# 1. Le basi del ragionamento

## 1.3 Insiemi dotati di struttura

## Richiamiamo le Conoscenze

### Operazioni binarie e loro proprietà
### Relazioni binarie

***Date le seguenti operazioni calcolare quanto proposto. Nel seguito max(a; b) calcola il massimo fra i numeri a e b; min(a; b) calcola il minimo fra i numeri a e b***

1. ***n* * *m* = *n* + 2*m* : a) 3 * 7; b) 5 * 0; c) 0 * 5; d) 12 * 2.**
   a) 3 * 7 = 3 + 2 · 7 = 17; b) 5 * 0 = 5 + 2 · 0 = 5; c) 0 * 5 = 0 + 2 · 5 = 10; d) 12 * 2 = 12 + 2 · 2 = 16
2. ***m* & *n* = 5*m* + 2*n*: a) 5 & 3; b) 6 & 0; c) 0 & 6; d) 7 & 7; e) 3 & 5.**
   a) 5 & 3 = 5 · 5 + 2 · 3 = 31; b) 6 & 0 = 5 · 6 + 2 · 0 = 30; c) 0 & 6 = 5 · 0 + 2 · 6 = 12; d) 7 & 7 = 5 · 7 + 2 · 7 = 49; e) 3 & 5 = 5 · 3 + 2 · 5 = 25
3. ***m* ∝ *n* = *m*$^2$ – *n*$^2$: a) 3∝2; b) –2 ∝ 1; c) –3 ∝ –2; d) 1 ∝ 0**
   a) 3∝2 = $3^2 - 2^2 = 5$; b) –2 ∝ 1 = $(-2)^2 - 1^2 = 3$; c) –3 ∝ –2 = $(-3)^2 - (-2)^2 = 5$; d) 1 ∝ 0 = $1^2 - 0^2 = 1$
4. $a\Theta b = \dfrac{a \cdot b}{a+b}$ **: a) 3 Θ 5; b) 0 Θ 1; c) –2 Θ –1; d)** $\dfrac{1}{2}\Theta\dfrac{2}{3}$
   a) $\dfrac{3\cdot 5}{3+5} = \dfrac{15}{8}$; b) $\dfrac{0\cdot 1}{0+1} = 0$; c) $\dfrac{-2\cdot(-1)}{-2-1} = -\dfrac{2}{3}$; d) $\dfrac{1/\cancel{2\cdot 2}/3}{1/2+2/3} = \dfrac{1/\cancel{3}}{7/\cancel{6}^{2}} = \dfrac{2}{7}$
5. **a) *max*(–2; 5); b) *max*(4; 0); c) *max*(–7; –7); d) *max*(3/4; –5/2)**
   a) 5; b) 4; c) –7; d) 3/4
6. **a) *min*(8; –2); b) *min*(–3; –5); c) *min*(0; –1); d) *min*(–4/3; –5/4)**
   a) –2; b) –5; c) –1; d) –4/3
7. $a\Theta b = \dfrac{a-b}{a+b}$ **: a) (–4 Θ 1) Θ (–2); b) (3 Θ 0) Θ 0; c) –2/3 Θ (2/3 Θ 3/4)**
   a) $\dfrac{-4-1}{-4+1}\Theta(-2) = \dfrac{5}{3}\Theta(-2) = \dfrac{5/3-(-2)}{5/3-2} = \dfrac{11/\cancel{3}}{-1/\cancel{3}} = -11$; b) $\dfrac{3-0}{3+0}\Theta 0 = 1\Theta 0 = \dfrac{1-0}{1+0} = 1$;
   c) $-\dfrac{2}{3}\Theta\dfrac{2/3-3/4}{2/3+3/4} = -\dfrac{2}{3}\Theta\dfrac{-1/\cancel{12}}{17/\cancel{12}} = -\dfrac{2}{3}\Theta\left(-\dfrac{1}{17}\right) = \dfrac{-2/3-(-1/17)}{-2/3-1/17} = \dfrac{-31/\cancel{51}}{-37/\cancel{51}} = \dfrac{31}{37}$
8. $a\otimes b = \dfrac{a-2b}{2a+b}$ **: a) (3 ⊗ 5) ⊗ 0; b) –3 ⊗ (0 ⊗ (–4)); c) –1/2 ⊗ (3/7 ⊗ 2/9)**
   a) $\dfrac{3-2\cdot 5}{2\cdot 3+5}\otimes 0 = \dfrac{-7}{11}\otimes 0 = \dfrac{-7/11-2\cdot 0}{2\cdot(-7/11)+0} = -\dfrac{1}{2}$ b) $-3\otimes\dfrac{0-2\cdot(-4)}{2\cdot 0-4} = -3\otimes(-2) = \dfrac{-3-2\cdot(-2)}{2\cdot(-3)-2} = -\dfrac{1}{8}$
   c) $-\dfrac{1}{2}\otimes\dfrac{3/7-2\cdot(2/9)}{2\cdot(3/7)+2/9} = -\dfrac{1}{2}\otimes\dfrac{3/7-4/9}{6/7+2/9} = -\dfrac{1}{2}\otimes\dfrac{-1/\cancel{63}}{68/\cancel{63}} = \dfrac{-1/2-2\cdot(-1/68)}{2\cdot(-1/2)-1/68} = \dfrac{-1/2+1/34}{-1-1/68} = \dfrac{-32/\cancel{68}}{-69/\cancel{68}} = \dfrac{32}{69}$
9. **a) *max*(*max*(1; *min*(2; 3)); *min*(4; *min*(1; 5))); b) *max*(*min*(1; *max*(2; 3)); *min*(4; *max*(1; 5)))**
   a) *max*(*max*(1; 2); *min*(4; 1)) = ; *max*(2; 1) = 2 ; b) *max*(*min*(1; 3); *min*(4; 5)) = *max*(1; 4) = 4
10. **a) *min*(*max*(1; *max*(2; 3)); *max*(4; *min*(1; 5))); b) *max*(*max*(1; *max*(2; 3)); *max*(4; *max*(1; 5)))**
    a) *min*(*max*(1; 3); *max*(4; 1)) = *min*(3; 4) = 3; b) *max*(*max*(1; 3); *max*(4; 5)) = *max*(3; 5) = 5 Osserviamo che essendo tutti *max* il risultato è ovviamente il più grande dei numeri presenti.
11. ***min*(*min*(1; *min*(2; 3)); *min*(4; *min*(1; 5)))**
    Ragionando come nel b) precedente, facilmente si ha: 1
12. **(*a*; *b*) Φ (*c*; *d*) = (*a* – *c*; *b* + *d*), definita in $\mathbb{R}^2$ :**

**a) (2; 1) Φ (1; 2); b) (1; 0) Φ (0; –2); c) (3; 2) Φ (–4; 5); d) (1/2; 1) Φ (2/3; –1/4)**
a) $(2 - 1; 1 + 2) = (1; 3)$; b) $(1 - 0; 0 - 2) = (1; -2)$;
c) $(3 - (-4); 2 + 5) = (7; 7)$; d) $(1/2 - 2/3; 1 - 1/4) = (-1/6; 3/4)$

**13. Data l'operazione: $m$ £ $n = m - 2n$, trovare almeno due numeri naturali $m$ ed $n$ per cui $m$ £ $n = 0$.**
$m - 2n = 0 \Rightarrow m = 2n$, quindi per esempio: (2, 1), (4, 2), (6, 3), ...

**14. Data l'operazione: $m \nabla n = 2m + 3n$, determinare, se esiste, almeno un numero $n$ per cui $n \nabla n = n^2$.**
$2n + 3n = n^2 \Rightarrow 5n = n^2 \Rightarrow n = 0 \vee n = 5$

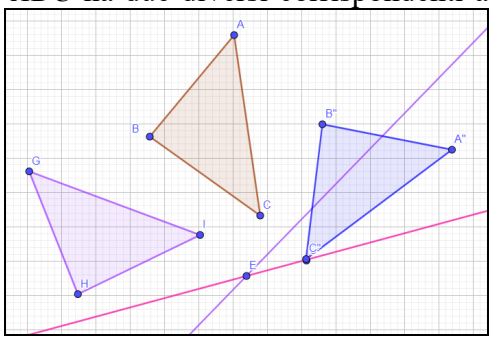
**15. Definiamo la seguente operazione ternaria $[a; b; c] = a^b - b^c + c^a$. Calcolare:**
**a) [1; –1; 2]; b) [–1; 1; 2]; c) [2; –1; 1]; d) [2; 1; –1]; e) [1; 1; 0]**
a) $1^{-1} - (-1)^2 + 2^1 = 1 - 1 + 2 = 2$; b) $= -1^1 - 1^2 + 2^{-1} = -1 - 1 + 1/2 = -3/2$;
c) $= 2^{-1} - (-1)^1 + 1^2 = ½ + 1 + 1 = 5/2$; d) $= 2^1 - 1^{-1} + (-1)^2 = 2 - 1 + 1 = 2$;
e) $= 1^1 - 1^0 + 0^1 = 1 - 1 + 0 = 0$

**16. Definita l'operazione $x \otimes y = 4x - 3y + xy$, risolvere le equazioni:**
**a) $3 \otimes y = 12$; b) $x \otimes 3 = 12$; c) $0 \otimes y = 1$; d) $x \otimes 0 = 1$; e) $1 \otimes y = 0$; f) $x \otimes 1 = 0$**
a) $4 \cdot 3 - 3y + 3y = 12 \Rightarrow 12 = 12 \Rightarrow$ Identità; b) $4x - 3 \cdot 3 + 3x = 12 \Rightarrow 7x = 21 \Rightarrow x = 3$;
c) $4 \cdot 0 - 3y + 0 \cdot y = 1 \Rightarrow -3y = 1 \Rightarrow y = -1/3$; d) $4x - 3 \cdot 0 + x \cdot 0 = 1 \Rightarrow 4x = 1 \Rightarrow x = 1/4$;
e) $4 \cdot 1 - 3y + 1 \cdot y = 0 \Rightarrow 4 - 3y + y = 0 \Rightarrow -2y = -4 \Rightarrow y = 2$; f) $4x - 3 \cdot 1 + x \cdot 1 = 0 \Rightarrow 5x = 3 \Rightarrow x = 3/5$

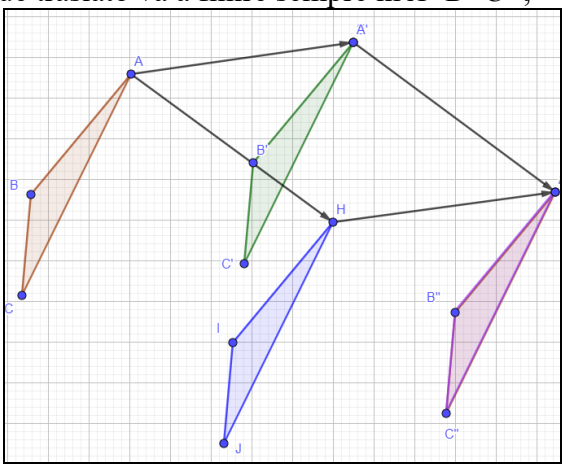
**17. Data l'operazione: $m \clubsuit n = m - n + 1$, determinare, tutti i numeri $n$ ed $m$ per cui $n \clubsuit m = m \clubsuit n$.**
$n - m + 1 = m - n + 1 \Rightarrow 2m = 2n \Rightarrow m = n$

***Stabilire quali fra le seguenti operazioni verificano la proprietà commutativa.***

**18. a) Operazioni logiche; b) Composizione di simmetrie assiali**
a) Tutte, tranne l'implicazione materiale, come si vede facilmente dalle tabelle di verità; b) No in figura il triangolo $ABC$ ha due diversi corrispondenti a seconda dell'ordine di composizione rispetto alle rette mostrate




**19. a) Prodotto cartesiano tra insiemi; b) Composizione di traslazioni**
a) No: Sia $A = \{1; 2\}$, $B = \{3\} \Rightarrow A \times B = \{(1; 3); (2; 3)\}$, mentre $B \times A = \{(3; 1); (3; 2)\}$
b) Sì: in figura $ABC$, comunque traslato va a finire sempre in $A''B''C''$,




**20. a) Operazioni insiemistiche; b) $a \succ b = \sqrt[b]{a}$ ; c) $a^b$**
a) Tutte, tranne la differenza. Per esempio $A = \{1; 2\}$, $B = \{2; 3\}$, si ha: $A \setminus B = \{1\}$, $B \setminus A = \{3\}$
b) No, per esempio $2 \succ 3 = \sqrt[2]{3}, 3 \succ 2 = \sqrt[3]{2}$,; c) No per esempio $2^3 \neq 3^2$.

**21.** **a)** $a\Theta b=\frac{a\cdot b}{a+b}$ **; b)** $a\Lambda b=\frac{a+b}{a\cdot b}$ **; c)** $a\Xi b=\frac{a-b}{a+b}$

a) Sì: $b\Theta a=\frac{b\cdot a}{b+a}=a\Theta b$; b) Sì: $b\Lambda a=\frac{b+a}{b\cdot a}=a\Lambda b$; c) No, per esempio: $2\Xi 1=\frac{2-1}{2+1}=\frac{1}{3};1\Xi 2=\frac{1-2}{1+2}=-\frac{1}{3}$

**22.** **a)** $x\otimes y=max(x,y)$**; b)** $x\oplus y=min(x,y)$**; c)** $a\propto b=\frac{a+b}{2}$ **; b)** $x\heartsuit y=(x+1)\cdot(y+1)-1$

a) Sì: il massimo di due numeri è sempre quello, indipendentemente dall'ordine in cui i numeri vengono scritti; b) Sì, stessa giustificazione di a); c) Sì perché è una somma; b) Sì; $y\heartsuit x=(y+1)\cdot(x+1)-1=x\heartsuit y$

**23.** **Composizione di isometrie;**
No, basti pensare al quesito 18 b)

***Stabilire quali fra le seguenti operazioni verificano la proprietà associativa.***

**24.** **a)** $a\succ b=\sqrt[b]{a}$ **; b) Elevamento a potenza; c) Operazioni insiemistiche**

a) No: per esempio $(2\succ 3)\prec 4=\sqrt[3]{2}\prec 4=\sqrt[4]{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[12]{2};2\prec(3\prec 4)=2\prec\sqrt[4]{3}=\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}$;

b) No: per esempio $(2^3)^4=8^4$ mentre $2^{3^4}=2^{81}$; c) Tutte, tranne la differenza. Per esempio $\{1;2\}\setminus(\{1;3\}\setminus\{1;4\})=\{1;2\}\setminus\{3\}=\{1;2\}$; mentre $(\{1;2\}\setminus\{1;3\})\setminus\{1;4\}=\{2\}\setminus\{1;4\}=\{1;4\}$

**25.** **a) Prodotto cartesiano tra insiemi; b) Operazioni logiche**
a) Sì perché sono coppie ordinate; b) Tutte, tranne l'implicazione materiale, infatti se sono tutte false: $(p\Rightarrow q)\Rightarrow r$ è $(F\Rightarrow F)\Rightarrow V\equiv V\Rightarrow F\equiv F$, mentre $p\Rightarrow(q\Rightarrow r)$ è $F\Rightarrow(F\Rightarrow F)\equiv F\Rightarrow V\equiv V$

**26.** **a)** $a\Theta b=\frac{a\cdot b}{a+b}$ **; b)** $a\Lambda b=\frac{a+b}{a\cdot b}$ **; c)** $a\Xi b=\frac{a-b}{a+b}$ **; d)** $x\otimes y=max(x;y)$

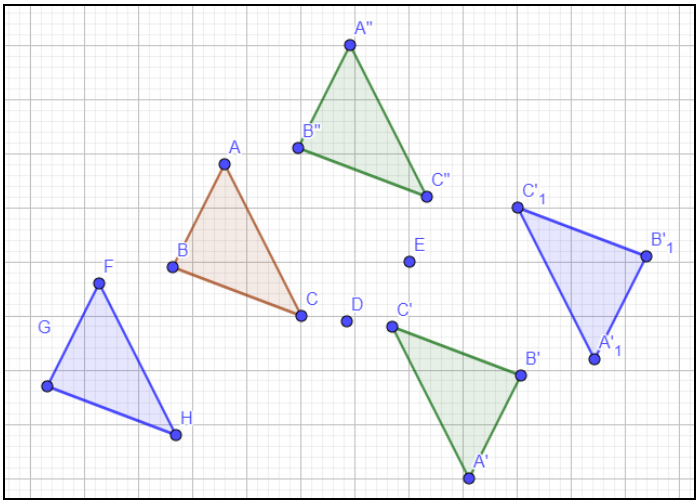
a) Sì: $a\Theta(b\Theta c)=a\Theta\frac{b\cdot c}{b+c}=\frac{a\cdot\frac{b\cdot c}{b+c}}{a+\frac{b\cdot c}{b+c}}=\frac{abc}{ab+ac+bc};(a\Theta b)\Theta c=\frac{a\cdot b}{a+b}\Theta c=\frac{\frac{a\cdot b}{a+b}\cdot c}{\frac{a\cdot b}{a+b}+c}=\frac{abc}{ab+ac+bc}$;

b) No: $(a\Lambda b)\Lambda c=\frac{a+b}{a\cdot b}\Lambda c=\frac{\frac{a+b}{a\cdot b}+c}{\frac{a+b}{a\cdot b}\cdot c}=\frac{a+b+abc}{ac+bc};a\Lambda(b\Lambda c)=a\Lambda\frac{b+c}{b\cdot c}=\frac{a+\frac{b+c}{b\cdot c}}{a\cdot\frac{b+c}{b\cdot c}}=\frac{abc+b+c}{ab+ac}$;

c) No: $(a\Xi b)\Xi c=\frac{a-b}{a+b}\Xi c=\frac{\frac{a-b}{a+b}-c}{\frac{a-b}{a+b}+c}=\frac{a-b-ac-bc}{a-b+ac+bc};a\Xi(b\Xi c)=a\Xi\frac{b-c}{b+c}=\frac{a-\frac{b-c}{b+c}}{a+\frac{b-c}{b+c}}=\frac{ab+ac-b+c}{ab+ac+b-c}$;

d) Sì; $(x\otimes y)\otimes z=max(max(x;y);z)$ e $x\otimes(y\otimes z)=max(x;max(y;z))$, in ogni caso si sceglie il maggiore dei tre numeri.

**27.** **a)** $x\oplus y=min(x,y)$**; b)** $x\heartsuit y=(x+1)\cdot(y+1)-1$**; c) Composizione di isometrie**
a) Sì, vedi ragionamento del 26 c);
b) Sì: $(x\heartsuit y)\heartsuit z=[(x+1)\cdot(y+1)-1]\heartsuit z=[(x+1)\cdot(y+1)-1+1]\cdot(z+1)-1=(x+1)\cdot(y+1)\cdot(z+1)-1$; $x\heartsuit(y\heartsuit z)=x\heartsuit[(y+1)\cdot(z+1)-1]=(x+1)\cdot[(y+1)\cdot(z+1)-1+1]-1=(x+1)\cdot(y+1)\cdot(z+1)-1$;
c) No, basti pensare a due simmetrie centrali di centri diversi, come in figura:




**28. (Invalsi 2006) Nell'insieme dei numeri razionali non negativi può essere definita una particolare operazione tra coppie di numeri, che si indicherà con ◊, che funziona così $a \lozenge b = \frac{a+b}{2}$. Se *a*, *b*, *c* sono tre generici numeri razionali non negativi, quale delle seguenti relazioni è falsa?**
**A) (*a* ◊ *b*) ◊ *c* = *a* ◊ (*b* ◊ *c*) B) *a* ◊ 0 = *a*/2 C) *a* ◊ *b* = *b* ◊ *a* D) *a* ◊ 1 = (*a* + 1) ◊ 0**

A) $(a \lozenge b) \lozenge c = \frac{a+b}{2} \lozenge c = \frac{\frac{a+b}{2}+c}{2} = \frac{a+b+2c}{4}; a \lozenge (b \lozenge c) = a \lozenge \frac{b+c}{2} = \frac{a+\frac{b+c}{2}}{2} = \frac{2a+b+c}{4}$: falsa

B) $a \lozenge 0 = \frac{a+0}{2} = \frac{a}{2}$: vera. C) $a \lozenge b = \frac{a+b}{2} = \frac{b+a}{2} = b \lozenge a$ : vera

D) $a \lozenge 1 = \frac{a+1}{2}; (a+1) \lozenge 0 = \frac{a+1+0}{2} = \frac{a+1}{2}$ : vera

**29. Possiamo dire che *max* è distributiva rispetto a *min*?**
Sì: consideriamo i vari casi.
1) $a < b < c$, allora: $max(a; min(b; c)) = max(a; b) = b$; $min(max(a; b); max(a; c)) = min(b; c) = b$.
2) $a < c < b$, allora: $max(a; min(b; c)) = max(a; c) = c$; $min(max(a; b); max(a; c)) = min(b; c) = c$.
3) $b < a < c$, allora: $max(a; min(b; c)) = max(a; b) = a$; $min(max(a; b); max(a; c)) = min(a; c) = a$.
4) $b < c < a$, allora: $max(a; min(b; c)) = max(a; b) = a$; $min(max(a; b); max(a; c)) = min(a; a) = a$.
5) $c < a < b$, allora: $max(a; min(b; c)) = max(a; c) = a$; $min(max(a; b); max(a; c)) = min(b; a) = a$.
6) $c < b < a$, allora: $max(a; min(b; c)) = max(a; c) = a$; $min(max(a; b); max(a; c)) = min(a; a) = a$.

**30. Possiamo dire che *min* è distributiva rispetto a *max*?**
Sì.
1) $a < b < c$, allora: $min(a; max(b; c)) = min(a; c) = a$; $max(min(a; b); min(a; c)) = max(a; a) = a$.
2) $a < c < b$, allora: $min(a; max(b; c)) = min(a; b) = a$; $max(min(a; b); min(a; c)) = max(a; a) = a$.
3) $b < a < c$, allora: $min(a; max(b; c)) = min(a; c) = a$; $max(min(a; b); min(a; c)) = max(b; a) = a$.
4) $b < c < a$, allora: $min(a; max(b; c)) = min(a; c) = c$; $max(min(a; b); min(a; c)) = max(b; c) = c$.
5) $c < a < b$, allora: $min(a; max(b; c)) = min(a; b) = a$; $max(min(a; b); min(a; c)) = max(a; c) = a$.
6) $c < b < a$, allora: $min(a; max(b; c)) = min(a; b) = b$; $max(min(a; b); min(a; c)) = max(b; c) = b$.

**31. Stabilire rispetto a quali delle rimanenti operazioni insiemistiche l'unione è distributiva.**
Intersezione: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Infatti se $x \in A \cup (B \cap C)$, allora o appartiene ad $A$, e quindi anche al secondo membro, oppure appartiene a $B \cap C$ e quindi ad entrambi $B$ e $C$ e perciò al secondo membro. In modo analogo si mostra il viceversa.
Invece non è vero che $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$, per esempio
$\{1,2\} \cup (\{2,3\} \setminus \{3,4\}) = \{1,2\} \cup \{2\} = \{1,2\}; (\{1,2\} \cup \{2,3\}) \setminus (\{1,2\} \cup \{3,4\}) = \{1,2,3\} \setminus \{1,2,3,4\} = \varnothing$
Né che $A \cup (B \Delta C) = (A \cup B) \Delta (A \cup C)$, per esempio
$\{1,2\} \cup (\{2,3\} \Delta \{3,4\}) = \{1,2\} \cup \{2,4\} = \{1,2,4\}; (\{1,2\} \cup \{2,3\}) \Delta (\{1,2\} \cup \{3,4\}) = \{1,2,3\} \Delta \{1,2,3,4\} = \{4\}$

**32. Stabilire rispetto a quali delle rimanenti operazioni insiemistiche l'intersezione è distributiva.**

Unione: $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$. Infatti se $x \in A\cap(B\cup C)$, allora appartiene ad $A$, e quindi anche al secondo membro. In modo analogo si mostra il viceversa.

Differenza: $A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C)$.

Infatti $x\in A\cap(B\setminus C)\Rightarrow x\in A, x\in B, x\notin C\Rightarrow x\in(A\cap B)\setminus(A\cap C)$

Viceversa: $x\in(A\cap B)\setminus(A\cap C)\Rightarrow x\in A, x\in B, x\notin C\Rightarrow x\in A\cap(B\setminus C)$

Differenza simmetrica: $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$

Infatti

$x\in A\cap(B\Delta C)\Rightarrow x\in A, x\in B\cup C, x\notin B\cap C\Rightarrow x\in(A\cap B)\Delta(A\cap C)\Rightarrow x\in(A\cap B)\Delta(A\cap C)$

Viceversa: $x\in(A\cap B)\setminus(A\cap C)\Rightarrow x\in A, x\in B, x\notin C\Rightarrow x\in A\cap(B\setminus C)$

**33. Stabilire rispetto a quali delle rimanenti operazioni insiemistiche la differenza simmetrica è distributiva.**

Nessuna.

{1, 2, 3, 4} Δ ({2, 3, 5, 6} ∪ {3, 4, 6, 7}) = {1, 2, 3, 4} Δ {2, 3, 4, 5, 6, 7} = {1, 5, 6, 7};
({1, 2, 3, 4} Δ {2, 3, 5, 6}) ∪ ({1, 2, 3, 4} Δ {3, 4, 6, 7}) = {1, 4, 5, 6} ∪{1, 2, 6, 7}= {1, 2, 4, 5, 6, 7}
{1, 2, 3, 4} Δ ({2, 3, 5, 6} ∩ {3, 4, 6, 7}) = {1, 2, 3, 4} Δ {3} = {1, 2, 4};
({1, 2, 3, 4} Δ {2, 3, 5, 6}) ∩ ({1, 2, 3, 4} Δ {3, 4, 6, 7}) = {1, 4, 5, 6} ∩{1, 2, 6, 7} = {1, 6}
{1, 2, 3, 4} Δ ({2, 3, 5, 6} \ {3, 4, 6, 7}) = {1, 2, 3, 4} Δ {2, 5} = {1, 3, 4, 5};
({1, 2, 3, 4} Δ {2, 3, 5, 6}) \ ({1, 2, 3, 4} Δ {3, 4, 6, 7}) = {1, 4, 5, 6} \{1, 2, 6, 7}={4, 5}

**34. Stabilire rispetto a quali delle rimanenti operazioni insiemistiche la differenza è distributiva.**

Nessuna

{1, 2, 3, 4} \ ({2, 3, 5, 6} ∪ {3, 4, 6, 7}) = {1, 2, 3, 4} \ {2, 3, 4, 5, 6, 7} = {1};
({1, 2, 3, 4} \ {2, 3, 5, 6}) ∪ ({1, 2, 3, 4} \ {3, 4, 6, 7}) = {1, 4} ∪{1, 2}={1, 2, 4}
{1, 2, 3, 4} \ ({2, 3, 5, 6} ∩ {3, 4, 6, 7}) = {1, 2, 3, 4} \ {3} = {1, 2};
({1, 2, 3, 4} \ {2, 3, 5, 6}) ∩ ({1, 2, 3, 4} \ {3, 4, 6, 7}) = {1, 4} ∩{1, 2} = {1}
{1, 2, 3, 4} \ ({2, 3, 5, 6} Δ {3, 4, 6, 7}) = {1, 2, 3, 4} \ {2, 5} = {1, 3, 4};
({1, 2, 3, 4} \ {2, 3, 5, 6}) Δ ({1, 2, 3, 4} \ {3, 4, 6, 7}) = {1, 4} \ {1, 2}={4}

**35. Stabilire rispetto a quali delle rimanenti operazioni logiche la congiunzione è distributiva.**

Tutte tranne l'implicazione e la coimplicazione.

| P | Q | R | P ∧ (Q ∨ R) | (P ∧ Q) ∨ (P ∧ R) | P ∧ (Q AUT R) | (P ∧ Q) AUT (P ∧ R) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| VERO | VERO | VERO | VERO | VERO | FALSO | FALSO |
| VERO | FALSO | VERO | VERO | VERO | VERO | VERO |
| FALSO | VERO | VERO | FALSO | FALSO | FALSO | FALSO |
| FALSO | FALSO | VERO | FALSO | FALSO | FALSO | FALSO |
| VERO | VERO | FALSO | VERO | VERO | VERO | VERO |
| VERO | FALSO | FALSO | FALSO | FALSO | FALSO | FALSO |
| FALSO | VERO | FALSO | FALSO | FALSO | FALSO | FALSO |
| FALSO | FALSO | FALSO | FALSO | FALSO | FALSO | FALSO |

| P | Q | R | P ∧ (Q ⇒ R) | (P ∧ Q) ⇒ (P ∧ R) | P ∧ (Q ⇔ R) | (P ∧ Q) ⇔ (P ∧ R) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| VERO | VERO | VERO | VERO | VERO | VERO | VERO |
| VERO | FALSO | VERO | VERO | VERO | FALSO | FALSO |
| FALSO | VERO | VERO | FALSO | VERO | FALSO | VERO |
| FALSO | FALSO | VERO | FALSO | VERO | FALSO | VERO |
| VERO | VERO | FALSO | FALSO | FALSO | FALSO | FALSO |
| VERO | FALSO | FALSO | VERO | VERO | VERO | VERO |
| FALSO | VERO | FALSO | FALSO | VERO | FALSO | VERO |
| FALSO | FALSO | FALSO | FALSO | VERO | FALSO | VERO |

**36. Stabilire rispetto a quali delle rimanenti operazioni logiche la disgiunzione inclusiva è distributiva.**

Tutte, tranne la disgiunzione esclusiva

| P | Q | R | P ∨ (Q ∧ R) | (P ∨ Q) ∧ (P ∨ R) | P ∨ (Q ⇒ R) | (P ∨ Q) ⇒ (P ∨ R) | P ∨ (Q ⇔ R) | (P ∨ Q) ⇔ (P ∨ R) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| VERO | VERO | VERO | VERO | VERO | VERO | VERO | VERO | VERO |
| VERO | FALSO | VERO | VERO | VERO | VERO | VERO | VERO | VERO |
| FALSO | VERO | VERO | VERO | VERO | VERO | VERO | VERO | VERO |
| FALSO | FALSO | VERO | FALSO | FALSO | VERO | VERO | FALSO | FALSO |
| VERO | VERO | FALSO | VERO | VERO | VERO | VERO | VERO | VERO |
| VERO | FALSO | FALSO | VERO | VERO | VERO | VERO | VERO | VERO |
| FALSO | VERO | FALSO | FALSO | FALSO | FALSO | FALSO | FALSO | FALSO |
| FALSO | FALSO | FALSO | FALSO | FALSO | VERO | VERO | VERO | VERO |

| P | Q | R | P ∨ (Q AUT R) | (P ∨ Q) AUT (P ∨ R) |
|---|---|---|---|---|
| VERO | VERO | VERO | VERO | FALSO |
| VERO | FALSO | VERO | VERO | FALSO |
| FALSO | VERO | VERO | FALSO | FALSO |
| FALSO | FALSO | VERO | VERO | VERO |
| VERO | VERO | FALSO | VERO | FALSO |
| VERO | FALSO | FALSO | VERO | FALSO |
| FALSO | VERO | FALSO | VERO | VERO |
| FALSO | FALSO | FALSO | FALSO | FALSO |

**37. Stabilire rispetto a quali delle rimanenti operazioni logiche la disgiunzione esclusiva è distributiva.**

Nessuna

| P | Q | R | P AUT (Q ∨ R) | (P AUT Q) ∨ (P AUT R) | P AUT (Q ∧ R) | (P AUT Q) ∧ (P AUT R) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| VERO | VERO | VERO | FALSO | FALSO | FALSO | FALSO |
| VERO | FALSO | VERO | FALSO | VERO | VERO | FALSO |
| FALSO | VERO | VERO | VERO | VERO | VERO | VERO |
| FALSO | FALSO | VERO | VERO | VERO | FALSO | FALSO |
| VERO | VERO | FALSO | FALSO | VERO | VERO | FALSO |
| VERO | FALSO | FALSO | VERO | VERO | VERO | VERO |
| FALSO | VERO | FALSO | VERO | VERO | FALSO | FALSO |
| FALSO | FALSO | FALSO | FALSO | FALSO | FALSO | FALSO |

| P | Q | R | P AUT (Q ⇒ R) | (P AUT Q) ⇒ (P AUT R) | P AUT (Q ⇔ R) | (P AUT Q) ⇔ (P AUT R) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| VERO | VERO | VERO | FALSO | VERO | FALSO | VERO |
| VERO | FALSO | VERO | FALSO | FALSO | VERO | FALSO |
| FALSO | VERO | VERO | VERO | VERO | VERO | VERO |
| FALSO | FALSO | VERO | VERO | VERO | FALSO | FALSO |
| VERO | VERO | FALSO | VERO | VERO | VERO | FALSO |
| VERO | FALSO | FALSO | FALSO | VERO | FALSO | VERO |
| FALSO | VERO | FALSO | FALSO | FALSO | FALSO | FALSO |
| FALSO | FALSO | FALSO | VERO | VERO | VERO | VERO |

**38. Stabilire rispetto a quali delle rimanenti operazioni logiche l'implicazione materiale è distributiva.**

Tutte tranne la disgiunzione esclusiva

| P | Q | R | $P \Rightarrow (Q \vee R)$ | $(P \Rightarrow Q) \vee (P \Rightarrow R)$ | $P \Rightarrow (Q \wedge R)$ | $(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R)$ | $P \Rightarrow (Q \Leftrightarrow R)$ | $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow R)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| VERO | VERO | VERO | VERO | VERO | VERO | VERO | VERO | VERO |
| VERO | FALSO | VERO | VERO | VERO | FALSO | FALSO | FALSO | FALSO |
| FALSO | VERO | VERO | VERO | VERO | VERO | VERO | VERO | VERO |
| FALSO | FALSO | VERO | VERO | VERO | VERO | VERO | VERO | VERO |
| VERO | VERO | FALSO | VERO | VERO | FALSO | FALSO | FALSO | FALSO |
| VERO | FALSO | FALSO | FALSO | FALSO | FALSO | FALSO | VERO | VERO |
| FALSO | VERO | FALSO | VERO | VERO | VERO | VERO | VERO | VERO |
| FALSO | FALSO | FALSO | VERO | VERO | VERO | VERO | VERO | VERO |

| P | Q | R | P ⇒ (Q AUT R) | (P ⇒ Q) AUT (P ⇒ R) |
|---|---|---|---|---|
| VERO | VERO | VERO | FALSO | FALSO |
| VERO | FALSO | VERO | VERO | VERO |
| FALSO | VERO | VERO | VERO | FALSO |
| FALSO | FALSO | VERO | VERO | FALSO |
| VERO | VERO | FALSO | VERO | VERO |
| VERO | FALSO | FALSO | FALSO | FALSO |
| FALSO | VERO | FALSO | VERO | FALSO |
| FALSO | FALSO | FALSO | VERO | FALSO |

**39. Stabilire rispetto a quali delle rimanenti operazioni logiche la coimplicazione è distributiva.**
Nessuna

| P | Q | R | $P \Leftrightarrow (Q \vee R)$ | $(P \Leftrightarrow Q) \vee (P \Leftrightarrow R)$ | $P \Leftrightarrow (Q \wedge R)$ | $(P \Leftrightarrow Q) \wedge (P \Leftrightarrow R)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| VERO | VERO | VERO | VERO | VERO | VERO | VERO |
| VERO | FALSO | VERO | VERO | VERO | FALSO | FALSO |
| FALSO | VERO | VERO | FALSO | FALSO | FALSO | FALSO |
| FALSO | FALSO | VERO | FALSO | VERO | VERO | FALSO |
| VERO | VERO | FALSO | VERO | VERO | FALSO | FALSO |
| VERO | FALSO | FALSO | FALSO | FALSO | FALSO | FALSO |
| FALSO | VERO | FALSO | FALSO | VERO | VERO | FALSO |
| FALSO | FALSO | FALSO | VERO | VERO | VERO | VERO |

| P | Q | R | $P \Leftrightarrow (Q \Rightarrow R)$ | $(P \Leftrightarrow Q) \Rightarrow (P \Leftrightarrow R)$ | P ⇔ (Q AUT R) | (P ⇔ Q) AUT (P ⇔ R) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| VERO | VERO | VERO | VERO | VERO | FALSO | FALSO |
| VERO | FALSO | VERO | VERO | VERO | VERO | VERO |
| FALSO | VERO | VERO | FALSO | VERO | VERO | FALSO |
| FALSO | FALSO | VERO | FALSO | FALSO | FALSO | VERO |
| VERO | VERO | FALSO | FALSO | FALSO | VERO | VERO |
| VERO | FALSO | FALSO | VERO | VERO | FALSO | FALSO |
| FALSO | VERO | FALSO | VERO | VERO | FALSO | VERO |
| FALSO | FALSO | FALSO | FALSO | VERO | VERO | FALSO |

## Strutture algebriche

***Stabilire quali fra le seguenti operazioni sono interne nell'insieme su cui sono definite. Per quelle che non lo sono fornire un controesempio.***

**1. Moltiplicazione nell'insieme $\mathbb{N}_p$ dei numeri naturali pari**

Sì: $2n \cdot 2m = 2 \cdot (2mn)$

**2. Somma nell'insieme dei divisori di 3**

No, per esempio: $1 + 3 = 4$, non è un divisore di 3

**3. Somma nell'insieme dei numeri naturali minori di 123**

No, per esempio: $2 + 122 > 123$

**4. a) Somma nell'insieme dei multipli di 18; b) Sottrazione in $\mathbb{Z}$**

a) Sì: $18a + 18b = 18\,(a + b)$; b) Sì: $a - b$ è intero se $a$ e $b$ lo sono

**5. Moltiplicazione nell'insieme $\mathbb{R}^-$ dei numeri reali negativi**

No, per esempio: $(-2) \cdot (-3) \notin \mathbb{R}^-$

**6. Divisione nell'insieme $\mathbb{N}_p$ dei numeri pari**

No, per esempio: $8 : 6 \notin \mathbb{N}_p = \{2; 4; 6; ...\}$

**7. a) Divisione in $\mathbb{Q}$; b) Elevamento a potenza in $\mathbb{Z}$**

a) No, per esempio: $7 : 0 \notin \mathbb{Q}$; b) No, per esempio: $2^{-1} = ½ \notin \mathbb{Z}$

**8. Elevamento a potenza nell'insieme $\mathbb{N}_d$ dei numeri naturali dispari**

Sì: $(2n + 1)^{2m+1}$ è un numero dispari

**9. Sottrazione nell'insieme $\mathbb{Z}_p$ dei numeri interi pari**

Sì $2n - 2m = 2(n - m)$

**10. Sottrazione nell'insieme $\mathbb{Z}_d$ dei numeri interi dispari**

No, per esempio: $3 - 3 = 0 \notin \mathbb{Z}_d$

**11. Somma nell'insieme $\mathbb{P}$ dei numeri primi**

No, per esempio: $3 + 7 = 10 \notin \mathbb{P}$

**12. Moltiplicazione nell'insieme dei numeri composti (cioè non primi e maggiori di 1)**

Sì: $a \cdot b$ è un numero composto, dato che nessuno dei due fattori è uguale a 1

**13. a) Moltiplicazione nell'insieme {–1; 1}; b) Somma nell'insieme {–1; 0; 1}**

a) Sì: $(-1) \cdot (-1) = 1$; $(-1) \cdot 1 = -1$; $1 \cdot 1 = 1$; b) Sì: $-1 + (-1) = 0$; $-1 + 0 = -1$; $-1 + 1 = 0$; $0 + 1 = 1$

**14. Somma nell'insieme $\mathbb{Z}_6$ = {[0], [1], [2], [3], [4], [5]}**

Sì: $[0] + [n] = [n]$; $[1] + [1] = [2]$; $[1] + [1] = [3]$; …; $[1] + [4] = [5]$; $[1] + [5] = [0]$; $[2] + [2] = [4]$; $[2] + [3] = [5]$; $[2] + [4] = [0]$; $[2] + [5] = [1]$; $[3] + [3] = [0]$; $[3] + [4] = [1]$; $[3] + [5] = [2]$; $[4] + [4] = [2]$; $[4] + [5] = [3]$; $[5] + [5] = [4]$

**15. Unione nell'insieme delle parti di {1; 2; 3; ...; 1000}**

Sì: L'unione di due sottoinsiemi di qualsiasi insieme è un sottoinsieme dello stesso insieme

**16. Intersezione nell'insieme delle parti di {1; 2; 3; ...; 1000}**

Sì: L'intersezione di due sottoinsiemi di qualsiasi insieme è un sottoinsieme dello stesso insieme

**17. Intersezione nell'insieme {{1}; {1; 2}; {1; 3}}**

Sì: $\{1\} \cap \{1; 2\} = \{1\}$; $\{1\} \cap \{1; 3\} = \{1\}$; $\{1; 2\} \cap \{1; 3\} = \{1\}$

**18. Differenza nell'insieme degli insiemi di cardinalità finita dispari**

No, per esempio: $\{1; 2; 3\} \setminus \{1\} = \{2; 3\}$

**19. Differenza simmetrica nell'insieme delle parti di $A$ = {1; 2; 3}**

Sì: Differenza simmetrica di due sottoinsiemi di qualsiasi insieme è un sottoinsieme dello stesso insieme

**20. Disgiunzione inclusiva nell'insieme delle proposizioni logiche contraddittorie**

Sì: Falso aut Falso è Falso

**21. Disgiunzione esclusiva nell'insieme delle proposizioni logiche tautologiche**

No, la disgiunzione esclusiva di due proposizione entrambe vere è una proposizione falsa

**22. Prodotto nell'insieme $\mathbb{Z}_5$ = {[0]; [1]; [2]; [3]; [4]}, con $[a] \times [b] = [a \cdot b]$**

Sì: $[0] \times [n] = [0]$; $[1] \times [n] = [n]$; $[2] \times [2] = [4]$; $[2] \times [3] = [1]$; $[2] \times [4] = [3]$; $[3] \times [3] = [4]$; $[3] \times [4] = [2]$; $[4] \times [4] = [1]$

**23. Prodotto nell'insieme dei multipli di 5**

Sì: $5n \cdot 5m = 5 \cdot (5mn)$

**24. Determinare quali delle quattro operazioni aritmetiche elementari sono chiuse nell'insieme dei quadrati perfetti: {1; 4; 9; 16; 25; …$n^2$; …}**

Solo la moltiplicazione: $m^2 \cdot n^2 = (mn)^2$. Mentre 4 + 9 = 13; 9 – 4 = 5; 9/4

***Determinare l'eventuale elemento neutro delle seguenti operazioni binarie***

**25. Unione nell'insieme delle parti di {1, 2, 3}**

$A \cup \varnothing = A$

**26. Intersezione nell'insieme delle parti di {1, 2, 3}**

$\{1\} \cap \{1, 2, 3\} = \{1\}$;$\{2\} \cap \{1, 2, 3\} = \{2\}$;$\{3\} \cap \{1, 2, 3\} = \{3\}$;$\{1; 2\} \cap \{1, 2, 3\} = \{1; 2\}$; $\{1; 3\} \cap \{1, 2, 3\} = \{1; 3\}$;$\{2; 3\} \cap \{1, 2, 3\} = \{2; 3\}$

**27. Unione in {{1}, {1, 2}, {1, 3}, {1, 4}}**

$\{1, 2\} \cup \{1\} = \{1, 2\}$; $\{1, 3\} \cup \{1\} = \{1, 3\}$; $\{1, 4\} \cup \{1\} = \{1, 4\}$

**28. Differenza simmetrica nell'insieme delle parti di {1, 2, 3, 4}**

$A \Delta \varnothing = A$

**29. Congiunzione nell'insieme delle proposizioni logiche**

Tautologia: $V \wedge V = V$; $F \wedge V = F$

**30. Disgiunzione inclusiva nell'insieme delle proposizioni logiche**

Contraddizione: $V \vee F = V$; $F \vee F = F$

**31. Disgiunzione esclusiva nell'insieme delle proposizioni logiche**

Contraddizione: V aut F = V; F aut F = F

**32. a) Elevamento a potenza in $\mathbb{R}$ ; b) $a * b = 2\, a \cdot b$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$**

a) 1 elemento neutro destro: $a^1 = a$; $x^y = y$ non ha soluzioni per ogni $x$;

b) $a * u = a \Rightarrow 2au = a \Rightarrow u = ½$; $u * b = b \Rightarrow 2ub = b \Rightarrow u = ½$

**33. a) $a \heartsuit b = (a + 1) \cdot (b + 1) - 1$ in $\mathbb{R}$ ; b) $a \diamondsuit b = a + b - 4$ in $\mathbb{R}$**

a) $a \heartsuit u = a \Rightarrow (a + 1) \cdot (u + 1) - 1 = a \Rightarrow au + a + u + 1 - 1 = a \Rightarrow au + u = 0 \Rightarrow u(a + 1) = 0 \Rightarrow u = 0$; $u \heartsuit a = a \Rightarrow (u + 1) \cdot (a + 1) - 1 = a \Rightarrow u(a + 1) = 0 \Rightarrow u = 0$;

b) $a \diamondsuit u = a \Rightarrow a + u - 4 = a \Rightarrow u = 4$; $u \diamondsuit a = a \Rightarrow u + a - 4 = a \Rightarrow u = 4$;

**34. a) $a \spadesuit b = \dfrac{a+1}{b-1}$ in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$; b) $a \clubsuit b = \dfrac{a}{b} - 4$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$**

a) $a \spadesuit u = \dfrac{a+1}{u-1} = a \Rightarrow a+1 = au - a, u \neq 1 \Rightarrow u = \dfrac{2a+1}{a}$, non c'è elemento neutro;

b) $a \clubsuit u = a \Rightarrow \dfrac{a}{u} - 4 = a \Rightarrow a - 4u = a, u \neq 0 \Rightarrow u = 0$, che non è accettabile, quindi non c'è elemento neutro

**35. Massimo fra due numeri nell'insieme dei numeri naturali**

$Max(a; 1) = a$

**36. Minimo fra due numeri nell'insieme dei numeri naturali**

Non vi è elemento neutro

**37. Minimo fra due numeri nell'insieme dei numeri interi negativi**

$Min(a; -1) = a$

## I Gruppi

***Stabilire che tipo di strutture algebriche sono le seguenti. Con i simboli (+) e (·), indichiamo le consuete operazioni di addizione a moltiplicazione nell'insieme dei numeri reali***

**1. a) $(\mathbb{Z},\cdot)$; b) $(\mathbb{Q},+)$; c) $(\mathbb{Q},\cdot)$**

a) Vale la proprietà associativa e quella commutativa, ha 1 come elemento neutro, ma un generico intero non ha inverso: Semigruppo abeliano con unità;

b) Vale la proprietà associativa e quella commutativa, ha 0 come elemento neutro, un generico razionale ha opposto: Gruppo abeliano;

c) Vale la proprietà associativa, e quella commutativa, ha 1 come elemento neutro, ma 0, che è un numero razionale, non ha inverso: Semigruppo abeliano con unità

**2. a) $(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$; b) $(\mathbb{R},+)$; c) $(\mathbb{R},\cdot)$**

a) Vale la proprietà associativa e quella commutativa, ha 1 come elemento neutro, un generico razionale non nullo ha inverso: Gruppo abeliano;
b) Vale la proprietà associativa e quella commutativa, ha 0 come elemento neutro, un generico reale ha opposto: Gruppo abeliano;
c) Vale la proprietà associativa e quella commutativa, ha 1 come elemento neutro, 0 non ha inverso: Semigruppo abeliano con unità

**3.** **a) ({–1; 1}, ·); b) ({–1; 1}, +); c) ({–1; 0; 1}, ·)**

a) Vale la proprietà associativa e quella commutativa, ha 1 come elemento neutro, ogni numero è inverso di se stesso: Gruppo abeliano;
b) Non è una struttura in quanto l'operazione "+" non è interna all'insieme $\{-1; 1\}$;
c) Vale la proprietà associativa e quella commutativa, ha 1 come elemento neutro, ma 0 non ha inverso: Semigruppo abeliano con unità

**4.** **a) ({–1; 0; 1}, +); b)** $\left(\mathbb{Q}^+,+\right)$**; c)** $\left(\mathbb{Z}_d,+\right)$

a) Non è un gruppoide, –1 + (–1) = –2, che non appartiene all'insieme;
b) Vale la proprietà associativa e quella commutativa, non ha elemento neutro, perché 0 non è positivo; un razionale positivo non ha opposto positivo: Semigruppo abeliano;
c) Non è un gruppoide perché la somma di due numeri dispari è un numero pari

**5.** **a)** $\left(\mathbb{Q}^+,\cdot\right)$**; b)** $\left(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\cdot\right)$**; c)** $\left(\mathbb{R}^-,\cdot\right)$

a) Vale la proprietà associativa e quella commutativa, ha 1 come elemento neutro, l'inverso di un razionale positivo è un razionale positivo: Gruppo abeliano;
b) Non è un gruppoide, p e $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}=4\notin\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$;
c) Non è un gruppoide: il prodotto di due numeri negativi non è un numero negativo

**6.** **a) ($\mathcal{L}$, ∧); b) ($\mathcal{L}$, ∨); c) ($\mathcal{L}$, $\dot{\vee}$ )**

a) Vale la proprietà associativa e quella commutativa, ha la tautologia come elemento neutro, ma una generica proposizione logica non ha opposto: Semigruppo abeliano con unità;
b) Vale la proprietà associativa e quella commutativa, ha la contraddizione come elemento neutro, ma una generica proposizione logica non ha opposto: Semigruppo abeliano con unità;
c) Vale la proprietà associativa e quella commutativa, ha la contraddizione come elemento neutro, una generica proposizione logica ha la sua negazione come opposto: Gruppo abeliano

**7.** **a) ($\mathcal{P}(X)$, ∪); b) ($\mathcal{P}(X)$, ∩); c) ($\mathcal{P}(X)$, Δ) ;** **$\mathcal{P}(X)$ è l'insieme delle parti di $X$**

a) Vale la proprietà associativa e quella commutativa, ha ∅ come elemento neutro, un generico insieme non ha opposto: Semigruppo abeliano con unità;
b) Vale la proprietà associativa e quella commutativa, ha $X$ come elemento neutro, un generico insieme non ha opposto: Semigruppo abeliano con unità;
c) Vale la proprietà associativa e quella commutativa, ha ∅ come elemento neutro, ogni elemento è opposto di se stesso: $Y \Delta Y = \varnothing$: Gruppo abeliano

**8.** **a) ($\mathbb{N}$, max); b) ($\mathbb{N}$, min); c) ($\mathbb{N}$, ∝) con** $a \propto b = \dfrac{a+b}{2}$

a) Vale la proprietà associativa e quella commutativa, ha 1 come elemento neutro, un generico elemento non ha opposto: Semigruppo abeliano con unità;
b) Vale la proprietà associativa e quella commutativa, non ha elemento neutro, un generico elemento non ha opposto: Semigruppo abeliano;
c) se $a + b$ è dispari, il risultato non è un numero naturale: Non è un gruppoide

**9.** **Insieme dei multipli di 7 rispetto alla moltiplicazione**

Vale la proprietà associativa e quella commutativa, non ha elemento neutro: Semigruppo abeliano

**10.** **a)** $\left(\mathbb{Z}_2[x],+\right)$**; b)** $\left(\mathbb{R}_2[x],+\right)$

a) Vale la proprietà associativa e quella commutativa, ha il polinomio nullo come elemento neutro, l'opposto di un polinomio è il polinomio con i coefficienti opposti: Gruppo abeliano;
b) Vale la proprietà associativa e quella commutativa, ha il polinomio nullo come elemento neutro, l'opposto di un polinomio è il polinomio con i coefficienti opposti: Gruppo abeliano

**11. a) ($\mathbb{Z}$, *), con $a * b = a + b + 2$; b) $(\mathbb{R}[x],\cdot)$; c) ({…; $2^{-1}$; $2^0$; $2^1$;…}, ·)**

a) Vale la proprietà associativa e quella commutativa, ha –2 come elemento neutro, $a * u = a \Rightarrow a + u + 2 = a \Rightarrow u = -2$; il simmetrico di $a$ è $(-4 - a)$, $a * b = -2 \Rightarrow a + b + 2 = -2 \Rightarrow b = -4 - a$: Gruppo abeliano

b) Vale la proprietà associativa e quella commutativa, ha il polinomio 1 come elemento neutro; non ogni polinomio ha simmetrico: Semigruppo abeliano con elemento neutro

c) ({…; $2^{-1}$; $2^0$; $2^1$;…}, ·) Vale la proprietà associativa, $2^n \cdot (2^m \cdot 2^p) = (2^n \cdot 2^m) \cdot 2^p = 2^{n+m+p}$, e quella commutativa, ha $2^0$ come elemento neutro, il simmetrico di $2^n$ è $2^{-n}$: Gruppo abeliano

**12. Insieme dei polinomi non nulli di secondo grado in una incognita a coefficienti numeri reali, rispetto alla moltiplicazione di polinomi**

Non è un gruppoide, per esempio $x^2 \cdot x^2 = x^4$, non è un polinomio di secondo grado

**13. ($\mathbb{Q} \setminus \{0\}$, ♠), con $a$ ♠ $b = \dfrac{a \cdot b}{k}$, al variare di $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$**

Vale la proprietà associativa e quella commutativa, ha $k$ come elemento neutro, $a$ ♠ $u = a \Rightarrow \dfrac{\cancel{a} \cdot u}{k} = \cancel{a} \Rightarrow u = k$, il simmetrico di $a$ è $\dfrac{k^2}{a}$, $a$ ♠ $b = k \Rightarrow \dfrac{a \cdot b}{k} = k \Rightarrow b = \dfrac{k^2}{a}$: Gruppo abeliano per ogni $k \neq 0$

**14. ({1; 2; 100} × {1; 2; 100}, ♣), con $(a, b)$ ♣ $(c, d) = (max(a; c), min(b; d))$**

Vale la proprietà associativa e quella commutativa, ha (1; 100) come elemento neutro, $(a, b)$ ♣ $(u, u') = (a, b) \Rightarrow (max(a; u), min(b; u')) = (a, b) \Rightarrow u = 1$; $u' = 100$; non ogni coppia ha simmetrico: Semigruppo abeliano con unità

***Completare le seguenti tabelle operatorie in modo che rappresentino tabelle di gruppi abeliani.***

**15. a)**

| ⊕ | a | b | c |
|---|---|---|---|
| a | a | b | c |
| b | b | | |
| c | c | | |

**b)**

| ⊕ | a | b | c |
|---|---|---|---|
| a | b | c | a |
| b | a | | b |
| c | a | | c |

**c)**

| ⊕ | a | b | c |
|---|---|---|---|
| a | a | a | a |
| b | b | | |
| c | b | | |

a) Da quanto sistemato l'elemento neutro deve essere $a$; affinché valga la proprietà associativa deve essere $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c \Rightarrow b \oplus c = b \oplus c$. Da $a \oplus (b \oplus b) = (a \oplus b) \oplus b \Rightarrow b \oplus b = a \oplus b \Rightarrow b \oplus b = b$; e da $a \oplus (c \oplus c) = (a \oplus c) \oplus c \Rightarrow c \oplus c = a \oplus c \Rightarrow c \oplus c = c$. Quindi ogni elemento deve essere simmetrico di se stesso. Adesso: $b \oplus (b \oplus c) = (b \oplus b) \oplus c \Rightarrow b \oplus (b \oplus c) = b \oplus c \Rightarrow b = a$, che non è possibile. Quindi la tabella non possiamo riempirla in modo che rappresenti un gruppo abeliano

b) Non possiamo riempirla in modo che rappresenti un gruppo abeliano perché si ha: $a \oplus b = c \neq a = b \oplus a$

c) Dai valori immessi viene fuori che non vi è elemento neutro perché $a \oplus a = a$, ma anche $a \oplus b = a$, mentre dovrebbe essere $a \oplus b = b$.

**16. a)**

| ⊕ | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| a | a | b | c | d |
| b | b | c | d | a |
| c | c | | | |
| d | d | | | c |

**b)**

| ⊕ | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| a | b | c | | |
| b | c | | | |
| c | | | | |
| d | | | | d |

a) L'elemento neutro è $a$; per la commutatività deve essere:

| ⊕ | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| a | a | b | c | d |
| b | b | c | d | a |
| c | c | d | | |
| d | d | a | | |

Il simmetrico di $c$ deve essere $c$ stesso, $c \oplus c = a$; mentre per $c \oplus d = d \oplus c$ usiamo la proprietà associativa: $c \oplus (c \oplus d) = (c \oplus c) \oplus d \Rightarrow c \oplus (c \oplus d) = a \oplus d = d \Rightarrow c \oplus d = b$. Allo stesso modo determiniamo $d \oplus d$: $c \oplus (d \oplus d) = (c \oplus d) \oplus d \Rightarrow c \oplus (d \oplus d) = b \oplus d = a \Rightarrow d \oplus d = c$. Infine ecco la tabella corretta.

| $\oplus$ | ***a*** | ***b*** | ***c*** | ***d*** |
|---|---|---|---|---|
| ***a*** | *a* | *b* | *c* | *d* |
| ***b*** | *b* | *c* | *d* | *a* |
| ***c*** | *c* | *d* | *a* | *b* |
| ***d*** | *d* | *a* | *b* | *c* |

b) L'elemento neutro è $d$. Quindi deve essere

| $\oplus$ | ***a*** | ***b*** | ***c*** | ***d*** |
|---|---|---|---|---|
| ***a*** | *b* | *c* | | *a* |
| ***b*** | *c* | | | *b* |
| ***c*** | | | | *c* |
| ***d*** | *a* | *b* | *c* | *d* |

Da cui $a$ e $c$ simmetrici, e $b$ è simmetrico di se stesso:

| $\oplus$ | ***a*** | ***b*** | ***c*** | ***d*** |
|---|---|---|---|---|
| ***a*** | *b* | *c* | *d* | *a* |
| ***b*** | *c* | *d* | | *b* |
| ***c*** | *d* | | | *c* |
| ***d*** | *a* | *b* | *c* | *d* |

Infine: $b \oplus c = c \oplus b = a$ e $c \oplus c = b$.

| $\oplus$ | ***a*** | ***b*** | ***c*** | ***d*** |
|---|---|---|---|---|
| ***a*** | *b* | *c* | *d* | *a* |
| ***b*** | *c* | *d* | *a* | *b* |
| ***c*** | *d* | *a* | *b* | *c* |
| ***d*** | *a* | *b* | *c* | *d* |

**17. Costruire la tabella operatoria del gruppo di sostituzione su due elementi: {1; 2}.**

| $\circ$ | $\begin{pmatrix}12\\12\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}12\\21\end{pmatrix}$ |
|---|---|---|
| $\begin{pmatrix}12\\12\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}12\\12\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}12\\21\end{pmatrix}$ |
| $\begin{pmatrix}12\\21\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}12\\21\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}12\\12\end{pmatrix}$ |

**18. Costruire la tabella operatoria del gruppo di sostituzione su tre elementi: {1; 2; 3}**

| $\circ$ | $\begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}123\\132\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}123\\231\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}123\\312\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}123\\321\end{pmatrix}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}123\\132\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}123\\231\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}123\\312\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}123\\321\end{pmatrix}$ |
| $\begin{pmatrix}123\\132\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}123\\132\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}123\\231\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}123\\321\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}123\\312\end{pmatrix}$ |
| $\begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}123\\312\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}123\\321\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}123\\132\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}123\\231\end{pmatrix}$ |
| $\begin{pmatrix}123\\231\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}123\\231\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}123\\312\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}123\\132\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}123\\321\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix}$ |
| $\begin{pmatrix}123\\312\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}123\\312\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}123\\321\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}123\\231\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}123\\132\end{pmatrix}$ |
| $\begin{pmatrix}123\\321\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}123\\321\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}123\\231\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}123\\312\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}123\\132\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix}$ |

**19. Determinare tutti gli eventuali sottogruppi propri del Gruppo delle sostituzioni su: {1; 2}.**
Un sottogruppo deve contenere l'elemento neutro e le coppie di elementi simmetrici, pertanto abbiamo solo sottogruppi impropri, ossia $\left\{\begin{pmatrix}12\\12\end{pmatrix}\right\}$ e lo stesso gruppo.

**20. Determinare tutti gli eventuali sottogruppi propri del Gruppo delle sostituzioni su: {1; 2; 3}.**
Tenuto conto della tabella operatoria, esercizio 18, abbiamo tre sottogruppi con 2 elementi: $\left\{\begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix},\begin{pmatrix}123\\132\end{pmatrix}\right\},\left\{\begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix},\begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix}\right\},\left\{\begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix},\begin{pmatrix}123\\321\end{pmatrix}\right\}$, che sono quelli che contengono l'elemento neutro e gli elementi simmetrici di se stessi; con tre elementi abbiamo quelli che oltre l'elemento neutro hanno le coppie di elementi fra loro simmetrici: $\left\{\begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix},\begin{pmatrix}123\\231\end{pmatrix},\begin{pmatrix}123\\312\end{pmatrix}\right\}$. Non ci sono altri sottogruppi propri, perché per esempio se consideriamo $G_4=\left\{\begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix},\begin{pmatrix}123\\132\end{pmatrix},\begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix},\begin{pmatrix}123\\321\end{pmatrix}\right\}$, che contiene i tre elementi autosimmetrici, non rappresenta un gruppo perché per esempio $\begin{pmatrix}123\\132\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}123\\231\end{pmatrix}\notin G_4$.
Stesso discorso può farsi per gli altri sottoinsiemi di ordine 4 e per quelli di ordine 5.

## Anelli, Corpi e Campi

***Stabilire che tipo di strutture algebriche sono le seguenti. Con i simboli + e ·, indichiamo le consuete operazioni di addizione e prodotto nell'insieme dei numeri reali. $\mathcal{P}(X)$ è l'insieme delle parti di X.***

**1. a) $(\mathbb{Q}^+,+,\cdot)$; b) $(\mathbb{Z}_2[x],+,\cdot)$**
a) Non è un anello perché mancano gli elementi simmetrici della somma; b) È un anello, anzi un dominio di integrità perché non ha divisori dello zero.

**2. a) ($\mathcal{M}_6$, + , ·) (Insieme dei multipli interi di 6); b) $(\mathbb{Z}_7,+,\cdot)$; c) $(\mathbb{Z}_8,+,\cdot)$**
a) Anello abeliano, non dominio di integrità, perché $2m \cdot 3n = 0$, con $mn \neq 0$;

b) È un Campo perché è un corpo commutativo e non ha divisori dello zero, dato che 7 è un numero primo e quindi non esistono due numeri diversi da 1 e minori di 6, il cui prodotto sia 7 o un suo multiplo. c) Anello abeliano, non è un corpo perché ha divisori dello zero: $2m \cdot 4n = 0$

3. **a) ({1; 2; 3; 4; 5}, *max*, *min*); b) ($\mathcal{P}(X)$, $\cup$, $\cap$)**

   a) Non è un anello perché non vi sono i simmetrici. Gli elementi neutri sono rispettivamente 1 e 5, ma $max(2; x) = 1$ non ha soluzioni, così come $min(2; 5) = 5$;
   b) Non è un anello, perché rispetto all'unione è un semigruppo, vedi es. 7a

4. **a) ($\mathcal{P}(X)$, $\Delta$, $\cap$); b) ($\mathcal{L}$, $\dot{\vee}$, $\wedge$)**

   a) Anello commutativo con unità, dato che rispetto a $\Delta$ è gruppo abeliano, vedi es. 7c, e rispetto a $\cap$ è semigruppo abeliano con unità, vedi es. 7b;
   b) Anello commutativo con unità, dato che rispetto a $\dot{\vee}$ è gruppo abeliano, vedi es. 6c, e rispetto a $\wedge$ è semigruppo abeliano con unità, vedi es. 6a

## Isomorfismi

1. **Verificare che $(\mathbb{Z}_2,+)$ è isomorfo al gruppo delle sostituzioni su due elementi.**

   Abbiamo che in entrambi i casi le tabelle operatorie sono formalmente identiche alla seguente, in cui *u* rappresenta l'unità e *x* l'altro elemento.

| $\oplus$ | $u$ | $x$ |
|---|---|---|
| $u$ | $u$ | $x$ |
| $x$ | $x$ | $u$ |

2. **Verificare che $(\mathbb{Z}_6,+)$ è isomorfo al gruppo delle sostituzioni su tre elementi.**

   La tabella operatoria è formalmente identica alla seguente, in cui *c* e *c'* sono fra loro simmetrici

| $\oplus$ | $u$ | $a$ | $b$ | $c$ | $c'$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $u$ | $u$ | $a$ | $b$ | $c$ | $c'$ | $d$ |
| $a$ | $a$ | $u$ | $c$ | $u$ | $d$ | $c'$ |
| $b$ | $b$ | $c'$ | $u$ | $d$ | $a$ | $c$ |
| $c$ | $c$ | $c'$ | $a$ | $d$ | $u$ | $b$ |
| $c'$ | $c'$ | $b$ | $d$ | $u$ | $c$ | $a$ |
| $d$ | $d$ | $c$ | $c'$ | $a$ | $b$ | $u$ |

3. **Dati due gruppi di ordine 2, possiamo dire che sono sempre isomorfi? Giustificare la risposta.**

   Sì perché la tabella contiene solo l'elemento unità e l'altro elemento che è simmetrico di se stesso.

4. **Abbiamo visto che $\mathbb{Z}_3$ = ({[0], [1], [2]} e ({$R_0$, $R_{120}$, $R_{240}$}, °) sono fra loro isomorfi. Consideriamo la relazione binaria {[0] → $R_0$, [1] → $R_{120}$, [2] → $R_{240}$}. Verificare che, comunque si considerino *a*, *b* ∈ $\mathbb{Z}_2$ la relazione precedente associa alla classe [*a* + *b*] la composizione delle rotazioni associate ai singoli elementi.**

   Basta considerare le relative tabelle operatorie, costruite nel box lavoriamo insieme

## La sfida

1. **Sia (*A*, *) un gruppoide e *B* ⊂ *A*, possiamo sempre dire che anche (*B*, *) è un gruppoide? Giustificare la risposta.**

   No, per esempio: (N, +) è un gruppoide, ({1; 2}, +) non lo è

2. **Sia (*A*, *) un gruppoide e *A* ⊂ *B*, possiamo sempre dire che anche (*B*, *) è un gruppoide? Giustificare la risposta.**

   No, per esempio: ({0; 1}, +) è un gruppoide, ({–2; 0; 1}, +) non lo è

***Stabilire che tipo di strutture algebriche sono le seguenti. Con i simboli + e ·, indichiamo le consuete operazioni di addizione a moltiplicazione nell'insieme dei numeri reali.***

**3. Insieme delle frazioni algebriche rapporto di polinomi di primo grado non nulli a coefficienti numeri reali, espressioni del tipo $\frac{ax+b}{cx+d}$ con $a \neq 0$ e $c \neq 0$, rispetto alla moltiplicazione.**

Gruppo abeliano, con elemento neutro 1, il simmetrico di $\frac{ax+b}{cx+d}$ è $\frac{cx+d}{ax+b}$. Verifichiamo la validità della proprietà associativa e di quella commutativa:

$$\frac{ax+b}{cx+d}\cdot\left(\frac{mx+n}{px+q}\cdot\frac{tx+w}{sx+z}\right)=\frac{(ax+b)\cdot(mx+n)\cdot(tx+w)}{(cx+d)\cdot(px+q)\cdot(sx+z)}=\left(\frac{ax+b}{cx+d}\cdot\frac{mx+n}{px+q}\right)\cdot\frac{tx+w}{sx+z};$$

$$\frac{ax+b}{cx+d}\cdot\frac{mx+n}{px+q}=\frac{(ax+b)\cdot(mx+n)}{(cx+d)\cdot(px+q)}=\frac{mx+n}{px+q}\cdot\frac{ax+b}{cx+d}$$

**4. Per quali valori reali di $k$ la struttura ($\mathbb{Z}$, *, •), con $a * b = a + b + 7$ e $a \bullet b = a \cdot b + k$ è un anello?**

Verifica facilmente le proprietà associative e commutative. Determiniamo gli elementi neutri.

$a * u = a \Rightarrow a + u + 7 = a \Rightarrow u + 7 = 0 \Rightarrow u = -7$; $a \bullet u = a \Rightarrow a \cdot u + k = a \Rightarrow u = \frac{a-k}{a} = 1 - \frac{k}{a}$, che rappresenta un valore costante, 1, solo se $k = 0$

**5. Consideriamo due gruppi ($G$, ⊕) e ($H$, ⊗) fra loro isomorfi. Costruiamo una funzione $f$: $G \to H$, che associa a ogni elemento di $G$ quello che nella tabella operatoria di $H$ si *comporta* allo stesso modo. Dimostrare che quali che siano gli elementi $a$, $b \in G$, vale l'uguaglianza: $f(a \oplus b) = f(a) \otimes f(b)$.**

Lavoriamo per semplicità su gruppi di ordine 3, con un elemento unità e due elementi reciprocamente simmetrici:

| $\oplus$ | $u$ | $a$ | $a'$ |
|---|---|---|---|
| $u$ | $u$ | $a$ | $a'$ |
| $a$ | $a$ | $a$ | $u$ |
| $a'$ | $a'$ | $u$ | $a'$ |

| $\otimes$ | $u'$ | $h$ | $h'$ |
|---|---|---|---|
| $u'$ | $u'$ | $h$ | $h'$ |
| $h$ | $h$ | $h$ | $u'$ |
| $h'$ | $h'$ | $u'$ | $h'$ |

Avremo: $f(u) = u'$; $f(a) = h$; $f(a') = h'$. Adesso

$f(u \oplus a) = f(a) = h$; $= f(u) \otimes f(a) = u' \otimes h = h$;

$f(u \oplus a') = f(a') = h'$; $= f(u) \otimes f(a') = u' \otimes h' = h'$;

$f(a \oplus a') = f(u) = u'$; $= f(a) \otimes f(a') = h \otimes h' = u'$;

$f(a \oplus a) = f(a) = h$; $= f(a) \otimes f(a) = h \otimes h = h$;

$f(a' \oplus a') = f(a') = h'$; $= f(a') \otimes f(a') = h' \otimes h' = h'$;

$f(u \oplus u) = f(u) = u'$; $= f(u) \otimes f(u) = u' \otimes u' = u'$;

**6. Risolvere l'equazione (3, 2) Φ (0, 0) = ($x$, $y$) Φ (3, 2), con ($a$, $b$) Φ ($c$, $d$) = ($a - c$, $b + d$), in $\mathbb{R}^2$.**

(3, 2) Φ (0, 0) = ($x$, $y$) Φ (3, 2) ⇒ (3 – 0, 2 + 0) = ($x$ – 3, $y$ + 2) ⇒ (3, 2) = ($x$ – 3, $y$ + 2) ⇒ $x$ – 3 = 3, $y$ + 2 = 2 ⇒ ($x$, $y$) = (6, 0)

**7. Data l'operazione $a \blacklozenge b = a^b$, provare che $(a \blacklozenge b)^n = a \blacklozenge (b \cdot n)$.**

$(a \blacklozenge b)^n = (a^b)^n = a^{b \cdot n} = a \blacklozenge (b \cdot n)$

**8. Sono dati due numeri naturali $a$ e $b$. Quale delle seguenti affermazioni è sempre verificata? Fornire dei contro esempi per ciascuna delle affermazioni false.**

A è falsa: 3 + 5 è pari, 3 · 5, no; B è falsa: 2 + 4 è pari, 2 · 4, pure; C è vera, se $a + b$ è dispari i due numeri non sono entrambi pari o entrambi dispari, pertanto il loro prodotto ha un fattore pari e uno dispari, ed è pari; D è falsa: 3 + 4 è dispari, 3 · 4, no; E è falsa perché C è vera

A) Se $a + b$ è pari allora $a \cdot b$ è pari B) Se $a + b$ è pari allora $a \cdot b$ è dispari C) Se $a + b$ è dispari allora $a \cdot b$ è pari D) Se $a + b$ è dispari allora $a \cdot b$ è dispari E) Nessuna delle precedenti

## Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

1. **(MT1995) Se $a \Delta b = b^a + a^b$, calcolare $(2 \Delta 3) \Delta 2$.**
   $(2 \Delta 3) \Delta 2 = (3^2 + 2^3) \Delta 2 = 17 \Delta 2 = 2^{17} + 17^2 = 131361$
2. **(HSMC 2005) Se $a \otimes b = ab - 3a + 1$, determinare $5 \otimes (7 \otimes 5)$.**
   $5 \otimes (7 \otimes 5) = 5 \otimes (7 \cdot 5 - 3 \cdot 7 + 1) = 5 \otimes 15 = 5 \cdot 15 - 3 \cdot 5 + 1 = 61$
3. **(HSMC 2007) Se $x \clubsuit y = x - y^2$ e $x \blacklozenge y = x^3 + xy + y^2$, determinare $2 \clubsuit (3 \blacklozenge (-2))$.**
   $2 \clubsuit (3 \blacklozenge (-2)) = 2 \clubsuit (3^3 + 3 \cdot (-2) + (-2)^2) = 2 \clubsuit 25 = 2 - 25^2 = -623$
4. **(V 2007) Definiamo l'operazione ternaria: $[x, y, z] = \dfrac{xy + yz + zx}{x^2 + y^2 + z^2}$. Calcola [3, 2, –4].**
   $$[3,2,-4] = \frac{3 \cdot 2 + 2 \cdot (-4) + (-4) \cdot 3}{3^2 + 2^2 + (-4)^2} = \frac{6 - 8 - 12}{9 + 4 + 16} = \frac{-14}{29}$$
5. **(L 2008) Se $a \blacklozenge b = a^{b-1}$ per $a, b > 0$, calcolare $3 \blacklozenge (2 \blacklozenge 3)$.**
   $3 \blacklozenge (2 \blacklozenge 3) = 3 \blacklozenge 2^{3-1} = 3 \blacklozenge 4 = 3^{3-1} = 27$
6. **(AL 2009) Se $a \otimes b = ab + 1$ e $a \oplus b = a + b$, calcolare $4 \otimes [(6 \oplus 8) \oplus (3 \otimes 5)]$.**
   $4 \otimes [(6 \oplus 8) \oplus (3 \otimes 5)] = 4 \otimes [(6 + 8) \oplus (3 \cdot 5 + 1)] = 4 \otimes [14 \oplus 16] = 4 \otimes (14 + 16) = 4 \otimes 30 = 4 \cdot 30 + 1 = 121$
7. **(NC 2009) L'operazione $a \otimes b = \sqrt{a+b}$ è definita sui numeri reali positivi. Quali delle seguenti affermazioni sono vere? I. Ha sempre risultato positivo II. È commutativa III. È associativa.**
   **A) solo I B) solo II C) solo I e II D) solo I e II e) I, II e III**
   Certamente è sempre positiva ed è commutativa;
   Non è associativa: $a \otimes (b \otimes c) = a \otimes \sqrt{b+c} = \sqrt{a + \sqrt{b+c}}; (a \otimes b) \otimes c = \sqrt{a+b} \otimes c = \sqrt{\sqrt{a+b} + c}$, per esempio $1 \otimes (2 \otimes 3) = \sqrt{1 + \sqrt{2+3}} = \sqrt{1+\sqrt{5}}; (1 \otimes 2) \otimes 3 = \sqrt{\sqrt{1+2} + 3} = \sqrt{3 + \sqrt{3}}$. Risposta D
8. **(HSMC 2011) Sia l'operazione $\otimes$ definita da $a \otimes b = a^2 + 3^b$. Calcolare $(2 \otimes 0) \otimes (0 \otimes 1)$.**
   $(2 \otimes 0) \otimes (0 \otimes 1) = (2^2 + 3^0) \otimes (0^2 + 3^1) = 5 \otimes 3 = (5^2 + 3^3) = 52$
9. **(HSMC 2001) Given that $a \otimes b = \dfrac{a^2 + b}{2}$. What is the value of $5 \otimes 3$?**
   $$5 \otimes 3 = \frac{5^2 + 3}{2} = \frac{28}{2} = 14$$
10. **(NC 2002) Define the operation $\otimes$ as $x \otimes y = xy(x - y)$. Find $x$ where $x \neq 0$ and $x \otimes 7 = x$.**
    **A) 8/7 B) 50/7 C) 7 D) 1/7 E) equation has no solution**
    $x \otimes 7 = x \Rightarrow 7x(x - 7) = x \Rightarrow 7(x - 7) = 1 \Rightarrow 7x - 49 = 1 \Rightarrow 7x = 50 \Rightarrow x = 50/7$. Risposta B
11. **(V 2005) Define the operation $\oplus$ by $a \oplus b = \dfrac{a-b}{a+b}$. Find all values of $c$ such that $(1 \oplus 2) \oplus c = 1 \oplus (2 \oplus c)$.**
    $$(1 \oplus 2) \oplus c = 1 \oplus (2 \oplus c) \Rightarrow \left(\frac{1-2}{1+2}\right) \oplus c = 1 \oplus \left(\frac{2-c}{2+c}\right) \Rightarrow -\frac{1}{3} \oplus c = 1 \oplus \left(\frac{2-c}{2+c}\right) \Rightarrow$$
    $$\Rightarrow \frac{-\frac{1}{3} - c}{-\frac{1}{3} + c} = \frac{1 - \frac{2-c}{2+c}}{1 + \frac{2-c}{2+c}} \Rightarrow \frac{-1-3c}{-1+3c} = \frac{\cancel{2}c}{\cancel{4}^2} \Rightarrow -2 - 6c = -c + 3c^2 \Rightarrow 3c^2 + 5c + 2 = 0 \Rightarrow = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{6} = \prec \begin{matrix} -1 \\ -\frac{1}{3} \end{matrix}$$
12. **(HSMC 2008) The operation * is defined by $a * b = \dfrac{3a - 2b}{2ab}$ for all $a, b \neq 0$. If $x * y = ¼$ and $y * x = -1$, find $x * x$.**

$$x*y=\frac{3x-2y}{2xy}=\frac{1}{4},\ y*x=\frac{3y-2x}{2yx}=-1;\ x*x=\frac{3x-2x}{2x^2}=\frac{1}{2x}\Rightarrow\frac{3x-2y}{\cancel{2xy}}\cdot\frac{\cancel{2yx}}{3y-2x}=-\frac{1}{4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12x-8y=2x-3y\Rightarrow y=2x\Rightarrow\frac{3\cdot 2x-2x}{2\cdot 2x\cdot x}=-1\Rightarrow\frac{4x}{4x^2}=-1\Rightarrow\frac{1}{x}=-1\Rightarrow x*x=-\frac{1}{2}$$

**13. (AL 2009) Let ⊗ be defined by $a \otimes b = a^2 + b$. And let ⊕ be defined by $a \oplus b = a - b^2$. What is $(a \oplus b) \otimes b$?**

$(a \oplus b) \otimes b = (a - b^2) \otimes b = (a - b^2)^2 + b = a^2 - 2ab^2 + b^4 + b$

**14. (NC 2009) Define the operation * by $x * y = 4x - 3y + xy$, for all real numbers $x$ and $y$. For how many real numbers $y$ does $3 * y = 12$? A) 0 B) 1 C) 3 D) 4 E) more than 4**

$3*y = 12 \Rightarrow 4 \cdot 3 - 3y + 3y = 12 \Rightarrow 12 = 12$. È un'identità, quindi infiniti numeri, ossia risposta E

**15. (MT1994) The binary operation ⊗ on whole numbers is defined as $a \otimes b = 2a + 3b$. Compute $(3 \otimes 4) \otimes 5$.**

$(3 \otimes 4) \otimes 5 = (2 \cdot 3 + 3 \cdot 4) \otimes 5 = 18 \otimes 5 = 2 \cdot 18 + 3 \cdot 5 = 51$

# *Quelli che ... vogliono saperne di più*

## Ordine dei sottogruppi

***Determinare tutti gli eventuali sottogruppi propri dei seguenti gruppi***

**1. a) $\mathbb{Z}_2$; b) $\mathbb{Z}_3$; c) $\mathbb{Z}_4$; d) $\mathbb{Z}_5$; e) $\mathbb{Z}_6$; f) $\mathbb{Z}_7$**

a) Nessun gruppo di ordine 2 ha sottogruppi propri; b) Per il Teorema di Lagrange non vi sono sottogruppi propri; c) Per il Teorema di Lagrange vi possono essere solo sottogruppi propri di ordine 2, che perciò devono contenere l'elemento neutro e un altro elemento autosimmetrico, l'unica possibilità è perciò {[0], [2]}; d) Per il Teorema di Lagrange non vi sono sottogruppi propri; e) Per il Teorema di Lagrange vi possono essere solo sottogruppi propri di ordine 2 e di ordine 3. I primi devono contenere l'elemento neutro e un altro elemento autosimmetrico, l'unica possibilità è perciò {[0], [3]}. Per gli altri devono contenere l'unità e coppie di elementi uno simmetrico dell'altro, quindi solo {[0], [2], [4]}; f) Per il Teorema di Lagrange non vi sono sottogruppi propri

**2. ($\mathcal{M}_{24}$, +) Gruppo additivo dei multipli interi di 24.**

Non possiamo applicare il Teorema di Lagrange perché il gruppo non è finito. Tutti i sottogruppi sono ovviamente formati da multipli dello stesso tipo, pertanto devono essere multipli di un divisore proprio di 24, quindi: $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_3$, $\mathcal{M}_4$, $\mathcal{M}_6$, $\mathcal{M}_8$, $\mathcal{M}_{12}$

Nei seguenti esercizi indichiamo con $R_k$ una rotazione di dato centro, uguale per tutte, di angolo $k°$.

**3. a) $\{R_0, R_{90}, R_{180}, R_{270}\}$; b) $\{R_0, R_{60}, R_{120}, ..., R_{300}\}$; c) $\{R_0, R_{45}, R_{90}, ..., R_{315}\}$**

a) Per il Teorema di Lagrange vi possono essere solo sottogruppi propri di ordine 2, che devono contenere l'elemento neutro e un altro elemento autosimmetrico, l'unica possibilità è perciò $R_0$, $R_{180}$};
b) Il gruppo ha 6 elementi. Per il Teorema di Lagrange vi possono essere solo sottogruppi propri di ordine 2 e di ordine 3. I primi devono contenere l'elemento neutro e un altro elemento autosimmetrico, l'unica possibilità è perciò $\{R_0, R_{180}\}$. Per gli altri devono contenere l'unità e coppie di elementi uno simmetrico dell'altro, quindi solo due possibilità: $\{R_0, R_{60}, R_{300}\}$,$\{R_0, R_{120}, R_{240}\}$, ma la prima non va bene perché non è un gruppo, dato che $R_{60} \circ R_{60} = R_{120}$; c) Il gruppo ha 8 elementi. Per il Teorema di Lagrange vi possono essere solo sottogruppi propri di ordine 2 e di ordine 4. I primi devono contenere l'elemento neutro e un altro elemento autosimmetrico, l'unica possibilità è perciò $\{R_0, R_{180}\}$. Per gli altri devono contenere l'unità e tre elementi di cui uno autosimmetrico (l'unico è $R_{180}$) e l'altra coppia di reciprocamente simmetrici, quindi le possibilità sono: $\{R_0, R_{45}, R_{180}, R_{315}\}$, $\{R_0, R_{90}, R_{180}, R_{270}\}$, $\{R_0, R_{135}, R_{180}, R_{225}\}$, ma il primo non è un sottogruppo, $R_{45} \circ R_{45} = R_{90}$, così come il terzo, $R_{135} \circ R_{135} = R_{270}$.

**4. $\{R_0, R_{30}, R_{60}, ..., R_{330}\}$**

Il gruppo ha 12 elementi. Per il Teorema di Lagrange vi possono essere solo sottogruppi propri di ordine 2, 3, 4, e 6. I primi devono contenere l'elemento neutro e un altro elemento autosimmetrico, l'unica possibilità è perciò $\{R_0, R_{180}\}$. Quelli di ordine 3 devono contenere l'unità e una coppia di elementi uno simmetrico dell'altro, solo $\{R_0, R_{120}, R_{240}\}$ è accettabile. Quelli di ordine 4 devono contenere l'unità, $R_{180}$ e una coppia di elementi uno simmetrico dell'altro, solo $\{R_0, R_{90}, R_{180}, R_{270}\}$ è accettabile. Quelli di ordine 6 devono contenere l'unità, $R_{180}$ e due coppie di elementi uno simmetrico dell'altro, solo $\{R_0, R_{60}, R_{120}, R_{180}, R_{240}, R_{300}\}$ è accettabile.

***Stabilire quali fra i seguenti sono gruppi ciclici, determinando l'elemento generatore.***

**5.** **a)** $(\mathbb{Z}_m,+)$**; b)**$(\mathbb{Z}_2[x],+)$

a) Ciclico, generato da [1]; b) Non è ciclico

**6.** **($\mathcal{M}_n$, +), gruppo dei multipli interi del numero naturale *n***

Ciclico, generato da $n$

**7.** **Gruppo delle potenze intere di 10, rispetto al prodotto**

Ciclico, generato da 10

**8.** **Gruppo delle sostituzioni su tre elementi: {1; 2; 3}**

Non è ciclico

**9.** **a) $\{R_0, R_{30}, R_{60}, ..., R_{330}\}$; b) $\{R_0, R_{45}, R_{90}, ..., R_{315}\}$**

a) Ciclico, generato da $R_{30}$; b) Ciclico, gen. da $R_{45}$

**10.** **a) Per quali valori di $k \in \mathbb{N}$, $R_k$ genera gruppi ciclici? b) Per quale valore il gruppo ha maggiore cardinalità?**

a) $k$ deve essere divisore di 360; b) $k = 1$