *Qualche cittadino statunitense non abita in Italia* (V), Solo se *Qualche cittadino italiano abita negli U.S.A.* allora *Qualche cittadino statunitense non abita in Italia* (V)

50. *p: Alcune città italiane hanno più di dieci milioni di abitanti; q: Tutte le città del mondo non hanno più di dieci milioni di abitanti*.

Alcune città italiane hanno più di dieci milioni di abitanti è falso e Tutte le città del mondo non hanno più di dieci milioni di abitanti è falso. *Alcune città italiane hanno più di dieci milioni di abitanti e Tutte le città del mondo non hanno più di dieci milioni di abitanti*. (F), *Alcune città italiane hanno più di dieci milioni di abitanti o Tutte le città del mondo non hanno più di dieci milioni di abitanti* (F), O *Alcune città italiane hanno più di dieci milioni di abitanti O Tutte le città del mondo non hanno più di dieci milioni di abitanti* (F), Se *Alcune città italiane hanno più di dieci milioni di abitanti* allora *Tutte le città del mondo non hanno più di dieci milioni di abitanti* (V), Solo se *Alcune città italiane hanno più di dieci milioni di abitanti* allora *Tutte le città del mondo non hanno più di dieci milioni di abitanti* (V)

51. *p: Alcuni cantanti italiani cantano in inglese*; *q: Nessun cantante inglese canta in italiano*.

Alcuni cantanti italiani cantano in inglese è vera e *Nessun cantante inglese canta in italiano è falsa. Alcuni cantanti italiani cantano in inglese* e *Nessun cantante inglese canta in italiano* (F), *Alcuni cantanti italiani cantano in inglese* o *Nessun cantante inglese canta in italiano* (V), O *Alcuni cantanti italiani cantano in inglese* o *Nessun cantante inglese canta in italiano* (V), Se *Alcuni cantanti italiani cantano in inglese* allora *Nessun cantante inglese canta in italiano* (F), Solo se *Alcuni cantanti italiani cantano in inglese* allora *Nessun cantante inglese canta in italiano* (F)

52. *p: Nessun siciliano ha i capelli biondi*; *q: Qualche svedese non ha i capelli neri.*

Nessun siciliano ha i capelli biondi è falsa e *Qualche svedese non ha i capelli neri è vera*. *Nessun siciliano ha i capelli biondi* e *Qualche svedese non ha i capelli neri* (F), *Nessun siciliano ha i capelli biondi* o *Qualche svedese non ha i capelli neri* (V), O *Nessun siciliano ha i capelli biondi* o *Qualche svedese non ha i capelli neri* (V), Se *Nessun siciliano ha i capelli biondi* allora *Qualche svedese non ha i capelli neri* (V), Solo se *Nessun siciliano ha i capelli biondi* allora *Qualche svedese non ha i capelli neri* (F)

53. *p: Alcuni serpenti sono più lunghi di 5 metri*; *q: Alcuni mammiferi vivono nelle acque salate.*

Alcuni serpenti sono più lunghi di 5 metri è vera e *Alcuni mammiferi vivono nelle acque salate è vera. Alcuni serpenti sono più lunghi di 5 metri* e *Alcuni mammiferi vivono nelle acque salate* (V), *Alcuni serpenti sono più lunghi di 5 metri* o *Alcuni mammiferi vivono nelle acque salate* (V), O *Alcuni serpenti sono più lunghi di 5 metri* o *Alcuni mammiferi vivono nelle acque salate* (F), Se *Alcuni serpenti sono più lunghi di 5 metri* allora *Alcuni mammiferi vivono nelle acque salate* (V), Solo se *Alcuni serpenti sono più lunghi di 5 metri* allora *Alcuni mammiferi vivono nelle acque salate* (V)

Provare che i seguenti enunciati sono equiveridici, A e B sono generiche proposizioni logiche variabili

54. a) $(\forall x\,(A(x) \wedge B(x))$; $\forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x))$; b) $(\exists x\,(A(x) \vee B(x))$; $(\exists x\, A(x) \vee \exists x\, B(x))$

a) Se le proposizioni A e B sono entrambe vere per ogni variabile x, allora per ogni x è vera A e per ogni x è vera B. Ovviamente vale il viceversa; b) Se esiste almeno un x, diciamo x_1 per cui vale $A(x_1)$ oppure $B(x_1)$, allora vale una almeno fra $\exists A(x_1)$ o $\exists B(x_1)$. Analogo ragionamento per il viceversa.

55. a) $(\forall x \forall y\, A(x, y)$; $\forall y \forall x\, A(x, y))$; b) $(\exists x \exists y\, A(x, y)$; $\exists y \exists x\, A(x, y))$

a) Se per ogni x e per ogni y vale $A(x, y)$ allora essa vale anche per ogni y ed ogni x; b) Stesso ragionamento di a)

56. Provare che $\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x) \Rightarrow \forall x\,(A(x) \vee B(x))$, ma non il viceversa, quindi le due proposizioni non sono equivalenti

Se per qualsiasi x vale almeno una fra A e B, allora per ogni x vale A o vale per ogni x vale B. Non vale il viceversa, Supponiamo che A sia la proprietà essere pari e B la proprietà essere dispari, allora è vero che ogni numero naturale è pari o dispari, ma non è vero né che ogni numero è pari, né che ogni numero è dispari.

57. Come il precedente esercizio per $\exists x\,(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x\, A(x) \wedge \exists x\, B(x)$.

Se esiste x_1 per cui $A(x_1) \wedge B(x_1)$ è vera, allora effettivamente $\exists x_1\, A(x_1) \wedge \exists x_1\, B(x_1)$, Viceversa, se $\exists x_1\, A(x_1) \wedge \exists x_2\, B(x_2)$, non è detto che sia vera né $A(x_1) \wedge B(x_1)$, né $A(x_2) \wedge B(x_2)$. Esempio A è la proprietà dei numeri naturali di essere pari e B quella dei naturali di essere dispari, allora esiste 2: $A(2)$ ed esiste 3: $B(3)$, ma ovviamente non esiste alcun numero naturale che sia contemporaneamente pari e dispari.

58. Come il precedente esercizio per $\forall x\,(A(x) \Rightarrow B(x)) \Rightarrow (\forall x\, A(x) \Rightarrow \forall x\, B(x))$.

Se per ogni x è vero $A(x) \Rightarrow B(x)$ allora è vero anche che $\forall x\, A(x) \Rightarrow \forall x\, B(x)$. Viceversa non è detto, per esempio se A è essere pari, falsa per ogni x naturale, e B è essere dispari, anch'essa falsa per ogni x naturale, è vero che se tutti i naturali sono pari allora sono dispari (falso implica falso), ma non è vero che per ogni naturale, se è pari allora è dispari.

Il calcolo proposizionale

Costruire le tabelle di verità delle seguenti proposizioni

1. a) $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$; b) $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$; c) $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$; d) $(\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

a)

p	q	$\neg q$	$p \wedge q = r$	$p \wedge \neg q = s$	$r \vee s$
V	V	F	V	F	V
V	F	V	F	V	V
F	V	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F

b)

p	q	$\neg p$	$p \wedge q = r$	$\neg p \wedge q = s$	$r \vee s$
V	V	F	V	F	V

V	F	F	F	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	F

c)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge \neg q = r$	$\neg p \wedge \neg q = s$	$r \vee s$
V	V	F	F	F	F	F
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	V	V

d)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge q = s$	$\neg p \wedge \neg q = s$	$r \vee s$
V	V	F	F	F	F	F
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	F	V	F	V
F	F	V	V	F	V	V

2. a) $\neg(p \Rightarrow q)$; b) $\neg p \wedge q$; c) $\neg p \wedge \neg q$; d) $\neg p \vee \neg q$; e) $p \vee \neg q$

a)

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg(p \Rightarrow q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	F

b)

p	q	$\neg p$	$\neg p \wedge q$
V	V	F	F
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	F

c)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

d)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

e)

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$
V	V	F	V
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	V

Tenuto conto delle precedenti tabelle di verità determinare il valore di verità dei seguenti enunciati composti

3. **a) 3 *e* 17 *sono numeri primi o* 3 *è primo e* 17 *no*; b) *Un quadrato e un trapezio sono entrambi rombi o un quadrato è rombo e un trapezio no***

a) ci riferiamo alla tabella della proposizione $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$, in particolare alla sua prima riga, pertanto la proposizione è vera;
b) ci riferiamo sempre alla stessa tabella ma stavolta alla sua seconda riga, pertanto la proposizione è ancora vera

4. **a) *Non è vero che se Roma è capitale d'Italia allora Parigi è capitale del Belgio*; b) 1/3 *non è un numero periodico e* 1/4 *lo è***

a) ci riferiamo alla tabella della proposizione $\neg(p \Rightarrow q)$, in particolare alla sua seconda riga, pertanto la proposizione è vera; b) ci riferiamo alla tabella della proposizione $\neg p \wedge q$, in particolare alla sua quarta riga, pertanto la proposizione è falsa

5. **a) *Né* 128 *né* 256 *sono quadrati perfetti; b) Un triangolo scaleno ha due angoli uguali o non ha tutti i lati diversi***

a) ci riferiamo alla tabella della proposizione $\neg p \vee \neg q$, in particolare alla sua terza riga, pertanto la proposizione è falsa; b) ci riferiamo alla tabella della proposizione $p \vee \neg q$, in particolare alla sua quarta riga, pertanto la proposizione è vera

Costruire le tabelle di verità dei seguenti enunciati composti

6. **a) $(p \wedge q) \wedge r$; b) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$; c) $p \vee (q \vee r)$; d) $p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)$**

a)

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge q \wedge r$
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	V	F	F
V	V	F	V	F
V	F	F	F	F
F	V	F	F	F
F	F	F	F	F

b)

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$
V	V	V	V	V
V	F	V	F	V
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	F	F	V
F	V	F	V	F
F	F	F	V	F

c)

p	q	r	$q \vee r$	$p \vee q \vee r$
V	V	V	V	V
V	F	V	V	V
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	V	V
F	F	F	F	F

d)

p	q	r	$q \Leftrightarrow r$	$p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)$
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	V	V	V	F
F	F	V	F	V
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	F	F	V
F	F	F	V	F

7. **a)** $(p \dot{\vee} q) \dot{\vee} r$; **b)** $(p \wedge q) \vee r$; **c)** $p \Rightarrow (\neg q \Leftrightarrow r)$; **d)** $(\neg p \Leftrightarrow \neg q) \vee \neg r$; **e)** $\neg p \wedge (q \dot{\vee} r)$

a)

p	q	r	$p \dot{\vee} q$	$p \dot{\vee} q \dot{\vee} r$
V	V	V	F	V
V	F	V	V	F
F	V	V	V	F
F	F	V	F	V
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	F	F

b)

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$
V	V	V	V	V
V	F	V	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	F	F	F
F	F	F	F	F

c)

p	q	r	$\neg q$	$\neg q \Leftrightarrow r$	$p \Rightarrow (\neg q \Leftrightarrow r)$
V	V	V	F	F	F
V	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	F	V	V
F	F	F	V	F	V

d)

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg r$	$\neg p \Leftrightarrow \neg q$	$(\neg p \Leftrightarrow \neg q) \vee \neg r$
V	V	V	F	F	F	V	V
V	F	V	F	V	F	F	F

F	V	V	V	F	F	F	F
F	F	V	V	V	F	V	V
V	V	F	F	F	V	V	V
V	F	F	F	V	V	F	V
F	V	F	V	F	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V	V

e)

p	q	r	$\neg p$	$q \dot{\vee} r$	$\neg p \wedge (q \dot{\vee} r)$
V	V	V	F	F	F
V	F	V	F	V	F
F	V	V	V	F	F
F	F	V	V	V	V
V	V	F	F	V	F
V	F	F	F	F	F
F	V	F	V	V	V
F	F	F	V	F	F

Provare che le seguenti sono delle tautologie.

8. a) $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$, detta legge di Peirce; b) $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$, detta legge di Dummett

a)

p	q	$p \Rightarrow q = r$	$r \Rightarrow p = s$	$s \Rightarrow p$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

b)

p	q	$p \Rightarrow q = r$	$q \Rightarrow p = s$	$r \vee s$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

9. **a)** $(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow q$; b) $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$

a)

p	q	$\neg p$	$p \Rightarrow q = r$	$\neg p \Rightarrow q = s$	$r \wedge s = t$	$t \Rightarrow q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	V
F	V	V	V	F	F	V
F	F	V	V	F	F	V

b)

p	q	r	$q \Rightarrow r = s$	$p \Rightarrow s = n$	$p \Rightarrow q = t$	$p \Rightarrow r = w$	$t \Rightarrow w$	$n \Rightarrow w$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F	F	V
V	F	F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	F	V	V	V	V	V

F	F	F	V	V	V	V	V	V

10. Enunciare le tautologie degli esercizi 8b e 9a, servendosi delle proposizioni seguenti: *p*: *Carlo è italiano*; *q*: *Carlo è biondo*.

8b) Se Carlo è italiano allora è biondo oppure se Carlo è biondo allora è italiano; 9a) Se Carlo è italiano e biondo e se non è italiano è biondo, allora Carlo è biondo

Tenuto conto delle precedenti tabelle di verità determinare il valore di verità dei seguenti enunciati composti

11. a) 12, 13 *e* 14 *sono tutti numeri primi*; b) 23, 41 *o* 72 *sono dispari*

a) ci riferiamo alla tabella della proposizione $p \wedge q \wedge r$, in particolare alla sua settima riga, pertanto la proposizione è falsa; b) ci riferiamo alla tabella della proposizione $p \vee q \vee r$, in particolare alla sua quinta riga, pertanto la proposizione è vera

12. a) *Uno solo fra* 1/7, 1/8 *e* 1/9 *sono numeri periodici semplici*; b) 8 *e* 27 *sono cubi perfetti o* 1024 *non è un quadrato perfetto*

a) ci riferiamo alla tabella della proposizione $p \vee q \vee r$, in particolare alla sua seconda riga, pertanto la proposizione è falsa; b) ci riferiamo alla tabella della proposizione $(p \wedge q) \vee r$ (anche se r è una proposizione negata) in particolare alla sua quinta riga, pertanto la proposizione è vera

13. a) *Se un esagono ha* 9 *diagonali allora solo se* 2 *non è primo* 3 *lo è*; b) *Se* $2^{10} > 10^3$ *allora solo se non è vero che* $3^{10} > 10^4$ *allora è* $4^{10} < 10^5$

a) ci riferiamo alla tabella della proposizione $p \Rightarrow (\neg q \Leftrightarrow r)$, in particolare alla sua prima riga, pertanto la proposizione è falsa; b) ci riferiamo alla tabella della proposizione $p \Rightarrow (\neg q \Leftrightarrow r)$, in particolare alla sua quinta riga, pertanto la proposizione è vera

Tenuto conto delle leggi di De Morgan, enunciare in modo equivalente le seguenti proposizioni logiche

14. a) *Domani non è lunedì o martedì*; b) *Non sono sposato né con Carla né con Elisabetta*

a) *Domani non è né lunedì né martedì*; b) *Non sono sposato con Carla o con Elisabetta*

15. a) *Non è vero che Palermo ha meno di* 50000 *o più di* 500000 *abitanti*; b) *Marco non è nè cattolico, nè musulmano*

a) *Palermo non ha né meno di* 50000, *né più di* 500000 *abitanti*; b) *Marco non è cattolico o non è musulmano*

16. a) *Domenica non andrò a vedere un film d'amore e d'avventura*; b) *Non ho praticato calcio e pallavolo*

a) *Domenica non andrò a vedere un film d'amore o uno d'avventura*; b) *Non ho praticato calcio o non ho praticato pallavolo*

17. a) *Un triangolo rettangolo non è equilatero o non è isoscele*; b) *Un numero intero non é nè razionale, né quadrato perfetto*

a) *Un triangolo rettangolo non è né equilatero né isoscele*; b) *Un numero intero non é razionale o non é un quadrato perfetto*

18. Quante diverse righe ha la tabella di verità di un enunciato composto da 4 proposizioni?

Ne ha $2^4 = 16$

19. Consideriamo tutte le tabelle di verità degli enunciati composti da 3 proposizioni logiche; quante sono quelle diverse tra loro?

Sono 2^8, dato che dobbiamo scegliere le 8 possibilità scegliendo ogni volta da 2 valori V o F

20. Sapendo che l'enunciato $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ è vero, quali fra i seguenti enunciati sono veri?

A) $(p \wedge \neg q) \wedge r$ B) $(\neg p \wedge \neg q) \wedge r$ C) $(p \wedge \neg q) \wedge \neg r$ D) $(\neg p \wedge q) \wedge \neg r$

Ricopiamo la tabella di verità già costruita

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$
V	V	V	V	V
V	F	V	F	V
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V
V	V	F	V	F

V	F	F	F	V
F	V	F	V	F
F	F	F	V	F

Sono possibili quindi 5 casi per i valori di verità delle tre propsizioni, nell'ordine: (V, V, V), (V, F, V), (F, V, V), (F, F, V). (V, F, F). Costruiamo quindi una tabella con le 4 proposizioni logiche proposte, in questi 5 casi

p	q	r	$p \wedge \neg q$	$(p \wedge \neg q) \wedge r$	$\neg p \wedge \neg q$	$(\neg p \wedge \neg q) \wedge r$	$(p \wedge \neg q) \wedge \neg r$	$\neg p \wedge q$	$(\neg p \wedge q) \wedge \neg r$
V	V	V	F	F	F	F	F	F	F
V	F	V	V	V	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	F	F	F	V	F
F	F	V	F	F	V	V	F	F	F
V	F	F	V	F	F	F	F	F	F

Come si vede sono tutti falsi

21. Quante diverse righe ha la tabella di verità di un enunciato composto da *n* proposizioni?

È una generalizzazione del quesito 15, quindi 2^n

22. Un quesito di Hubert Philips (anni 1930). I signori Merciaio, Droghiere, Panettiere e Cappellaio hanno un mestiere che è uno di quelli uguale ai loro cognomi, ma nessuno di loro ha la professione uguale al proprio cognome. Chiedendo loro che mestiere facessero, ciascuno fece una sola delle seguenti dichiarazioni (non so chi le ha fatte): "Merciaio è il cappellaio"; "Droghiere è il merciaio"; "Panettiere non è il cappellaio"; "Cappellaio non è il panettiere". Sapendo che solo una delle affermazioni è vera, chi è il droghiere?

Se è vera la prima affermazione possiamo dire che "Merciaio è il cappellaio"; "Droghiere non è il merciaio"; "Panettiere è il cappellaio"; "Cappellaio è il panettiere", ma vi è una contraddizione fra prima e terza.

Se è vera la seconda affermazione possiamo dire che "Merciaio non è il cappellaio"; "Droghiere è il merciaio"; "Panettiere è il cappellaio"; "Cappellaio è il panettiere", da cui Merciaio è il droghiere e funziona. Controlliamo anche le altre per evitare che il problema sia malposto e abbia più di una soluzione.

Se è vera la terza affermazione possiamo dire che "Merciaio non è il cappellaio"; "Droghiere non è il merciaio"; "Panettiere non è il cappellaio"; "Cappellaio è il panettiere". In questo caso Droghiere dovrebbe essere il cappellaio, e rimangono da assegnare le professioni di merciaio che deve andare a Panettiere e droghiere che deve andare a Merciaio. Quindi anche questa va bene e conduce alla stessa soluzione per Merciaio, ma non per gli altri, ma va bene perché la domanda è solo sulla professione di droghiere.

Se è vera la quarta affermazione possiamo dire che "Merciaio non è il cappellaio"; "Droghiere non è il merciaio"; "Panettiere è il cappellaio"; "Cappellaio non è il panettiere". Così il merciaio deve essere Cappellaio, droghiere di nuovo Merciaio e panettiere sarà Droghiere. Infine Merciaio sarà certamente il droghiere

23. Consideriamo le seguenti dieci affermazioni: "Solo *n* di queste affermazioni sono false"; in cui *n* assume i valori da 1 a 10. Quante di esse sono vere?

Solo l'affermazione Solo 9 di queste affermazioni sono false può essere vera, perché in questo modo effettivamente le rimanenti 9 saranno false.

Il concetto di dimostrazione

1. Scegliamo a caso un elemento *a* dall'insieme *A* = {1, 64, 125, 729}; sapendo che l'elemento scelto è un cubo perfetto ma non un quadrato perfetto, cosa possiamo dire su *a*?

125 è l'unico elemento che verifica quanto richiesto

2. Scegliamo a caso un elemento *b* dall'insieme *B* = {3, 10, 15, 20}; sapendo che l'elemento scelto è somma di numeri interi consecutivi tutti dispari, che cosa possiamo dire di *b*?

b = 15 (b = 3 + 5 + 7), oppure b = 20 (b = 9 + 11) sono gli unici elementi che verificano quanto richiesto

3. Scegliamo a caso un elemento *c* dall'insieme *C* = {1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6}; sapendo che l'elemento scelto è una frazione che genera un numero periodico semplice, chi è *c*?

1/3 l'unico elemento che verifica quanto richiesto

4. Scegliamo un elemento *d* a caso dall'insieme *D* = {12, 18, 24, 48}, sapendo che l'elemento scelto è un multiplo di 6 ma non di 8, cosa possiamo dire su *d*?

12 e 18 sono gli unici elementi che verificano quanto richiesto

5. Scegliamo un elemento *e* a caso dall'insieme *E* = {triangolo rettangolo, triangolo isoscele, triangolo equilatero, triangolo scaleno}; sapendo che l'elemento scelto è un triangolo acutangolo, cosa possiamo dire su *e*?

Fra gli elementi di E l'unico che non è un triangolo acutangolo è il triangolo rettangolo, quindi siamo sicuri solo di cosa non è *e*

6. Scegliamo un elemento *f* a caso dall'insieme *F* = {(triangolo di cateti 3, 4), (triangolo di cateti 5, 12), (triangolo di cateti 8, 15), (triangolo di cateti 6, 8)}; sapendo che l'elemento scelto è un triangolo rettangolo la cui area e il cui perimetro sono rappresentati dallo stesso numero, cosa possiamo dire su *f*?

Il triangolo di cateti 5 e 12 ha ipotenusa 13, quindi perimetro 5 + 12 + 13 = 30 e area 5 · 12/2 = 30. Allo stesso modo il triangolo di cateti 6 e 8 ha ipotenusa 10, quindi perimetro 6 + 8 + 10 = 24 e area 6 · 8/2 = 24. Per il triangolo di cateti 3, 4 il perimetro è 3 + 4 + 5 = 12 e l'area è 3 · 4/2 = 6; per quello di cateti 8 e 15, il perimetro misura 8 + 15 + 17 = 40 e l'area 8 · 15/2 = 60

7. Scegliamo un elemento *g* a caso dall'insieme *G* = {tetraedro, esaedro, ottaedro, dodecaedro, icosaedro}; sapendo che l'elemento scelto è un poliedro regolare le cui facce sono tutti esagoni regolari, cosa possiamo dire su *g*?

Non ci sono poliedri regolari le cui facce sono esagoni.

Utilizzando le proposizioni p e q seguenti costruire gli schemi deduttivi Modus ponens, Modus tollens

8. *p:* Elena resta in casa; *q:* Elena legge un libro giallo.

Se Elena resta in casa allora legge un libro giallo, e Elena resta in casa quindi legge un libro giallo; Se Elena resta in casa allora legge un libro giallo, ma Elena non legge un libro giallo quindi non resta in casa;

9. *p:* Caterina va in vacanza; *q:* Caterina va in montagna.

Se Caterina va in vacanza allora va in montagna, e Caterina va in vacanza quindi va in montagna; Se Caterina va in vacanza allora va in montagna, ma Caterina non va in montagna quindi non va in vacanza

10. *p:* Amalia va in campagna; *q:* Amalia raccoglie margherite.

Se Amalia va in campagna allora raccoglie margherite, e Amalia va in campagna quindi raccoglie margherite; Se Amalia va in campagna allora raccoglie margherite, ma Amalia non raccoglie margherite quindi non va in campagna

11. *p:* Tommaso gioca a calcio; *q:* Tommaso indossa la maglia numero 4.

Se Tommaso gioca a calcio allora indossa la maglia numero 4, e Tommaso gioca a calcio quindi indossa la maglia numero 4; Se Tommaso gioca a calcio allora indossa la maglia numero 4, ma Tommaso non indossa la maglia numero 4, quindi non gioca a calcio

12. *p:* Ilaria esce il sabato sera; *q:* Ilaria va in discoteca.

Se Ilaria esce il sabato sera allora va in discoteca, e Ilaria esce il sabato sera quindi va in discoteca; Se Ilaria esce il sabato sera allora va in discoteca, ma Ilaria non va in discoteca quindi non esce il sabato sera

13. *p:* Marco ascolta della musica; *q:* Marco ascolta rock.

Se Marco ascolta della musica allora ascolta rock, e Marco ascolta della musica quindi ascolta rock; Se Marco ascolta della musica allora ascolta rock, ma Marco non ascolta rock quindi non ascolta della musica

14. *p:* Giuseppe va al cinema; *q:* Giuseppe vede un film d'avventura.

Se Giuseppe va al cinema allora vede un film d'avventura, e Giuseppe va al cinema quindi vede un film d'avventura; Se Giuseppe va al cinema allora vede un film d'avventura, ma Giuseppe non vede un film d'avventura quindi non va al cinema

15. *p:* Lucia pratica sport; *q:* Lucia gioca a tennis.

Se Lucia pratica sport allora gioca a tennis, e Lucia pratica sport quindi gioca a tennis; Se Lucia pratica sport allora gioca a tennis, ma Lucia non gioca a tennis quindi non pratica sport

16. *p:* Carlotta suona il violino; *q:* Carlotta suona il contrabbasso.

Se Carlotta suona il violino allora suona il contrabbasso, e Carlotta suona il violino quindi suona il contrabbasso; Se Carlotta suona il violino allora suona il contrabbasso, ma Carlotta non suona il contrabbasso quindi non suona il violino

17. ***p:* Aurelia ha due figli maschi;** ***q:* Aurelia ha due gemelli.**

Se Aurelia ha due figli maschi allora ha due gemelli, e Aurelia ha due figli maschi quindi ha due gemelli; Se Aurelia ha due figli maschi allora ha due gemelli, ma Aurelia non ha due gemelli quindi non ha due figli maschi

18. ***p:* Il numero *n* è multiplo di 4;** ***q:* Il numero *n* non è multiplo di 6.**

Se Il numero *n* è multiplo di 4 allora non è multiplo di 6, e *n* è multiplo di 4 quindi non è multiplo di 6; Se Il numero *n* è multiplo di 4 allora non è multiplo di 6, ma *n* è multiplo di 6 quindi non è multiplo di 4

19. ***p:* Il numero *x* è maggiore di 15;** ***q:* Il numero *x* è minore di 70.**

Se Il numero *x* è maggiore di 15 allora è minore di 70, e *x* è maggiore di 15 quindi è minore di 70; Se Il numero *x* è maggiore di 15 allora è minore di 70, ma *x* non è minore di 70, quindi non è maggiore di 15

20. ***p:* Il poligono P ha più di dieci lati;** ***q:* Il poligono P ha meno di venti angoli interni.**

Se Il poligono P ha più di dieci lati allora ha meno di venti angoli interni, e P ha più di dieci lati quindi ha meno di venti angoli interni; Se Il poligono P ha più di dieci lati allora ha meno di venti angoli interni, ma P non ha meno di venti angoli interni quindi non ha più di dieci lati

21. ***p:* Il poliedro S ha almeno 6 facce;** ***q:* Il poliedro S ha al più dodici vertici.**

Se Il poliedro S ha almeno 6 facce allora ha al più dodici vertici, e S ha almeno 6 facce quindi ha al più dodici vertici; Se Il poliedro S ha almeno 6 facce allora ha al più dodici vertici, ma S non ha al più dodici vertici quindi non ha almeno 6 facce

22. ***p:* La media aritmetica di *x* e *y* è pari;** ***q:* La media geometrica di *x* e *y* è dispari.**

Se La media aritmetica di *x* e *y* è pari allora La media geometrica di *x* e *y* è dispari, e La media aritmetica di *x* e *y* è pari quindi La media geometrica è dispari; Se La media aritmetica di *x* e *y* è pari allora La media geometrica di *x* e *y* è dispari, ma La media geometrica di *x* e *y* non è dispari quindi La media aritmetica non è pari

23. ***A, B, C, D* ed *E* sono cinque ragazze che hanno un doppio nome di battesimo. Sappiamo che: uno dei nomi di quattro di loro è Maria, di tre è Rosa, di due Anna e di una Grazia; o *A* e *B* si chiamano entrambe Anna oppure *C* e *D* si chiamano entrambe Anna; *B* e *C* si chiamano entrambe Rosa o nessuna delle due si chiama Rosa; *D* ed *E* non si chiamano entrambe Maria. Chi delle cinque si chiama Grazia?** ***Tratto da Summers op.cit.***

Consideriamo il seguente schema che lega fra loro i due nomi delle ragazze. Dalle ipotesi in ogni riga dobbiamo avere scritto il Sì (ossia la ragazza ha quel nome)esattamente due volte e nelle colonne, nell'ordine, un numero di volte pari a 4, 3, 2, 1. Supponiamo che *A* e *B* si chiamino entrambe Anna e che *B* e *C* si chiamino entrambe Rosa

	Maria	Rosa	Anna	Grazia
A	Sì	No	Sì	No
B	No	Sì	Sì	No
C	Sì	Sì	No	No
D	Sì		No	
E	Sì		No	

Come si vede questo schema non va bene perché D ed E si chiamerebbero entrambe Maria. Allora supponiamo che *A* e *B* si chiamino entrambe Anna e che né *B* né *C* si chiamino Rosa

	Maria	Rosa	Anna	Grazia
A	No	Sì	Sì	No
B	Sì	No	Sì	
C	Sì	No	No	
D	Sì	Sì	No	
E	Sì	Sì	No	

Ancora una volta non va bene, quindi non è vero che *A* e *B* si chiamano entrambe Anna, perciò è vero che *C* e *D* si chiamano entrambe Anna. Supponiamo che *B* e *C* si chiamino entrambe Rosa

	Maria	Rosa	Anna	Grazia
A	Sì		No	
B	Sì	Sì	No	
C	No	Sì	Sì	No

D	Sì		Sì	
E	Sì		No	

Ancora una volta non va, perciò né *B* né *C* si chiamano Rosa

	Maria	Rosa	Anna	Grazia
A	Sì	Sì	No	No
B	Sì	No	No	Sì
C	Sì	No	Sì	No
D	No	Sì	Sì	No
E	Sì	Sì	No	No

Questo è l'unico schema che funziona e quindi B si chiama Grazia

24. Con riferimento al precedente quesito cambia la risposta se aggiungiamo l'ulteriore opzione che non ci sono due con i due nomi uguali?

Sì, il caso diventa impossibile perché le ragazze sono 5 e se ciascuna dovesse avere due nomi diversi dalle altre i nomi disponibili dovrebbero essere $5 \cdot 2 = 10$

25. *A*, *B* e *C* ogni giorno fanno colazione in uno stesso bar ordinando ciascuno un cappuccino o (*aut*) un cornetto. Sappiamo che: se *A* ordina cappuccino allora *B* ordina un cornetto; uno solo fra *A* e *C* ordinano un cappuccino; *B* e *C* non ordinano entrambi un cornetto. Chi dei tre non ordina ogni giorno sempre la stessa cosa?

Supponiamo che *A* ordini cappuccino, allora *B* ordina un cornetto e *C* non ordina un cappuccino (perché lo ha ordinato *A*), ma non può ordinare neanche un cornetto perché lo ha ordinato *B*. Pertanto non è possibile che *A* ordini un cappuccino, quindi ordina un cornetto. A questo punto *C* ordina un cappuccino, mentre B può ordinare quello che gli pare.

Stabilire quali delle seguenti deduzioni sono corrette

26. Tutti i romani sono italiani, Carlo è italiano, quindi Carlo è romano.

No, perché l'insieme dei romani è contenuto in quello degli italiani e non viceversa, funziona la deduzione *Carlo è romano, quindi è italiano.*

27. Alcuni numeri naturali sono dispari, nessun numero dispari è multiplo di 4, quindi alcuni numeri naturali non sono multipli di 4.

Sì, perché i dispari sono un sottoinsieme dei naturali, quindi se nessun dispari è multiplo di 4 o non esistono multipli do 4 oppure, come è, ve ne sono alcuni che non sono dispari ma sono naturali.

28. Alcuni numeri naturali sono dispari, alcuni numeri dispari sono multipli di 3, quindi alcuni numeri naturali sono multipli di 3.

Sì perché i dispari sono un sottoinsieme dei naturali

29. Nessun triangolo equilatero è un triangolo rettangolo, tutti i triangoli equiangoli sono equilateri, quindi nessun triangolo equiangolo è rettangolo.

Sì perché l'insieme dei triangoli equilateri e quello dei triangoli rettangoli sono disgiunti e dato che i triangoli equiangoli sono un sottoinsieme (in effetti sono lo stesso insieme) dei triangoli equilateri, anche questo è disgiunto dall'insieme dei triangoli rettangoli

30. Tutti i calciatori sono atleti, nessuno dei miei amici è un calciatore, quindi nessuno dei miei amici è un atleta.

No, perché i calciatori sono un sottoinsieme proprio degli atleti, pertanto possono esserci atleti che non sono calciatori e che sono anche miei amici

31. Alcuni poligoni sono quadrilateri, la figura A non è un quadrilatero, quindi A non è un poligono.

No perché un triangolo per esempio non è un quadrilatero ma è un poligono

32. Il seguente ragionamento è corretto: Tutti i rettangoli sono parallelogrammi, alcuni quadrilateri non sono rettangoli, quindi alcuni quadrilateri non sono parallelogrammi. Possiamo dire che è corretto lo schema di cui esso fa parte, ossia *Tutti gli x sono y, alcuni z non sono x, quindi alcuni z non sono y*? Giustificare la risposta.

No perché *x* è un sottoinsieme di *y*, *z* e *x* non sono contenuti uno nell'altro, ma possono essere disgiunti o avere qualcosa in comune, pertanto *z* potrebbe anche essere un sottoinsieme di *y*. Nel caso particolare l'insieme dei quadrilateri contiene quello dei parallelogrammi, quindi in questo caso particolare lo schema funziona. Per

esempio non funziona lo schema *Tutti i rettangoli sono parallelogrammi, alcuni rombi non sono rettangoli, quindi alcuni rombi non sono parallelogrammi*.

***Stabilire se, nei seguenti esercizi, la proposizione p è necessaria, sufficiente o necessaria e sufficiente per il verificarsi della proprietà q.* [*Nelle risposte CN = Condizione Necessaria, CS = Condizione Sufficiente, CNS = Condizione necessaria e sufficiente*]**

33. a) *p:* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$**; *q:* $a = c \wedge b = d$. ($b, d \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$); b) *p:*** $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=1$**; *q:* $a = d \wedge b = c$. ($b, d \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$)**

a) La condizione non è sufficiente perché 1/2 = 2/4, ma 1≠2 e 2≠4, è però necessaria perché se $a = c \wedge b = d$ allora ovviamente $a/b = c/d$; b) a) La condizione non è sufficiente perché $\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{1}=1$, ma $\sqrt{2}\neq 1, 2\neq\sqrt{2}$, è però necessaria perché se $a = d \wedge b = c$ allora ovviamente $a/b \cdot c/d = a/b \cdot b/a = 1$.

34. *p:* due rette tagliate da una trasversale sono parallele; *q:* due rette tagliate da una trasversale formano coppie di angoli alterni fra loro uguali.

Le due proposizioni sono equivalenti, quindi abbiamo a che fare con una CNS

35. *p:* angoli opposti al vertice; *q:* angoli uguali.

Se gli angoli sono opposti al vertice sono ovviamente uguali, ma se ho due angoli uguali, per esempio gli angoli alla base di un triangolo isoscele, non devono per forza essere opposti al vertice, quindi abbiamo una CS

36. *p:* rette formanti una coppia di angoli adiacenti uguali; *q:* rette perpendicolari.

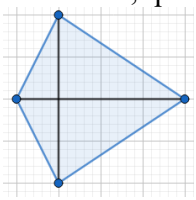
Le due proposizioni sono equivalenti, quindi abbiamo a che fare con una CNS

37. *p:* somma di tre angoli uguale a un angolo piatto; *q:* tre angoli costituiscono gli angoli interni di un triangolo.

Le due proposizioni sono equivalenti, quindi abbiamo a che fare con una CNS

38. *p:* quadrilatero equiangolo; *q:* quadrilatero con le diagonali uguali.

Un quadrilatero equiangolo è un retangolo ed ha le diagonali uguali, ma possiamo prendere due segmenti uguali che si incontrano non nel punto medio, queste rappresentano le diagonali uguali di un quadrilatero che non è un rettangolo. Quindi è una CS



39. *p:* punto appartenente alla bisettrice di un angolo; *q:* punto equidistante dai lati dell'angolo.

Le due proposizioni sono equivalenti, quindi abbiamoa che fare con una CNS

40. *p:* numero multiplo di 18; *q:* multiplo di 9.

È una CS, infatti se $p = 18n = 9m$, mentre 9 è multiplo di 9 ma non di 18

41. *p: quadrilatero con le diagonali che si dividono scambievolmente a metà; q: parallelogramma.*

Le due proposizioni sono equivalenti, quindi abbiamoa che fare con una CNS

42. *p:* numero multiplo di 12; *q:* numero multiplo di 60.

È una CN perché se $q = 60n = 12m$, mentre 24 è multiplo di 12 ma non di 60

43. *p:* numero primo maggiore di 2; *q:* numero dispari.

È una CS perché tutti i primi maggiori di 2 sono dispari, ma non tutti i disapri sono primi

44. a) *p:* simmetria assiale; *q:* isometria; b) *p:* isometria; *q:* traslazione

a) è una CS infatti una simmetria assiale è una isometria, ma non tutte le isometrie sono simmetrie assiali;
b) è una CN perché ogni traslazione è una isometria, ma non viceversa

45. a) *p:* affinità; *q:* equiestensione; b) *p:* omotetia; *q:* similitudine

a) è una CN perché ogni equiestensione è una affinità, ma non viceversa; b) è una CS perché ogni omotetia è una similitudine, ma non viceversa

46. *p:* relazione che non verifica la proprietà simmetrica; *q:* relazione di ordinamento

è una CN perché ogni relazione di ordinamento non verifica la proprietà simmetrica, ma non viceversa

47. *p:* non vale la proprietà riflessiva; *q:* vale la proprietà antiriflessiva

è una CN perché se vale la proprietà antiriflessiva non vale la proprietà riflessiva, ma potrebbe non valere nessuna delle due proprietà

48. *p:* relazione di equivalenza; *q:* relazione che verifica la proprietà transitiva

è una CS perché ogni relazione di equivalenza verifica la proprietà transitiva, ma non viceversa

49. a) $p: A \subset B$; $q: A \cup B = B$; b) $p: A \subseteq B$; $q: A \cup B = B$

a) è una CS perché se $A \subset B$ allora $A \cup B = B$, ma non viceversa perché potrebbe essere anche $A = B$;
b) Le due proposizioni sono equivalenti, quindi abbiamo a che fare con una CNS

50. a) $p: a < 0 \wedge b > 0$; $q: a \cdot b < 0$ ($a, b \in \mathbb{R}$); b) $p: a \cdot b > 0$; $q: a > 0 \wedge b > 0$. ($a, b \in \mathbb{R}$)

a) è una CS perché se $a < 0 \wedge b > 0$ allora $a \cdot b < 0$, ma non viceversa potrebbe essere $a > 0 \wedge b < 0$;
b) è una CS perché se $a > 0 \wedge b > 0$ allora $a \cdot b > 0$, ma potrebbe anche essere $a\ i<0 \wedge b < 0$

***Dei seguenti teoremi costruire le proprietà inverse, contrarie e converse, stabilendo anche quali di esse sono vere.* (*Nelle risposte I = Inversa, Ct = Contraria, Cv = Conversa, V = Vera, F = Falsa*)**

51. *Se un quadrilatero è un quadrato è anche un rettangolo.*

I: *Se un quadrilatero è un rettangolo allora è un quadrato* – Falsa; Ct: *Se un quadrilatero non è un quadrato allora non è un rettangolo* – Falsa Cv: *Se un quadrilatero non è un rettangolo allora non è un quadrato* – Vera

52. *Se un triangolo è scaleno allora non ha nemmeno una coppia di angoli uguali.*

I: *Se un triangolo non ha nemmeno una coppia di angoli uguali allora è scaleno* – Vera; Ct: *Se un triangolo non è scaleno allora ha almeno una coppia di angoli uguali* – Vera; Cv: *Se un triangolo ha almeno una coppia di angoli uguali allora non è scaleno* – Vera

53. *Se due triangoli hanno due lati e l'angolo da loro compreso rispettivamente uguali sono fra loro uguali.*

I: *Se due triangoli sono uguali allora hanno due lati e l'angolo compreso rispettivamente uguali* – Vera; Ct: *Se due triangoli non hanno due lati e l'angolo compreso uguali allora non sono uguali* – Vera; Cv: *Se due triangoli non sono uguali allora non hanno due lati e l'angolo compreso rispettivamente uguali* – Vera

54. *Se un triangolo ha un lato maggiore allora ha anche un angolo maggiore.*

I: *Se un triangolo ha un angolo maggiore allora ha anche un lato maggiore* – Vera; Ct: *Se un triangolo non ha un lato maggiore allora non ha un angolo maggiore* – Vera; Cv: *Se un triangolo non ha un angolo maggiore allora non ha un lato maggiore* – Vera

55. *Se una trasformazione geometrica è una traslazione allora è un'isometria.*

I: *Se una trasformazione geometrica è un'isometria allora è una traslazione* – Falsa; Ct: *Se una trasformazione geometrica non è una traslazione allora non è un'isometria* – Falsa; Cv: *Se una trasformazione geometrica non è un'isometria allora non è una traslazione* – Vera

56. *Se una relazione binaria non verifica la proprietà transitiva allora non è una relazione di equivalenza.*

I: *Se una relazione binaria non è di equivalenza allora non verifica la proprietà transitiva* – Falsa; Ct: *Se una relazione binaria verifica la proprietà transitiva allora è una relazione di equivalenza* – Falsa; Cv: *Se una relazione binaria è di equivalenza allora verifica la proprietà transitiva* – Vera

57. $A \cap B = A \Rightarrow A \subseteq B$.

I: $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$ – Vera; Ct: $A \cap B \neq A \Rightarrow A \not\subset B$ – Vera; Cv: $A \not\subset B \Rightarrow A \cap B \neq A$ – Vera

58. $a < 0 \wedge b < 0 \Rightarrow a \cdot b > 0$.

I: $a \cdot b > 0 \Rightarrow a < 0 \wedge b < 0$ – Falsa; Ct: $a \geq 0 \vee b \geq 0 \Rightarrow a \cdot b \leq 0$ – Falsa; Cv: $a \cdot b \leq 0 \Rightarrow a \geq 0 \vee b \geq 0$ – Vera

59. $x > y > 0 \Rightarrow x^2 > y^2$.

I: $x^2 > y^2 \Rightarrow x > y > 0$ – Falsa; Ct: $x \leq y \leq 0 \Rightarrow x^2 \leq y^2$ – Falsa; Cv: $x^2 \leq y^2 \Rightarrow x \leq y \leq 0$ – Falsa

Giochiamo alla Matematica

1. Nell'isola dei cavalieri e dei furfanti uno dice *"Io sono un furfante ma mio fratello no"*. Cosa può dirsi dei due fratelli?

Chi parla non può dire la verità quindi è un furfante perciò ciò che afferma è falso e dato che la prima parte della fraase è vera deve essere falsa la seconda, pertanto anche il fratello è un furfante

2. Nell'isola dei cavalieri e dei furfanti uno dice *"Mio fratello è un furfante"*. Il fratello aggiunge: *"Il mio unico fratello e la mia unica sorella sono dello stesso tipo"*. Cosa può dirsi dei tre?

Se il primo è cavaliere il secondo è furfante e quindi la sorella è furfante. Se il primo è furfante, il secondo è cavaliere e anche in questo caso la sorella è furfante. Infine gli altri due non si sa cosa sono, ma sono di tipo diverso

3. **Nell'isola dei cavalieri e dei furfanti uno dice *"I miei due fratelli sono dello stesso tipo"*. Si chiede a uno degli altri due: *"I tuoi due fratelli sono dello stesso tipo?"*. Cosa risponderà?**

Se il primo è cavaliere anche i suoi due fratelli lo sono e perciò il secondo risponderà Sì. Se il primo è furfante, il secondo può essere cavaliere e quindi il terzo è furfante e la risposta è ancora Sì. Se il secondo è furfante il terzo è cavaliere e ancora una volta la risposta è Sì

4. **Supponiamo che nei tre cofanetti di Porzia fosse scritto: (in quello d'oro) il ritratto non è nel cofanetto d'argento; (in quello d'argento) il ritratto non è in questo cofanetto; (in quello di piombo) il ritratto è in questo cofanetto. Stabilire, se possibile, dove si trova il ritratto nei vari casi in cui le frasi sono a) tutte vere; b) tutte sono false; c) solo una è vera; d) solo una è falsa.**

a) se sono tutte vere è vera la terza, quindi è in quello di Piombo; b) se sono tutte false, sia la prima che la seconda negano che sia in quello d'Argento, quindi si trova lì; c) le prime due affermazioni dicono la stessa cosa, quindi devono essere false e il ritratto deve essere nel cofanetto d'argento, ma dato che la terza scritta è vera deve stare anche in quello di piombo, pertanto la situazione non può accadere; d) Per quanto detto prima la falsa deve essere la terza, perciò il ritratto non sta né nel cofanetto d'argento, né in quello di piombo e quindi sta in quello d'Oro

5. **Hubert Philips negli anni '30 del XX secolo aveva inventato l'isola di Ko dove abitano i Neri che dicono la verità, i Bianchi che mentono e i Confusi che dicono una verità e una bugia in modo alterno ma non si sa se la loro prima risposta è vera o falsa. Un giorno un Nero, un Bianco e un Confuso sono messi uno accanto all'altro, ma non ne conosciamo l'ordine, un ispettore prende una carta a caso che può essere rossa o blu e la mostra ai tre, chiedendo loro il colore. Le risposte sono: Blu, Blu, Rossa. Poi prende un'altra carta e rifà la domanda, ricevendo le risposte: Rossa, Blu, Blu. Di che colore sono le carte scelte dall'ispettore?**

Dato che il secondo dice la stessa cosa possono accadere i seguenti casi: a) è un nero e entrambe le carte sono blu; b) è un bianco e le carte sono entrambe rosse; c) un confuso e le carte sono Blu e Rossa o Rossa e Blu. Consideriamo il caso a) esso non può accadere perché allora primo e terzo sarebbero entrambi confusi. b) come il caso a); c) se sono Blu e Rossa il primo è Nero e il secondo Bianco se sono Rossa e Blu al contrario. Infine il secondo è certamente un confuso e le carte sono Rossa e Blu ma non per forza in quest'ordine

La sfida

1. **Cora è morta avvelenata. Anna e Beth sono interrogate sulla dinamica del fatto, ciascuna delle due fa la sua dichiarazione. Anna: *Se è stato un omicidio la colpevole è Beth*; Beth: *Se non è stato un suicidio è stato un omicidio*. La polizia ha stabilito i seguenti fatti: *se nessuna delle due donne ha mentito è stato un incidente*; *se una sola delle due ha mentito, non è stato un incidente*. Qual è stata la causa di morte di Cora?**

Se nessuna ha mentito, allora è stato un omicidio, ma ciò non è possibile perché l'affermazione di Beth sarebbe un'implicazione di tipo V ⇒ F che deve essere falsa. Se ha mentito Anna allora ciò che dice è falso, quindi la premessa è vera, è stato omicidio e la conseguenza è falsa, la colpevole non è Beth, e in questo caso l'affermazione di Beth è V ⇒ V, funziona e quindi è stato un omicidio. Se invece mente Beth, vuol dire che non è stato un suicidio e neanche un omicidio, cioè un incidente, ma ciò non può essere. Infine è stato un Omicidio

2. **Albert, Barney e Curtis sono sospettati per l'omicidio di Dwight. Ognuno dei tre fa due affermazioni: Albert: *Non sono un avvocato – Non ho ucciso Dwight*; Barney: *Sono un avvocato – Non ho ucciso Dwight*; Curtis: *Non sono un avvocato – Un avvocato ha ucciso Dwight*. La polizia ha stabilito i seguenti fatti: Solo due delle sei precedenti informazioni sono vere. Uno solo dei tre sospettati non è un avvocato. Chi ha ucciso Dwight?**

Dato che vi sono due avvocati, se sono Albert e Curtis, mentono così come Barney. In questo caso se l'ultima falsa è la seconda di Albert, lui ha ucciso e tutto funziona. Se sono Albert e Barney vi è un'incongruenza perché

le affermazioni vere sarebbero le prime di Berney e di Curtiss e quindi avrebbero ucciso sia Albert che Barney. Se sono Barney e Curtiss le affermazioni vere sarebbero le prime di Barney e di Albert e di nuovo vi è l'incongruenza.

3. **Dana è morta annegata. Arlo, Bill e Carl sono interrogati sulla dinamica del fatto, ciascuno fa la sua dichiarazione. Arlo: *Se è stato un omicidio il colpevole è Bill*; Bill: *Se è stato un omicidio non sono stato io*; Carl: *Se non è stato un omicidio è stato un suicidio*. La polizia ha stabilito che se uno solo dei tre ha mentito, è stato un suicidio. Qual è stata la causa di morte di Dana, incidente, suicidio o omicidio?**

Se è stato un omicidio Arlo e Bill non dicono entrambi la verità, mentre Carl la dice perché l'antecedente è falso. In questo caso quindi uno solo ha mentito e dovrebbe essere un suicidio, perciò non va. Non è stato un omicidio. Perciò Arlo e Bill dicono la verità, se Carl dice la verità è stato un suicidio, ma anche se mente, perché in questo caso avremmo uno solo che mente. Infine è stato un suicidio.

4. **(AHSME1967) Consideriamo il seguente sistema ipotetico deduttivo. Vi sono due enti primitivi: *pib* e *maa* e quattro postulati: P_1: *Ogni pib è unione di maa.* P_2: *Due pib distinti hanno un solo maa in comune.* P_3: *Ogni maa appartiene a esattamente due pib.* P_4: *Esistono esattamente quattro pib.* Quali fra i seguenti enunciati possono considerarsi teoremi di questo sistema? T_1: *Esistono esattamente sei maa.* T_2: *Ogni pib è formato da esattamente tre maa.* T_3: *Preso un qualunque maa M esiste uno e un solo altro maa che non appartiene a uno dei pib cui appartiene M.***

Per P_4 vi sono 4 pib, chiamiamoli p_1, p_2, p_3, e p_4 . Ogni maa sta in due pib, così m_{12} è il maa che sta in p_1 e p_2. Avremo allora m_{12} , m_{13}, m_{14}, m_{23}, m_{24} e m_{34} che sono appunto 6. Quindi T_1 è un teorema. p_1 contiene m_{12}, m_{13}, m_{14}, p_2 contiene m_{12}, m_{23}, m_{24}, p_3 contiene m_{13}, m_{23}, m_{34}, p_4 contiene m_{14}, m_{24}, m_{34}. Quindi T_2 è un teorema. Scelto m_{12} esso appartiene a p_1 e p_2 solo m_{34} non appartiene né a p_1 né a p_2. Lo stesso vale per gli altri, quindi anche T_3 è un teorema.

5. **Nell'isola dei cavalieri e dei furfanti incontriamo tre persone: Aldo, Bice e Carla. Aldo dice *Siamo tutti e tre furfanti*. Bice: *No, solo due di noi sono furfanti*. Carla: *No, gli altri due mentono*. Qualcuno dei tre è un cavaliere? E se sì, chi?**

Aldo ovviamente è furfante, quindi uno almeno degli altri due non lo è. Se fosse Bice quello che dice Carla sarebbe falso e quindi funziona. Se invece fosse Carla, Bice dovrebbe mentire, ma di fatto dice la verità, quindi non è possibile. Infine solo Bice è cavaliere

6. **Su un manuale di zoologia marziana leggete le seguenti affermazioni: i) *ogni animale marziano ha* 3 *zampe oppure* 7 *zampe*; ii) *gli animali con* 3 *zampe sono carnivori*; iii) *gli animali non carnivori hanno* 3 *zampe o* (*vel*) *vivono nella savana*. Quali delle seguenti affermazioni sono sicuramente vere? A) *Gli animali non carnivori vivono nella savana* B) *Gli animali carnivori hanno* 3 *zampe* C) *Gli animali con* 7 *zampe sono erbivori* D) *Gli animali non carnivori hanno* 7 *zampe***

A) è vera perché gli animali non carnivori non possono avere 3 zampe (iii) perché allora sarebbero carnivori (ii), pertanto (iii) vivono nella savana. B potrebbe non essere vera; per C) supposto che erbivoro equivalga a non carnivoro, se gli animali a 3 zampe si sa che sono carnivori, su quelli a 7 non si sa nulla. D) è vera perché è una conseguenza di ii).

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

1. **(AHSME 1959) Supponiamo che i tre seguenti enunciati siano veri: *tutte le matricole sono umane; tutti gli studenti sono umani; alcuni studenti pensano*. Quali fra i seguenti enunciati si deducono logicamente da questi enunciati? A) *Tutte le matricole sono studenti* B) *Alcuni esseri umani pensano* C) *Nessuna matricola pensa* D) *Alcuni esseri umani che pensano non sono studenti.***

Siano M, U, S, P gli insiemi delle matricole, umani, studenti e pensanti. Abbiamo $M \subseteq U$; $S \subseteq U$; $S \cap P \neq \emptyset$. Da cui segue immediatamente $U \cap P \neq \emptyset$, cioè B)

2. **(AHSME 1965) Il seguente enunciato è vero: *Domenica non faremo il picnic solo se il tempo non sarà sereno*. Quale delle seguenti affermazioni è vera? A) *Se domenica faremo il picnic il tempo sarà certamente sereno* B) *Se domenica non faremo il picnic, il tempo sarà probabilmente non sereno* C) *Se***

***domenica non sarà sereno allora non faremo il picnic* D) *Se domenica sarà sereno potremo fare il picnic* E) *Se domenica sarà sereno certamente faremo il picnic*.**

L'affermazione è una doppia coimplicazione, quindi è vera quando sono entrambe vere o entrambe false, perciò solo E) è certamente vera

3. **(AHSME 1967) Quali dei seguenti enunciati sono equivalenti al seguente enunciato: *Se l'elefante rosa del pianeta alfa ha gli occhi viola, allora il maiale del pianeta beta non ha il naso lungo*? I) *Se il maiale del pianeta beta ha il naso lungo allora l'elefante rosa del pianeta alfa ha gli occhi viola*; II) *Se l'elefante rosa del pianeta alfa non ha gli occhi viola allora il maiale del pianeta beta non ha il naso lungo*; III) *Se il maiale del pianeta beta ha il naso lungo, allora l'elefante rosa del pianeta alfa non ha gli occhi viola*; IV) *L'elefante rosa del pianeta alfa non ha gli occhi viola o (vel) il maiale del pianeta beta non ha il naso lungo*. A) Solo I e III B) Solo III e IV C) Solo II e IV D) Solo II e III E) Solo III**

L'enunciato simbolico si scrive $p \Rightarrow q$. I si scrive $\neg q \Rightarrow p$; II: $\neg p \Rightarrow q$; III $\neg q \Rightarrow \neg p$; IV: $\neg p \vee q$. Le uniche equivalenti sono III e IV, quindi B)

4. **(AHSME 1967) Sapendo che Alcuni *Mems* non sono *Ens* e Nessun *Ens* è un *Vees*, quali fra le seguenti affermazioni sono certamente vere? A) Alcuni *Mems* non sono *Vees* B) Alcuni *Vees* non sono *Mems* C) Nessun *Mems* è un *Vees* D) Alcuni *Mems* sono *Vees*.**

Nessuna come si vede facilmente facendo alcuni diagrammi di Venn

5. **(AHSME 1968) Relativamente agli studenti di una certa scuola si sa che sono veri i seguenti enunciati: *alcuni studenti non sono onesti*; *tutti i membri dell'associazione della fratellanza sono onesti*. Quale delle seguenti affermazioni è certamente vera? A) *Alcuni studenti appartengono all'associazione della fratellanza* B) *Alcuni membri dell'associazione della fratellanza non sono studenti* C) *Alcuni studenti non sono membri della fratellanza* D) *Nessun membro della fratellanza è uno studente* E) *Nessuno studente è membro della fratellanza*.**

Dato che *tutti i membri dell'associazione della fratellanza sono onesti* e che *alcuni studenti non sono onesti* segue immediatamente che *Alcuni studenti non sono membri della fratellanza* ossia C)

6. **(AHSME 1975) Se la proposizione *Tutte le camicie di questo negozio sono in saldo* è falsa, allora quali delle seguenti proposizioni sono vere? A) *Tutte le camicie di questo negozio non sono in saldo* B) *Ci sono alcune camicie di questo negozio non in saldo* C) *Nessuna camicia di questo negozio è in saldo* D) *Non tutte le camicie di questo negozio sono in saldo*.**

Se è falso che tutte sono in saldo è vero che almeno una non lo è, che si può esprimere nelle forme equivalenti B) e D)

7. **(OMI 1989) Sia *A* un insieme di numeri interi positivi. Utilizzando il fatto che tra le seguenti cinque affermazioni una e una sola è corretta, determinarla. A) Ogni elemento di *A* è multiplo di 3, di 4, di 5 e di 6 B) Ogni elemento di *A* è un quadrato perfetto pari C) Ogni elemento di *A* è multiplo di 4 D) Ogni elemento di *A* è multiplo di 6 e di 8 E) Ogni elemento di *A* è multiplo di 8 o di 12.**

Se fosse vera A, sarebbe vera anche E, dato che un multiplo di 3 e 4 è anche multiplo di 12. Se fosse vera B, sarebbe vera anche C, dato che un quadrato perfetto pari è del tipo $(2n)^2 = 4n^2$. Se fosse vera C, potrebbero essere false le altre, perché 8 non è multiplo di 3(A) né di 6 (D), né di 12 (E), né un quadrato perfetto (B). Se fosse vera D, sarebbe vera anche E. Se fosse vera E, sarebbe vera anche C. Quindi solo C) è vera.

8. **(OMI 1993) Alcuni matematici hanno studiato i numeri naturali speciali (di cui ignoriamo la definizione) e hanno dimostrato i teoremi sotto elencati. Uno di essi implica tutti gli altri. Quale? A) ci sono infiniti numeri dispari che non sono speciali; B) ci sono infiniti numeri dispari e infiniti numeri pari che non sono speciali; C) per ogni numero speciale *s* c'è un numero naturale *n* non speciale tale che $n > s$; D) c'è solo un numero finito di numeri speciali dispari; E) un numero speciale non può avere più di 1000 cifre.**

Se vale E) allora ovviamente sono vere A e B perché si riferiscono a infiniti numeri non speciali. Ma anche C perché $n > s$ indica appunto che ve ne sono anche con più di 1000 cifre. E a questo punto vale anche D perché appunto i numeri speciali sono finiti.

9. **(OMI 1994) Roberto scommette che se Bearzot tornasse alla guida della nazionale questa vincerebbe sempre. In quale dei seguenti casi Roberto perde certamente la scommessa? A) Bearzot non torna ad allenare la nazionale B) Bearzot torna ad allenare la nazionale e questa non perde mai C)**

Bearzot torna ad allenare la nazionale e questa non vince tutte le partite D) Bearzot non torna ad allenare la nazionale e questa non vince sempre E) Bearzot non torna ad allenare la nazionale e questa non vince mai.

La C) perché appunto si verifica l'antecedente ma non il conseguente

10. **(A1998) Tre chiromanti sono apparentemente indistinguibili, i loro nomi sono Truth (che dice sempre la verità), Lie (che mente sempre) e Wise (che talvolta mente e talvolta no). I tre sono seduti in fila l'uno accanto all'altro. Un filosofo vuol decidere l'identità di ciascuno dei tre, così chiede al primo: *Chi è seduto accanto a te?*, la risposta è *Truth*. Poi chiede alla persona seduta in mezzo: *tu chi sei?*, la risposta è *Wise*. Alla terza persona chiede: *Chi è seduto accanto a te*, la risposta è: *Lie*. Stabilire l'identità dei tre.**

Se il primo dice la verità è Wise, il secondo quindi è Truth ma non coincide con la sua risposta. Quindi il primo mente, perciò il secondo non è Truth, se è Wise, il primo è Lie e il terzo Truth ma non può essere. Se invece il primo è Wise e mente il secondo è Lie e il terzo dice la verità ed è truth. Funziona.

11. **(A2002) A una festa qualcuno ha mangiato un po' del dolce del re prima che fosse servito. Uno dei sospetti, Maky, dice a propria difesa: *quelli che negano che non ho mangiato il dolce stanno mentendo*. Se sta dicendo la verità, Maky ha mangiato o no il dolce?**

Se è vero che mente chi dice $\neg\neg p = p$, allora è vero $\neg(\neg\neg p) = \neg p$, quindi la risposta è No

12. **(A2002) Se Hilary è un maschio allora è più giovane di John. Se Hilary ha 13 anni è una ragazza. Se non ha 13 anni allora non è più giovane di John. Hilary è maschio o femmina?**

Se Hilary è maschio è più giovane di John ma non ha 13 anni e quindi non è più giovane di John. contraddizione. Quindi è femmina

13. **(B2002) Davide, Enrico e Matteo si ritrovano, dopo parecchio tempo, al bar e si scambiano qualche confidenza. Davide: *Io non ho ancora trovato l´anima gemella*; Enrico: *Nemmeno io, l´ho trovata*; Matteo: *Enrico mente*; Davide: *Matteo dice la verità*. In realtà uno solo dei tre amici mente. Quale dei tre sicuramente non ha trovato l´anima gemella?**

Se mente Davide le affermazioni vere di Enrico e Matteo si contraddicono, quindi Davide dice la verità e non ha trovato l'anima gemella. Enrico non può mentire, quindi mente Matteo ed Enrico l'ha trovata. Su Matteo non sappiamo niente.

14. **(A 2004) Leslie festeggia il compleanno, ma durante la festa qualcuno prende la torta. Leslie chiede ai suoi amici chi, secondo loro, è stato. Ecco le risposte: Ben: *È stato Joe*; Joe: *Andrew mente*; Ivan: *È stato Elton*; George: *Non è stato Ivan*; Andrew: *Non sono stato io*; Elton: *Ben dice il vero*; Frank: *Sono stato io*; Leslie: *È stato Ben*. Se una sola delle 8 affermazioni è vera e uno solo ha preso la torta, chi è stato?**

Se è vero quello che dice Ben sarebbero Joe ed Ivan (mente George). Non va bene. Se è vero quello che dice Joe, sarebbe vero anche quello che dice Andrew. No. A questo punto quindi l'unico che non mente è Andrew. Perciò sappiamo che non è stato Joe, non è stato elton, è stato Ivan, non è stato Andrew, Ben ment, Non è frank, non è stato Ben. Infine è stato Ivan

15. **(K 2008) Un ragazzo dice sempre il vero al giovedì e al venerdì, mente sempre al martedì, mentre negli altri giorni della settimana mente o dice la verità senza una regola. Gli è stato chiesto il suo nome per sette giorni di fila e nei primi sei ha fornito nell'ordine le seguenti risposte: Luca, Mario, Luca, Mario, Piero, Mario. Che cosa ha risposto il settimo giorno?**

Dato che dice il vero giovedì e venerdì dovrebbe esserci due nomi consecutivi uguali, siccome questo non succede vuol dire che la prima volta che ha risposto era venerdì, ha detto Luca che è il suo nome.

16. **(OMI 2008) Ogni volta che Agilulfo torna a casa da scuola dopo aver preso un brutto voto, se la sua mamma è in casa lo mette in punizione. Sapendo che ieri pomeriggio Agilulfo non è stato messo in punizione, quale delle seguenti affermazioni è certamente vera? A) ieri Agilulfo ha preso un brutto voto, B) ieri Agilulfo non ha preso un brutto voto, C) ieri pomeriggio la sua mamma era in casa, D) ieri pomeriggio la sua mamma non era in casa, E) nessuna delle precedenti affermazioni è certamente vera.**

Se $p \Rightarrow q$ è vero e q è falso p può essere sia vero che falso, quindi non è detto che accada A né B, C e D non hanno alcuna relazione con le proposizioni, quindi è corretta E)

Traduciamo

17. (AHSME 1975) Quale delle seguenti è equivalente a Se *P è vera allora Q è falsa*? A) *P è vera o Q è falsa* B) Se *Q è falsa allora P è vera* C) Se *P è falsa allora Q è vera* D) Se *Q è vera allora P è falsa* E) Se *Q è vera then P è vera*

p ⇒¬q equivale a q ⇒¬p, ossia D)

18. (AHSME 1978) Le seguenti 4 frasi e solo queste, sono state trovate su una carta: A) Su questa carta esattamente una frase è falsa B) Su questa carta esattamente due frasi sono false C) Su questa carta esattamente tre frasi sono false D) Su questa carta esattamente quattro frasi sono false. Fra di loro quante frasi sono false?

Ovviamente 3 A) B e D

19. (A1998) Sneeze, Goofy, Sleepy, and Happy said the following things to their father after a competition: Sneeze: *I did not win the competition*. Goofy: *Happy won*. Sleepy: *Sneeze won*. Happy: *Sneeze did not win*. Who won the competition if only one of the four kids said the truth?

[Sneeze]

20. (A 1998) Due strani uomini vivono nello Strano paese: Peter, che mente ogni Lunedì, Martedì e Mercoledì, ma è sincero tutti gli altri giorni; e Paul, che mente ogni Giovedì, Venerdì e Sabato ma è sincero tutti gli altri giorni. un giorno essi dicono: Peter: *Ieri era uno dei miei giorni bugiardi* Paul: *Anche per me*. In che giorno della settimana lo hanno detto?

Se stanno dicendo entrambi la verità deve essere una domenica, ma il Sabato Paul dice la verità. Quindi almeno uno dei due mente. Se mente Peter lo può dire solo Lunedì, ma il Lunedì Paul è sincero e non può dire che la Domenica mente. Quindi Peter dice il vero ed è giovedì. In questo caso Paul mente e poiché il Mercoledì non mente funziona. È giovedì

21. (A 1998) Smarty ha deciso che da adesso in poi dirà la verità i Lunedì, Mercoledì e Venerdì e mentirà tutti gli altri giorni. Un giorno dice Domani dirò la verità. Che giorno è?

È certamente un giorno in cui mente e l'indomani mente pure, quindi è Sabato

22. (A 1998) Tre imputati stanno di fronte a un giudice. Ognuno dei tre risponde a 3 domande, parzialmente con una bugia (ognuno mente almeno una volta e al più due). Le risposte dei tre sono:
A: *è stato B*; *Io non c'ero*; *sono innocente* B: *C è innocente*; *Non sono stato io*; *Tutto ciò che dice A è falso*. C: *Non sono stato io; A mente quando dice che non c'era; B mente quando dice che tutto ciò che dice A è falso*. Trovare il colpevole.

Dato che nessuno mente sempre possiamo dire che la terza affermazione di B è falsa e la terza di C è vera. La seconda e la terza affermazione di A sono entrambe vere o entrambe false. Se sono entrambe vere non è stato né A né B. e B direbbe due cose vere e una (la prima falsa), mentre C due false e una vera (la terza). Se fossero entrambe false, è stato A, ma allora B direbbe solo cose vere e non è possibile. quindi è stato C.

23. (A 2000) Ci sono 5 persone sedute attorno a una tavola rotonda e una dopo l'altra fanno le seguenti affermazioni: *entrambi i miei vicini al tavolo sono bugiardi*. Sappiamo che i bugiardi mentono sempre e quelli che non mentono dicono sempre la verità. Ciascuno sa se gli altri sono bugiardi o no. Quanti bugiardi vi sono seduti al tavolo?

Indichiamo i 5 con le lettere A B C D E nell'ordine. A ha accanto B ed E. Se A non mente B ed E sono bugiardi, quindi non è vero che A e C e A e D sono tutti e due bugiardi. Se C è bugiardo allora al massimo uno fra B e D è bugiardo, quindi D non è bugiardo e funziona. Quindi i bugiardi sono 3

24. (A 2001) Mr. Smith vive in una casa sulla via Danessunaparte e la sua casa ha un numero civico compreso tra 13 e 1300. Mr. Taylor vuol conoscere questo numero, così rivolge a Mr. Smith alcune domande. Mr. Taylor: *Il tuo numero è maggiore di* 500? Mr. Smith risponde ma mente. (E Mr. Taylor non lo sa questo.) Mr. Taylor: *è un quadrato perfetto?* Mr. Smith risponde mentendo di nuovo (e sempre Mr. Taylor non lo sa.) Mr. Taylor: *è un cubo perfetto*? Mr. Smith risponde ma stavolta dice la verità. Mr. Taylor: *Ora se mi dice se la cifra delle unità è* 2 *o no, posso dirti il numero corretto*. Mr. Smith risponde. Allora Mr. Taylor gli dice il numero che pensa sia corretto. Ma Mr. Smith dice che Mr. Taylor ha sbagliato. Qual è il numero civico di Mr. Smith?

Dato che Mr Taylor pensa di avere indovinato con così poche domande Mr Smith ha risposto sicuramente sì all'ultima domanda e sì anche alla seconda, per cui Mr Taylor è indeciso fra un cubo. I cubi da 13 a 1300 sono

27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000. Poiché vuol sapere se finisce o no per 2 vuol dire che aveva isolato 512 e un altro numero, probabilmente 1000 che non sono quadrati perfetti. Quindi Mr. Smith ha risposto sì alla prima domanda, no alla seconda e sì alla terza. Non sappiamo cosa ha risposto alla quarta. Ma noi sappiamo che il numero è minore di 500 ed è una sesta potenza e l'unico numero del genere è 64.

25. (A 2005) Mio nonno è un uomo complicato. Chiude a chiave la porta cove mia nonna mette le caramelle e poi mette la chiave in una di tre scatole indicate dalle lettere A, B e C. Poi scrive le seguenti frasi sulle scatole: A) La chiave non è nella scatola B. B) La chiave non è in questa scatola. C) La chiave è in questa scatola. Il nonno mi ha detto che alcune delle frasi sono vere e altre false, ma se, senza guardare dentro le scatole, gli indico la scatola in cui si trova la chiave potrò avere quante caramelle voglio. Mi puoi aiutare a trovare la giusta scatola?

Se è vera la A è vera anche la B, quindi deve essere falsa la C, perciò la chiave è nella A.
Se è falsa la A risulterebbero tutte false. Quindi la chiave è nella A.

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. (Medicina 1999) Marco: *Giorgio suona il sassofono meglio di tutti, è lui il campione del nostro gruppo*; Giorgio: *Alessandro suona il sassofono meglio di tutti, è lui il campione del nostro gruppo*; Alessandro: *Io non suono il sassofono meglio di tutti, non sono io il campione del gruppo*; Matteo: *Io non suono il sassofono meglio di tutti, non sono io il campione del gruppo*. Se solo UNA di queste affermazioni è VERA, chi è il campione nel suonare il sassofono? A) Marco B) Giorgio C) Alessandro D) Matteo E) Non è possibile stabilirlo

Risposta D, Se fosse vero quello che dice Marco vi è un'incongruenza, dato che il campione sarebbe Giorgio ma anche Alessandro e Matteo (che negano di esserlo, ma mentono), ovviamente lo stesso succede se fosse vero quello che dice Giorgio. Se fosse vero quello che dice Alessandro invece funziona e il campione sarebbe Matteo. Se infine fosse vero quel che dice Matteo avremmo due affermazioni che si contraddicono, quella di Giorgio e quella di Alessandro.

2. (Ingegneria 1999) L'affermazione *a nessuno studente sono antipatici tutti i professori* equivale a dire che: A) *Scelto un qualsiasi studente, c'è almeno un professore che gli è simpatico* B) *Tutti i professori sono simpatici agli studenti* C) *Esiste uno studente a cui sono antipatici tutti i professori* D) *C'è un professore che è simpatico a tutti gli studenti* E) *A qualche studente sono simpatici tutti i professori*

Risposta A, infatti se per nessuno studente vi sono tutti i professori antipatici, vuol dire appunto che comunque scelgo uno studente questo ha in simpatia almeno un professore.

3. (Ingegneria 1999) Si consideri la seguente affermazione: *Non c'è nessun giocatore di calcio che non sia capace di colpire la palla con il piede destro*. Quale delle seguenti proposizioni è equivalente a quella enunciata sopra? A) *Tutti i giocatori di calcio sanno colpire di testa* B) *Alcuni giocatori di calcio sanno colpire la palla col piede destro* C) *Tutti i giocatori di calcio sanno colpire la palla col piede destro* D) *Non tutti i giocatori di calcio sanno colpire di testa* E) *Almeno un calciatore è capace di colpire la palla col piede sinistro*

Risposta C. Simbolicamente l'affermazione si indica con $\neg(\exists c \in C: c \notin P)$, in cui C è l'insieme dei calciatori e P l'insieme di quelli che sanno colpire con il piede destro. Noi sappiamo che la negazione di un quantificatore esistenziale è un quantificatore universale, quindi: $\neg(\exists c \in C: c \notin P) \equiv c \in P, \forall c \in C$, che equivale all'affermazione C

4. (Ingegneria 1999) La frase: *Nessun imprenditore di bassa statura può possedere più di una rete televisiva* equivale a dire che: A) *Non esiste nessun imprenditore che possiede tre reti televisive* B) *Prese a caso due reti televisive diverse* T1 *e* T2 *esiste un imprenditore di bassa statura* B1 *che possiede la rete* T1 *e un imprenditore di bassa statura* B2 *che possiede la rete* T2 C) *Prese a caso due reti televisive diverse* T1 *e* T2*, se l' imprenditore di bassa statura* B1 *possiede* T1*, allora non possiede* T2 D) *Ogni imprenditore di bassa statura possiede una rete televisiva* E) *Prese a caso due reti televisive diverse* T1 *e* T2 *esiste un imprenditore di bassa statura* B1 *che possiede* T1 *ma non possiede* T2

Risposta C. Se nessuno può possedere due reti televisive, allora se c'è un imprenditore di bassa statura che ne possiede una non ne può possedere un'altra. Questa affermazione equivale all'affermazione C

5. (Ingegneria 1999) Al ristorante *L'oca giuliva* lavorano Aristide, Evasio e Rodolfo, come cuoco, cameriere e sommelier (non necessariamente in quest'ordine). Si sa che: 1) Se Aristide è il cuoco, allora Evasio è il cameriere; 2) Se Aristide è il cameriere, allora Evasio è il sommelier; 3) Se Evasio non è il cuoco, allora Rodolfo è il cameriere; 4) Se Rodolfo è il sommelier, allora Aristide è il cameriere. Dunque: A) Aristide è il cuoco ed Evasio è il cameriere B) Aristide è il cameriere ed Evasio è il sommelier C) Rodolfo è il sommelier ed Aristide il cameriere D) Aristide è il cuoco e Rodolfo è il sommelier E) Aristide è il sommelier e Rodolfo è il cameriere

Risposta E. Supponiamo sia vera 1, allora A è cuoco ed E cameriere, ma allora è vera anche 3 e quindi R è cameriere. Non è possibile. Quindi A non è cuoco. Supponiamo sia vera 2, allora A è cameriere ed E sommelier, ma allora è vera anche 3 e quindi R è cameriere. Non è possibile. Quindi A non è cameriere. A questo punto deve essere A sommelier, quindi non può essere vera 4 per cui o R è cameriere ed E cuoco, e funziona; oppure R cuoco ed E cameriere, ma non va perché allora sarebbe vera 3 che contraddice questo risultato). Infine la conclusione corretta è E

6. (Ingegneria 1999) Gli astronomi dell'Università di Bengodi hanno provato che ogni galassia contiene un numero finito di stelle ma che il numero di stelle dell'universo è infinito. Tra tutte le stelle ne hanno individuate alcune di tipo α. Dire quale delle seguenti affermazioni implica tutte le altre. A) Le stelle α sono in numero finito B) Solo 50 galassie contengono stelle α C) Vi sono infinite stelle che non sono stelle α D) C'è almeno una galassia senza stelle α E) Non tutte le stelle sono stelle α

Risposta B. Se vale B, ovviamente è vera anche A (50 sono finite), ma anche C (dato che tutte le stelle sono infinite) e D (dato che le galassie sono infinite ma le stelle α sono finite) ed ovviamente anche E

7. (Ingegneria 2002) Nel paese di Burgundopoli tutti gli uomini di affari sono milionari; i più ricchi tra loro sono quasi calvi e bassi di statura. Ci sono inoltre alcuni mediatori che sono milionari. Alcuni di essi sono bassi di statura. Quale delle seguenti affermazioni è necessariamente errata? A) Un milionario ha vinto al Burgunlotto. B) L'attuale presidente degli industriali è alto 160 centimetri e ha folti capelli rossicci. C) Una persona di scarse risorse economiche non è un uomo d'affari. D) Il signor De' Paperis è un uomo d'affari alto e bruno, ma non è ancora milionario. E) Non ci sono mediatori alti e poveri.

Risposta D. La A può accadere o no, dato che non ha relazioni con quanto sappiamo. La B pure. La C è vera, dato che gli uomini d'affari sono tutti ricchi. A questo punto D è ovviamente errata. La E può essere vera o falsa.

8. (Ingegneria 2002) Dobbiamo dimostrare che un certo numero x è inferiore ad un altro numero y diverso da x. Quante fra le seguenti affermazioni permettono di dedurre la nostra tesi? 1) esiste un numero compreso tra loro 2) ogni numero non superiore a x è minore di y 3) tutti i numeri sono inferiori a y o superiori a x 4) nessun numero supera y e non supera x A) 3 B) 1 C) 4 D) 2 E) 0

Risposta A. La 1 dice che esiste z: $x < z < y$. La 2 che $z < y, \forall z : z \leq x$, quindi sarà anche $x < y$. La 3 dice invece solo che $z < y \vee z > x, \forall z$, per esempio potrebbe essere $x = 7$ e $y = 6$, ogni numero, diverso da 6 e 7 (anche se questo non è detto ma se così non fosse l'affermazione 3 sarebbe errata) ovviamente è maggiore di 7 o minore di 6 e in questo caso abbiamo un aut piuttosto che un vel. Infine la 4 dice che se $z > y \Rightarrow z > x, \forall z$, e quindi ovviamente deve essere $x < y$.

9. (Ingegneria 2002) Siamo nell'isola Checè, dove vivono solo cavalieri e furfanti. I cavalieri dicono sempre la verità; i furfanti mentono sempre. Incontro cinque abitanti dell'isola: Aristide, Basilio, Carlo, Donato ed Evasio. Aristide afferma: *Carlo è un cavaliere*. Basilio afferma: *Evasio è un furfante*. Carlo afferma: *Basilio è un furfante*. Donato afferma: *Aristide è un cavaliere*. Evasio afferma: *Carlo e Donato sono di diversa natura*. Allora necessariamente A) Carlo e Donato sono cavalieri B) Sono 3 cavalieri e 2 furfanti C) Evasio è un cavaliere D) Basilio è un cavaliere E) Sono 2 cavalieri e 3 furfanti

Risposta D. Se A è cavaliere, allora anche C lo è, perciò B è furfante, quindi anche E è cavaliere, da cui D è furfante, ossia A non è cavaliere. Non va.

Allora A è furfante, così come C, perciò B è cavaliere, quindi anche E è furfante, perciò D è furfante, ossia A non è cavaliere. Questo funziona. In conclusione è vera solo la D.

10. (Architettura 2007) C'è una casa con almeno due porte; si consideri l'affermazione: *Esiste una chia-*

ve che apre tutte le porte di casa, ma non la porta della cantina. **Indicare quale tra le seguenti frasi costituisce la negazione dell'affermazione riportata sopra. A)** ***Per ogni chiave, o esiste una porta che non è quella della cantina che non viene aperta da quella chiave, oppure quella chiave apre la porta della cantina*** **B)** ***Esiste una chiave che apre tutte le porte di casa, compresa quella della cantina*** **C)** ***Esiste una chiave che non apre nessuna porta, se non quella della cantina*** **D)** ***Nessuna chiave apre tutte le porte*** **E)** ***Per ogni chiave, esiste una porta che non è quella della cantina che viene aperta da quella chiave***

Risposta A. Simbolicamente abbiamo $\exists c \in \mathrm{T}$: $c \notin C$, in cui T è l'insieme di tutte le porte e C la porta della cantina, il simbolo di appartenenza significa *apre*. La negazione è perciò $\neg(\exists c \in \mathrm{T}: c \notin C) \equiv c \in \mathrm{C}, \forall\ c \in \mathrm{T}$, ossia la A, dato che potrebbe anche essere che sia $c \notin \mathrm{T}$.

11. (Architettura 2008) Un grande teorico dei numeri ha scoperto i numeri *troppobelli*, e, avendo osservato che tutti quelli che ha scoperto sono pari, congettura che esistano solo numeri *troppobelli* pari. Un suo allievo, studiando con cura questi numeri, afferma che la congettura del maestro è falsa. Dunque l'allievo sostiene che: A) ***esiste solo un numero finito di troppobelli pari*** **B)** ***nessun numero pari è troppobello*** **C)** ***c'è almeno un numero pari che non è troppobello*** **D)** ***c'è almeno un numero troppobello dispari*** **E)** ***tutti i numeri troppobelli sono dispari***

Risposta D. Se non è vero che sono tutti pari vuol dire che almeno uno no lo è, quindi è dispari.

12. (La Sapienza, Facoltà scientifiche 2008) Si consideri la frase: *In un dato campione di pazienti, chi ha fatto uso di droghe pesanti ha utilizzato anche droghe leggere*. Quale delle seguenti affermazioni relative ai pazienti del campione si può dedurre da essa? A) ***Chi ha fatto uso di droghe leggere ha utilizzato anche droghe pesanti*** **B)** ***Chi non ha fatto uso di droghe leggere non ha utilizzato droghe pesanti*** **C)** ***Chi non ha fatto uso di droghe pesanti non ha utilizzato droghe leggere*** **D)** ***Chi non ha fatto uso di droghe leggere ha utilizzato droghe pesanti***

Risposta B. Simbolicamente si ha $p \Rightarrow q$, la B si scrive $\neg q \Rightarrow \neg p$, che sappiamo essere la conversa e quindi essere vera.

13. (La Sapienza, Facoltà scientifiche 2008) Tre amici, Antonio, Bruno e Corrado, sono incerti se andare al cinema. Si sa che: se Corrado va al cinema, allora ci va anche Antonio; condizione necessaria perché Antonio vada al cinema è che ci vada Bruno. Il giorno successivo possiamo affermare con certezza che: A) se Corrado è andato al cinema, allora ci è andato anche Bruno B) nessuno dei tre amici è andato al cinema C) se Bruno è andato al cinema, allora ci è andato anche Corrado D) se Corrado non è andato al cinema, allora non ci è andato nemmeno Bruno

Risposta A. Infatti se C va al cinema ci va anche A, ma siccome affinché accada quest'ultimo caso è necessario che ci vada anche B, vuol dire che c'è andato anche B.

14. (La Sapienza, Facoltà scientifiche 2009) Qual è la negazione della frase *nessuno studente della mia classe ha studiato sia inglese sia spagnolo*? A) ***almeno uno studente della mia classe non ha studiato né spagnolo né inglese*** **B)** ***tutti gli studenti della mia classe hanno studiato sia inglese sia spagnolo*** **C)** ***tutti gli studenti della mia classe hanno studiato una sola materia fra inglese e spagnolo*** **D)** ***almeno uno studente della mia classe ha studiato sia spagnolo sia inglese***

Risposta D. Simbolicamente abbiamo $\neg(\exists\ s \in C$: $s \in I \cap S)$, la cui negazione è ovviamente $\exists\ s \in C$: $s \in I \cap S$, che coincide con la D.

15. (Economia Trento) Negare che a tutti i lettori di gialli piacciono sia i noir italiani sia quelli statunitensi significa affermare che: A) ad almeno un lettore di gialli non piacciono o i noir italiani o quelli statunitensi B) ad almeno un lettore di gialli non piacciono né i noir italiani né quelli statunitensi C) a tutti i lettori di gialli non piacciono i noir italiani D) ad almeno un lettore di gialli piacciono sia i noir italiani sia quelli statunitensi

Risposta A. Simbolicamente abbiamo $l \in I \cap S$, $\forall\ l \in G$, la cui negazione è ovviamente $\exists\ l \in G$: $l \notin I \cap S$, che coincide con la A, dato che se non piacciono entrambi allora uno almeno dei due generi non piace.

16. (Ingegneria 2009) Indicare qual è la negazione dell'affermazione *Umberto ha almeno un figlio biondo* A) ***Almeno un figlio di Umberto non è biondo*** **B)** ***Umberto non ha figli oppure ha soltanto figli non biondi*** **C)** ***Tutti i figli di Umberto sono bruni*** **D)** ***Non tutti i figli di Umberto sono biondi*** **E)** ***Umberto ha tutti i figli rossi di capelli***

Risposta B. Simbolicamente abbiamo $\exists\, f \in U: f \in B$, la cui negazione è $f \notin B$, $\forall\, f \in U$, che coincide con la B, dato che vi è anche la possibilità che l'insieme U dei figli di Umberto sia vuoto.

17. (Ingegneria 2009) Dei 120 parlamentari di Allegrandia si sa che un terzo è stato inquisito dalla magistratura e condannato definitivamente e i tre quarti sono al secondo (o comunque, non al primo) mandato parlamentare. Se ne può concludere che: A) un quarto dei parlamentari è al primo mandato ed è stato condannato definitivamente B) nessuno dei parlamentari al primo mandato è stato condannato definitivamente C) scelti comunque tre parlamentari, uno almeno di essi è stato condannato definitivamente D) un terzo dei parlamentari al primo mandato è stato condannato definitivamente E) c'è almeno un parlamentare che è stato condannato definitivamente ed è a un mandato successivo al primo

Risposta E. A non è detto perché se 3/4 non sono al primo significa che 1/4 sono al primo ma che non per forza devono far parte del terzo condannato definitivamente. Lo stesso per B, non sappiamo se i condannati siano al primo o ad altro mandato. Uguuale discorso per D. Per C, i condannati sono 40 quindi non è vero che se ne prendo tre qualsiasi uno almeno di essi è stato condannato.

18. (Ingegneria 2009) Un accogliente cartello all'ingresso del ristorante L'Oca giuliva recita: *Se si è pochi, si mangia bene, se si è in tanti, si spende poco*. Il signor Aquilotto, con la sua mente acuta, ne deduce logicamente che: A) *se si è in pochi, si spende tanto* B) *per mangiare bene è necessario andarci in pochi* C) *se si mangia male non si è pochi* D) *per spendere poco bisogna essere in tanti* E) *se si è in tanti, si mangia male*

Risposta C. La A e la E non collegano logicamente le due premesse, che non hanno termine comune. La B considera la prima affermazione come condizione necessaria, mentre è condizione sufficiente. La C va bene perché se si fosse in pochi si dovrebbe certamente mangiare bene. La D considera sempre una condizione sufficiente come se fosse necessaria.

19. (Ingegneria 2009) Un Marziolano, osserva che: metà di tutti i Tondolini sono remissivi; metà di tutti i Marziolani sono testardi; metà di tutti i Marziolani sono remissivi. E tenendo presente che non si può essere insieme remissivi e testardi, deduce che una e una sola delle seguenti affermazioni NON può essere vera. Quale? A) *Metà di tutti i Tondolini sono testardi* B) *Tutti i Tondolini sono Marziolani* C) *Tutti i Marziolani sono Tondolini e nessun Tondolino è testardo* D) *Non esistono Tondolini che siano anche Marziolani* E) *Tondolini e Marziolani sono lo stesso insieme di persone*

Risposta B. Tutte le altre possono essere sia vere che false.

20. (Ingegneria 2009) Un chimico studiando una soluzione che si era tinta di arancione, constatò che in essa era presente del sodio o del potassio (o entrambi); inoltre osservò che, se NON c'era sodio, c'era ferro, e che, se c'era potassio, c'era anche iodio. Quale di queste situazioni si può verificare? A) La soluzione contiene solo potassio e ferro B) La soluzione contiene solo ferro e iodio C) La soluzione contiene sodio e potassio e ferro e non contiene iodio D) La soluzione non contiene né sodio né iodio E) La soluzione contiene solo sodio

Risposta E. A non può accadere perché se c'è solo potassio c'è anche iodio. Lo stesso B perché sodio o potassio devono esserci. C non va perché essendoci potassio deve esserci iodio. D non va perché se non c'è sodio c'è potassio e quindi iodio.

21. **(Architettura 2010) Credevo che tutti i medici avessero un rimedio per ogni male, ma l'esperienza mi ha costretto a ricredermi. Quale delle seguenti affermazioni consegue necessariamente dalla premessa? A) *I medici non hanno rimedio per nessun male* B) *Per ogni male, c'è un medico che non sa porvi rimedio* C) *C'è un male per cui nessun medico ha un rimedio* D) *Esiste un medico che non ha un rimedio per un certo male* E) *Ogni medico manca del rimedio per almeno un male***

Risposta D. Sostanzialmente è falso che tutti i medici hanno un rimedio per ogni male, quindi è vero che vi è almeno un medico che non ha un rimedio per almeno un male.

22. (Architettura 2010) Alessandro afferma: *Se Rossi parte in pole position arriva primo*. Quale delle seguenti proposizioni è la NEGAZIONE di quella di Alessandro? A) *Rossi può non vincere anche se parte in pole position* B) *Se Rossi non parte in pole position non vince* C) *Rossi non vince mai ogni volta che parte in pole position* D) *Rossi può non partire in pole position e non vincere* E) *Rossi può arrivare primo anche se non parte in pole position*

Risposta A. La negazione di $p \Rightarrow q$ è una proposizione che è sempre falsa tranne quando p è vera e q è falsa. quindi Rossi parte in pole position ma non arriva primo, ossia A.

23. (Architettura 2010) Nello stato di Burgundia, una norma di circolazione stabilisce che ogni automobile, se non è verniciata di rosso, deve avere gomme chiodate e vetri oscurati. Poiché questa norma viene rigorosamente rispettata, possiamo affermare con sicurezza che: A) non ci sono automobili rosse con gomme chiodate e vetri oscurati B) ogni automobile è rossa oppure ha vetri oscurati C) ogni automobile verniciata di rosso ha gomme chiodate e vetri oscurati D) c'è almeno un'automobile che ha vetri oscurati oppure non è verniciata di rosso E) ogni automobile che ha gomme chiodate e vetri oscurati è rossa

Risposta B. Infatti se è rossa non ci sono problemi, se non lo è deve avere gomme chiodate e vetri oscurati

24. (Architettura 2010) La maestra dice a Pierino: *Se risolvi correttamente due esercizi su cinque, ti darò la sufficienza*. Pierino non prende la sufficienza. Dunque, necessariamente Pierino: A) ha risolto correttamente un esercizio e ne ha sbagliato un altro B) ha risolto correttamente un esercizio C) ha risolto correttamente al più un esercizio D) non ha risolto correttamente nessun esercizio E) ha risolto due esercizi, ma con errori

Risposta C. Dato che l'implicazione è falsa solo se la premessa è vera e la conseguenza falsa, allora se non si è verificata la tesi, come appunto succede vuol dire che non si è verificata la premessa, quindi non ha risolto due esercizi su cinque, ma meno di 2.

25. (Economia Trento) *È da escludere l'ipotesi secondo cui la scarsa prestazione dell'orchestra non debba essere attribuita all'inesperienza del direttore*. Basandosi sulla precedente affermazione, individuare quale delle seguenti alternative è esatta. A) Se il direttore si fosse concentrato maggiormente, la prestazione dell'orchestra sarebbe stata meno scarsa B) La scarsa prestazione dell'orchestra non deve essere attribuita all'inesperienza del direttore C) Per ottenere buone prestazioni da un'orchestra è necessario avere un direttore esperto D) La scarsa prestazione dell'orchestra è da attribuire all'inesperienza del direttore

Risposta D. Dato che abbiamo una doppia negazione (escludere e non debba) vuol dire appunto che la scarsa prestazione è imputabile all'inesperienza.

26. (Medicina 2013) Un ispettore di polizia sta conducendo un'indagine su un caso di omicidio. Sulla scena del delitto è stato ritrovato un biglietto di ingresso ad un museo. Ciascuno dei 5 sospettati ha ammesso di aver visitato il museo nell'ultimo mese. Il sospettato A sostiene di aver visitato il museo il 17 febbraio. Il sospettato B sostiene di aver visitato il museo il 6 febbraio. Il sospettato C sostiene di aver visitato il museo il 9 febbraio. Il sospettato D sostiene di aver visitato il museo il 30 gennaio. Il sospettato E sostiene di aver visitato il museo il 3 febbraio. L'ispettore ricorda chiaramente di aver visitato lui stesso il museo il mese scorso, il 16 gennaio, e sa per certo che da dicembre a marzo il museo è aperto soltanto il martedì e il venerdì. Pertanto, sa anche che SOLO uno dei sospettati non sta dicendo la verità. Chi è il sospettato che non sta dicendo la verità?

Risposta C. Dobbiamo stabilire le varie date che giorni possono essere. Se il 16 gennaio era un Martedì, allora è stato Martedì anche il 30 gennaio, il 6 Febbraio; mentre il 9 Febbraio è stato Venerdì, invece il 3 Febbraio e il 17 Febbraio un Sabato. Quindi B e D dicono la verità perché anche se il 16 gennaio era un Venerdì, questi giorni sarebbero Venerdì. In questo caso il 9 Febbraio è stato Lunedì, invece il 3 Febbraio e il 17 Febbraio un Martedì. Quindi il 16 Gennaio era un venerdì e ha mentito C.

27. (Medicina 2013) Coltivare piante non autoctone per abbellire i propri giardini è diventata una pratica piuttosto comune. Molte di queste specie sono costose, richiedono trattamenti speciali e sono spesso soggette a parassiti e malattie. Esistono molte piante selvatiche autoctone che sono perfettamente adatte alla crescita in vaso o nei giardini delle case, non richiedono trattamenti speciali e sono spesso altrettanto belle rispetto alle piante provenienti dall'estero. Si dovrebbe dunque cercare di coltivare un numero maggiore di piante autoctone selvatiche nei propri giardini. Se considerata vera, quale delle seguenti affermazioni rende più forte l'argomentazione precedente? A) Le piante selvatiche autoctone non sono soggette a malattie B) I giardinieri traggono particolare piacere nel coltivare con successo piante non autoctone C) Le piante selvatiche autoctone hanno una fioritura più breve rispetto alle piante esotiche D) Alcune piante selvatiche autoctone sono molto costose e difficili

da coltivare E) Parecchi centri di giardinaggio hanno notato un aumento nelle vendite di piante selvatiche autoctone

Risposta A. Le altre si vede facilmente che non dipendono da quanto premesso.

28. (Medicina 2013) Se ci si vuole recare al Festival della musica di Saldano si deve effettuare l'iscrizione online almeno 48 ore prima che la biglietteria virtuale venga aperta. Marta vuole certamente acquistare biglietti per il Festival, quindi si è iscritta online. Quale delle seguenti affermazioni segue la stessa struttura logica del ragionamento appena illustrato? A) Se Maria smette di recarsi al lavoro a piedi, deve per forza prendere o l'autobus o la macchina. Maria ha smesso di recarsi al lavoro a piedi, quindi deve per forza prendere o l'autobus o la macchina B) Se si vogliono ottenere buoni voti agli esami non si deve andare a letto tardi la notte prima dell'esame. Alessandra è andata a letto tardi la notte prima dell'esame, quindi non otterrà buoni risultati C) Franco è dimagrito molto. Potrebbe aver seguito una dieta oppure potrebbe aver fatto molto esercizio fisico. È impossibile che Franco abbia fatto molto esercizio fisico, quindi deve aver seguito una dieta D) Sonia sta imparando a guidare. La maggior parte delle persone passano l'esame di guida dopo aver fatto 30 lezioni di guida. Sonia ha prenotato 30 lezioni, quindi dovrebbe passare l'esame di guida dopo aver terminato le lezioni E) Per andare negli Stati Uniti bisogna ottenere il visto. Giacomo deve andare negli Stati Uniti, quindi ha fatto domanda per ottenere il visto

Risposta E. La struttura è del modus ponens, Se p allora q, p quindi q. E l'unica con questa struttura è proprio E.

29. (Medicina 2016) "Se il mandorlo è in fiore, la rosa marcisce. Se la begonia marcisce il papavero sboccia. Inoltre o il mandorlo è in fiore o la begonia marcisce". In base alle precedenti affermazioni è sicuramente vero che: A) la rosa marcisce o il papavero sboccia B) il papavero sboccia C) il mandorlo è in fiore e il papavero sboccia D) la rosa marcisce e il papavero sboccia E) la rosa e la begonia marciscono

Risposta A. Supponiamo che sia il mandorlo in fiore, allora la rosa marcisce; se invece la begonia marcisce allora il papavero sboccia.

30. (Medicina 2016) "Chi legge un quotidiano al giorno o utilizza spesso internet è informato; i social specialist utilizzano spesso internet; Luisa è una social specialist". Se le precedenti affermazioni sono corrette, quale delle seguenti NON è necessariamente vera? A) Non esistono persone disinformate che leggano un quotidiano al giorno B) Luisa utilizza spesso internet C) Le social specialist sono informate D) Luisa è informata E) Chi è informato utilizza spesso internet

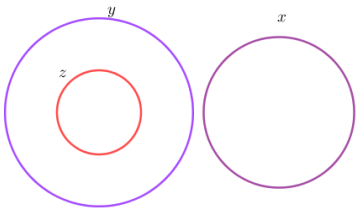
Risposta E. Infatti la premessa dice che chi usa internet è informato, non che solo chi usa internet è inforamto, quindi si potrebbe essere informati senza usare internet.

Quelli che … vogliono sapere di più

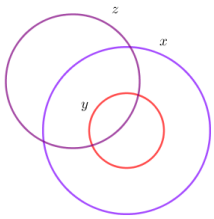
I sillogismi aristotelici

1. Completare la dimostrazione del Teorema 5 per i sillogismi della prima figura.

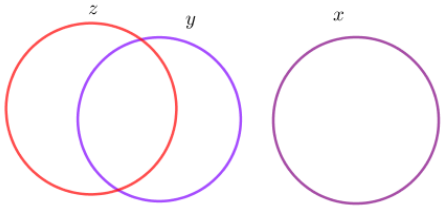
La prima figura ha lo schema $\begin{array}{ccc} y & R & x \\ z & R & y \\ \hline z & R & x \end{array}$ Dobbiamo provare EAE, AII, EIO.



EAE: nessun y è x, tutti gli z sono y, quindi nessun z è x. Graficamente:



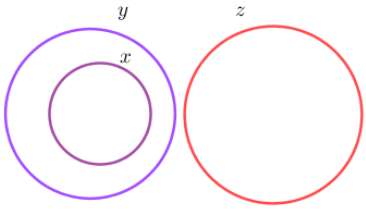
AII: tutti gli *y* sono *x,* qualche *z* è *y*, quindi qualche *z* è *x*. Graficamente:



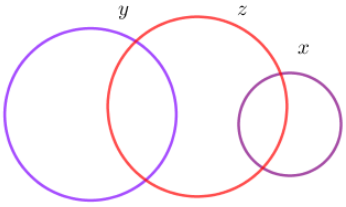
EIO: nessun *y* è *x,* qualche *z* è *y*, quindi qualche *z* non è *x*. Graficamente:

2. Completare la dimostrazione del Teorema 5 per i sillogismi della seconda figura.

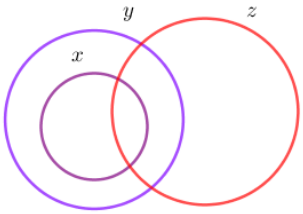
La seconda figura ha lo schema $\begin{array}{ccc} x & R & y \\ z & R & y \\ \hline z & R & x \end{array}$ Dobbiamo provare AEE, EIO, AOO.



AEE: tutti gli *x* sono *y,* nessun *z* è *y*, quindi nessun *z* è *x*. Graficamente:



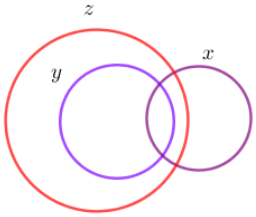
EIO: nessun *x* è *y,* qualche *z* è *y*, quindi qualche *z* non è *x*. Graficamente:



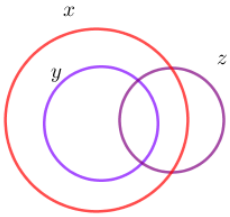
AOO: tutti gli *x* sono *y,* qualche *z* non è *y*, quindi qualche *z* non è *x*. Graficamente:

3. Completare la dimostrazione del Teorema 5 per i sillogismi della terza figura.

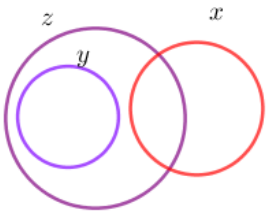
La terza figura ha lo schema $\begin{array}{ccc} y & R & x \\ y & R & z \\ \hline z & R & x \end{array}$ Dobbiamo provare IAI, AII, EAO, OAO, EIO.



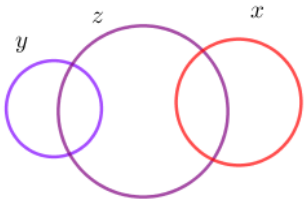
IAI: qualche *y* è *x,* tutti gli *y* sono *z*, quindi qualche *z* è *x*. Graficamente:



AII: tutti gli y sono x, qualche y è z, quindi qualche z è x. Graficamente:



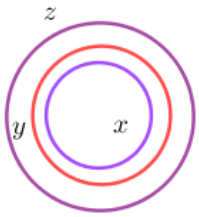
EAO: nessun y è x, tutti gli y sono z, quindi qualche z non è x. Graficamente:
OAO: qualche y non è x, tutti gli y sono z, quindi qualche z non è x. Graficamente come il precedente



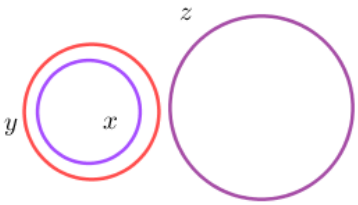
EIO: nessun y è x, qualche y è z, quindi qualche z non è x. Graficamente:

4. Completare la dimostrazione del Teorema 5 per i sillogismi della quarta figura.

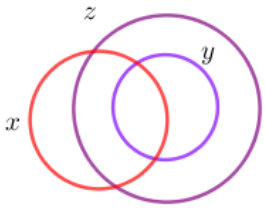
La quarta figura ha lo schema $\begin{array}{c} x \; R \; y \\ y \; R \; z \\ \hline z \; R \; x \end{array}$ Dobbiamo provare AAI, AEE, IAI, EAO.



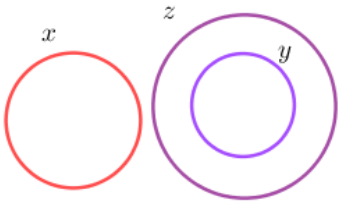
AAI: tutti gli x sono y, tutti gli y sono z, quindi qualche z è x. Graficamente:



AEE: tutti gli x sono y, nessun y è z, quindi nessun z è x. Graficamente:



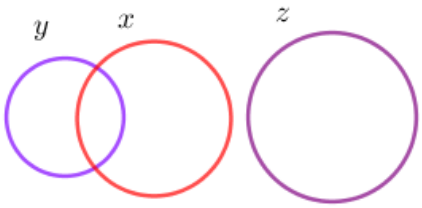
IAI: qualche x è y, tutti gli y sono z, quindi qualche z è x. Graficamente:



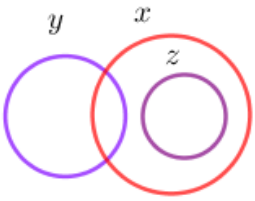
EAO: nessun x è y, tutti gli y sono z, quindi qualche z non è x. Graficamente:

5. Dimostrare che gli schemi IOA e OOO non sono sillogismi corretti per la prima figura.

IOA. Lo schema sarebbe: qualche *y* è *x,* qualche *z* non è *y*, quindi tutti i *z* sono *x*. Il grafico mostra che in gene-



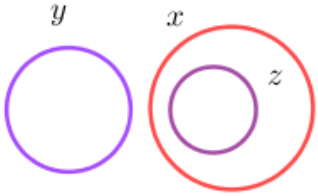
rale ciò non accade.
OOO. Lo schema sarebbe: qualche *y* non è *x,* qualche *z* non è *y*, quindi qualche *z* non è *x*. Il grafico mostra che



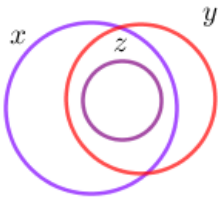
in generale ciò non accade.

6. Dimostrare che gli schemi EEE e OAO non sono sillogismi corretti per la seconda figura.

EEE. Lo schema sarebbe: nessun *x* è *y,* nessun *z* è *y*, quindi nessun *z* è *x*. Il grafico mostra che in generale ciò



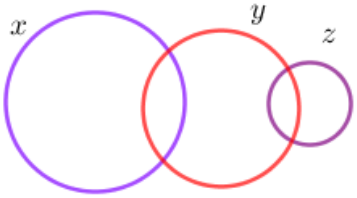
non accade.
OAO. Lo schema sarebbe: qualche *x* non è *y,* tutti gli *z* sono *y*, quindi qualche *z* non è *x*. Il grafico mostra che in



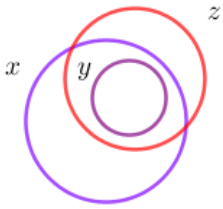
generale ciò non accade.

7. Dimostrare che gli schemi III e AAA non sono sillogismi corretti per la terza figura.

III. Lo schema sarebbe: qualche *y* è *x,* qualche *y* è *z*, quindi qualche *z* è *x*. Il grafico mostra che in generale ciò



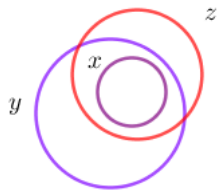
non accade.
AAA. Lo schema sarebbe: tutti gli *y* sono *x,* tutti gli *y* sono *z*, quindi tutti gli *z* sono *x*. Il grafico mostra che in



generale ciò non accade.

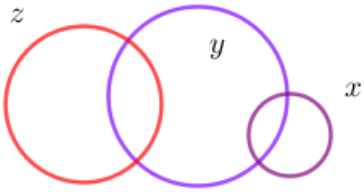
8. Dimostrare che gli schemi AOA e OII non sono sillogismi corretti per la quarta figura.

AOA. Lo schema sarebbe: tutti gli *x* sono *y,* qualche *y* non è *z*, quindi tutti gli *z* sono *x*. Il grafico mostra che in



generale ciò non accade.

OII. Lo schema sarebbe: qualche *x* non è *y,* qualche *y* è *z*, quindi qualche *z* è *x*. Il grafico mostra che in generale



ciò non accade.

Mediante le seguenti proprietà, costruire dei sillogismi perfetti seguendo la figura e lo schema suggerito

9. *x*: *triangoli equiangoli; y: triangoli isosceli; z: triangoli scaleni*. EAE, I figura.

nessun triangolo isoscele è equiangolo, tutti i triangoli scaleni sono isosceli, quindi nessun triangolo scaleno è equiangolo

10. *x*: *multiplo di* 6*; y:multiplo di* 30*; z: multiplo di* 5. AII, I figura.

tutti i multipli di 30 sono multipli di 6, qualche multiplo di 5 è multiplo di 30, quindi qualche multiplo di 5 è multiplo di 6

11. *x*: *elettori per il senato della Repubblica italiana; y: minorenni; z: studenti*. EIO, I figura.

nessun minorenne è elettore per il senato della Repubblica italiana, qualche studente è minorenne, quindi qualche studente non è elettore per il senato della Repubblica italiana

12. *x*: *trapezi; y:parallelogrammi; z: rettangoli*. EAE, II figura.

Nessun parallelogramma è trapezio; Ogni rettangolo è parallelogramma, quindi Nessun rettangolo è trapezio

13. *x*: *leoni; y: carnivori; z: conigli*. AEE, II figura.

Tutti i leoni sono carnivori, nessun coniglio è carnivoro, quindi nessun coniglio è un leone

14. *x*: *svedesi; y: con la carnagione scura; z: con i capelli neri*. EIO, II figura.

Nessuno svedese è con la carnagione scura, qualcuno con i capelli neri è con la carnagione scura, quindi qualcuno con i capelli neri non è svedese.

15. *x*: *professore universitario; y: laureato; z: musicista*. AOO, II figura.

tutti i professori universitari sono laureati, qualche musicista non è laureato, quindi qualche musicista non è professore universitario

16. *x*: *quadrupedi; y: cani; z: mammiferi*. AAI, III figura.

Tutti i cani sono quadrupedi, Ogni cane è mammifero, quindi Qualche mammifero è quadrupede.

17. *x*: *ecologisti; y:pittori; z: artisti*. IAI, III figura.

Qualche pittore è ecologista, tutti i pittori sono artisti, quindi qualche artista è ecologista

18. *x*: *obesi; y:tennisti; z: atleti*. EAO, III figura.

Nessun tennista è obeso, tutti i tennisti sono atleti, quindi qualche atleta non è obeso

19. *x*: *numeri interi; y: numeri razionali; z: numeri reali*. OAO, III figura.

Qualche numero razionale non è intero, tutti i numeri razionali sono numeri reali, quindi qualche numero reale non è intero

20. *x*: *europei; y: africani; z: nigeriani*. EIO, III figura.

Nessun africano è europeo, qualche africano è nigeriano, quindi qualche nigeriano non è europeo

21. *x*: *medici; y: diplomati; z: maggiorenni*. AAI, IV figura.

Tutti i medici sono diplomati, tutti i diplomati sono maggiorenni, quindi qualche maggiorenne è medico

22. *x*: *terzini; y: difensori; z: centravanti*. AEE, IV figura.

Tutti i terzini sono difensori, nessun difensore è centravanti, quindi nessun centravanti è terzino

23. *x*: *libri a fumetti; y: libri tascabili; z: libri economici*. IAI, IV figura

Qualche libro a fumetti è tascabile, tutti i libri tascabili sono libri economici, quindi qualche libro economico è a fumetti

24. ***x*: *città con meno di* 10000 *abitanti; y: capoluoghi di regione; z: capoluoghi di provincia*. EAO, IV figura.**
Nessuna città con meno di 10000 abitanti è capoluogo di regione, tutti i capoluoghi di regione sono capoluoghi di provincia, quindi qualche capoluogo di provincia non è città con meno di 10000 abitanti

25. ***x*: *marziani; y: venusiani; z: esseri a pallini rossi*. EIO, IV figura.**
Nessun marziano è venusiano, qualche venusiano è un essere a pallini rossi, quindi qualche essere a pallini rossi non è marziano

***Trarre una deduzione dalle seguenti informazioni* (*Tratti da L. Carroll, Simbolic Logic, Penguin*)**

26. a. le uniche cose di stagno che posseggo sono le casseruole; b. ho trovato tutti i tuoi regali molto utili; c. nessuna delle mie casseruole ha la minima utilità.
Dato che mi hai regalato solo cose utili, mentre le casseruole non lo sono, vuol dire che non mi hai regalato casseruole, e quindi nulla che sia fatto di stagno

27. a. tutti quelli che si abbonano a The Times sono persone ben educate; b. nessun porcospino sa leggere; c. chi non sa leggere non è ben educato.
Dato che i porcospini non sanno leggere non sono bene educate, quindi non sono abbonati a The Times

28. a. al mio giardiniere piace ascoltare storie di argomento militare; b. nessuno ricorda la battaglia di Waterloo a meno che sia molto vecchio; c. a nessuno piace ascoltare storie di argomento militare a meno che riesca a ricordare la battaglia di Waterloo.
Il mio giardiniere è molto vecchio

29. a. nessuna papera sa ballare il valzer; b. tutti gli ufficiali sanno ballare il valzer; c. tutti i miei animali domestici sono composti da papere.
Fra i miei animali domestici non vi sono ufficiali