2. Geometria delle coordinate

2.2 Il riferimento cartesiano ortogonale

Concetto di sistema di riferimento sulla retta

1. **Il cosiddetto GPS (Global Positioning System) è un dispositivo che permette di determinare la posizione di un oggetto sulla superficie terrestre. Esso viene utilizzato da molti strumenti tecnologici, come i cellulari o i navigatori satellitari. È perciò un esempio di dispositivo che sfrutta un sistema di riferimento. Fornire altri esempi di dispositivi che sfruttano sistemi di riferimento.**
   Elettrocardiogramma; Schermi di smart phone o computers. Mappe geografiche in qualunque formato.
2. **Verificare la validità dell'identità di Eulero per i punti $A \equiv (-5)$, $B \equiv (-4)$, $C \equiv (-2)$, $D \equiv (1)$.**
   Dobbiamo verificare che $\overline{AB}\cdot\overline{CD}-\overline{AC}\cdot\overline{BD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}=0$. Abbiamo: $[-4-(-5)]\cdot[1-(-2)]-[-2-(-5)]\cdot[1-(-4)]+[1-(-5)]\cdot[-2-(-4)]=1\cdot 3-3\cdot 5+6\cdot 2=3-15+12=0$.
3. **Verificare la validità dell'identità di Eulero per i punti $A \equiv (-2)$, $B \equiv (1)$, $C \equiv (3)$, $D \equiv (4)$.**
   Abbiamo: $[1-(-2)]\cdot(4-3)-[3-(-2)]\cdot(4-1)+[4-(-2)]\cdot(3-1)=3\cdot 1-5\cdot 3+6\cdot 2=3-15+12=0$.
4. **Verificare la validità dell'identità di Eulero per i punti $A \equiv (-4)$, $B \equiv (-1)$, $C \equiv (1)$, $D \equiv (4)$.**
   Abbiamo: $[-1-(-4)]\cdot(4-1)-[1-(-4)]\cdot[4-(-1)]+[4-(-4)]\cdot[1-(-1)]=3\cdot 3-5\cdot 5+8\cdot 2=9-25+16=0$.
5. **In un sistema di riferimento naturale sulla retta, il segmento di estremi $A \equiv (2)$ e $B \equiv (-1)$ è di 6 *cm*. Quanto misura in *cm* l'unità di misura del sistema?**
   Dato che $\overline{AB}=2-(-1)=3$, si ha $3x = 6$ *cm*, da cui $x = 2$ *cm*
6. **In un sistema di riferimento naturale sulla retta, il segmento di estremi $A \equiv (1/2)$ e $B \equiv (5/3)$ è di 2 *cm*. Quanto misura in *cm* l'unità di misura del sistema?**
   Dato che $\overline{AB}=\frac{5}{3}-\frac{1}{2}=\frac{10-3}{6}=\frac{7}{6}$, si ha $7/6x = 2$ *cm*, da cui $x = 2\cdot 6/7$ *cm* $=12/7$ *cm*

Determinare le coordinate dei punti medi dei segmenti di cui forniamo le coordinate degli estremi

7. **a) $A \equiv (-3)$, $B \equiv (1)$; b) $C \equiv (0)$, $D \equiv (5)$; c) $E \equiv (-6)$, $F \equiv (-1)$**
   a) $\left(\frac{1-3}{2}\right)\equiv(-1)$; b) $\left(\frac{0+5}{2}\right)\equiv\left(\frac{5}{2}\right)$; c) $\left(\frac{-6-1}{2}\right)\equiv\left(-\frac{7}{2}\right)$
8. **a) $G \equiv (-1/3)$, $H \equiv (3/2)$; b)** $I\equiv\left(1-\sqrt{2}\right),\ J\equiv\left(1+2\cdot\sqrt{2}\right)$
   a) $\left(\frac{-1/3+3/2}{2}\right)\equiv\left(\frac{\frac{-2+9}{6}}{2}\right)\equiv\left(\frac{7}{12}\right)$; b) $\left(\frac{1-\sqrt{2}+1+2\sqrt{2}}{2}\right)\equiv\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$
9. **Dati tre punti allineati, A, B, C, diciamo loro rapporto semplice, la quantità $(ABC) = \pm\overline{AC}/\overline{BC}$, dove si sceglie il segno + se C è esterno ad AB, meno se interno.. Esprimere il rapporto semplice in funzione delle coordinate dei punti: $A \equiv (a)$, $B \equiv (b)$, $C \equiv (c)$.**
   $$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\begin{cases}\frac{c-a}{c-b} & c>a, c>b\\ \frac{c-a}{c-b} & a<c<b\end{cases}$$
10. **Determinare la posizione di C rispetto ad A e B se $(ABC) = 1$.**
    Dovrebbe essere $\frac{c-a}{c-b}=1\Rightarrow c-a=c-b\Rightarrow a=b$, pertanto è impossibile
11. **Determinare la posizione di C rispetto ad A e B se $(ABC) = -1$.**

$$\frac{c-a}{c-b}=-1 \Rightarrow c-a=b-c \Rightarrow c=\frac{a+b}{2}.$$

12. Siano $A \equiv (1)$, $B \equiv (5)$, $C \equiv (-1)$, $D \equiv (7)$, calcolare $(ABC) \cdot (ABD)$.

$$(ABC)\cdot(ABD)=\frac{c-a}{c-b}\cdot\frac{d-a}{d-b}=\frac{-1-1}{-1-5}\cdot\frac{7-1}{7-5}=\frac{1}{3}\cdot 3=1$$

13. Provare che se $A \equiv (a)$, $B \equiv (b)$, $C \equiv \left(\frac{a+b+2c}{2}\right)$, $D \equiv \left(\frac{a+b-2c}{2}\right)$, allora $(ABC) \cdot (ABD) = 1$.

$$(ABC)\cdot(ABD)=\frac{c-a}{c-b}\cdot\frac{d-a}{d-b}=\frac{\frac{a+b+2c}{2}-a}{\frac{a+b+2c}{2}-b}\cdot\frac{\frac{a+b-2c}{2}-a}{\frac{a+b-2c}{2}-b}=\frac{\cancel{b+2c-a}^{-1}}{\cancel{a-b+2c}}\cdot\frac{\cancel{b-2c-a}^{-1}}{\cancel{a-b-2c}}=-1\cdot(-1)=1$$

14. Dati quattro punti A, B, C e D su una retta sulla quale è stabilito un sistema di riferimento naturale, siano M e N i punti medi di AB e CD rispettivamente. Provare la validità della seguente identità: $\overline{AD}+\overline{BC}=\overline{AC}+\overline{BD}=2\cdot\overline{MN}$.

$$(d-a)+(c-b)=(c-a)+(d-b)=2\cdot\left(\frac{c+d}{2}-\frac{a+b}{2}\right)\Rightarrow c+d-a-b=d+c-a-b=c+d-a-b$$

15. Verificare l'identità di Eulero quando i punti A, B, C, D sono disposti in ordine decrescente rispetto alla propria iniziale.

Abbiamo $a > b > c > d$, quindi: $(a-b)\cdot(c-d)-(a-c)\cdot(b-d)+(a-d)\cdot(b-c)=\underline{ac}-\underline{ad}-\cancel{bc}+\cancel{bd}-\cancel{ab}+\underline{ad}+\cancel{bc}-cd+\cancel{ab}-\underline{ac}-\cancel{bd}+cd=0$

16. Dimostrare che, per ogni punto P, esterno al segmento AB, detto M il punto medio di AB si ha: $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PM}^2-\overline{MA}^2$.

$$(p-a)\cdot(p-b)=\left(p-\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a+b}{2}-a\right)^2\Rightarrow p^2-ap-bp+ab=p^2-p\cdot(a+b)+\cancel{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}-\cancel{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}+$$

$$+a\cdot(a+b)-a^2\Rightarrow p^2-ap-bp+ab=p^2-ap-bp+\cancel{a^2}+ab\cancel{-a^2}$$

17. Fornire un esempio per mostrare che l'identità precedente non vale se P è interno ad AB.

Sia $A \equiv (1)$, $B \equiv (5)$, $P \equiv (2)$, $M \equiv (3)$: $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=1\cdot 3=3$; $\overline{PM}^2-\overline{MA}^2=1^2-2^2=1-4=-3$

18. Dimostrare che la precedente identità è caratteristica del punto medio di AB, nel senso che se P è esterno ad AB e X è un punto che verifica $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PX}^2-\overline{AX}^2$, allora X è punto medio di AB.

Abbiamo già provato che se X è punto medio la proprietà vale.

Se vale si ha: $p^2-ap-bp+ab=(p-x)^2-(a-x)^2\Rightarrow p^2-ap-bp+ab=p^2-2px+x^2-a^2+2ax-x^2$ $\Rightarrow ab-ap-bp=-2px-a^2+2ax\Rightarrow 2x\cdot(a-p)=a^2-ap-bp+ab\Rightarrow 2x\cdot(a-p)=a\cdot(a-p)+b\cdot(a-p)\Rightarrow 2x=a+b\Rightarrow x=\frac{a+b}{2}$

Determinare le coordinate del secondo estremo dei segmenti di cui sono note le coordinate dell'altro estremo e del punto medio

19. a) $A \equiv (-4)$, $M_{AB} \equiv (1)$; b) $C \equiv (1)$, $M_{CD} \equiv (-3)$; c) $E \equiv (0)$, $M_{EF} \equiv (3)$

a) si ha: $\frac{-4+x_B}{2}=1\Rightarrow -4+x_B=2\Rightarrow x_B=6$

b) si ha: $\frac{1+x_D}{2}=-3\Rightarrow 1+x_D=-6\Rightarrow x_D=-7$

c) $\frac{0+x_F}{2}=3\Rightarrow x_F=6$

20. a) $G \equiv (-1/3)$, $M_{GH} \equiv (2)$; b) $I \equiv \left(\sqrt{2}\right), M_{IJ} \equiv \left(-\sqrt{3}\right)$

a) si ha: $\frac{-1/3+x_H}{2}=2\Rightarrow -\frac{1}{3}+x_H=4\Rightarrow x_H=4+\frac{1}{3}=\frac{13}{3}$

b) si ha: $\frac{\sqrt{2}+x_J}{2}=-\sqrt{3}\Rightarrow\sqrt{2}+x_J=-2\sqrt{3}\Rightarrow x_J=-2\sqrt{3}-\sqrt{2}$

Determinare le coordinate dei punti che dividono nel rapporto* 1/4*, i segmenti di estremi seguenti

21. a) $A \equiv (-1)$, $B \equiv (1)$; b) $C \equiv (-3)$, $D \equiv (0)$; c) $E \equiv (1)$, $F \equiv (7/3)$

a) Il segmento AB misura $1 - (-1) = 2$, dividendolo in 4 parti uguali, ciascuna di esse misurerà $2/4 = 1/2$, quindi abbiamo il punto più vicino ad A di coordinate $(-1 + 1/2) \equiv (-1/2)$ e quello più vicino a B: $(1 - 1/2) \equiv (1/2)$;

b) Il segmento CD misura $0 - (-3) = 3$, dividendolo in 4 parti uguali, ciascuna di esse misurerà $3/4$, quindi abbiamo il punto più vicino a C di coordinate $(-3 + 3/4) \equiv (-9/4)$ e quello più vicino a D: $(0 - 3/4) \equiv (-3/4)$;

c) Il segmento EF misura $7/3 - 1 = 4/3$, dividendolo in 4 parti uguali, ciascuna di esse misurerà $1/3$, quindi abbiamo il punto più vicino ad E di coordinate $(1 + 1/3) \equiv (4/3)$ e quello più vicino a F: $(7/3 - 1/3) \equiv (2)$

22. a) $G \equiv (-2/3)$, $H \equiv (1/4)$; b) $I \equiv \left(-\sqrt{2}\right), J \equiv \left(1+\sqrt{2}\right)$

a) Il segmento GH misura $1/4 - (-2/3) = 11/12$, dividendolo in 4 parti uguali, ciascuna di esse misurerà $11/48$, quindi abbiamo il punto più vicino a G di coordinate $(-2/3 + 11/48) \equiv (-7/16)$ e quello più vicino ad H: $(1/4 - 11/48) \equiv (1/48)$

b) Il segmento ij misura $1+\sqrt{2}-\left(-\sqrt{2}\right)=1+2\sqrt{2}$, dividendolo in 4 parti uguali, ciascuna di esse misurerà $\frac{1+2\sqrt{2}}{4}$, quindi abbiamo il punto più vicino ad I di coordinate $\left(-\sqrt{2}+\frac{1+2\cdot\sqrt{2}}{4}\right)\equiv\left(\frac{1-2\sqrt{2}}{4}\right)$ e quello più vicino a J: $\left(1+\sqrt{2}-\frac{1+2\cdot\sqrt{2}}{4}\right)\equiv\left(\frac{4+4\sqrt{2}-1-2\sqrt{2}}{4}\right)\equiv\left(\frac{3+2\sqrt{2}}{4}\right)$

23. Quali fra le seguenti condizioni riferite alle coordinate degli estremi di un segmento, sono sufficienti ad assicurarci che la coordinata del punto medio di un segmento sia un numero intero? Giustificare la risposta. a) Sono numeri interi b) Sono numeri interi pari c) Sono numeri interi dispari d) Sono numeri razionali con denominatore pari e) Sono numeri interi multipli di 3.

a) non è sufficiente per esempio il punto medio fra (1) e (2) è (3/2). b) sì, perché il punto medio fra $(2n)$ e $(2m) + (m + n)$; c) sì, perché il punto medio fra $(2n + 1)$ e $(2m + 1) + (m + n + 1)$; d) non è sufficiente per esempio il punto medio fra (1/2) e (3/4) è (5/8). e) non è sufficiente per esempio il punto medio fra (3) e (6) è (9/2).

24. Quali fra le seguenti condizioni riferite alle coordinate degli estremi di un segmento, sono sufficienti ad assicurarci che entrambi i punti che dividono il segmento nel rapporto 1/4, abbiano coordinate intere? Giustificare la risposta. a) Sono numeri interi pari b) Sono numeri interi dispari c) Sono numeri interi multipli di 4 d) Sono numeri interi e) Sono numeri dell'insieme $\left\{n-4\cdot\sqrt{3}, n\in\mathbb{N}\right\}$.

a) non è sufficiente per esempio per il segmento di estremi (2) e (4) i punti cercati sono (3/2) e (7/2). b) non è sufficiente per esempio per il segmento di estremi (1) e (3) i punti cercati sono (3/2) e (5/2); c) sì, perché per il segmento di estremi $(4n)$ e $(4m)$ i punti cercati sono $(5n + m)$ e $(3m - n)$; d) non è sufficiente per quanto già visto in a). e) non è sufficiente per esempio per il segmento di estremi $\left(2-4\sqrt{3}\right),\left(1-4\sqrt{3}\right)$ i punti cercati sono $\left(3/4-4\sqrt{3}\right),\left(5/4-4\sqrt{3}\right)$

25. Con riferimento all'esercizio precedente, è possibile che il problema abbia soluzione se le coordinate degli estremi sono a) una pari e l'altra dispari; b) entrambe dispari.

a) non è sufficiente, per il segmento di estremi $(2n)$ e $(2m + 1)$ i punti cercati sono

$\left(2n+\frac{2m+1-2n}{4}\right)\equiv\left(\frac{6n+2m+1}{4}\right),\left(2m+1-\frac{2m+1-2n}{4}\right)\equiv\left(\frac{6m-2n+3}{4}\right)$ e in entrambi i casi nessuno dei numeratori è multiplo di 4, dato che sono sempre numeri dispari. b) è sufficiente per esempio per il segmento di estremi (–1) e (3) i punti cercati sono (0) e (2)

26. Determinare le coordinate dei punti che dividono il segmento di estremi $A \equiv (-1)$ e $B \equiv (2)$ in 8 parti isometriche.

Il segmento AB misura 2 – (–1) = 3, dividendolo in 8 parti uguali, ciascuna di esse misurerà 3/8, quindi partendo dal punto più vicino ad A avremo: (–1 + 3/8) ≡ (–5/8); (–5/8 + 3/8) ≡ (–1/4); (–1/4 + 3/8) ≡ (1/8); (1/8 + 3/8) ≡ (1/2); (1/2 + 3/8) ≡ (7/8); (7/8 + 3/8) ≡ (5/4); (5/4 + 3/8) ≡ (13/8).

27. Determinare le coordinate dei punti che dividono il segmento di estremi $A \equiv (x_A)$, $B \equiv (x_B)$ in 8 parti isometriche.

Il segmento AB misura $x_B - x_A$, dividendolo in 8 parti uguali, ciascuna di esse misurerà $(x_B - x_A)/8$, quindi partendo dal punto più vicino ad A avremo:

$$\left(x_A+\frac{x_B-x_A}{8}=\frac{7x_A+x_B}{8}\right),\left(\frac{7x_A+x_B}{8}=\frac{3x_A+x_B}{4}\right),\left(\frac{3x_A+x_B}{4}+\frac{x_B-x_A}{8}=\frac{5x_A+3x_B}{8}\right),\left(\frac{5x_A+3x_B}{8}+\frac{x_B-x_A}{8}=\frac{x_A+x_B}{2}\right),$$

$$\left(\frac{x_A+x_B}{2}+\frac{x_B-x_A}{8}=\frac{3x_A+5x_B}{8}\right),\left(\frac{3x_A+5x_B}{8}+\frac{x_B-x_A}{8}=\frac{x_A+3x_B}{4}\right),\left(\frac{x_A+3x_B}{4}+\frac{x_B-x_A}{8}=\frac{x_A+7x_B}{8}\right)$$

Determinare le coordinate dei punti che dividono i segmenti di cui forniamo le coordinate degli estremi, nei rapporti accanto segnati

28. a) $I\equiv\left(1-\sqrt{2}\right), J\equiv\left(1+2\cdot\sqrt{2}\right), \frac{m}{n}=\frac{5}{9}$ **; b) $A \equiv (-5)$, $B \equiv (-1)$, $m/n = 1/3$**

a) Il segmento IJ misura $1+2\sqrt{2}-1+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$, dividendolo nel rapporto 5/9, vuol dire che dobbiamo dividere in 14 parti uguali, ciascuna delle quali misurerà $\frac{3\sqrt{2}}{14}$, quindi partendo dal punto più vicino ad I avremo: $\left(1-\sqrt{2}+5\cdot\frac{3\sqrt{2}}{14}\right)\equiv\left(\frac{14+\sqrt{2}}{14}\right)$. Mentre quello più vicino a J: $\left(1+2\sqrt{2}-5\cdot\frac{3\sqrt{2}}{14}\right)\equiv\left(\frac{14+13\sqrt{2}}{14}\right)$.

b) Il segmento AB misura –1 – (–5) = 4, dividendolo nel rapporto 1/3 vuol dire che dobbiamo dividere in 4 parti uguali, ognuna della quali misurerà 1, e poi partendo dal punto più vicino ad A avremo: (–5 + 1) ≡ (–4), e partendo da B invece: (–1 – 1) ≡ (–2)

29. a) $C \equiv (-4)$, $D \equiv (0)$, $m/n = 3/5$; b) $E \equiv (1)$, $F \equiv (4)$, $m/n = 4/7$; c) $G \equiv (-1/3)$, $H \equiv (3/2)$, $m/n = 2/7$

a) Il segmento CD misura 0 – (–4) = 4, dividendolo nel rapporto 3/5 vuol dire che dobbiamo dividere in 8 parti uguali, ognuna della quali misurerà 1/2, e poi partendo dal punto più vicino a C avremo: (–4 + 3 · 1/2) ≡ (–5/2), e partendo da D invece: (0 – 3 · 1/2) ≡ (–3/2);

b) Il segmento EF misura 4 – 1 = 3, dividendolo nel rapporto 4/7 vuol dire che dobbiamo dividere in 11 parti uguali, ognuna della quali misurerà 3/11, e poi partendo dal punto più vicino ad E avremo: (1 + 4 · 3/11) ≡ (23/11), e partendo da F invece: (4 – 4 · 3/11) ≡ (32/11)

c) Il segmento GH misura 3/2 – (–1/3) = 11/6, dividendolo nel rapporto 2/7 vuol dire che dobbiamo dividere in 9 parti uguali, ognuna della quali misurerà 11/54, e poi partendo dal punto più vicino a G avremo: (–1/3 + 2 · 11/54) ≡ (2/27), e partendo da F invece: (3/2 – 2 · 11/54) ≡ (59/54)

Dati i punti A e B , determinare, se esistono, dei punti C ≡ (c) per i quali sia vera la relazione data

30. $A \equiv (1)$, $B \equiv (4)$, $\overline{AC}\cdot\overline{BC}=2$

$\overline{AC}\cdot\overline{BC}=2\Rightarrow|c-1|\cdot|c-4|=2\Rightarrow c^2-5c+4=\pm2\Rightarrow c^2-5c+2=0\vee c^2-5c+6=0$, da cui, risolvendo $c=\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}\vee(c=2\vee c=3)$

31. a) $A \equiv (-2)$, $B \equiv (3)$, $\overline{AC}/\overline{BC}=3/2$ **; b) $A \equiv (-4)$, $B \equiv (1)$,** $\overline{AC}+2\cdot\overline{BC}=1$

a) $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\dfrac{3}{2}\Rightarrow\dfrac{|c+2|}{|c-3|}=\dfrac{3}{2}\Rightarrow 2|c+2|=3|c-3|\Rightarrow 2c+4=3c-9\vee 2c+4=-3c+9\Rightarrow c=13\vee c=1$

b) $\overline{AC}+2\cdot\overline{BC}=1\Rightarrow|c+4|+2\cdot|c-1|=1\Rightarrow\begin{cases}c+4+2c-2-1=0 & c\ge 1\\ c+4-2c+2-1=0 & -4<c<1\\ -c-4-2c+2-1=0 & c\le -4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=1/3 & c\ge 1\\ c=5 & -4<c<1\\ c=-1 & c\le -4\end{cases}\Rightarrow\varnothing$

32. **a) $A\equiv(-1/3)$, $B\equiv(5)$, $\dfrac{2\cdot\overline{AC}-1}{\overline{BC}+1}=\dfrac{4}{3}$; b) $A\equiv(3/2)$, $B\equiv(1/4)$, $\left(2-\overline{AC}\right)\cdot\left(\overline{BC}+1\right)=3$**

$$\frac{2\cdot\overline{AC}-1}{\overline{BC}+1}=\frac{4}{3}\Rightarrow\frac{2\cdot|c+1/3|-1}{|c-5|+1}=\frac{4}{3}\Rightarrow 6\cdot|c+1/3|-3=4\cdot|c-5|+4\Rightarrow|6c+2|-4\cdot|c-5|-7=0\Rightarrow$$

a) $$\Rightarrow\begin{cases}6c+2-4c+20-7=0 & c\ge 5\\ 6c+2+4c-20-7=0 & -1/3<c<5\\ -6c-2+4c-20-7=0 & c\le -1/3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=15/2 & c\ge 5\\ c=5/2 & -1/3<c<5\\ c=-29/2 & c\le -1/3\end{cases}\Rightarrow c=\frac{5}{2}\vee c=-\frac{29}{2}$$

$$\left(2-\overline{AC}\right)\cdot\left(\overline{BC}+1\right)=3\Rightarrow\left(2-|c-3/2|\right)\cdot\left(|c-1/4|+1\right)=3\Rightarrow\begin{cases}(2-c+3/2)\cdot(c-1/4+1)-3=0 & c\ge 3/2\\ (2+c-3/2)\cdot(c-1/4+1)-3=0 & 1/4<c<3/2\\ (2+c-3/2)\cdot(-c+1/4+1)-3=0 & c\le 1/4\end{cases}$$

b) $$\Rightarrow\begin{cases}(7/2-c)\cdot(c+3/4)-3=0 & c\ge 3/2\\ (c+1/2)\cdot(c+3/4)-3=0 & 1/4<c<3/2\\ (c+1/2)\cdot(-c+5/4)-3=0 & c\le 1/4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=\dfrac{11\pm\sqrt{97}}{8} & c\ge 3/2\\ c=\dfrac{-5\pm\sqrt{193}}{8} & 1/4<c<3/2\\ c=\dfrac{-7\pm\sqrt{201}}{8} & c\le 1/4\end{cases}\Rightarrow c=\frac{11+\sqrt{97}}{8}\vee c=\frac{-5+\sqrt{193}}{8}$$

33. **Dati i punti $A\equiv(-4)$, $B\equiv(-1)$ e $C\equiv(3)$, determinare, se esistono, dei punti $D\equiv(d)$ per i quali si abbia: $\overline{AD}+\overline{BD}=2+\overline{CD}$.**

$|d+4|+|d+1|=2+|d-3|\Rightarrow$

$$\begin{cases}d+4+d+1=2+d-3 & d\ge 3\\ d+4+d+1=2-d+3 & -1<d<3\\ d+4-d-1=2-d+3 & -4<d\le -1\\ -d-4-d-1=2-d+3 & d\le -4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d=-6 & d\ge 3\\ d=0 & -1<d<3\\ d=2 & -4<d\le -1\\ d=10 & d\le -4\end{cases}\Rightarrow d=-10\vee d=0$$

34. **Si chiama *parte aurea di un segmento AB* il segmento *AP*, con *P* interno ad *AB*, tale che si abbia: $\overline{AB}/\overline{AP}=\overline{AP}/\overline{PB}$, cioè *AP* è medio proporzionale fra l'intero segmento e la sua parte rimanente. Detti $A\equiv(a)$ e $B\equiv(b)$, con $a<b$, determinare le coordinate di *P*.**

$$\frac{b-a}{p-a}=\frac{p-a}{b-p}\Rightarrow b^2-ab-bp+ap=p^2-2ap+a^2\Rightarrow p^2-(3a-b)p+a^2-b^2+ab=0\Rightarrow$$

$$p=\frac{3a-b\pm\sqrt{9a^2-6ab+b^2-4a^2+4b^2-4ab}}{2}=\frac{3a-b\pm\sqrt{5a^2-10ab+5b^2}}{2}=\frac{3a-b\pm\sqrt{5}(b-a)}{2},$$

poiché il valore deve essere maggiore di a e minore di b, accettiamo solo la soluzione con il segno +, infatti

$$\frac{\left(3-\sqrt{5}\right)a+\left(\sqrt{5}-1\right)b}{2}<\frac{\left(3-\sqrt{5}\right)b+\left(\sqrt{5}-1\right)b}{2}=b;\ \frac{\left(3-\sqrt{5}\right)a+\left(\sqrt{5}-1\right)b}{2}>\frac{\left(3-\sqrt{5}\right)a+\left(\sqrt{5}-1\right)a}{2}=a.$$

35. **Determinare le coordinate dei punti *P* interni al segmento di estremi $A\equiv(x_A)$, $B\equiv(x_B)$ in modo che sia $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AB}}=\dfrac{m}{n}\vee\dfrac{\overline{BP}}{\overline{AB}}=\dfrac{m}{n}$, con $m<n$, $x_A<x_B$.**

$$\frac{p-x_A}{x_B-x_A}=\frac{m}{n}\Rightarrow np-nx_A=mx_B-mx_A\Rightarrow p=\frac{(n-m)x_A+mx_B}{n},$$ oppure

$$\frac{x_B - p}{x_B - x_A} = \frac{m}{n} \Rightarrow nx_B - np = mx_B - mx_A \Rightarrow p = \frac{(n-m)x_B + mx_A}{n}$$

Determinare la coordinata del secondo estremo dei segmenti di cui forniamo le coordinate dell'altro estremo e di un punto P che divide il detto segmento in un dato rapporto m/n. (Suggerimento: utilizzando le formule stabilite nell'Esercizio 35; impostare un'equazione in cui l'incognita è la coordinata cercata)

36. a) $A \equiv (3)$, $P \equiv (-1)$, $m/n = 2/3$; b) $C \equiv (-1)$, $P \equiv (-3)$, $m/n = 3/4$

a) $-1 = \frac{(3-2)\cdot 3 + 2\cdot x_B}{3} \vee -1 = \frac{(3-2)\cdot x_B + 2\cdot 3}{3} \Rightarrow -3 = 3 + 2x_B \vee -3 = x_B + 6 \Rightarrow x_B = -3 \vee x_B = -9$

b) $-3 = \frac{(4-3)\cdot(-1) + 3\cdot x_D}{4} \vee -3 = \frac{(4-3)\cdot x_D + 3\cdot(-1)}{4} \Rightarrow -12 = -1 + 3x_D \vee -12 = x_D - 3 \Rightarrow x_D = -\frac{11}{3} \vee x_D = -9$

37. a) $D \equiv \left(-\sqrt{3}\right), P \equiv \left(\sqrt{3}\right)$, $m/n = 5/9$; b) $E \equiv (0)$, $P \equiv (-3)$, $m/n = 4/5$

a) $\sqrt{3} = \frac{(9-5)\cdot\left(-\sqrt{3}\right) + 5\cdot x_E}{9} \vee \sqrt{3} = \frac{(9-5)\cdot x_E + 5\cdot\left(-\sqrt{3}\right)}{9} \Rightarrow 9\sqrt{3} = -4\sqrt{3} + 5x_E \vee 9\sqrt{3} = 4x_E - 5\sqrt{3} \Rightarrow x_E = \frac{13\sqrt{3}}{5} \vee x_E = \frac{7\sqrt{3}}{2}$

b) $-3 = \frac{(5-4)\cdot 0 + 4\cdot x_F}{5} \vee -3 = \frac{(5-4)\cdot x_F + 4\cdot 0}{5} \Rightarrow -15 = 4x_F \vee -15 = x_F \Rightarrow x_F = -\frac{15}{4} \vee x_F = -15$

38. a) $F \equiv \left(\sqrt{2}\right), P \equiv \left(3\cdot\sqrt{2}\right)$, $m/n = 2/7$; $G \equiv (2/3)$, $P \equiv (-4/5)$, $m/n = 1/2$

a) $3\sqrt{2} = \frac{(7-2)\cdot\sqrt{2} + 2\cdot x_G}{7} \vee 3\sqrt{2} = \frac{(7-2)\cdot x_G + 2\cdot\sqrt{2}}{7} \Rightarrow 21\sqrt{2} = 5\sqrt{2} + 2x_G \vee 21\sqrt{2} = 5x_G + 2\sqrt{2} \Rightarrow x_G = 8\sqrt{2} \vee x_G = \frac{19\sqrt{2}}{5}$

b) $-\frac{4}{5} = \frac{(2-1)\cdot 2/3 + x_H}{2} \vee -\frac{4}{5} = \frac{(2-1)\cdot x_H + 1\cdot 2/3}{2} \Rightarrow -8 = \frac{10}{3} + 5x_H \vee -8 = 5x_H + \frac{10}{3} \Rightarrow x_H = -\frac{34}{15} \vee x_H = -\frac{34}{15}$, ovviamente i punti coincidono, visto che P è il punto medio.

39. Dati i punti $A \equiv (-2)$, $B \equiv (3)$ e $C \equiv (c)$, determinare i valori del parametro reale m per i quali è vera la seguente relazione: $\overline{AC} + \overline{BC} = m$.

Dobbiamo considerare i vari casi, a seconda che c sia a sinistra di A, fra A e B o a destra di B:

$$\begin{cases} -2 - c + 3 - c = m & c < -2 \\ c + 2 + 3 - c = m & -2 \le c \le 3 \\ c + 2 + c - 3 = m & c > 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = \frac{1-m}{2} & c < -2 \\ m = 5 & -2 \le c \le 3 \\ c = \frac{m-1}{2} & c < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1-m}{2} < -2 & \\ m = 5 & -2 \le c \le 3 \\ \frac{m-1}{2} > 3 & \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > 5 & c < -2 \\ m = 5 & -2 \le c \le 3 \\ m > 7 & c > 3 \end{cases}$$

40. Dati i punti $A \equiv (-4)$, $B \equiv (-1)$ e $C \equiv (c)$, determinare i valori del parametro reale m per i quali è vera la seguente relazione: $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = m$.

$$\frac{|c+4|}{|c+1|} = m \Rightarrow \begin{cases} -c - 4 = m\cdot(-c-1) & c < -4 \\ c + 4 = m\cdot(-c-1) & -4 \le c \le -1 \\ c + 4 = m\cdot(c+1) & c > -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = \frac{m-4}{m-1} & c < -4 \\ c = -\frac{m+4}{m+1} & -4 \le c \le -1 \\ c = \frac{m-4}{m-1} & c > -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{m-4}{m-1} < -4 & c < -4 \\ -4 \le -\frac{m+4}{m+1} \le -1 & -4 \le c \le -1 \\ \frac{m-4}{m-1} > -1 & c > -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 < m < \frac{8}{5} & c < -4 \\ m \ge 0 & -4 \le c \le -1 \\ m < 1 \vee m > \frac{5}{2} & c > -1 \end{cases}$$

41. Dati i punti $A \equiv (-3)$, $B \equiv (0)$, $C \equiv (1)$, $D \equiv (4)$, $E \equiv (e)$, con $e > 0$, determinare i valori del parametro reale m per i quali si abbia: $\overline{AE} - \overline{DE} = m\cdot\left(\overline{BE} + \overline{CE}\right)$.

$$|e+3|-|e-4|=m\cdot(|e|+|e-1|)\Rightarrow\begin{cases}e+3-e+4=m\cdot(e+e-1) & e\ge 4\\ e+3+e-4=m\cdot(e+e-1) & 1<e<4\\ e+3+e-4=m\cdot(e-e+1) & 0\le e\le 1\\ e+3+e-4=m\cdot(-e-e+1) & -3<e<0\\ -e-3+e-4=m\cdot(-e-e-1) & e\le -3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}7=2me-m & e\ge 4\\ 2e-1=2me-m & 1<e<4\\ 2e-1=m & 0\le e\le 1\\ 2e-1=-2me+m & -3<e<0\\ -7=-2me-m & e\le -3\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}-1<m<1 & 0<e<1\\ m=1 & 1\le e\le 4\\ 0<m<1 & e>4\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}e=\dfrac{7+m}{2m} & e\ge 4\\ e=\dfrac{1}{2}\vee m=1 & 1<e<4\\ e=\dfrac{m+1}{2} & 0\le e\le 1\\ e=\dfrac{1}{2}\vee m=-1 & -3<e<0\\ e=\dfrac{7-m}{2m} & e\le -3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<m\le & e\ge 4\\ m=1 & 1<e<4\\ -1\le m\le 1 & 0\le e\le 1\\ e=\dfrac{1+m}{2+2m} & -3<e<0\\ -\dfrac{7}{5}\le m<0 & e\le -3\end{cases}$$

42. Dati i punti $A\equiv(1)$, $B\equiv(3)$, $C\equiv(7)$, $D\equiv(d)$, con $d>0$, determinare i valori del parametro reale m per i quali è vera la seguente relazione: $\overline{AD}+\overline{BD}=m\cdot\overline{CD}$.

$$|d-1|+|d-3|=m\cdot|d-7|\Rightarrow\begin{cases}d-1+d-3=m\cdot(d-7) & d\ge 7\\ d-1+d-3=m\cdot(7-d) & 3<m<7\\ d-1-d+3=m\cdot(7-d) & 1<d\le 3\\ -d-a-d+3=m\cdot(7-d) & d<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d=\dfrac{7m-4}{m-2} & d\ge 7\\ d=\dfrac{7m+4}{m+2} & 3<m<7\\ d=\dfrac{7m-2}{m} & 1<d\le 3\\ d=\dfrac{7m+4}{m-2} & d<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m\ge 2 & d\ge 7\\ m>\dfrac{1}{2} & 3<m<7\\ \dfrac{1}{3}<m\le\dfrac{1}{2} & 1<d\le 3\\ \dfrac{1}{3}\le m<2 & d<1\end{cases}$$

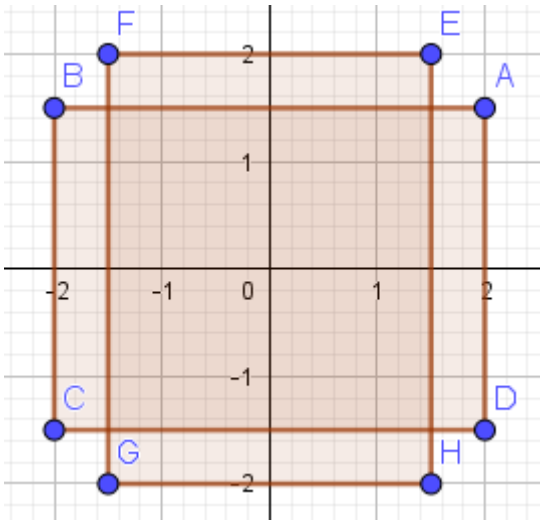
43. Dati i punti $A\equiv(-1)$, $B\equiv(2)$, $C\equiv(3)$, $D\equiv(7)$, $E\equiv(e)$, con $e<2$; determinare i valori del parametro reale m per i quali si abbia: $\overline{BE}+\overline{DE}=m\cdot\left(\overline{AE}-2\cdot\overline{CE}\right)$.

$$|e-2|+|e-7|=m\cdot(|e+1|-2|e-3|)\Rightarrow\begin{cases}e-2+e-7=m\cdot(e+1-2e+6) & e\ge 7\\ e-2-e+7=m\cdot(e+1-2e+6) & 3<e<7\\ e-2-e+7=m\cdot(e+1+2e-6) & 2\le e\le 3\\ -e+2-e+7=m\cdot(e+1+2e-6) & -1<e<2\\ -e+2-e+7=m\cdot(-e-1+2e-6) & e\le -1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}e=\dfrac{7m+9}{m+2} & e\ge 7\\ e=\dfrac{7m-5}{m} & 3<e<7\\ e=\dfrac{5m+5}{3m} & 2\le e\le 3\\ e=\dfrac{5m+9}{3m+2} & -1<e<2\\ e=\dfrac{7m+9}{m+2} & e\le -1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}m<-2 & e\ge 7\\ m>\dfrac{5}{4} & 3<e<7\\ \dfrac{5}{4}\le m\le 5 & 2\le e\le 3\\ m<-\dfrac{11}{8}\vee m>5 & -1<e<2\\ -2<m\le-\dfrac{11}{8} & e\le -1\end{cases}$$

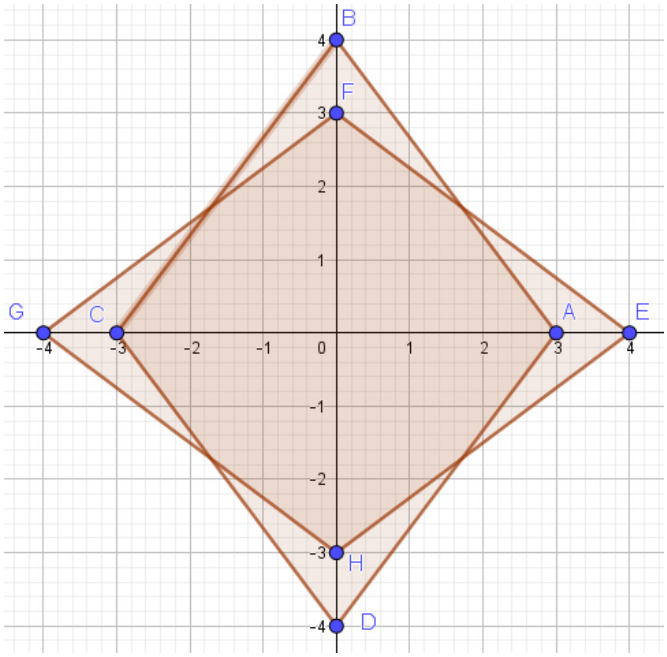
Concetto di sistema di riferimento sul piano

1. In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, rappresentare un rettangolo, con centro nell'origine, le cui dimensioni sono parallele agli assi e misurano 4 e 3 unità.



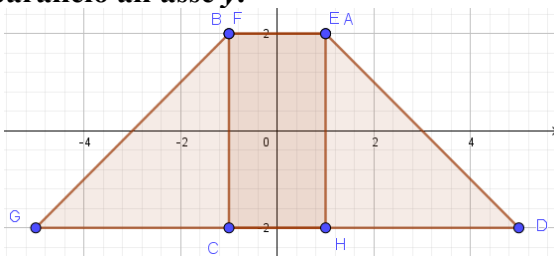
$A \equiv (2;\ 1{,}5)$, $B \equiv (-2;\ 1{,}5)$, $C \equiv (-2;\ -1{,}5)$, $D \equiv (2;\ -1{,}5)$; $E \equiv (1{,}5;\ 2)$, $F \equiv (-1{,}5;\ 2)$, $G \equiv (-1{,}5;\ -2)$, $H \equiv (1{,}5;\ -2)$

2. In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, rappresentare un rombo, con centro nell'origine, il cui lato è di 5 unità e i vertici hanno coordinate entrambe intere.



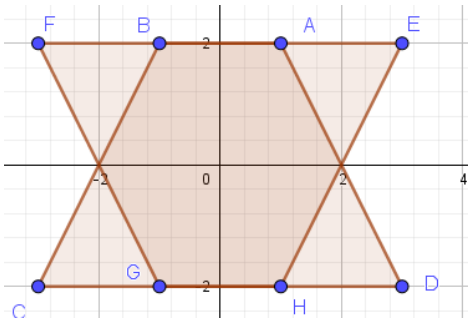
$A \equiv (3;\ 0)$, $B \equiv (0;\ 4)$, $C \equiv (-3;\ 0)$, $D \equiv (0;\ -4)$; $E \equiv (4;\ 0)$, $F \equiv (0;\ 3)$, $G \equiv (-4;\ 0)$, $H \equiv (0;\ -3)$

3. In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, rappresentare un trapezio rettangolo, le cui basi e altezza sono rispettivamente di 2, 6 e 4 unità, in modo che gli assi cartesiani bisechino una base e il lato altezza sia parallelo all'asse *y*.



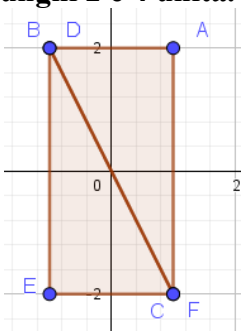
8 soluzioni: $A \equiv (1;\ 2)$, $B \equiv (-1;\ 2)$, $C \equiv (-1;\ -2)$, $D \equiv (5;\ -2)$; $E \equiv A \equiv (1;\ 2)$, $F \equiv B \equiv (-1;\ 2)$, $G \equiv (-5;\ -2)$, $H \equiv (1;\ -2)$; …

4. In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, rappresentare un trapezio isoscele, le cui basi e altezza sono rispettivamente di 2, 6 e 4 unità, in modo che gli assi cartesiani bisechino una base e l'altezza e quest'ultima sia parallela all'asse *y*.



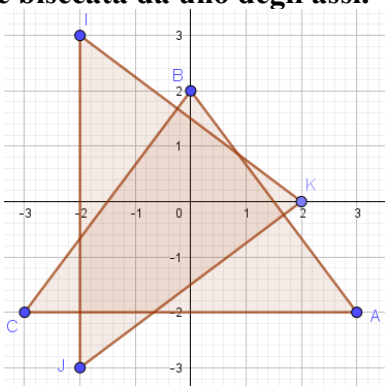
$A \equiv (1; 2)$, $B \equiv (-1; 2)$, $C \equiv (-3; -2)$, $D \equiv (3; -2)$; $E \equiv (3; 2)$, $F \equiv (-3; 2)$, $G \equiv (-1; -2)$, $H \equiv (1; -2)$

5. In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, rappresentare un triangolo rettangolo, i cui cateti sono bisecati dagli assi e sono lunghi 2 e 4 unità.



8 soluzioni: $A \equiv (1; 2)$, $B \equiv (-1; 2)$, $C \equiv (1; -2)$; $D \equiv (-1; 2)$, $E \equiv (-1; -2)$, $F \equiv (1; -2)$; ....

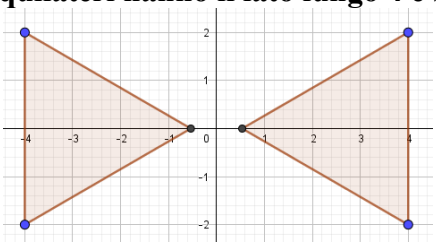
6. In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, rappresentare un triangolo isoscele di dimensioni 5; 5 e 6; la cui base è bisecata da uno degli assi.



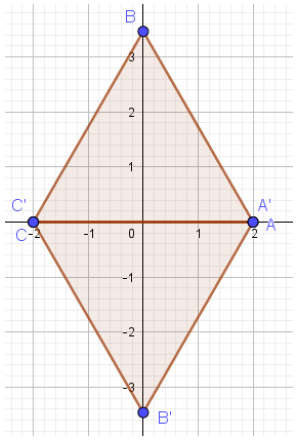
Infinite soluzioni, due di queste sono rappresentate, dopodiché trasliamo a piacere lungo uno degli assi.

7. Quanti triangoli equilateri hanno il lato lungo 4 e sono bisecati dall'asse *x*?

Infiniti, ecco due esempi



8. In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, rappresentare un triangolo equilatero il cui lato è lungo 4; è bisecato dall'asse *y* e ha due vertici su *x* e uno su *y*.

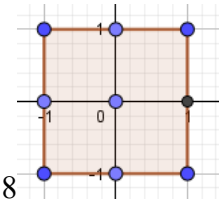


$A_{12} \equiv (2; 0)$, $B_{12} \equiv (0; \pm 2 \cdot \sqrt{3})$, $C_{12} \equiv (-2; 0)$

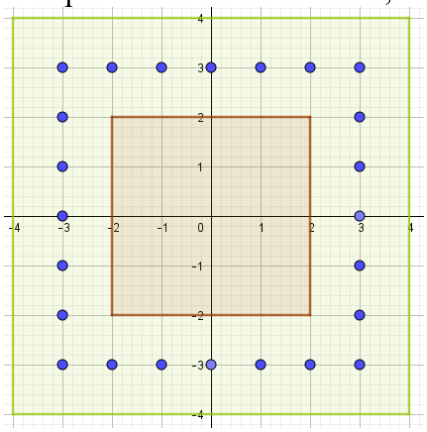
9. Con riferimento al problema precedente, è possibile rappresentare un triangolo equilatero in modo che tutti i suoi vertici siano punti reticolo? Giustificare la risposta.

No, perché il lato e l'altezza sono grandezze fra loro incommensurabili

10. Un quadrato di lato che misura 2 è rappresentato su un piano cartesiano ortogonale, con i lati paralleli agli assi e il centro nell'origine; quanti punti reticolo vi sono al suo interno? Quanti sul suo contorno?

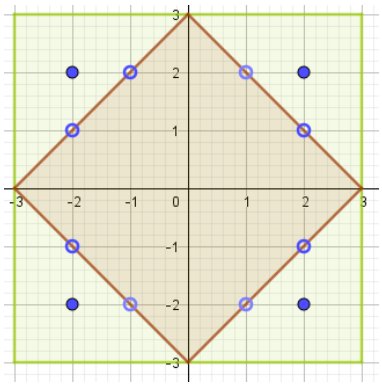
1; 8 

11. Due quadrati concentrici, di lati che misurano 4 e 8 sono rappresentati su un piano cartesiano ortogonale, con i lati paralleli agli assi e il centro nell'origine, quanti punti reticolo sono interni al quadrato maggiore ma non appartengono al minore?

Considerando il quadrato maggiore, al suo interno vi sono ovviamente $7 \cdot 7 = 49$ punti reticolo, dato che se consideriamo uno dei segmenti paralleli all'asse x, esso contiene esattamente 9 punti reticolo (4 a sinistra dell'asse y, 4 a destra e uno sull'asse). Eliminando quindi i due punti che stanno sui lati, abbiamo, nei 7 segmenti paralleli al lato 7 punti reticolo per segmento.  Di questi 7 segmenti solo il primo e l'ultimo non incontrano il quadrato minore e quindi contribuiscono interamente al numero richiesto. Gli altri 5 segmenti invece hanno ben 5 punti comuni al quadrato minore, quindi contribuiscono con soli 2 punti. Totale: $7 \cdot 2 + 2 \cdot 5 = 24$

12. Un quadrato di lato di misura 6 ha i lati paralleli agli assi e il centro nell'origine, un altro quadrato ha per vertici i punti medi del precedente. Quanti punti reticolo sono interni al quadrato maggiore ma non appartengono al minore? Quanti punti reticolo sono sul contorno del quadrato minore ma non su quello del maggiore?

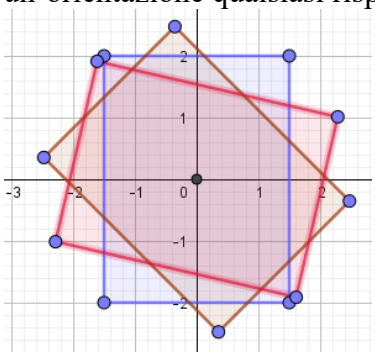
Ragionando come prima dobbiamo considerare solo 5 dei 7 segmenti paralleli all'asse x, di questi solo il primo e l'ultimo hanno punti (esattamente 2) al di fuori del quadrato piccolo. Quindi la risposta alla prima domanda è $2 \cdot 2 = 4$. Per quanto riguarda la seconda domanda, è facile capire che ogni lato del quadrato minore contiene 4 punti cotorno, solo due dei quali non stanno sul contorno del quadrato maggiore, quindi il



totale è 2 · 4 = 8

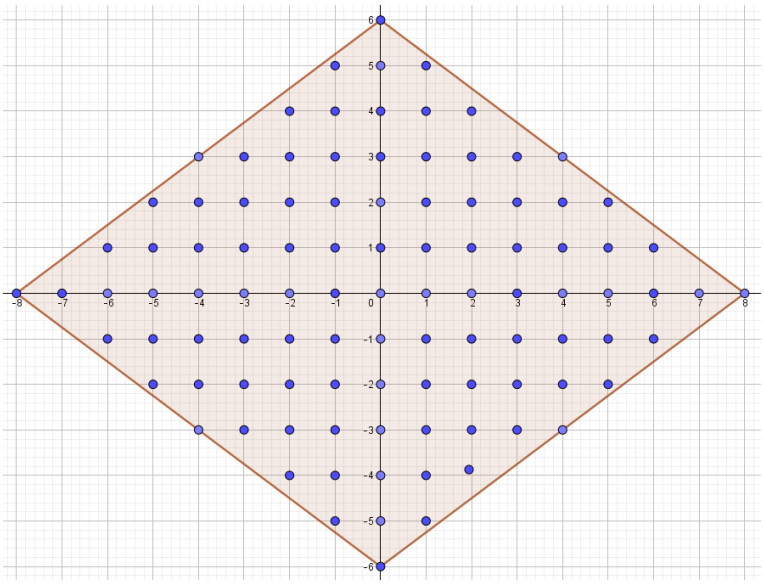
13. In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, quanti rettangoli con centro nell'origine, le cui dimensioni che misurano 3 e 4 unità, esistono?

Infiniti, dato che ciascun lato può avere un'orientazione qualsiasi rispetto agli assi.



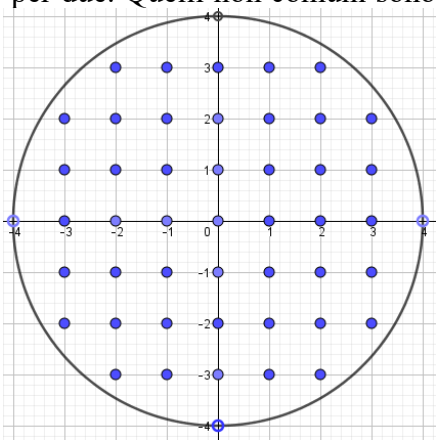
14. Un rombo di lato che misura 10 è rappresentato su un piano cartesiano ortogonale, ha il centro nell'origine, le diagonali sugli assi cartesiani e hanno misure intere; quanti punti reticolo vi sono al suo interno? Quanti sul suo contorno?

Se il lato misura 10 e le diagonali hanno misure intere, vuol dire che abbiamo a che fare con triangoli rettangoli del tipo 6, 8, 10. Cominciamo a stabilire una strategia per contare i punti. Sul contorno abbiamo sicuramente i 4 vertici, inoltre, tenendo conto di quanto detto sulle terne pitagoriche abbiamo solo i 4 punti (4; 3), (–4;3), (–4; –3) e (4; –3). Per capire meglio consideriamo il triangolo rettangolo determinato dal rombo e dal primo quadrante. In esso abbiamo diversi triangoli rettangoli simili, ottenuti tracciando le parallele ai cateti. Di questi però, con coordinate punti reticolo, vi è solo un triangolo con terna pitagorica (3; 4; 5) ed è quello che il punto (4; 3) come uno dei suoi vertici. In totale quindi abbiamo 4 + 4 = 8 punti reticolo sul contorno. Passiamo all'interno. Consideriamo la suddivisione del rombo mediante la diagonale maggiore. questa contiene ovviamente 7 + 7 + 1 = 15 punti. Se consideriamo adesso i segmento paralleli a questa diagonale, che hanno ordinate che vanno da 1 a 5, ci rendiamo conto che ogni volta "perdiamo" due punti rispetto al segmento precedente, proprio perché i punti che stanno su questi segmenti e hanno la stessa ascissa degli estremi del segmento precedente sono esterni. Inoltre quando l'ordinata è 3 dobbiamo togliere altri 2 punti perché stanno sul contorno. quindi nella parte superiore dell'interno del rombo abbiamo un totale di 13 + 11 + 7 + 5 + 3 = 36 punti. Altrettanti li abbiamo nella parte inferiore, quindi alla fine abbiamo 36 + 36 + 15 = 93 punti.



15. Quanti punti reticolo sono contenuti dentro il cerchio di centro l'origine e raggio 4? E quanti anche sulla circonferenza?

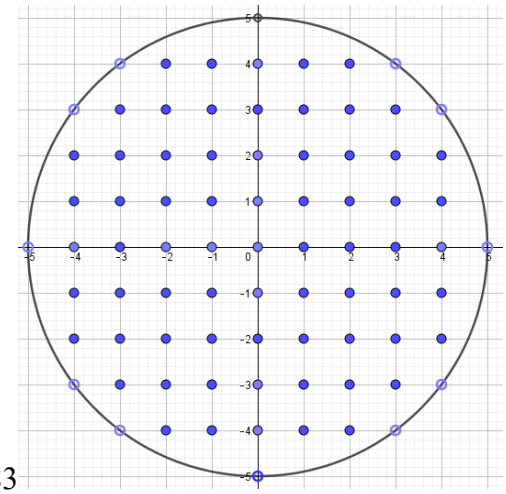
Consideriamo i rettangoli di lati 4 e 6 centrati sull'origine, con lati paralleli agli assi, ognuno di questi è contenuto all'interno del cerchio e hanno un totale di $(4 + 1) \cdot (6 + 1) = 35$ punti reticolo. Solo che ovviamente molti di questi sono comuni ai due rettangoli e non si contano per due. Quelli non comuni sono



$2 \cdot 5 = 10$ punti, che con i precedenti forniscono un totale di 45 punti. Considerando la circonferenza, anche in questo caso non è difficile capire che dobbiamo aggiungere solo i 4 punti che questa ha in comune con gli assi, per un totale quindi di 49 punti

16. Quanti punti reticolo sono contenuti dentro il cerchio di centro l'origine e raggio 5? E quanti anche sulla circonferenza?

Ragionando come prima dobbiamo considerare i rettangoli di lati 6 e 8 centrati sull'origine, con lati paralleli agli assi, ognuno di questi è contenuto all'interno del cerchio e hanno un totale di $(6 + 1) \cdot (8 + 1) = 63$ punti reticolo, a cui dobbiamo aggiungere altri $7 \cdot 2 = 14$ punti, per un totale di 77. Ma stavolta ci sono punti che stanno sulla circonferenza, in particolare sono quelli che formano la terna pitagorica (3, 4, 5) e quindi sono 8 punti da eliminare. Infine i punti interni sono $77 - 8 = 71$. Quelli sulla circonferenza sono $8 + 4 = 12$ e



quindi su tutti e due sono 83

Nei successivi quesiti siamo su un monitor il cui pixel più in alto a sinistra nel suo riferimento assoluto è* (0; 0); *il passo è l'incremento in termini relativi del valore rappresentato da un pixel quando si passa a uno a esso adiacente

17. Su un monitor stabiliamo un riferimento in cui (0; 0) coincide e il passo è 0,1, che pixel rappresenta il punto (3; 6)?

Dato che il passo è 0,1 avremo che il pixel (1, 1) rappresenta il punto (0,1; 0,1) e quindi (3; 6) è rappresentato dal pixel (30; 60)

18. Con riferimento al problema precedente, il pixel (150; 210) che punto rappresenta?

Con ragionamento analogo si ha: (15; 21)

19. Con riferimento al problema 17, se il passo è 0,25, che pixel rappresenta il punto (3; 6)?

Stavolta una unità equivale a 4 pixel, pertanto (3; 6) è associato al pixel ($3 \cdot 4 = 12$; $6 \cdot 4 = 24$)

20. Con riferimento al problema precedente, il pixel (150; 210) che punto rappresenta?

Con ragionamento analogo si ha: (150/4 = 37,5; 210/4 = 52,5)

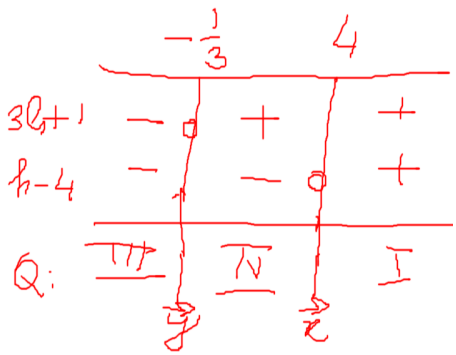
21. Su un monitor stabiliamo un riferimento in cui (0; 0) è rappresentato dal pixel (100; 50) e il passo è 0,1, che pixel rappresenta il punto (1; 2)?

Dobbiamo aggiungere $0{,}1 \cdot 10 = 10$, all'ascissa dell'origine e $0{,}1 \cdot 20 = 20$, all'ordinata, ottenendo: (110; 70)

22. Il pixel (24; 39) rappresenta il punto (2; 3), quanti pixel rappresentano l'unità?

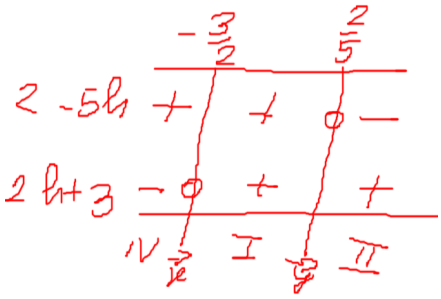
Deve essere 24/2 = 12 sull'asse x e 39/3 = 13 su quello y

23. Dato il generico punto $P \equiv (3h + 1;\ h - 4)$, stabilire per quali h esso appartiene rispettivamente a ciascuno dei quattro quadranti e quando agli assi coordinati. (Nelle risposte Q significa quadrante)

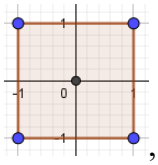
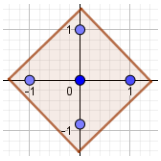


Il grafico seguente indica cosa accade, al variare di h

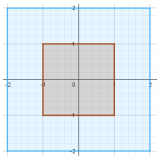
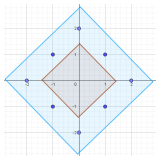
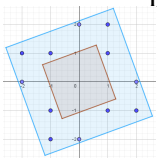
24. Dato il generico punto $P \equiv (2 - 5h;\ 2h + 3)$, stabilire per quali h esso appartiene rispettivamente a ciascuno dei quattro quadranti e quando agli assi coordinati.



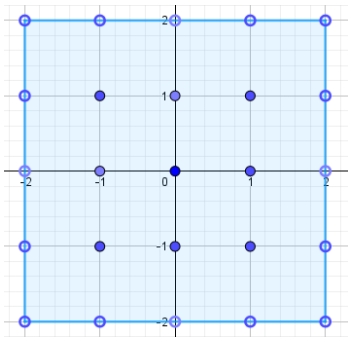
25. Un quadrato di lato che misura 2 è rappresentato su un piano cartesiano ortogonale e ha il centro nell'origine. a) Quanti punti reticolo vi sono al suo interno? b) Quanti sul suo contorno?

Le risposte dipendono da come è sistemato il quadrato, ovviamente all'interno possono essere 1 e sul contorno 4 nel caso in figura:  , ma se ruotiamo il quadrato può accadere quest'altra situazione  che ha 5 punti all'interno e 0 sul contorno.

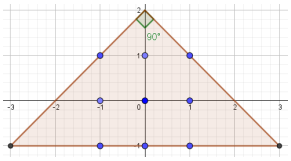
26. Due quadrati concentrici, di lati che misurano 2 e 4 sono rappresentati su un piano cartesiano ortogonale e hanno il centro nell'origine, quanti punti reticolo sono interni al quadrato maggiore ma non appartengono al minore?

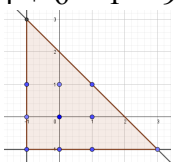
Anche in questo caso dipendono dalla posizione dei due quadrati. 0  8  o 12: 

27. Un quadrato di lato che misura n ($n \in \mathbb{N}$), è rappresentato su un piano cartesiano ortogonale, ha il centro nell'origine e i vertici che sono punti reticolo; quanti punti reticolo contiene, compresi quelli sui lati? Quanti sono al suo interno?

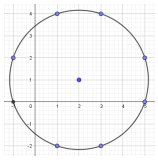
Consideriamo il caso in figura, in cui $n = 4$,  tutti punti interni e sul contorno sono $5^2 = 25$, mentre quelli interni sono 3^2. generalizzando otteniamo rispettivamente $(n + 1)^2$ e $(n - 1)^2$.

28. Un triangolo rettangolo è rappresentato sul piano cartesiano ortogonale in modo da contenere i 9 punti reticolo più vicini all'origine, origine compresa; qual è il minimo valore che può assumere la sua area?

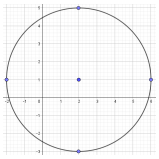
Tenuto conto del teorema di Pick, $A = i + p/2 - 1$, per avere il triangolo di area minima dobbiamo fare in modo di contenere il minor numero possibile di punti reticolo. Pertanto abbiamo questa possibilità  in cui l'ipotenusa contiene 7 punti e gli altri due cateti 4 a testa ma considerando

quelli comuni un totale di $p = 12$ mentre $i = 4$ e l'area misura $4 + 6 - 1 = 9$, che può anche calcolarsi più semplicemente (base per altezza diviso 2) $6 \cdot 3/2 = 9$. O questa  in cui $p = 12$ ma $i = 3$, quindi l'area $= 3 + 6 - 1 = 8$ (oppure $4 \cdot 4/2 = 8$). Questo è il caso minore.

29. Il punto *P* ha coordinate (1; 2), quanti punti reticolo distano $\sqrt{10}$ unità da *P*?

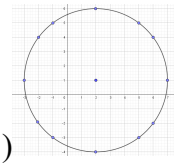
Il problema equivale a risolvere l'equazione $x^2 + y^2 = 10$ nell'insieme dei numeri interi relativi. Si ha facilmente che le uniche soluzioni sono (±1; ±3), (±3; ±1) , che conduce a 8 punti, come mostrato geometricamente, dato che sono i punti reticolo della circonferenza di centro P e raggio $\sqrt{10}$ 

30. Il punto *P* ha coordinate (1; 2), quanti punti reticolo distano 4 unità da *P*?



Come prima, stavolta le soluzioni sono (0; ±2) e (±2; 0)

31. Il punto *P* ha coordinate (1; 2), quanti punti reticolo distano 5 unità da *P*?



Come prima, stavolta le soluzioni sono (0; ±5), (±5; 0), (±3; ±4), (±4; ±3)

Geometria dei punti e delle figure poligonali

1. Determinare una formula semplificata per calcolare la distanza di un punto $P \equiv (x_P; y_P)$ dall'origine O degli assi.

Basta applicare la formula generale $\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$, sostituendo P ad A e $O \equiv (0; 0)$ a B, ottenendo: $\sqrt{x_P{}^2 + y_P{}^2}$

2. Determinare una formula semplificata per calcolare la distanza di un punto dell'asse *x*, $X \equiv (x_P; 0)$, da uno dell'asse *y*, $Y \equiv (0; y_P)$.

Basta applicare la formula generale, ottenendo $\sqrt{x_P{}^2 + y_P{}^2}$

3. Dimostrare il Teorema 5.

Dobbiamo provare che se $A \equiv (x_A; y)$, $B \equiv (x_B; y)$, allora $\overline{AB} = |x_A - x_B| = |x_B - x_A|$. Si ha: $\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y - y)^2} = \sqrt{(x_A - x_B)^2} = |x_A - x_B|$

4. Dimostrare il Teorema 6.

Dobbiamo provare che se $A \equiv (x; y_A)$, $B \equiv (x; y_B)$, allora $\overline{AB} = |y_A - y_B| = |y_B - y_A|$. Si ha: $\overline{AB} = \sqrt{(x - x)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(y_A - y_B)^2} = |y_A - y_B|$

Determinare la misura dei seguenti segmenti di cui forniamo le coordinate degli estremi

5. a) $A \equiv (0;-1)$, $B \equiv (-2;1)$; b) $C \equiv (4;-1)$, $D \equiv (-3;-5)$; c) $E \equiv (0; 3)$, $F \equiv (-1; 0)$

a) $\overline{AB} = \sqrt{(0+2)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

b) $\overline{CD} = \sqrt{(4+3)^2 + (-1+5)^2} = \sqrt{49+16} = \sqrt{65}$

c) $\overline{EF}=\sqrt{(0+1)^2+(3-0)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$

6. a) $G \equiv (3; -1)$, $H \equiv (-2; 4)$; b) $I \equiv (1/2; 1)$, $J \equiv (-2; 3/4)$; c) $K \equiv (-3/2; 0)$, $L \equiv (0; 3/4)$

a) $\overline{GH}=\sqrt{(3+2)^2+(-1-4)^2}=\sqrt{25+25}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

b) $\overline{IJ}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}+2\right)^2+\left(1-\frac{3}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{25}{4}+\frac{1}{16}}=\frac{\sqrt{101}}{4}$

c) $\overline{KL}=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}-0\right)^2+\left(0-\frac{3}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{45}}{4}=\frac{3\sqrt{5}}{4}$

7. a) $M \equiv (-3; 4/3)$, $N \equiv (-1; 1/3)$; b) $P \equiv (5/2; -1/2)$, $H \equiv (1/4; 3/2)$;c) $R\equiv\left(\sqrt{2};1\right)$, $S\equiv\left(-1;\sqrt{2}\right)$

a) $\overline{MN}=\sqrt{(-3+1)^2+\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$

b) $\overline{PQ}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{4}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{81}{16}+4}=\frac{\sqrt{145}}{4}$

c) $\overline{RS}=\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2+\left(1-\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{2+\cancel{2\sqrt{2}}+1+1-\cancel{2\sqrt{2}}+2}=\sqrt{6}$

8. a) $T\equiv\left(1-\sqrt{3};-2\right)$, $U\equiv\left(1+\sqrt{3};-\sqrt{2}\right)$**; b)** $V\equiv\left(\sqrt{3}/2;-1/3\right)$, $W\equiv\left(-1;-\sqrt{3}/4\right)$

a) $\overline{TU}=\sqrt{\left(1-\sqrt{3}-1-\sqrt{3}\right)^2+\left(-2+\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{12+4-4\sqrt{2}+2}=\sqrt{18-4\sqrt{2}}$

b) $\overline{VW}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)^2+\left(-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{3+4\sqrt{3}+4}{4}+\frac{16-24\sqrt{3}+27}{144}}=\frac{\sqrt{295+120\sqrt{3}}}{12}$

Calcolare la misura del perimetro dei seguenti triangoli date le coordinate dei vertici

9. a) $A \equiv (1; 2)$, $B \equiv (3; 0)$, $C \equiv (-2; 1)$; b) $D \equiv (3; -1)$, $E \equiv (0; 1)$, $F \equiv (-2; -3)$

a) $2p=\sqrt{(1-3)^2+(2-0)^2}+\sqrt{(1+2)^2+(2-1)^2}+\sqrt{(-2-3)^2+(1-0)^2}=\sqrt{4+4}+\sqrt{9+1}+\sqrt{25+1}=2\sqrt{2}+\sqrt{10}+\sqrt{26}$

b) $2p=\sqrt{(3-0)^2+(-1-1)^2}+\sqrt{(3+2)^2+(-1+3)^2}+\sqrt{(-2-0)^2+(-3-1)^2}=\sqrt{9+4}+\sqrt{25+4}+\sqrt{4+16}=\sqrt{13}+\sqrt{29}+2\sqrt{5}$

10. a) $G \equiv (4; 1)$, $H \equiv (2; -2)$, $I \equiv (-1/2; -1)$; b) $J \equiv (-1; 1/4)$, $K \equiv (-3/4; 1)$, $L \equiv (1;1)$

a) $2p=\sqrt{(4-2)^2+(1+2)^2}+\sqrt{\left(4+\frac{1}{2}\right)^2+(1+1)^2}+\sqrt{\left(2+\frac{1}{2}\right)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{4+9}+\sqrt{\frac{81}{4}+4}+\sqrt{\frac{25}{4}+1}=\sqrt{13}+\frac{\sqrt{97}}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}$

b) $2p=\sqrt{\left(-1+\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}-1\right)^2}+\sqrt{(-1-1)^2+\left(\frac{1}{4}-1\right)^2}+\sqrt{\left(-\frac{3}{4}-1\right)^2+(1-1)^2}=\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{9}{16}}+\sqrt{4+\frac{9}{16}}+\frac{7}{4}=\frac{\sqrt{10}}{4}+\frac{\sqrt{10}+\sqrt{73}+7}{4}$

11. a) $M \equiv (4/3; 1)$, $N \equiv (1; 1/3)$, $P \equiv (-1; 2/3)$; b) $Q \equiv (-5/2; -1)$, $R \equiv (1/2; -3)$, $S \equiv (2; 3/4)$

a) $2p=\sqrt{\left(\frac{4}{3}-1\right)^2+\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{4}{3}+1\right)^2+\left(1-\frac{2}{3}\right)^2}+\sqrt{(1+1)^2+\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{4}{9}}+\sqrt{\frac{49}{9}+\frac{1}{9}}+\sqrt{4+\frac{1}{9}}=\frac{\sqrt{5}+5\sqrt{2}+\sqrt{37}}{3}$

b) $2p=\sqrt{\left(-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+(-1+3)^2}+\sqrt{\left(-\frac{5}{2}-2\right)^2+\left(-1-\frac{3}{4}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}-2\right)^2+\left(-3-\frac{3}{4}\right)^2}=\sqrt{9+4}+\sqrt{\frac{81}{4}+\frac{49}{16}}+\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{225}{16}}=\sqrt{13}+\frac{\sqrt{373}}{4}+\frac{\sqrt{261}}{4}$

12. a) $T\equiv\left(\sqrt{3};-1\right)$, $U\equiv\left(-\sqrt{3};2\right)$, $V\equiv(3;-2)$; b) $W\equiv\left(\sqrt{3}/2;0\right), X\equiv\left(1;-1/4\right), Y\equiv\left(0;\sqrt{3}-1\right)$

a) $2p=\sqrt{\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\right)^2+(-1-2)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{3}-3\right)^2+(-1+2)^2}+\sqrt{\left(-\sqrt{3}-3\right)^2+(2+2)^2}=$ osserviamo che possiamo

$\sqrt{12+9}+\sqrt{3-6\sqrt{3}+9+1}+\sqrt{3+6\sqrt{3}+9+16}=\sqrt{21}+\sqrt{13-6\sqrt{3}}+\sqrt{28+6\sqrt{3}}$

scrivere $\sqrt{28+6\sqrt{3}}=\sqrt{27+6\sqrt{3}+1}=\sqrt{\left(3\sqrt{3}+1\right)^2}=3\sqrt{3}+1$

b) $2p=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)^2+\left(0+\frac{1}{4}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-0\right)^2+(0+1)^2}+\sqrt{(1-0)^2+\left(-\frac{1}{4}-\sqrt{3}+1\right)^2}=$

$\sqrt{\frac{3-4\sqrt{3}+4}{4}+\frac{1}{16}}+\sqrt{\frac{3}{4}+1}+\sqrt{1+\frac{9-24\sqrt{3}+9}{16}}=\frac{\sqrt{73-8\sqrt{3}}+\sqrt{29-16\sqrt{3}}+8-2\sqrt{3}}{4}$

Verificare che i seguenti triangoli di cui sono forniti i vertici sono isosceli (Nelle risposte ci sono le misure dei lati, il secondo numero si riferisce ai lati isometrici)

13. a) $A \equiv (-5; 1)$, $B \equiv (-2; -2)$, $C \equiv (0; 3)$; b) $D \equiv (-5; -3)$, $E \equiv (2; 0)$, $F \equiv (-6; 9)$

a) $\overline{BC}=\sqrt{(-2-0)^2+(-2-3)^2}=\sqrt{4+25}=\sqrt{29};\overline{AC}=\sqrt{(-5-0)^2+(1-3)^2}=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}$

b) $\overline{DF}=\sqrt{(-5+6)^2+(-3-9)^2}=\sqrt{1+144}=\sqrt{145};\overline{EF}=\sqrt{(2+6)^2+(0-9)^2}=\sqrt{64+81}=\sqrt{145}$

14. a) $G \equiv (2; -2)$, $H \equiv (-1; 4)$, $I \equiv (5; 1)$; b) $M \equiv (-1/3; 1/4)$, $N \equiv (2/3; 3/4)$, $P \equiv (5/2; -25/6)$

a) $\overline{GI}=\sqrt{(2-5)^2+(-2-1)^2}=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2};\overline{GH}=\sqrt{(2+1)^2+(4-1)^2}=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}$

b) $\overline{MP}=\sqrt{\left(-\frac{1}{3}-\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}+\frac{25}{6}\right)^2}=\sqrt{\frac{289}{36}+\frac{2809}{144}}=\frac{\sqrt{3965}}{12};\overline{NP}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{4}+\frac{25}{6}\right)^2}=\sqrt{\frac{121}{36}+\frac{3481}{144}}=\frac{\sqrt{3965}}{12}$

15. $J\equiv\left(\sqrt{2};1\right),\ K\equiv\left(2;-\sqrt{2}\right),\ L\equiv\left(-2;\frac{19-15\cdot\sqrt{2}}{2}\right)$

$\overline{JL}=\sqrt{\left(\sqrt{2}+2\right)^2+\left(1-\frac{19-15\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{2+4\sqrt{2}+4+\frac{289-510\sqrt{2}+450}{4}}=\frac{\sqrt{24+16\sqrt{2}+739-510\sqrt{2}}}{2}=\frac{\sqrt{763-494\sqrt{2}}}{2}$

$\overline{KL}=\sqrt{(2+2)^2+\left(-\sqrt{2}-\frac{19-15\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{4+\frac{338-494\sqrt{2}+361}{4}}=\frac{\sqrt{16+699-494\sqrt{2}}}{2}=\frac{\sqrt{763-494\sqrt{2}}}{2}$

Verificare che i seguenti triangoli di cui sono forniti i vertici sono rettangoli. (Suggerimento: verificare la validità del teorema di Pitagora)

16. a) $A \equiv (1; 2)$, $B \equiv (2; -1)$, $C \equiv (-2; 1)$; b) $D \equiv (-2; 3)$, $E \equiv (1; -1)$, $F \equiv (-3; 1)$

a) $\overline{AB}^2=(1-2)^2+(2+1)^2=10;\overline{BC}^2=(2+2)^2+(-1-1)^2=20;\overline{AC}^2=(1+2)^2+(2-1)^2=10;\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$

b) $\overline{DE}^2=(-2-1)^2+(3+1)^2=25;\overline{DF}^2=(-2+3)^2+(3-1)^2=5;\overline{EF}^2=(1+3)^2+(-1-1)^2=20;\overline{DF}^2+\overline{EF}^2=\overline{DE}^2$

17. $G\equiv\left(\sqrt{2};1\right),\ H\equiv\left(1-\sqrt{2};-1\right),\ I\equiv\left(-\sqrt{2};\ 5-\sqrt{2}\right)$

$\overline{GH}^2=\left(\sqrt{2}-1+\sqrt{2}\right)^2+(1+1)^2=13-4\sqrt{2};\overline{GI}^2=\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)^2+\left(1-5+\sqrt{2}\right)^2=26-8\sqrt{2};$

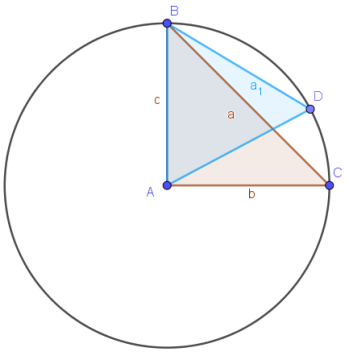
$\overline{HI}^2=\left(1-\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)^2+\left(-1-5+\sqrt{2}\right)^2=39-12\sqrt{2};\overline{GH}^2+\overline{GI}^2=\overline{HI}^2$

18. a) $J \equiv (1; 1)$, $K \equiv (-1/4; 3/4)$, $L \equiv (4/5; 2/5)$; b) $M \equiv (-7; 1)$, $N \equiv (2; 4)$, $P \equiv (-4; -2)$

a) $\overline{JK}^2=\left(1+\frac{1}{4}\right)^2+\left(1-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{13}{8};\overline{JL}^2=\left(1-\frac{4}{5}\right)^2+\left(1-\frac{2}{5}\right)^2=\frac{2}{5};\overline{KL}^2=\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{2}{5}-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{49}{40};\overline{JL}^2+\overline{KL}^2=\overline{JK}^2$

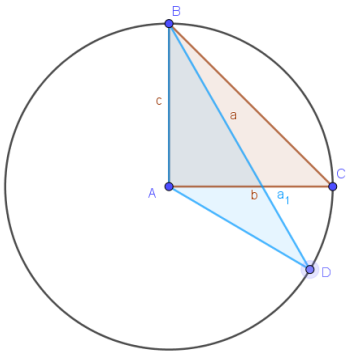
b) $\overline{MN}^2=(-7-2)^2+(1-4)^2=90;\overline{MP}^2=(-7+4)^2+(1+2)^2=12;\overline{NP}^2=(2+4)^2+(4+2)^2=72;\overline{MP}^2+\overline{NP}^2=\overline{MN}^2$

19. Determinare una relazione fra le misure dei lati di un triangolo acutangolo e non equilatero, con *a* la misura del lato maggiore, *b* e *c* le misure degli altri due lati.



In figura *ABC* è rettangolo di ipotenusa *a*, *ABD* è acutangolo con due lati isometrici ai cateti di *ABC*, ma ovviamente il terzo lato $a_1 < a$, pertanto $b^2 + c^2 = a^2 > a_1^2$

20. Determinare una relazione fra le misure dei lati di un triangolo ottusangolo, con *a* la misura del lato maggiore, *b* e *c* le misure degli altri due lati.



In figura *ABC* è rettangolo di ipotenusa *a*, *ABD* è ottusangolo con due lati isometrici ai cateti di *ABC*, ma ovviamente il terzo lato $a_1 > a$, pertanto $b^2 + c^2 = a^2 < a_1^2$

Tenuto conto dei risultati dei precedenti esercizi, stabilire quali fra i seguenti triangoli di cui sono forniti i vertici sono acutangoli (AC) e quali ottusangoli (OT)

21. a) $A \equiv (-2; 0)$, $B \equiv (4; 1)$, $C \equiv (3; -2)$; b) $D \equiv (5; -6)$, $E \equiv (0; 1)$, $F \equiv (-5; 3)$

a) $\overline{AB}^2 = (-2-4)^2 + (0-1)^2 = 37; \overline{BC}^2 = (4-3)^2 + (1+2)^2 = 10; \overline{AC}^2 = (-2-3)^2 + (0+2)^2 = 29; \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 > \overline{AB}^2$, quindi acutangolo;

b) $\overline{DE}^2 = (5-0)^2 + (-6-1)^2 = 74; \overline{DF}^2 = (5+5)^2 + (-6-3)^2 = 181; \overline{EF}^2 = (0+5)^2 + (1-3)^2 = 29; \overline{DE}^2 + \overline{EF}^2 < \overline{DF}^2$, quindi ottusangolo

22. a) $G \equiv (-3; 2)$, $H \equiv (-1; 1)$, $I \equiv (3; -1)$; b) $J \equiv (-11/5; -2/5)$, $K \equiv (3/2; 1)$, $L \equiv (5/4; -3/5)$

a) $\overline{GH}^2 = (-3+1)^2 + (2-1)^2 = 5; \overline{GI}^2 = (-3-3)^2 + (2+1)^2 = 45; \overline{HI}^2 = (-1-3)^2 + (1+1)^2 = 20; \overline{HI} + \overline{GI} < \overline{GH}$, quindi il triangolo non esiste, i punti sono allineati;

b) $\overline{JK}^2 = \left(-\frac{11}{5} - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{2}{5} - 1\right)^2 = \frac{313}{20}; \overline{JL}^2 = \left(-\frac{11}{5} - \frac{5}{4}\right)^2 + \left(-\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{4777}{400}; \overline{KL}^2 = \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{4}\right)^2 + \left(1 + \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{1049}{400}; \overline{JL}^2 + \overline{KL}^2 > \overline{JK}^2$, quindi ottusangolo

23. $M \equiv \left(\sqrt{3}; -1\right)$, $N \equiv \left(3 - \sqrt{3}; 0\right)$, $P \equiv \left(2 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3}\right)$

$\overline{MN}^2 = \left(\sqrt{3} - 3 + \sqrt{3}\right)^2 + (-1-0)^2 = 22 - 12\sqrt{3}; \overline{MP} = \left(\sqrt{3} - 2 + \sqrt{3}\right)^2 + \left(-1 - 1 - \sqrt{3}\right)^2 = 23 - 4\sqrt{3};$

$\overline{NP} = \left(3 - \sqrt{3} - 2 + \sqrt{3}\right)^2 + \left(-1 - 1 - \sqrt{3}\right)^2 = 2\sqrt{3} + 5; \overline{MP}^2 + \overline{NP}^2 < \overline{MN}^2$, quindi ottusangolo [

Verificare che i seguenti poligoni, di cui sono forniti i vertici, sono equilateri (Nelle risposte la misura comune dei lati)

24. $A \equiv (-3; -2)$, $B \equiv (2; 1)$, $C \equiv \left(\left(3 \cdot \sqrt{3} - 1\right)/2; -\left(1 + 5 \cdot \sqrt{3}\right)/2\right)$

$\overline{AB}=\sqrt{(-3-2)^2+(-2-1)^2}=\sqrt{34};\overline{BC}=\sqrt{\left(2-\frac{3\sqrt{3}-1}{2}\right)^2+\left(1+\frac{1+5\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{5-3\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3+5\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{34};\left[\sqrt{34}\right]$

$\overline{AC}=\sqrt{\left(-3-\frac{3\sqrt{3}-1}{2}\right)^2+\left(-2+\frac{1+5\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{-5-3\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{-3+5\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{34}$

25. $\boldsymbol{D\equiv(-4;-2)}$, $E\equiv\left(-2\cdot\sqrt{3}-3/2;-5\cdot\sqrt{3}/2\right)$, $\boldsymbol{F\equiv(1;2)}$, $G\equiv\left(-2\cdot\sqrt{3}-3/2;5\cdot\sqrt{3}/2\right)$

$\overline{DE}=\sqrt{\left(-4+\frac{2\sqrt{3}+3}{2}\right)^2+\left(-2+\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{-5+2\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{-4+5\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{41};\overline{EF}=\sqrt{\left(-\frac{2\sqrt{3}+3}{2}-1\right)^2+\left(-\frac{5\sqrt{3}}{2}-2\right)^2}=\sqrt{41};$

$\overline{FG}=\sqrt{\left(1+\frac{3+2\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(2-\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{41};\overline{GD}=\sqrt{\left(-\frac{3+2\sqrt{3}}{2}+4\right)^2+\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}+2\right)^2}=\sqrt{41}$

26. $\boldsymbol{H\equiv(4;3)}$, $I\equiv\left(2+3\cdot\sqrt{3}/2;3/2-2\cdot\sqrt{3}\right)$, $J\equiv\left(-2+3\cdot\sqrt{3}/2;-3/2-2\cdot\sqrt{3}\right)$, $\boldsymbol{K\equiv(-4;-3)}$,

$L\equiv\left(-2-3\cdot\sqrt{3}/2;2\cdot\sqrt{3}-3/2\right)$, $M\equiv\left(2-3\cdot\sqrt{3}/2;3/2+2\cdot\sqrt{3}\right)$

$\overline{HI}=\sqrt{\left(4-2-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(3+2\sqrt{3}-\frac{3}{2}\right)^2}=5;\overline{IJ}=\sqrt{\left(2+\frac{3\sqrt{3}}{2}+2-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}-2\sqrt{3}+\frac{3}{2}+2\sqrt{3}\right)^2}=5;$

$\overline{JK}=\sqrt{\left(-2+\frac{3\sqrt{3}}{2}+4\right)^2+\left(-\frac{3}{2}-2\sqrt{3}+3\right)^2}=5;\overline{KL}=\sqrt{\left(-4+2+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-3-2\sqrt{3}+\frac{3}{2}\right)^2}=5;$

$\overline{LM}=\sqrt{\left(-2-\frac{3\sqrt{3}}{2}-2+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(2\sqrt{3}-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}-2\sqrt{3}\right)^2}=5;\overline{MJ}=\sqrt{\left(2-\frac{3\sqrt{3}}{2}-4\right)^2+\left(\frac{3}{2}+2\sqrt{3}-3\right)^2}=5$

Di seguito sono fornite le coordinate di un estremo di un segmento e una coordinata dell'altro; determinare il valore della coordinata incognita affinché il segmento abbia la lunghezza d accanto indicata.

27. **a)** $\boldsymbol{A\equiv(x;2)}$, $\boldsymbol{B\equiv(-3;4)}$, $\boldsymbol{d=2}$; **b)** $\boldsymbol{C\equiv(3;y)}$, $\boldsymbol{D\equiv(-1;-2)}$, $\boldsymbol{d=4}$

a) $(x+3)^2+(2-4)^2=2^2\Rightarrow(x+3)^2=0\Rightarrow x=-3;$

b) $(3+1)^2+(y+2)^2=4^2\Rightarrow(y+2)^2=0\Rightarrow y=-2$

28. **a)** $\boldsymbol{A\equiv(2x+1;1)}$, $\boldsymbol{B\equiv(-1;0)}$, $\boldsymbol{d=3}$; **b)** $\boldsymbol{C\equiv(1;y-2)}$, $\boldsymbol{D\equiv(-2;1)}$, $\boldsymbol{d=2}$

a) $(2x+1+1)^2+(1-0)^2=3^2\Rightarrow(2x+2)^2=8\Rightarrow(x+1)^2=2\Rightarrow x=-1\pm\sqrt{2}$

b) $(1+2)^2+(y-2-1)^2=2^2\Rightarrow(y-3)^2=-5\Rightarrow\varnothing$

29. a) $A\equiv(x;x+1)$, $B\equiv(-2;1)$, $d=3$; b) $C\equiv(2;y+1)$, $D\equiv(1;2y)$, $d=3$

a) $(x+2)^2+(x+1-1)^2=3^2\Rightarrow(x+2)^2+x^2=9\Rightarrow 2x^2+4x-5=0\Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{14}}{2}$

b) $(2-1)^2+(y+1-2y)^2=3^2\Rightarrow(1-y)^2=8\Rightarrow y=-2\Rightarrow y=1\pm2\sqrt{2}$

30. **a)** $\boldsymbol{A\equiv(0;4)}$, $\boldsymbol{B\equiv(-4;y)}$, $d=\sqrt{5}$; **b)** $\boldsymbol{C\equiv(-1/2;5)}$, $\boldsymbol{D\equiv(x;4/5)}$, $\boldsymbol{d=13/3}$

a) $(0+4)^2+(4-y)^2=5\Rightarrow(4-y)^2=-11\Rightarrow\varnothing;$

b) $(x+1/2)^2+(4/5-5)^2=(13/3)^2\Rightarrow(x+1/2)^2=256/225\Rightarrow x+1/2=\pm16/15\Rightarrow x=-47/30\vee x=17/30$

31. **a)** $\boldsymbol{E\equiv(1;-3)}$, $\boldsymbol{G\equiv(x;-4)}$, $\boldsymbol{d=3}$; **b)** $\boldsymbol{G\equiv(7/4;-3)}$, $\boldsymbol{B\equiv(-1/5;y)}$, $d=\sqrt{7}$

a) $(1-x)^2+(-3+4)^2=3^2\Rightarrow(1-x)^2=8\Rightarrow x=1\pm2\cdot\sqrt{2}$;

b) $(7/4+1/5)^2+(-3-y)^2=7\Rightarrow(-3-y)^2=1279/400\Rightarrow y=\frac{-60\pm\sqrt{1279}}{20}$

32. **a)** $I\equiv\left(\sqrt{11};-1\right)$, $J\equiv\left(x;1+\sqrt{3}\right)$, $\boldsymbol{d=4}$; **b)** $K\equiv\left(1;\sqrt{2}\right)$, $J\equiv\left(2-x;-1\right)$, $d=\sqrt{2}$

a) $\left(\sqrt{11}-x\right)^2+\left(-1-1-\sqrt{3}\right)^2=4^2\Rightarrow\left(\sqrt{11}-x\right)^2=9-4\sqrt{3}\Rightarrow x=\sqrt{11}\pm\sqrt{9-4\cdot\sqrt{3}}$;

b) $(1-2+x)^2+\left(\sqrt{2}+1\right)^2=2 \Rightarrow (x-1)^2=-2\sqrt{2}-1 \Rightarrow \varnothing$

33. Interpretare geometricamente il generico problema precedente.

Da un punto di vista geometrico cerchiamo le intersezioni della circonferenza di centro il punto dato e raggio pari alla distanza d e la retta che contiene tutte le ascisse o le ordinate uguali ai dati

34. Con riferimento ai quesiti privi di soluzioni reali degli esercizi precedenti, fornire una giustificazione geometrica e una giustificazione algebrica del perché ciò accade.

Le circonferenze di centro il punto dato e raggio d sono esterne alle rette parallele a uno degli assi passanti per l'ascissa o l'ordinata data. Algebricamente otteniamo equazioni di secondo grado a discriminante negativo

35. Dimostrare che i triangoli di vertici $A \equiv (-1; 3)$, $B \equiv (3; -1)$, $C \equiv (c; c)$, con $c \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ sono tutti isosceli sulla base AB. Spiegare perché ciò accade.

$\overline{CA}=\sqrt{(-1-c)^2+(3-c)^2}=\sqrt{2c^2-4c+10}; \overline{CB}=\sqrt{(3-c)^2+(-1-c)^2}=\sqrt{2c^2-4c+10}$, cioè il punto C appartiene all'asse di AB, qualunque sia $c \in \mathbb{R}$

Con i dati degli esercizi seguenti, determinare tutti i punti C del piano, per i quali il triangolo ABC risulti isoscele di volta in volta sulla base*: a) *BC*; b) *AB*; c) *AC

36. $A \equiv (1; 2)$, $B \equiv (-3; 4)$, $C \equiv (x; -1)$

a) $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2 \Rightarrow (1+3)^2+(2-4)^2=(1-x)^2+(2+1)^2 \Rightarrow (1-x)^2=16+4-9 \Rightarrow 1-x=\pm\sqrt{11} \Rightarrow x=1\pm\sqrt{11}$

b) $\overline{BC}^2=\overline{AC}^2 \Rightarrow (-3-x)^2+(4+1)^2=(1-x)^2+(2+1)^2 \Rightarrow \cancel{9}+6x+\cancel{x^2}+25=1-2x+\cancel{x^2}+\cancel{9} \Rightarrow 8x=-24 \Rightarrow x=-3$

c) $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2 \Rightarrow (1+3)^2+(2-4)^2=(-3-x)^2+(4+1)^2 \Rightarrow (-3-x)^2=-25+9+4 \Rightarrow (-3-x)^2=-12 \Rightarrow \varnothing$

37. $A \equiv (3; 5)$, $B \equiv (-1; -3)$, $C \equiv (-2; y)$

a) $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2 \Rightarrow (3+1)^2+(5+3)^2=(3+2)^2+(5-y)^2 \Rightarrow (5-y)^2=16+64-25 \Rightarrow 5-y=\pm\sqrt{55} \Rightarrow x=5\pm\sqrt{55}$

b) $\overline{BC}^2=\overline{AC}^2 \Rightarrow (-1+2)^2+(-3-y)^2=(3+2)^2+(5-y)^2 \Rightarrow 1+9+6y+\cancel{y^2}=25+25-10y+\cancel{y^2} \Rightarrow 16y=40 \Rightarrow y=5/2$

c) $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2 \Rightarrow (3+1)^2+(5+3)^2=(-1+2)^2+(-3-y)^2 \Rightarrow (-3-y)^2=16+64-1 \Rightarrow (-3-y)^2=79 \Rightarrow y=-3\pm\sqrt{79}$

38. $A \equiv (1/2; 1)$, $B \equiv (-2/3; 0)$, $C \equiv (x; -3/4)$

a) $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2 \Rightarrow (1/2+2/3)^2+(1-0)^2=(1/2-x)^2+(1+3/4)^2 \Rightarrow (1/2-x)^2=49/36+1-49/16 \Rightarrow (1/2-x)^2=-101/144 \Rightarrow \varnothing$

b) $\overline{BC}^2=\overline{AC}^2 \Rightarrow (-2/3-x)^2+(0+3/4)^2=(1/2-x)^2+(1+3/4)^2 \Rightarrow 4/9+4/3\,x+\cancel{x^2}+9/16=1/4-x+\cancel{x^2}+49/16 \Rightarrow 7/3x=83/36 \Rightarrow x=83/84$

c) $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2 \Rightarrow (1/2+2/3)^2+(1-0)^2=(-2/3-x)^2+(0+3/4)^2 \Rightarrow (-2/3-x)^2=49/36+1-9/16 \Rightarrow (-2/3-x)^2=259/144 \Rightarrow x=\dfrac{-8\pm\sqrt{259}}{12}$

39. $A \equiv (1/3; -1/3)$, $B \equiv (1/4; -3)$, $C \equiv (-3/2; y)$

a) $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2 \Rightarrow (1/3-1/4)^2+(-1/3+3)^2=(1/3+3/2)^2+(-1/3-y)^2 \Rightarrow (-1/3-y)^2=1/144+64/9-121/36 \Rightarrow (-1/3-y)^2=541/144 \Rightarrow y=\dfrac{-4\pm\sqrt{541}}{12}$

b) $\overline{BC}^2=\overline{AC}^2 \Rightarrow (1/4+3/2)^2+(-3-y)^2=(1/3+3/2)^2+(-1/3-y)^2 \Rightarrow 49/16+9+6y+\cancel{y^2}=121/36+1/9+2/3y+\cancel{y^2} \Rightarrow 16/3y=-1237/144 \Rightarrow y=-1237/768$

c) $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2 \Rightarrow (1/3-1/4)^2+(-1/3+3)^2=(1/4+3/2)^2+(-3-y)^2 \Rightarrow (-3-y)^2=1/144+64/9-49/16 \Rightarrow$

$(-3-y)^2 = 73/18 \Rightarrow y_{1,2} = \dfrac{-18 \pm \sqrt{146}}{6}$

40. $A \equiv \left(\sqrt{2};2\right),\ \ B \equiv \left(-1;2+\sqrt{2}\right),\ \ C \equiv \left(x;1-\sqrt{2}\right)$

a) $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 \Rightarrow \cancel{\left(\sqrt{2}+1\right)^2} + \left(2-2-\sqrt{2}\right)^2 = \left(\sqrt{2}-x\right)^2 + \cancel{\left(2-1+\sqrt{2}\right)^2} \Rightarrow \left(\sqrt{2}-x\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow x = 0 \vee x = 2\sqrt{2}$

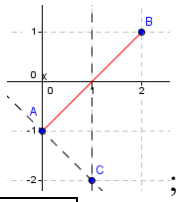
b) $\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 \Rightarrow (-1-x)^2 + \left(2+\sqrt{2}-1+\sqrt{2}\right)^2 = \left(\sqrt{2}-x\right)^2 + \left(2-1+\sqrt{2}\right) \Rightarrow \cancel{1}+2x+\cancel{x^2}+\cancel{1}+4\sqrt{2}+8 = \cancel{2}-2\sqrt{2}x+\cancel{x^2}+1+2\sqrt{2}+2 \Rightarrow$

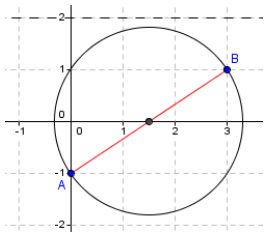
$\Rightarrow \left(2+2\sqrt{2}\right)x = -5-2\sqrt{2} \Rightarrow x = \dfrac{1-3\sqrt{2}}{2}$

c) $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 \Rightarrow \left(\sqrt{2}+1\right)^2 + \left(\cancel{2-2}-\sqrt{2}\right)^2 = (-1-x)^2 + \left(2+\sqrt{2}-1+\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow (-1-x)^2 = 2+2\sqrt{2}+\cancel{1}+2\cancel{-1}-4\sqrt{2}-8 \Rightarrow$

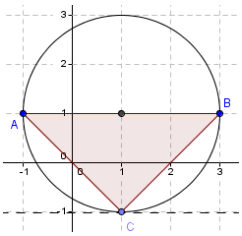
$\Rightarrow (-1-x)^2 = -2\sqrt{2}-6 \Rightarrow \varnothing$

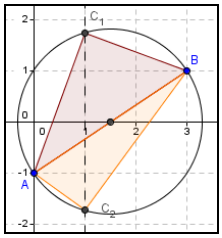
41. Interpretare geometricamente la determinazione del terzo vertice *C* di un triangolo rettangolo di cui sono noti due vertici *A* e *B* e una coordinata di *C* in tutti i casi possibili. Quante sono le soluzioni in ognuno dei tre casi?





Una soluzione se AB è cateto ; da zero a due soluzioni se AB è l'ipotenusa,





in questo caso infatti AB è diametro di una circonferenza che contiene il terzo vertice, allora la circonferenza può contenere 0, 1 o 2 punti con la fissata ascissa o ordinata

Con i dati degli esercizi seguenti, determinare tutti i punti C del piano per i quali il triangolo ABC risulti rettangolo di volta in volta sull'ipotenusa*: a) *BC*; b) *AB*; c) *AC

42. $A \equiv (1; -1)$, $B \equiv (2; -3)$, $C \equiv (x; 1)$

a) $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 \Rightarrow (1-2)^2 + (-1+3)^2 + (1-x)^2 + (-1-1)^2 = (2-x)^2 + (-3-1)^2 \Rightarrow 1+4+1-2x+\cancel{x^2}+\cancel{4} = \cancel{4}-4x+\cancel{x^2}+16 \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5$

b) $\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 \Rightarrow (2-x)^2 + (-3-1)^2 + (1-x)^2 + (-1-1)^2 = (1-2)^2 + (-1+3)^2 \Rightarrow 4-4x+x^2+16+\cancel{1}-2x+x^2+\cancel{4} = \cancel{1}+\cancel{4} \Rightarrow 2x^2-6x+21 = 0 \Rightarrow \Delta = 36-168 < 0 \Rightarrow \varnothing$

c) $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 \Rightarrow (1-2)^2 + (-1+3)^2 + (2-x)^2 + (-3-1)^2 = (1-x)^2 + (-1-1)^2 \Rightarrow 1+4+\cancel{4}-4x+\cancel{x^2}+16 = 1-2x+\cancel{x^2}+\cancel{4} \Rightarrow 2x = 20 \Rightarrow x = 10$

43. $A \equiv (1/2; -3)$, $B \equiv (0; 1/4)$, $C \equiv (-1/2; y)$

a) $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 \Rightarrow (1/2-0)^2 + (-3-1/4)^2 + (1/2+1/2)^2 + (-3-y)^2 = (0+1/2)^2 + (1/4-y)^2 \Rightarrow \cancel{1/4} + 169/16 + 1 + 9 + 6y + \cancel{y^2} = \cancel{1/4} + 1/16 - 1/2y + \cancel{y^2} \Rightarrow 13/2y = -41/2 \Rightarrow y = -41/13$

b) $\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 \Rightarrow (0+1/2)^2 + (1/4-y)^2 + (1/2+1/2)^2 + (-3-y)^2 = (1/2-0)^2 + (-3-1/4)^2 \Rightarrow 1/4 + 1/16 - 1/2y + y^2 + 1 + 9 + 6y + y^2 = 1/4 + 169/16 \Rightarrow 2y^2 + 11/2y - 1/2 = 0 \Rightarrow y_{1,2} = \dfrac{-11 \pm \sqrt{137}}{8}$

c) $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 \Rightarrow (1/2-0)^2 + (-3-1/4)^2 + (0+1/2)^2 + (1/4-y)^2 = (1/2+1/2)^2 + (-3-y)^2 \Rightarrow 1/4 + 169/16 + 1/4 + 1/16 - 1/2y + \cancel{y^2} = 1 + 9 + 6y + \cancel{y^2} \Rightarrow 13/2y = 9/8 \Rightarrow y = 9/52$

44. $A \equiv (-1; 3/2)$, $B \equiv (2/3; 1/2)$, $C \equiv (x; -2/3)$

a) $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 \Rightarrow (-1-2/3)^2 + (3/2-1/2)^2 + (-1-x)^2 + (3/2+2/3)^2 = (2/3-x)^2 + (1/2+2/3)^2 \Rightarrow$

$25/9 + 1 + 1 + 2x + \cancel{x^2} + 169/36 = 4/9 - 4/3x + \cancel{x^2} + 49/36 \Rightarrow 10/3x = -23/3 \Rightarrow x = -23/10$

b) $\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 \Rightarrow (2/3 - x)^2 + (1/2 + 2/3)^2 + (-1 - x)^2 + (3/2 + 2/3)^2 = (-1 - 2/3)^2 + (3/2 - 1/2)^2 \Rightarrow$
$4/9 - 4/3x + x^2 + 49/36 + \cancel{1} + 2x + x^2 + 169/36 = 25/9 + \cancel{1} \Rightarrow 2x^2 + 2/3x + 67/18 = 0 \Rightarrow \Delta = 4/9 - 268/9 < 0$
$\Rightarrow \varnothing$

c) $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 \Rightarrow (-1 - 2/3)^2 + (3/2 - 1/2)^2 + (2/3 - x)^2 + (1/2 + 2/3)^2 = (-1 - x)^2 + (3/2 + 2/3)^2 \Rightarrow$
$25/9 + 1 + 4/9 - 4/3x + \cancel{x^2} + 49/36 = 1 + 2x + \cancel{x^2} + 169/36 \Rightarrow 10/3x = -1/9 \Rightarrow x = -1/30$

45. $A \equiv \left(\sqrt{2};0\right),\ B \equiv \left(1;1+\sqrt{2}\right),\ C \equiv \left(1-\sqrt{2};y\right)$

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 \Rightarrow \left(\sqrt{2}-1\right)^2 + \left(0-1-\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}-1+\sqrt{2}\right)^2 + \left(0-y\right)^2 =$$

a) $$= \left(1-1+\sqrt{2}\right)^2 + \left(1+\sqrt{2}-y\right)^2 \Rightarrow \cancel{2} \cancel{-2\sqrt{2}} \cancel{+1} + 1 \cancel{+2\sqrt{2}} + \cancel{2} + 8 - 4\sqrt{2} + 1 + \cancel{y^2} =$$

$$= \cancel{2} + \cancel{1} + \cancel{2} + \cancel{y^2} + 2\sqrt{2} - 2y - 2\sqrt{2}y \Rightarrow \left(2+2\sqrt{2}\right)y = 6\sqrt{2} - 10 \Rightarrow y = \frac{3\sqrt{2}-5}{1+\sqrt{2}} \Rightarrow y = 11 - 8\sqrt{2}$$

$$\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 \Rightarrow \left(1-1+\sqrt{2}\right)^2 + \left(1+\sqrt{2}-y\right)^2 + \left(\sqrt{2}-1+\sqrt{2}\right)^2 + \left(0-y\right)^2 =$$

b) $$= \left(\sqrt{2}-1\right)^2 + \left(0-1-\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow \cancel{2} + \cancel{1} + \cancel{2} + y^2 + 2\sqrt{2} - 2y - 2\sqrt{2}y + 8 - 4\sqrt{2} + 1 + y^2 =$$

$$= \cancel{2} \cancel{-2\sqrt{2}} \cancel{+1} + 1 \cancel{+2\sqrt{2}} + \cancel{2} \Rightarrow y^2 - 4\sqrt{2}y + 9 = 0 \Rightarrow \Delta = 32 - 36 < 0 \Rightarrow \varnothing$$

c)

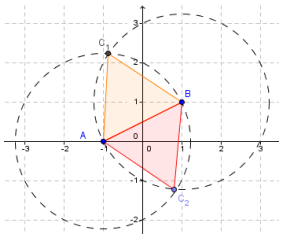
$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 \Rightarrow \left(\sqrt{2}-1\right)^2 + \left(0-1-\sqrt{2}\right)^2 + \left(1-1+\sqrt{2}\right)^2 + \left(1+\sqrt{2}-y\right)^2 =$$

$$= \left(\sqrt{2}-1+\sqrt{2}\right)^2 + \left(0-y\right)^2 \Rightarrow 2 \cancel{-2\sqrt{2}} + 1 + 1 \cancel{+2\sqrt{2}} + 2 + 2 + 1 + 2 + \cancel{y^2} + 2\sqrt{2} - 2y - 2\sqrt{2}y =$$

$$= 8 - 4\sqrt{2} + 1 + \cancel{y^2} \Rightarrow \left(2+2\sqrt{2}\right)y = 6\sqrt{2} + 2 \Rightarrow y = \frac{3\sqrt{2}+2}{1+\sqrt{2}} \Rightarrow y = 5 - 2\sqrt{2}$$

$\left[\text{a) } y = 11 - 8\cdot\sqrt{2};\ \text{b) } \varnothing;\ \text{c) } y = 5 - 2\cdot\sqrt{2}\right]$

46. Trovare il terzo vertice di un triangolo equilatero di cui si conoscono le coordinate di due vertici. Quante soluzioni ha il problema?



Due, si consideri la figura

Con i dati degli esercizi seguenti, determinare tutti i punti C ≡ (x; y) del piano per i quali il triangolo ABC risulti equilatero

47. ***A* ≡ (0; 3), *B* ≡ (–2; 1)**

$$\begin{cases} \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 \\ \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (0+2)^2 + (3-1)^2 = (0-x)^2 + (3-y)^2 \\ (0+2)^2 + (3-1)^2 = (-2-x)^2 + (1-y)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 = x^2 + 9 - 6y + y^2 \\ 8 = 4 + 4x + x^2 + 1 - 2y + y^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 6y - 1 \\ 4x + 6y - 1 - 3 - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 6y - 1 \\ 4x + 4y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-y)^2 + y^2 - 6y + 1 = 0 \\ x = 1 - y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2y^2 - 8y + 2 = 0 \\ x = 1 - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \pm \sqrt{3} \\ x = 1 - 2 \mp \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \pm \sqrt{3} \\ x = -1 \mp \sqrt{3} \end{cases}$$

48. ***A* ≡ (1/2; –1), *B* ≡ (0; 2/3)**

$$\begin{cases}\overline{AB}^2=\overline{AC}^2\\ \overline{AB}^2=\overline{BC}^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(1/2-0)^2+(-1-2/3)^2=(1/2-x)^2+(-1-y)^2\\ (1/2-0)^2+(-1-2/3)^2=(0-x)^2+(2/3-y)^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}109/36=1/4-x+x^2+1+2y+y^2\\ 109/36=x^2+4/9-4/3y+y^2\end{cases}\Rightarrow$$

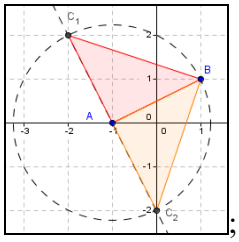
$$\Rightarrow\begin{cases}109/36=5/4-x+4/3y+31/12+2y\\ x^2+y^2=4/3y+31/12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=10/3y+29/36\\ (10/3y+29/36)^2+y^2=4/3y+31/12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3\pm10\cdot\sqrt{3}}{12}\\ y=\dfrac{-2\pm3\cdot\sqrt{3}}{12}\end{cases}\Rightarrow$$

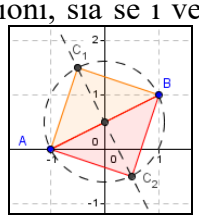
49. $A\equiv\left(\sqrt{3};0\right),\ B\equiv\left(0;2\cdot\sqrt{3}\right)$

$$\begin{cases}\overline{AB}^2=\overline{AC}^2\\ \overline{AB}^2=\overline{BC}^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left(\sqrt{3}-0\right)^2+\left(0-2\sqrt{3}\right)^2=\left(\sqrt{3}-x\right)^2+(0-y)^2\\ \left(\sqrt{3}-0\right)^2+\left(0-2\sqrt{3}\right)^2=(0-x)^2+\left(2\sqrt{3}-y\right)^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}15=3-2\sqrt{3}x+x^2+y^2\\ 15=x^2+12-4\sqrt{3}y+y^2\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2=12+2\sqrt{3}x\\ 12+2\sqrt{3}x-3-4\sqrt{3}y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2=12+2\sqrt{3}x\\ y=x/2+3\sqrt{3}/4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4x^2-4\sqrt{3}x-33=0\\ y=x/2+3\sqrt{3}/4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{3}\pm6}{2}\\ y=\dfrac{2\cdot\sqrt{3}\pm3}{2}\end{cases}$$

50. Dimostrare che il problema di determinare il terzo vertice di un triangolo rettangolo e isoscele ha sempre un numero finito di soluzioni.

Ci sono sempre due soluzioni, sia se i vertici sono di uno dei due cateti: 

; sia se i vertici sono dell'ipotenusa: 

Con i dati degli esercizi seguenti, determinare tutti i punti C ≡ (x; y) del piano per i quali il triangolo ABC risulti isoscele e rettangolo di volta in volta sull'ipotenusa*: a) *BC*; b) *AB*; c) *AC

51. ***A* ≡ (–2; –1), *B* ≡ (3; –2)**

$$\begin{cases}\overline{AB}^2=\overline{AC}^2\\ 2\cdot\overline{AB}^2=\overline{BC}^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(-2-3)^2+(-1+2)^2=(-2-x)^2+(-1-y)^2\\ 2\cdot\left[(-2-3)^2+(-1+2)^2\right]^2=(3-x)^2+(-2-y)^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}26=4+4x+x^2+1+2y+y^2\\ 52=9-6x+x^2+4+4y+y^2\end{cases}\Rightarrow$$

a) $$\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2=21-4x-2y\\ 21-4x-2y-6x+4y-39=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2=21-4x-2y\\ x=(y-9)/5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(y-9)^2/25+y^2-21+4(y-9)/5+2y=0\\ x=(y-9)/5=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(y-9)^2/25+y^2-21+4(y-9)/5+2y=0\\ x=(y-9)/5=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=4\vee y=-6\\ x=-1\vee x=-3\end{cases}$$

b) $$\begin{cases}\overline{BC}^2=\overline{AC}^2\\ 2\cdot\overline{AC}^2=\overline{AB}^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cancel{x^2+y^2}-6x+4y+13=\cancel{x^2+y^2}+4x+2y+5\\ 2\left(x^2+y^2+4x+2y+5\right)=26\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}10x-2y-8=0\\ x^2+y^2+4x+2y+5=13\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}y=5x-4\\ x^2+(5x-4)^2+4x+2(5x-4)-8=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=5x-4\\ 26x^2-26x=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-4\vee y=1\\ x=0\vee x=1\end{cases}$$

c) $\begin{cases}\overline{AB}^2=\overline{BC}^2\\ 2\cdot\overline{AB}^2=\overline{AC}^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}26=x^2+y^2-6x+4y+13\\ 52=x^2+y^2+4x+2y+5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2=6x-4y+13\\ 6x-4y+13+4x+2y-47=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2=6x-4y+13\\ x=(y+17)/5\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases}\left[(y+17)/5\right]^2+y^2-6(y+17)/5+4y-13=0\\ x=(y+17)/5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-7\vee y=3\\ x=2\vee x=4\end{cases}$

52. $A\equiv(1;3)$, $B\equiv(0;-4)$

a) $\begin{cases}\overline{AB}^2=\overline{AC}^2\\ 2\cdot\overline{AB}^2=\overline{BC}^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}50=x^2+y^2-2x-6y+10\\ 100=x^2+y^2+8y+16\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2=2x+6y+40\\ 2x+6y+40+8y-84=0\end{cases}\Rightarrow$;

$\Rightarrow\begin{cases}(22-7y)^2+y^2-21+4(22-7y)+2y=0\\ x=22-7y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y^2-6y+8=0\\ x=22-7y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=2\vee y=4\\ x=8\vee x=-6\end{cases}$

b) $\begin{cases}\overline{BC}^2=\overline{AC}^2\\ 2\cdot\overline{AC}^2=\overline{AB}^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cancel{x^2+y^2}+8y+116=\cancel{x^2+y^2}-2x-6y+10\\ 2x^2+2y^2-4x-12y+20=50\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-7y-3\\ (-7y-3)^2+y^2-2(-7y-3)-6y-15=0\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases}x=-7y-3\\ 2y^2+2y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-3\vee x=4\\ y=0\vee y=-1\end{cases}$

c) $\begin{cases}\overline{AB}^2=\overline{BC}^2\\ 2\cdot\overline{AB}^2=\overline{AC}^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}50=x^2+y^2+8y+16\\ 100=x^2+y^2-2x-6y+10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2=34-8y\\ 34-8y-2x-6y-90=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(-7y-28)^2+y^2-6(-7y-28)+4y-13=0\\ x=-7y-28\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases}y^2+8y-34=0\\ x=-7y-28\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-5\vee y=-3\\ x=7\vee x=-7\end{cases}$

53. $A\equiv(-2/3;0)$, $B\equiv(1/2;-1)$

a) $\begin{cases}\overline{AB}^2=\overline{AC}^2\\ 2\cdot\overline{AB}^2=\overline{BC}^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}85/36=x^2+y^2-4/3x+4/9\\ 85/36=x^2+y^2-x+2y+5/4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2=4/3x+23/12\\ 4/3x+23/12-x+2y-10/9=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1/3\vee x=5/3\\ y=7/6\vee x=-7/6\end{cases}$

b) $\begin{cases}\overline{BC}^2=\overline{AC}^2\\ 2\cdot\overline{AC}^2=\overline{AB}^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cancel{x^2+y^2}-x+2y+5/4=\cancel{x^2+y^2}-4/3x+4/9\\ 2(x^2+y^2-4/3x+4/9)=85/36\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x/3+2y-29/36=0\\ 2x^2+2y^2-8/3x-53/36=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-7/12\vee x=5/12\\ y=-13/12\vee y=1/12\end{cases}$

c) $\begin{cases}\overline{AB}^2=\overline{BC}^2\\ 2\cdot\overline{AB}^2=\overline{AC}^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}85/36=x^2+y^2-x+2y+5/4\\ 85/18=x^2+y^2-4/3x+4/9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1/2\vee x=3/2\\ y=1/6\vee y=-13/6\end{cases}$

54. $A\equiv(\sqrt{3};1)$, $B\equiv(0;\sqrt{3})$

a) $\begin{cases}\overline{AB}^2=\overline{AC}^2\\ 2\cdot\overline{AB}^2=\overline{BC}^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}7-2\sqrt{3}=x^2+y^2-2\sqrt{3}x-2y+4\\ 14-4\sqrt{3}=x^2+y^2-2\sqrt{3}y+3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\vee x=2\sqrt{3}-1\\ y=1-\sqrt{3}\vee y=1+\sqrt{3}\end{cases}$

b) $\begin{cases}\overline{BC}^2=\overline{AC}^2\\ 2\cdot\overline{AC}^2=\overline{AB}^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cancel{x^2+y^2}-2\sqrt{3}y+3=\cancel{x^2+y^2}-2\sqrt{3}x-2y+4\\ 2(x^2+y^2-2\sqrt{3}x-2y+4)=7-2\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1/2\vee x=\sqrt{3}-1/2\\ y=1/2\vee y=\sqrt{3}+1/2\end{cases}$

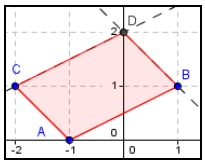
c) $\begin{cases}\overline{AB}^2=\overline{BC}^2\\ 2\cdot\overline{AB}^2=\overline{AC}^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}7-2\sqrt{3}=x^2+y^2-2\sqrt{3}y+3\\ 14-4\sqrt{3}=x^2+y^2-2\sqrt{3}x-2y+4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1-\sqrt{3}\vee x=-1+\sqrt{3}\\ y=0\vee y=2\sqrt{3}\end{cases}$

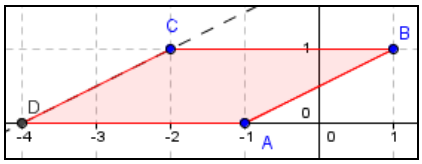
55. Un tappo di sughero è vincolato a muoversi su un bacino d'acqua in modo tale che le sue coordinate siano $P\equiv(2x-1;\ x+3)$, determinare la posizione del tappo in modo che risulti equidistante dai punti fissati $A\equiv(1;2)$ e $B\equiv(3;5)$.

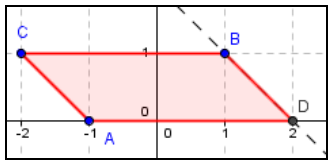
Deve essere $AP^2=BP^2$, quindi $(2x-1-1)^2+(x+3-2)^2=(2x-1-3)^2+(x+3-5)^2\Rightarrow(2x-2)^2+(x+1)^2=(2x-4)^2+(x-2)^2\Rightarrow 4x^2-8x+4+x^2+2x+1=4x^2-16x+16+x^2-4x+4\Rightarrow 14x=15\Rightarrow x=15/14$

56. Interpretare geometricamente il problema di determinare il quarto vertice di un parallelogramma di cui sono date le coordinate di tre vertici. Quante soluzioni ha il problema?

3, a seconda del modo di unire i vertici dati, come mostrato in figura







57. Dati i vertici $A \equiv (1; -2)$, $B \equiv (3; -1)$ e $C \equiv (2; 3)$, determinare le coordinate del quarto vertice D, in modo che i quattro punti siano di volta in volta vertici del parallelogramma: a) $ABCD$; b) $ABDC$; c) $ACBD$. (Suggerimento: le diagonali si dividono scambievolmente a metà)

a) I punti medi delle diagonali AC e BD devono coincidere: $(1 + 2)/2 = (3 + x)/2 \Rightarrow x = 0$; $(-2 + 3)/2 = (-1 + y)/2 \Rightarrow y = 2$);

b) I punti medi delle diagonali AD e BC devono coincidere: $(1 + x)/2 = (3 + 2)/2 \Rightarrow x = 4$; $(-2 + y)/2 = (-1 + 3)/2 \Rightarrow y = 4$;

c) I punti medi delle diagonali AB e CD devono coincidere: $(1 + 3)/2 = (2 + x)/2 \Rightarrow x = 2$; $(-2 - 1)/2 = (3 + y)/2 \Rightarrow y = -6$

Tenuto conto che i punti dell'asse di un segmento sono equidistanti dagli estremi dello stesso segmento, e che il circocentro è il punto di incontro degli assi dei lati di un triangolo, determinare le coordinate del circocentro dei seguenti triangoli

58. a) $A \equiv (1; -3)$, $B \equiv (4; 1)$, $C \equiv (0; 3)$; b) $D \equiv (-2; 1)$, $E \equiv (4; -3)$, $F \equiv (1; 0)$

a) Detto $C_c \equiv (x; y)$ il circocentro, deve essere

$$\begin{cases} \overline{AC_C}^2 = \overline{BC_C}^2 \\ \overline{AC_C}^2 = \overline{CC_C}^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-x)^2 + (-3-y)^2 = (4-x)^2 + (1-y)^2 \\ (1-x)^2 + (-3-y)^2 = (0-x)^2 + (3-y)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-2x+9+6y = 16-8x+1-2y \\ 1-2x+9+6y = 9-6y \end{cases} \Rightarrow ;$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6x+8y-7=0 \\ 2x-12y-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 23/22 \\ y = 1/11 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \overline{DC_C}^2 = \overline{EC_C}^2 \\ \overline{DC_C}^2 = \overline{FC_C}^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-2-x)^2 + (1-y)^2 = (4-x)^2 + (-3-y)^2 \\ (-2-x)^2 + (1-y)^2 = (1-x)^2 + (0-y)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4+4x+1-2y = 16-8x+9+6y \\ 4+4x+1-2y = 1-2x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x-2y-5=0 \\ 3x-y+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-7 \end{cases}$$

59. a) $G \equiv (1/3; 1)$, $H \equiv (-2/3; -2)$, $I \equiv (1/4; 3/4)$; b) $J \equiv (-3/2; 1)$, $K \equiv (4; -1/2)$, $L \equiv (0; 3/4)$

a)

$$\begin{cases} \overline{GC_C}^2 = \overline{HC_C}^2 \\ \overline{GC_C}^2 = \overline{IC_C}^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1/3-x)^2 + (1-y)^2 = (-2/3-x)^2 + (-2-y)^2 \\ (1/3-x)^2 + (1-y)^2 = (1/4-x)^2 + (3/4-y)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1/9-2/3x+1-2y = 4/9+4/3x+4+4y \\ 1/9-2/3x+1-2y = 1/16-1/2x+9/16-3/2y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x+9y+5=0 \\ 12x+36y-35=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+9y=-5 \\ 3x+9y=35/4 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$$

b)

$$\begin{cases} \overline{JC_C}^2 = \overline{KC_C}^2 \\ \overline{JC_C}^2 = \overline{LC_C}^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-3/2-x)^2 + (1-y)^2 = (4-x)^2 + (-1/2-y)^2 \\ (-3/2-x)^2 + (1-y)^2 = (0-x)^2 + (3/4-y)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11x-3y-13=0 \\ 48x-8y+43=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-233/56 \\ y=-1097/56 \end{cases}$$

60. $M \equiv (1; \sqrt{2}+1)$, $N \equiv (-1; 0)$, $P \equiv (\sqrt{2}-3; 1)$

$$\begin{cases} \overline{MC_C}^2 = \overline{NC_C}^2 \\ \overline{MC_C}^2 = \overline{PC_C}^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-x)^2 + (1+\sqrt{2}-y)^2 = (-1-x)^2 + (0-y)^2 \\ (1-x)^2 + (1+\sqrt{2}-y)^2 = (\sqrt{2}-3-x)^2 + (1-y)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x+2(\sqrt{2}+1)y-2\sqrt{2}-3=0 \\ (2\sqrt{2}-8)x-2\sqrt{2}y+8\sqrt{2}-8=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=(7-5\sqrt{2})/2 \\ y=(35-23\sqrt{2})/2 \end{cases}$$

61. Determinare il terzo vertice del triangolo rettangolo la cui ipotenusa è 4/3 di uno dei cateti ed ha estremi $A \equiv (-1; -2)$ e $B \equiv (4; 1)$.

$$\begin{cases} \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \\ \overline{AB}^2 = 16\overline{AC}^2/9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-1-4)^2 + (-2-1)^2 = (-1-x)^2 + (-2-y)^2 + (4-x)^2 + (1-y)^2 \\ (-1-4)^2 + (-2-1)^2 = 16/9\left[(-1-x)^2 + (-2-y)^2\right] \end{cases} \Rightarrow$$

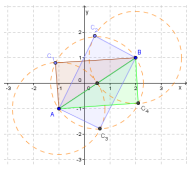
$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 3x + y - 6 = 0 \\ 8x^2 + 8y^2 + 16x + 32y - 113 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{29 \pm 9 \cdot \sqrt{7}}{16} \\ y = -\dfrac{5 \mp 15 \cdot \sqrt{7}}{16} \end{cases}$$

oppure

$$\begin{cases} \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \\ \overline{AB}^2 = 16\overline{BC}^2/9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-1-4)^2 + (-2-1)^2 = (-1-x)^2 + (-2-y)^2 + (4-x)^2 + (1-y)^2 \\ (-1-4)^2 + (-2-1)^2 = 16/9\left[(4-x)^2 + (1-y)^2\right] \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 3x + y - 6 = 0 \\ 8x^2 + 8y^2 - 64x - 16y - 17 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{19 \pm 9 \cdot \sqrt{7}}{16} \\ y = -\dfrac{11 \pm 15 \cdot \sqrt{7}}{16} \end{cases}$$

62. Risolvere geometricamente il problema di determinare il terzo vertice del triangolo rettangolo la cui ipotenusa è doppia di uno dei cateti e ha estremi noti. Quanti triangoli siffatti esistono?

Quattro, si consideri la figura: 

63. Risolvere il precedente esercizio se i vertici dell'ipotenusa sono $A \equiv (4; 2)$ e $B \equiv (-1; 3)$.

$$\begin{cases} \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \\ \overline{AB}^2 = 4\overline{AC}^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (4+1)^2 + (2-3)^2 = (4-x)^2 + (2-y)^2 + (-1-x)^2 + (3-y)^2 \\ (4+1)^2 + (2-3)^2 = 4\left[(4-x)^2 + (2-y)^2\right] \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 3x - 5y + 2 = 0 \\ 2x^2 + 2y^2 - 16x - 8y + 27 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{11 \pm \sqrt{3}}{4} \\ y = \dfrac{9 \pm 5 \cdot \sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

oppure

$$\begin{cases} \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \\ \overline{AB}^2 = 4\overline{BC}^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (4+1)^2 + (2-3)^2 = (4-x)^2 + (2-y)^2 + (-1-x)^2 + (3-y)^2 \\ (4+1)^2 + (2-3)^2 = 4\left[(-1-x)^2 + (3-y)^2\right] \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 3x - 5y + 2 = 0 \\ 2x^2 + 2y^2 + 4x - 12y + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}}{4} \\ y = \dfrac{11 \pm 5 \cdot \sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

Determinare le coordinate degli altri due vertici dei quadrati di cui forniamo le coordinate di due vertici opposti. (Suggerimento: sfruttare le proprietà della diagonale di un quadrato)

64. a) $A \equiv (1; -3)$, $C \equiv (4; 0)$; b) $E \equiv (3; 4)$, $G \equiv (-5; 1)$

a) $\begin{cases}\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2\\ \overline{AC}^2=2\overline{AB}^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(1-4)^2+(-3-0)^2=(1-x)^2+(-3-y)^2+(4-x)^2+(0-y)^2\\ (1-4)^2+(-3-0)^2=2\left[(1-x)^2+(-3-y)^2\right]\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2-5x+3y+4=0\\ x^2+y^2-2x+6y+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4\\ y=-3\end{cases}\vee\begin{cases}x=1\\ y=0\end{cases}$ ovviamente in questo modo troviamo due soluzioni che sono le coordinate dei due vertici.

b) $\begin{cases}\overline{EG}^2=\overline{EF}^2+\overline{FG}^2\\ \overline{EG}^2=2\overline{EF}^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(3+5)^2+(4-1)^2=(3-x)^2+(4-y)^2+(-5-x)^2+(1-y)^2\\ (3+5)^2+(4-1)^2=2\left[(3-x)^2+(4-y)^2\right]\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2+2x-5y-11=0\\ x^2+y^2-6x-8y-23/2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-5/2\\ y=13/2\end{cases}\vee\begin{cases}x=1/2\\ y=-3/2\end{cases}$

65. a) $J\equiv(1/3;-1)$, $K\equiv(0;3/4)$; b) $M\equiv(2;-1)$, $P\equiv(3/5;0)$

a) $\begin{cases}\overline{JK}^2=\overline{JL}^2+\overline{KL}^2\\ \overline{JK}^2=2\overline{JL}^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(1/3-0)^2+(-1-3/4)^2=(1/3-x)^2+(-1-y)^2+(0-x)^2+(3/4-y)^2\\ (1/3-0)^2+(-1-3/4)^2=2\left[(1/3-x)^2+(-1-y)^2\right]\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases}12x^2+12y^2-4x+3y-9=0\\ 288x^2+288y^2-192x+576y-137=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=25/24\\ y=1/24\end{cases}\vee\begin{cases}x=-17/24\\ y=-7/24\end{cases}$

b) $\begin{cases}\overline{MP}^2=\overline{MN}^2+\overline{NP}^2\\ \overline{MP}^2=2\overline{MN}^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(2-3/5)^2+(-1-0)^2=(2-x)^2+(-1-y)^2+(3/5-x)^2+(0-y)^2\\ (2-3/5)^2+(-1-0)^2=2\left[(2-x)^2+(-1-y)^2\right]\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases}5x^2+5y^2-13x+5y+6=0\\ 25x^2+25y^2-100x+50y+88=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=9/5\\ y=1/5\end{cases}\vee\begin{cases}x=4/5\\ y=-6/5\end{cases}$

66. R (2/5; –1), $T\equiv(3;-1/4)$

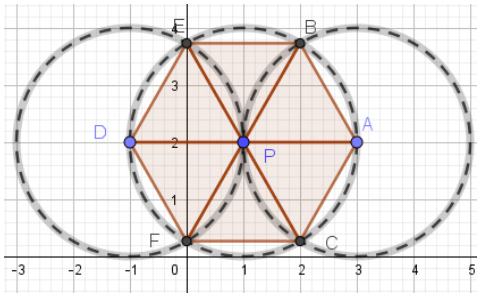
$\begin{cases}\overline{RT}^2=\overline{RS}^2+\overline{ST}^2\\ \overline{RT}^2=2\overline{RS}^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(2/5-3)^2+(-1+1/4)^2=(2/5-x)^2+(-1-y)^2+(3-x)^2+(-1/4-y)^2\\ (2/5-3)^2+(-1+1/4)^2=2\left[(2/5-x)^2+(-1-y)^2\right]\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases}20x^2+20y^2-68x+25y+29=0\\ 800x^2+800y^2-640x+1600y-2001=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=83/40\\ y=-77/40\end{cases}\vee\begin{cases}x=53/40\\ y=27/40\end{cases}$

67. Dato il punto P ≡ (1; 2), determinare le coordinate di tutti i triangoli equilateri di lato lungo 2 unità, che hanno P come uno dei loro vertici e un lato parallelo all'asse delle ascisse.

Se P appartiene al lato parallelo a x, abbiamo $Q_1\equiv(3;2)$ oppure $Q_2\equiv(-1;2)$ ed $R_{12}\equiv\left(\frac{1+3}{2};2\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\right)\equiv\left(2;2\pm\sqrt{3}\right)\vee R_{34}\equiv\left(\frac{1-1}{2};2\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\right)\equiv\left(0;2\pm\sqrt{3}\right)$. Se invece non vi appartiene deve essere $Q_{12}\equiv\left(1-1;2\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\right)\equiv\left(0;2\pm\sqrt{3}\right),R_{12}\equiv\left(1+1;2\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\right)\equiv\left(2;2\pm\sqrt{3}\right)$

68. Con riferimento al precedente problema, i punti cercati appartengono a una data figura geometrica, quale?

Un esagono regolare di centro P, come mostrato in figura 

Suddivisione di un segmento in un dato rapporto

Determinare le coordinate dei punti medi dei seguenti segmenti, di cui forniamo le coordinate degli estremi

1. a) (1; –3), (4; 5); b) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3};-5\right),\left(1+\sqrt{2};-\sqrt{3}/2\right)$

a) ((1 + 4)/2; (–3 + 5)/2) ≡ (5/2; 1); b) $\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1+\sqrt{2}}{2};\frac{-5-\sqrt{3}/2}{2}\right)\equiv\left(\frac{\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{2}+1}{2};-\frac{10+\sqrt{3}}{4}\right)$

2. a) (2/3; 1/4), (–2/5; 3/8); b) (9/7; 4/7), $\left(-\sqrt{7};\sqrt{5}\right)$

a) ((2/3 – 2/5)/2; (1/4 + 3/8)/2) ≡ (2/15; 5/16); b) $\left(\frac{9/7-\sqrt{7}}{2};\frac{4/7+\sqrt{5}}{2}\right)\equiv\left(\frac{9-7\cdot\sqrt{7}}{14};\frac{4+7\cdot\sqrt{5}}{14}\right)$

3. a) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{1}{4}\right),\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3};-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$**; b) (2; 1/3), (–2; –1/3)**

a) $\left(\frac{\sqrt{2}/2+\left(1+\sqrt{2}\right)/3}{2};\frac{1/4-\sqrt{3}/3}{2}\right)\equiv\left(\frac{2+5\cdot\sqrt{2}}{12};\frac{3-4\cdot\sqrt{3}}{24}\right)$; b) ((1 + 4)/2; (–3 + 5)/2) ≡ (5/2; 1)

Determinare le coordinate dei baricentri dei triangoli di cui forniamo le coordinate dei vertici

4. a) (–2; 4), (3; –1), (2; 5); b) (–3; 1/24), (0; –3), (8; 4/3); c) (2; –1/2), (3; 4/5); (1; 1)

a) ((–2 + 3 + 2)/3; (4 – 1 + 5)/3) ≡ (1; 8/3); b) (–3 + 0 + 8)/3; ((1/24 – 3 + 4/3)/3) ≡ (5/3; –13/24);
c) ((2 + 3 + 1)/3; (–1/2 + 4/5 + 1)/3) ≡ (2; 13/30)]

5. a) (0; –2/5), (3/4; 1), (4/3; 2); b) $\left(1/2-\sqrt{2};1\right),\left(-3-\sqrt{2};4\right),\left(0;-2\right)$

a) ((0 + 3/4 + 4/3)/3; (–2/5 + 1 + 2)/3) ≡ (25/36; 13/15);

b) $\left(\frac{1/2-\sqrt{2}-3-\sqrt{2}+0}{3};\frac{1+4-2}{3}\right)\equiv\left(-\frac{5+4\cdot\sqrt{2}}{6};1\right)$

Determinare le coordinate dei punti che dividono i seguenti segmenti, di cui forniamo gli estremi, nel relativo rapporto k

6. a) (1; –3), (4; –1), *k* = 1/4; b) (1/5; –2/7), (3; –1/7), *k* = 2/5

Applichiamo la formula $\left(\frac{(n-m)\cdot x_A+m\cdot x_B}{n};\frac{(n-m)\cdot y_A+m\cdot y_B}{n}\right)$

a) $\left(\frac{(4-1)\cdot1+1\cdot4}{4};\frac{(4-1)\cdot(-3)+1\cdot(-1)}{4}\right)\equiv\left(\frac{7}{4};-\frac{5}{2}\right)\vee\left(\frac{(4-1)\cdot4+1\cdot1}{4};\frac{(4-1)\cdot(-1)+1\cdot(-3)}{4}\right)\equiv\left(\frac{13}{4};-\frac{3}{2}\right)$

b) $\left(\frac{(5-2)\cdot1/5+2\cdot3}{5};\frac{(5-2)\cdot(-2/7)+2\cdot(-1/7)}{4}\right)\equiv\left(\frac{33}{25};-\frac{8}{35}\right)\vee\left(\frac{(5-2)\cdot3+2\cdot1/5}{5};\frac{(5-2)\cdot(-1/7)+2\cdot(-2/7)}{4}\right)\equiv\left(\frac{47}{25};-\frac{1}{5}\right)$

7. $\left(2-\sqrt{7};1\right),\left(-\frac{3}{4};1+\sqrt{5}\right),k=\frac{6}{7}$

$$\left(\frac{(7-6)\cdot\left(2-\sqrt{7}\right)+6\cdot(-3/4)}{7};\frac{(7-6)\cdot 1+6\cdot\left(1+\sqrt{5}\right)}{7}\right)\equiv\left(-\frac{5+2\cdot\sqrt{7}}{14};\frac{7+6\cdot\sqrt{5}}{7}\right)\vee$$

$$\left(\frac{(7-6)\cdot(-3/4)+6\cdot\left(2-\sqrt{7}\right)}{7};\frac{(7-6)\cdot\left(1+\sqrt{5}\right)+6\cdot 1}{7}\right)\equiv\left(\frac{3\cdot\left(15-8\cdot\sqrt{7}\right)}{28};\frac{7+\sqrt{5}}{7}\right)$$

8. a) (–4/7; 3/8), (0; –2/3), *k* = 4/7; b) (2; 3), (–5; –5), *k* = 5/6

a) $$\left(\frac{(7-4)\cdot(-4/7)+4\cdot 0}{7};\frac{(7-4)\cdot 3/8+4\cdot(-2/3)}{7}\right)\equiv\left(-\frac{12}{49};-\frac{37}{168}\right)\vee$$
$$\left(\frac{(7-4)\cdot 0+4\cdot(-4/7)}{7};\frac{(7-4)\cdot(-2/3)+4\cdot 3/8}{7}\right)\equiv\left(-\frac{16}{49};-\frac{1}{14}\right);$$

b) $$\left(\frac{(6-5)\cdot 2+5\cdot(-5)}{6};\frac{(6-5)\cdot 3+5\cdot(-5)}{6}\right)\equiv\left(-\frac{23}{6};-\frac{11}{3}\right)\vee$$
$$\left(\frac{(6-5)\cdot(-5)+5\cdot 2}{6};\frac{(6-5)\cdot(-5)+5\cdot 3}{6}\right)\equiv\left(\frac{5}{6};\frac{5}{3}\right)$$

9. Su una mappa, due città occupano le posizioni *A* ≡ (–3; 1) e *B* ≡ (1; 6). Lungo la strada rettilinea che le congiunge vogliamo costruire 5 distributori di benzina posti a distanze uguali fra loro e fra le città. Determinare le posizioni dei distributori.

La distanza fra le ascisse è 1 + 3 = 4, che divisa in 6 parti (5 + 1) significa che dobbiamo aggiungere (a partire da *A*) 4/6 = 2/3 a ogni ascissa; per le ordinate invece dobbiamo aggiungere (6 – 1)/6 = 5/6. Abbiamo perciò: (–3 + 2/3; 1 + 5/6) ≡ (–7/3; 11/6), (–7/3 + 2/3; 11/6 + 5/6) ≡ (–5/3; 8/3), (–5/3 + 2/3; 8/3 + 5/6) ≡ (–1; 7/2), (–1 + 2/3; 7/2 + 5/6) ≡ (–1/3; 13/3), (–1/3 + 2/3; 13/3 + 5/6) ≡ (1/3; 31/6)

10. Dopo avere determinato i punti medi dei lati dei triangoli dati nell'Esercizio 4a; verificare che il perimetro del triangolo che ha tali punti per estremi misura quanto metà del perimetro del triangolo di partenza. Calcolare tali perimetri.

Il perimetro del triangolo di partenza misura $2p=5\cdot\sqrt{2}+\sqrt{37}+\sqrt{17}$ I punti medi sono (1/2; 3/2), (5/2; 2) e (0; 9/2), applicando la formula della distanza troviamo $2p=\frac{5\cdot\sqrt{2}+\sqrt{37}+\sqrt{17}}{2}$

11. Calcolare la misura delle mediane dei triangoli dati nell'Esercizio 4b. Verificare poi che la distanza del baricentro da ciascun vertice è doppia della distanza dal punto medio del lato opposto, ossia verificare il teorema che afferma che il baricentro divide ciascuna mediana nel rapporto 1 : 2. Calcolare la misura delle mediane.

I punti medi sono: (–3/2; –71/48), (5/2; 33/48), (4; –5/6). Il baricentro abbiamo calcolato che è (5/3; –13/24). La sua distanza dai tre vertici è $\frac{7\sqrt{65}}{2},\frac{\sqrt{25129}}{24},\frac{\sqrt{5081}}{24}$, la sua distanza dai punti medi è $\frac{7\sqrt{65}}{4},\frac{\sqrt{25129}}{48},\frac{\sqrt{5081}}{48}$. Infine le mediane misurano $\frac{21\sqrt{65}}{2},\frac{\sqrt{25129}}{8},\frac{\sqrt{5081}}{8}$

12. Dopo aver verificato che il triangolo di vertici (–1; 4), (1; 1), (7; 5) è rettangolo, calcolare la misura della mediana relativa all'ipotenusa verificando che misura quanto metà dell'ipotenusa stessa.

$(1 + 1)^2 + (1 – 4)^2 + (7 – 1)^2 + (5 – 1)^2 = (7 + 1)^2 + (5 – 4)^2 \Rightarrow 4 + 9 + 36 + 16 = 64 + 1 \Rightarrow 65 = 65$. Il punto medio dell'ipotenusa è ((7 – 1)/2; (5 + 4)/2) ≡ (3; 9/2) la mediana a essa relativa misura

$$\sqrt{(1-3)^2+(1-9/2)^2}=\sqrt{4+49/4}=\sqrt{65}/2$$

13. Dopo aver verificato che il triangolo di vertici (–1; –1), (–3; –3), (–5; 1) è isoscele, calcolare le misure delle mediane relative ai lati obliqui e verificare che sono fra loro isometriche.

$(–1 + 5)^2 + (–1 – 1)^2 = (–5 + 3)^2 + (1 + 3)^2 \Rightarrow 16 + 4 = 4 + 16$. I punto medi dei lati obliqui sono: ((–1 – 5)/2; (–1 + 1)/2) ≡ (–2; 0) e ((–3 – 5)/2; (–3 + 1)/2) ≡ (–4; –1), le mediane misurano

$\sqrt{(-3+3)^2+(-3-0)^2}=3; \sqrt{(-1+4)^2+(-1+1)^2}=3$

14. Completare la dimostrazione del Teorema 8.

Consideriamo il rapporto $\overline{AC}/\overline{AB} = m/n$ e determiniamo le ordinate del punto C: $\frac{y_C-y_A}{y_B-y_A}=\frac{m}{n} \Rightarrow y_C=\frac{(n-m)\cdot y_A+m\cdot y_B}{n}$

15. Completare la dimostrazione del Corollario 3.

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{AM}}=\frac{2}{3} \text{ e } y_G=\frac{(3-2)\cdot y_A+2\cdot y_M}{3}=\frac{y_A+2\cdot y_M}{3}=\frac{y_A+\cancel{2}\cdot\frac{y_B+y_C}{\cancel{2}}}{3}=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}$$

Determinare le coordinate del secondo estremo dei segmenti di cui sono date le coordinate dell'altro estremo e del punto medio

16. a) (1; 2), (–2; 3); b) (–1/3; 2/5), (–1/6; –1/70); c) $\left(\sqrt{5};-4\right)$, (1/2; –1/2)

a) Deve essere $(1 + x)/2 = -2 \Rightarrow x = -5$ e $(2 + y)/2 = 3 \Rightarrow y = 4$;

b) Deve essere $(-1/3 + x)/2 = -1/6 \Rightarrow x = 0$ e $(2/5 + y)/2 = -1/70 \Rightarrow y = -3/7$;

c) Deve essere $\left(\sqrt{5}+x\right)/2=1/2 \Rightarrow x=1-\sqrt{5}; \left(-4+y\right)/2=-1/2 \Rightarrow y=3$

17. a) (2; –7), (5; –3); b) (2/5; 5/2), (1/20; 31/12)

a) Deve essere $(2 + x)/2 = 5 \Rightarrow x = 8$ e $(-7 + y)/2 = -3 \Rightarrow y = 1$;

b) Deve essere $(2/5 + x)/2 = 1/20 \Rightarrow x = -3/10$ e $(5/2 + y)/2 = 31/12 \Rightarrow y = 8/3$

Determinare le coordinate del secondo estremo dei segmenti di cui sono date le coordinate dell'altro estremo, nonché le coordinate del punto che lo divide in un certo rapporto e il detto rapporto. La suddivisione è sempre dalla parte dell'estremo dato

18. a) (2; –5), (12/7; –13/7), 2/7; b) (–5; 5), (2/5; –2/5), 3/5; c) (1; 6), (5/14; –1/15), 5/6

a) Deve essere $((7 - 2) \cdot 2 + 2 \cdot x)/7 = 12/7 \Rightarrow x = 1$ e $((7 - 2) \cdot (-5) + 2 \cdot y)/7 = -13/7 \Rightarrow y = 6$;

b) Deve essere $((5 - 3) \cdot (-5) + 3 \cdot x)/5 = 2/5 \Rightarrow x = 4$ e $((5 - 3) \cdot 5 + 3 \cdot y)/5 = -2/5 \Rightarrow y = -4$;

c) Deve essere $((6 - 5) \cdot 1 + 5 \cdot x)/6 = 5/14 \Rightarrow x = 8/35$ e $((6 - 5) \cdot 6 + 5 \cdot y)/6 = -1/15 \Rightarrow y = -32/25$

19. a) (1/3; 3/4), (–5/7; 155/252), 2/9; b)

a) Deve essere $((9 - 2) \cdot 1/3 + 2 \cdot x)/9 = -5/7 \Rightarrow x = -92/21$ e $((9 - 2) \cdot 3/4 + 2 \cdot y)/9 = 155/52 \Rightarrow y = 1/7$;

b) Deve essere $((5 - 3) \cdot (-5) + 3 \cdot x)/5 = 2/5 \Rightarrow x = 4$ e $((5 - 3) \cdot 5 + 3 \cdot y)/5 = -2/5 \Rightarrow y = -4$; $\left((9-8)\cdot\left(1-\sqrt{5}\right)+8\cdot x\right)/9=5\cdot\sqrt{5}/3+1 \Rightarrow \left((9-8)\cdot 3/5+8\cdot y\right)/9=1/15 \Rightarrow y=0$

Determinare le coordinate del terzo vertice di un triangolo di cui sono date le coordinate degli altri due vertici e del baricentro

20. a) (1; –2), (3; 0), (0; –1/3); b) (–2; 1/4), (11; –3/8), (3; –1/24); c) (–3/5; 5/3), (6; 1), (22/15; –7/9)

a) Deve essere $(1 + 3 + x)/3 = 0 \Rightarrow x = -4$; $(-2 + 0 + y)/3 = -1/3 \Rightarrow y = 1$;

b) Deve essere $(-2 + 11 + x)/3 = 3 \Rightarrow x = 0$; $(1/4 - 3/8 + y)/3 = -1/24 \Rightarrow y = 0$;

c) Deve essere $(-3/5+ 6 + x)/3 = 22/15 \Rightarrow x = -1$; $(5/3 + 1 + y)/3 = -7/9 \Rightarrow y = -5$

21. a) (2/7;7/2),(1;–2),(113/84;1/6); b) $\left(\sqrt{3};-1\right),\left(2\sqrt{3};1\right),\left(1/3+2\sqrt{3}/3;0\right)$;c)(1/2;1/4),(2/3;–1),(–25/6;3/4)

a) Deve essere $(2/7 + 1 + x)/3 = 113/84 \Rightarrow x = 11/4$; $(7/2 - 2 + y)/3 = 1/6 \Rightarrow y = -1$;

b) Deve essere $\left(\sqrt{3}+2\sqrt{3}+x\right)/3=1/3+2\sqrt{3} \Rightarrow x=1-\sqrt{3}; \left(-1+1+y\right)/3=0 \Rightarrow y=0$;

c) Deve essere $(1/2 + 2/3 + x)/3 = -25/6 \Rightarrow x = -41/3$; $(1/4 - 1 + y)/3 = 3/4 \Rightarrow y = 3$

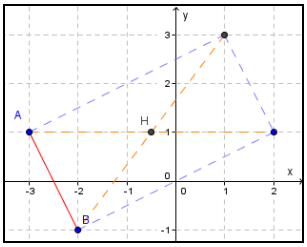
22. Di un parallelogramma conosciamo le coordinate di due suoi vertici opposti, *A* e *B* e del punto d'incontro delle diagonali *H*. È possibile determinare le coordinate degli altri due vertici del parallelogramma? In caso di risposta affermativa, quante soluzioni ha il problema?

Il problema è indeterminato o impossibile, a seconda che H sia punto medio di AB o no

23. Di un parallelogramma conosciamo le coordinate di due suoi vertici consecutivi, *A* e *B* e del

punto d'incontro delle diagonali *H*. È possibile determinare le coordinate degli altri due vertici del parallelogramma? In caso di risposta affermativa, quante soluzioni ha il problema? (Suggerimento: sfruttare le proprietà del punto medio.)

C'è una soluzione: essa si ottiene tenendo conto del fatto che il punto d'incontro delle diagonali è il punto medio di entrambe



24. Risolvere il precedente problema per $A \equiv (-2; 3)$, $B \equiv (4; -1)$, $H \equiv (0; 3)$.

Si ha: $\begin{cases} \overline{AH} = \overline{CH} \\ \overline{BH} = \overline{DH} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-2+x_C}{2} = 0, \dfrac{3+y_C}{2} = 3 \\ \dfrac{4+x_D}{2} = 0, \dfrac{-1+y_D}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 2, y_C = 3 \\ x_D = -4, y_D = 7 \end{cases}$

25. Dato il quadrilatero di vertici i punti (–3; 2), (1; 3), (4; 2), (–1; –2), verificare il teorema: *il quadrilatero che ha per estremi i punti medi dei lati di un quadrilatero convesso è un parallelogramma.*

I punti medi sono: (–1; 5/2), (5/2; 5/2), (3/2; 0), (–2; 0). I punti medi delle diagonali sono: ((–1 + 3/2)/2; (5/2 + 0)/2) ≡ (1/4; 5/4) e ((5/2 – 2)/2; (5/2 + 0)/2) ≡ (1/4; 5/4), quindi le diagonali si dividono a metà, inoltre una coppia di lati opposti è isometrica: $\sqrt{(-1-5/2)^2+(5/2-5/2)^2} = \frac{7}{2}, \sqrt{(3/2+2)^2+(0-0)^2} = \frac{7}{2}$, ciò basta per concludere che abbiamo un parallelogramma

26. Dato il triangolo equilatero di vertici (–2; –1), (1; 3), $\left(2\sqrt{3}-1/2; 1-3\sqrt{3}/2\right)$, verificare il teorema: *la somma delle distanze del baricentro dai lati è uguale alla misura di una mediana*. Si ricordi che in un triangolo equilatero le altezze sono mediane, quindi la distanza del baricentro dai lati coincide con la sua distanza dai punti medi.

Il baricentro è $\left(\dfrac{-2+1+2\sqrt{3}-1/2}{3}; \dfrac{-1+3+1-3\sqrt{3}/2}{3}\right) \equiv \left(\dfrac{-3+4\sqrt{3}}{6}; \dfrac{2-\sqrt{3}}{2}\right)$, la somma cercata misura $3\cdot\sqrt{\left(\dfrac{-2+1}{2}-\dfrac{-3+4\sqrt{3}}{6}\right)^2+\left(\dfrac{-1+3}{2}-\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 3\cdot\sqrt{\left(-\dfrac{\cancel{4}^{2}\sqrt{3}}{\cancel{6}_{3}}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 3\cdot\sqrt{\dfrac{4}{3}+\dfrac{3}{4}} = 3\cdot\dfrac{5}{2\sqrt{3}} = \dfrac{5}{2}\sqrt{3}$. La misura di una mediana è $\sqrt{\left(\dfrac{-2+1}{2}-\dfrac{4\sqrt{3}-1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{-1+3}{2}-\dfrac{2-3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(-\dfrac{4\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

27. Con i dati dell'esercizio precedente verificare il teorema: *la somma dei quadrati delle distanze del baricentro dai vertici è uguale al quadrato del lato*.

$3\cdot\left[\left(-2-\dfrac{-3+4\sqrt{3}}{6}\right)^2+\left(-1-\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^2\right] = 3\cdot\left[\left(\dfrac{-9-4\sqrt{3}}{6}\right)^2+\left(\dfrac{-4+\sqrt{3}}{2}\right)^2\right] =$

$= 3\cdot\left[\dfrac{81+72\sqrt{3}+48}{36}+\dfrac{16-8\sqrt{3}+3}{4}\right] = 3\cdot\dfrac{25}{3} = 25$

, il quadrato del lato: $(-2 - 1)^2 + (-1 - 3)^2 = 9 + 16 = 25$.

28. Determinare una formula per calcolare la misura della mediana che congiunge il vertice (x_A; y_A) con il punto medio del lato di vertici (x_B; y_B), (x_C; y_C).

Basta applicare e semplificare: $\dfrac{\sqrt{4\cdot x_A^2-4\cdot x_A\cdot(x_B+x_C)+x_B^2+2\cdot x_B\cdot x_C+x_C^2+(2\cdot y_A-y_B-y_C)^2}}{2}$

29. Il fatto che entrambe le coordinate di due punti *A* e *B* siano pari è condizione necessaria o sufficiente ad assicurare che le coordinate del punto medio del segmento *AB* siano anch'esse

pari? E che siano intere?

La prima condizione non è né necessaria né sufficiente, per esempio il punto medio di (1; 1) (3; 3) è (2; 2) e il punto medio di (2; 2), (4; 4) è (3; 3). La seconda condizione è sufficiente.

30. Enunciare una condizione sufficiente ad assicurare che le coordinate del baricentro di un triangolo siano entrambe intere; siano entrambe pari.

Tutte le coordinate dei vertici siano multiple di 3. Tutte le coordinate dei vertici siano multiple di 6

Con dati a piacere verificare la validità dei seguenti teoremi

Scegliamo per tutti gli esercizi un triangolo con coordinate "semplici": (0; 0), (6; 0), (2; 2), i punti medi dei lati sono (3; 0), (4; 1), (1; 1).

31. *In ogni triangolo ciascuna mediana relativa a un lato è minore della semisomma degli altri due lati.*

Le mediane misurano

$$\sqrt{(0-4)^2+(0-1)^2}=\sqrt{17},\sqrt{(6-1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{26},\sqrt{(2-3)^2+(2-0)^2}=\sqrt{5}$$

I lati misurano: $\sqrt{(0-6)^2+(0-0)^2}=6,\sqrt{(0-2)^2+(0-2)^2}=2\sqrt{2},\sqrt{(6-2)^2+(0-2)^2}=\sqrt{20}$. Si ha:

$\sqrt{17}<\frac{6+2\sqrt{2}}{2}=3+\sqrt{2}$, infatti $\left(3+\sqrt{2}\right)^2=9+2+6\sqrt{2}=11+6\sqrt{2}>11+6=17$. Analogamente si verificano le altre.

32. *In ogni triangolo la somma delle mediane è minore del perimetro.*

Si ha: $\sqrt{17}+\sqrt{26}+\sqrt{5}<\sqrt{20}+6+2\sqrt{2}$

33. *In ogni triangolo non equilatero ABC, di lato maggiore BC, scelto un qualsiasi punto P a esso interno, si ha:* $\overline{AP}+\overline{PB}<\overline{AC}+\overline{BC}$.

Come punto P prendiamo (2; 1), *B* (0; 0), *C* (6; 0), *A* (2; 2)

$$\sqrt{(2-2)^2+(2-1)^2}+\sqrt{(2-0)^2+\left(1-0^2\right)}=1+\sqrt{5};\sqrt{(2-6)^2+(2-0)^2}+6=\sqrt{20}+6>1+\sqrt{5}$$

34. *In ogni triangolo, scelto un qualsiasi punto P a esso interno, la somma delle sue distanze dai vertici è sempre minore del perimetro.*

Lo stesso P di prima:

$$\sqrt{(2-2)^2+(2-1)^2}+\sqrt{(2-0)^2+\left(1-0^2\right)}+\sqrt{(2-6)^2+(1-0)^2}=1+\sqrt{5}+\sqrt{17}<6+2\sqrt{2}+\sqrt{20}$$

35. *In ogni triangolo di lati che misurano a, b e c, la misura di una mediana qualsiasi è data dalla seguente formula, che scriviamo solo per la mediana relativa al lato di misura a,* $\frac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2}$.

Basta applicare e semplificare.

Aree di figure poligonali

Determinare l'area dei seguenti triangoli di cui sono date le coordinate dei vertici

1. a) (1; –2), (3; 4), (–3; 5); b) (–1/2; 2/3), (0; –7), (1/4; 1); c) (2/5; 0), (–3; 1/3), (–5/4; 1)

Usiamo il Teorema di Lagrange:

a) $S=\frac{1}{2}\cdot\left|\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-2&1&1&-2\\3&4&1&3&4\\-3&5&1&-3&5\end{array}\right)\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|4+6+15-(-12+5-6)\right|=\frac{1}{2}\cdot 38=19$;

b) $S=\frac{1}{2}\cdot\left|\left(\begin{array}{ccc|cc}-1/2&2/3&1&-1/2&2/3\\0&-7&1&0&-7\\1/4&1&1&1/4&1\end{array}\right)\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{7}{2}+\frac{1}{6}+0-\left(-\frac{7}{4}-\frac{1}{2}+0\right)\right|=\frac{1}{2}\cdot\frac{42+2+21+6}{12}=\frac{71}{24}$;

c) $S=\frac{1}{2}\cdot\left|\left(\begin{array}{ccc|cc} 2/5 & 0 & 1 & 2/5 & 0 \\ -3 & 1/3 & 1 & -3 & 1/3 \\ -5/4 & 1 & 1 & -5/4 & 1 \end{array}\right)\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{2}{15}+0-3-\left(-\frac{5}{12}+\frac{2}{5}+0\right)\right|=\frac{1}{2}\cdot\frac{57}{20}=\frac{57}{40}$

2. a) (1/4; 1), (3/2; –1/2), (–3/4; –3/2); b) $\left(2\cdot\sqrt{2};-1\right),\left(1/2;1-\sqrt{2}\right),\left(0;5\right)$

a) $S=\frac{1}{2}\cdot\left|\left(\begin{array}{ccc|cc} 1/4 & 1 & 1 & 1/4 & 1 \\ 3/2 & -1/2 & 1 & 3/2 & -1/2 \\ -3/4 & -3/2 & 1 & -3/4 & -3/2 \end{array}\right)\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|-\frac{1}{8}-\frac{3}{4}-\frac{9}{4}-\left(\cancel{\frac{3}{8}}-\cancel{\frac{3}{8}}+\frac{3}{2}\right)\right|=\frac{1}{2}\cdot\frac{37}{8}=\frac{37}{16}$;

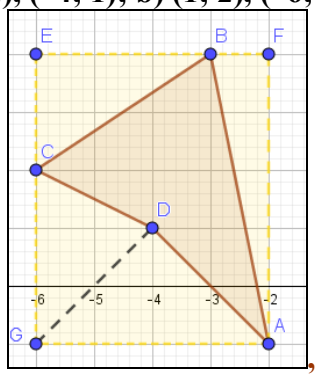
b) $S=\frac{1}{2}\cdot\left|\left(\begin{array}{ccc|cc} 2\sqrt{2} & -1 & 1 & 2\sqrt{2} & -1 \\ 1/2 & 1-\sqrt{2} & 1 & 1/2 & 1-\sqrt{2} \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right)\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|2\sqrt{2}-4+0+\frac{5}{2}-\left(0+10\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)\right|=\frac{1}{2}\cdot\left(1+8\sqrt{2}\right)=\frac{1+8\sqrt{2}}{2}$

3. Dopo aver verificato che applicando la formula di Lagrange al triangolo di vertici (–1/4; 1/8), (0; 1/2), (1; 2), si ottiene zero, spiegarne le ragioni geometriche.

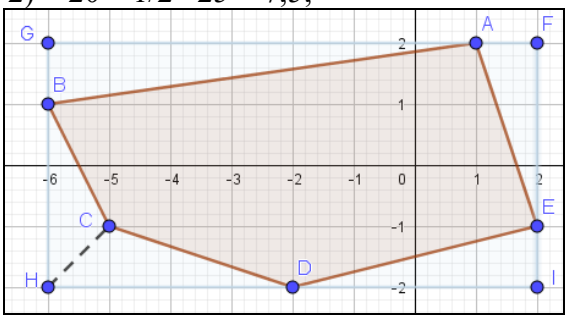
$S=\frac{1}{2}\cdot\left|\left(\begin{array}{ccc|cc} -1/4 & 1/8 & 1 & -1/4 & 1/8 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|\cancel{-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}+0-\left(\cancel{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}+0\right)\right|=0$, significa che i punti sono allineati

Determinare l'area dei seguenti poligoni di cui sono date le seguenti coordinate dei vertici

4. a) (–2; –1), (–3; 4), (–6; 2), (–4; 1); b) (1; 2), (–6; 1), (–5; –1), (–2; –2), (2; –1)

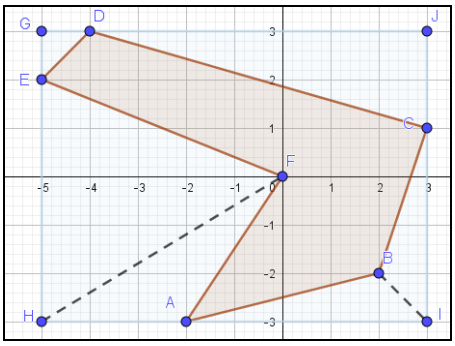
a) Rappresentiamo il poligono 

, lo racchiudiamo all'interno del rettangolo AFEG, sezioniamo il quadrilatero ADCG in due triangoli. L'area cercata è quindi 4 · 5 – 1/2 · (1 · 5 + 2 · 3 + 3 · 2 + 4 · 2) = 20 – 1/2 · 25 = 7,5;

b) 

8 · 4 – 1/2 · (1 · 3 + 7 · 1 + 3 · 1 + 4 · 1 + 4 · 1) = 32 – 1/2 · 21 = 21,5

5. (–2; –3), (2; –2), (3; 1), (–4; 3), (–5; 2), (0; 0)



8 · 6 – 1/2 · (5 · 1 + 4 · 1 + 2 · 7 + 1 · 1 + 5 · 5 + 3 · 3) = 48 – 1/2 · 58 = 19

Determinare per quali valori del parametro reale m, l'area del triangolo di vertici i punti dati ha il valore S indicato

6. a) (1; –2), (5; 1), (*m*; 3), *S* = 2; b) (–3; *m*), (4; 2), (–1; 0), *S* = 4; c) (2 + *m*; 3), (–1; 5 – 2*m*), (1; 4), *S* = 3

a) $\frac{1}{2}\cdot\left|\left(\begin{array}{ccc|cc}1 & -2 & 1 & 1 & -2\\ 5 & 1 & 1 & 5 & 1\\ m & 3 & 1 & m & 3\end{array}\right)\right| = 2; \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\left|1-2m+15-(m+3-10)\right| = 2 \Rightarrow \left|-3m+23\right| = 4 \Rightarrow m = \frac{19}{3} \vee m = 9$

b) $\frac{1}{2}\cdot\left|\left(\begin{array}{ccc|cc}-3 & m & 1 & -3 & m\\ 4 & 2 & 1 & 4 & 2\\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0\end{array}\right)\right| = 4; \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\left|-6-m+0-(-2+0+4m)\right| = 4 \Rightarrow \left|-5m-4\right| = 8 \Rightarrow m = -\frac{12}{5} \vee m = \frac{4}{5}$

c) $\frac{1}{2}\cdot\left|\left(\begin{array}{ccc|cc}2+m & 3 & 1 & 2+m & 3\\ -1 & 5-2m & 1 & -1 & 5-2m\\ 1 & 4 & 1 & 1 & 4\end{array}\right)\right| = 3; \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\left|10-4m+5m-2m^2+3-4-(5-2m+8+4m-3)\right| = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left|-2m^2-m-1\right| = 6 \Rightarrow 2m^2+m+7 = 0 \vee 2m^2+m-5 = 0 \Rightarrow \Delta = 1-56 < 0 \vee m = \frac{-1\pm\sqrt{41}}{4}$

7. a) (*m*/2 – 1; 3*m* + 1), (1; 0), (–*m*/2; 1), *S* = 8; b) (*m*/2; –3), (1/4; 2*m*/3), (*m* –1; 1 – *m*), *S* = 5

a) $\frac{1}{2}\cdot\left|\left(\begin{array}{ccc|cc}m/2-1 & 3m+1 & 1 & m/2-1 & 3m+1\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ -m/2 & 1 & 1 & -m/2 & 0\end{array}\right)\right| = 8; \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\left|0-\frac{3m^2}{2}-\frac{m}{2}+0-\left(0+\frac{m}{2}-1+3m+1\right)\right| = 8 \Rightarrow$

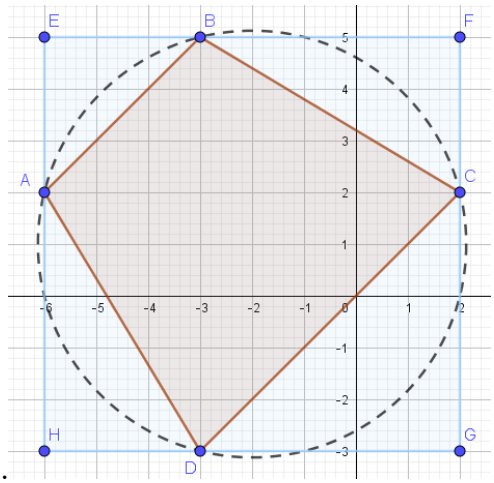
$\Rightarrow \left|-3m^2-8m\right| = 32 \Rightarrow m = \frac{-4\pm\sqrt{118}}{3} \vee \frac{\Delta}{4} = 16-96 < 0$

b) $\frac{1}{2}\cdot\left|\left(\begin{array}{ccc|cc}m/2 & -3 & 1 & m/2 & -3\\ 1/4 & 2/3m & 1 & 1/4 & 2/3m\\ m-1 & 1-m & 1 & m-1 & 1-m\end{array}\right)\right| = 5; \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\left|\frac{m^2}{3}-3m+3+\frac{1}{4}-\frac{m}{4}-\left(\frac{2}{3}m^2-\frac{2}{3}m+\frac{m}{2}-\frac{m^2}{2}-\frac{3}{4}\right)\right| = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left|2m^2-37m+48\right| = 120 \Rightarrow m = \frac{37\pm\sqrt{1945}}{4} \vee \left(m = \frac{21}{2} \vee m = 8\right)$

8. Considerando il trapezio isoscele di vertici (–6; 2), (–3; 5), (2; 2), (–3; –3), inscrivibile in una circonferenza di raggio $\sqrt{17}$, verificare il teorema: *in ogni quadrilatero inscrivibile in una circonferenza di raggio R, i cui lati misurano a, b, c e d, l'area è:* $\frac{\sqrt{(ac+bd)\cdot(ad+bc)\cdot(ab+cd)}}{4R}$.

Intano calcoliamo l'area del trapezio con i metodi tradizionali: 8 · 8 – 1/2 · (3 · 3 + 5 · 3 + 5 · 5 + 3 · 5) = 64



– 1/2 · 64 = 32. Adesso applichiamo la formula:

$$a=3\sqrt{2}, b=\sqrt{34}, c=5\sqrt{2}, d=\sqrt{34} \Rightarrow S=\frac{\sqrt{\left(3\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{2}+\sqrt{34}\cdot\sqrt{34}\right)\cdot\left(3\sqrt{2}\cdot\sqrt{34}+5\sqrt{2}\cdot\sqrt{34}\right)\cdot\left(3\sqrt{2}\cdot\sqrt{34}+5\sqrt{2}\cdot\sqrt{34}\right)}}{4\sqrt{17}}=$$

$$=\frac{\left(3\sqrt{2}\cdot\sqrt{34}+5\sqrt{2}\cdot\sqrt{34}\right)\sqrt{64}}{4\sqrt{17}}=\frac{\cancel{\sqrt{34}}^{\sqrt{2}}\cdot 8\sqrt{2}\cdot\cancel{8}^{2}}{\cancel{4}\,\cancel{\sqrt{17}}}=32$$

9. Con i dati dell'esercizio precedente, verificare il teorema *di Tolomeo* per cui: *in ogni quadrilatero inscrivibile in una circonferenza, la somma dei prodotti dei lati opposti è uguale al prodotto delle diagonali.*

Calcoliamo le misure delle diagonali: 8 e 8. Verifica: $3\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{2}+\sqrt{34}\cdot\sqrt{34}=30+34=34$

10. Su dati a piacere riferiti a un quadrato, verificare che in ogni quadrilatero, inscrivibile e anche circoscrivibile a una circonferenza, i cui lati misurano *a*, *b*, *c* e *d*, l'area si ottiene con la formula $\sqrt{abcd}$.

In un quadrato tutti i lati hanno la stessa misura, pertanto $\sqrt{abcd}=\sqrt{a^4}=a^2$, che effettivamente è l'area di un quadrato di lato che misura *a*

11. Provare che l'area di un triangolo i cui vertici hanno entrambe le coordinate intere è misurata da un numero razionale.

Basta considerare il Teorema di Lagrange, ovviamente il determinante di una matrice che ha tutti elementi interi è un numero razionale.

12. Dimostrare il teorema 9 nel caso particolare del triangolo equilatero.

Ovviamente il risultato non dipende dalla posizione del triangolo, dato che le trasformazioni isometriche non variano l'area. Consideriamo quindi il triangolo equilatero di vertici (–*a*; 0), $\left(0;\sqrt{3}a\right)$, (*a*; 0). La sua area (il lato misura 2*a*) è $\frac{(2a)^2\sqrt{3}}{4}=a^2\sqrt{3}$, usando il teorema di Lagrange:

$$S=\frac{1}{2}\cdot\left|\left(\begin{vmatrix}-a & 0 & 1\\ 0 & a\sqrt{3} & 1\\ a & 0 & 1\end{vmatrix}\right)\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|-a^2\sqrt{3}+0+0-a^2\sqrt{3}-0-0\right|=\frac{1}{2}\cdot 2a^2\sqrt{3}=a^2\sqrt{3}$$

13. Dimostrare il teorema 9 nel caso particolare del triangolo rettangolo.

Anche in questo caso consideriamo un generico, ma particolare, triangolo rettangolo, di vertici: (0; 0), (0; *a*), (*b*; 0), la cui area misura 1/2 *ab*. Con il teorema di Lagrange:

$$S=\frac{1}{2}\cdot\left|\left(\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & a & 1\\ b & 0 & 1\end{vmatrix}\right)\right|=\frac{1}{2}\cdot b\cdot\left|\begin{pmatrix}a & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{2}\cdot b\cdot a$$

La sfida

1. Dati i punti $A \equiv (-4)$, $B \equiv (-1)$ e $C \equiv (c)$, determinare i valori del parametro reale m per i quali è vera la seguente relazione: $\overline{AC}/\overline{BC} = m$.

Deve essere ovviamente $m > 0$, inoltre $\frac{|c+4|}{|c+1|} = \begin{cases} \frac{c+4}{c+1} & c<-4 \vee c>-1 \\ -\frac{c+4}{c+1} & -4<c<-1 \end{cases} = \begin{cases} 1+\frac{3}{c+1} & c<-4 \vee c>-1 \\ -1-\frac{3}{c+1} & -4<c<-1 \end{cases}$. È facile capire che $\frac{3}{c+1}$ può assumere qualsiasi valore reale positivo, per $c > -1$, mentre per $c < -4$, assume il suo massimo valore per $c = -4$, che vale -1. Quindi per $c > -1$ si ha $m > 1$, mentre per $c < -4$, si ha: $0 < m < 1$, Quindi qualsiasi m positivo e diverso da 1 va bene. D'altro canto se $c = -5/2$ si ha: $\frac{|-5/2+4|}{|-5/2+1|} = \frac{|3/2|}{|-3/2|} = 1$.

Perciò l'equazione ha significato per ogni $m > 0$

2. Dati i punti $A \equiv (-4)$, $B \equiv (-1)$ e $C \equiv (c)$, con $c \in \mathbb{N}$, per quali valori di c, $\overline{AC}/\overline{BC}$ è a) un numero intero minore o uguale a 7? b) un numero intero maggiore di 10?

a) Tenuto conto dell'esercizio precedente, l'espressione rappresenta un numero intero se e solo se $c + 1 = \pm 1$ oppure $c + 1 = \pm 3$, cioè se e solo se $c = 0$ (non accettabile perché non è un numero naturale), $c = -1$ (N.A.), $c = 2$, $c = -4$ (N.A.) In questi casi otteniamo 4 oppure 2.

b) da a) non vi sono soluzioni

3. Su un supporto rettilineo sono poste due sorgenti luminose, una di intensità x posta in A e l'altra di intensità y in B. In ottica si dimostra che i punti interni al segmento AB ugualmente illuminati dalle due sorgenti sono i punti P soddisfacenti la relazione: $\frac{\overline{PA}^2}{\overline{PB}^2} = \frac{y}{x}$. Se $A \equiv (a)$ e $B \equiv (b)$, con $b > a$, determinare le coordinate di P.

Se $x = y$, P è il punto medio di AB, diversamente $P \equiv \left(\frac{ax - by \pm (b-a)\cdot\sqrt{xy}}{x-y} \right)$]

4. Dati tre corpi di massa m_1;m_2;m_3; disposti su un segmento, il loro baricentro è il punto in cui si immagina concentrato un corpo di massa $m_1 + m_2 + m_3$; in modo che si trovi a distanze inversamente proporzionali dalle rispettive masse. Se i tre corpi sono disposti rispettivamente in $A_1 \equiv (a_1)$, $A_2 \equiv (a_2)$ e $A_3 \equiv (a_3)$, determinare la posizione del baricentro.

In questo caso dobbiamo considerare la cosiddette media pesata delle tre masse, ottenendo perciò $G \equiv \left(\frac{m_1 \cdot a_1 + m_2 \cdot a_2 + m_3 \cdot a_3}{m_1 + m_2 + m_3} \right)$

5. Indicando con (ABC) il rapporto semplice di 3 punti, provare che se $(ABC) \cdot (ABD) = 1$ allora AB e CD hanno lo stesso punto medio.

Nell'esercizio 9 all'inizio abbiamo mostrato che per $A \equiv (a)$, $B \equiv (b)$, $C \equiv (c)$ si ha: $(ABC) = \frac{c-a}{c-b}$, quindi è anche $(ABD) = \frac{d-a}{d-b}$. Se si ha:

$$\frac{c-a}{c-b} \cdot \frac{d-a}{d-b} = 1 \Rightarrow \cancel{cd} - ad - ac + a^2 = \cancel{cd} - bc - bd + b^2 \Rightarrow a^2 - b^2 = a\cdot(c+d) - b\cdot(c+d) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{(a-b)}\cdot(a+b) = \cancel{(a-b)}\cdot(c+d) \Rightarrow a+b = c+d \Rightarrow \frac{a+b}{2} = \frac{c+d}{2}$$

6. Dato il triangolo di vertici i punti $A \equiv (-4; 3)$, $B \equiv (-2; 2)$, $C \equiv (-1; -2)$, verificare il teorema: *il triangolo che ha per vertici i baricentri dei triangoli equilateri costruiti esternamente ai lati di un triangolo è equilatero*. Determinare i vertici del triangolo equilatero.

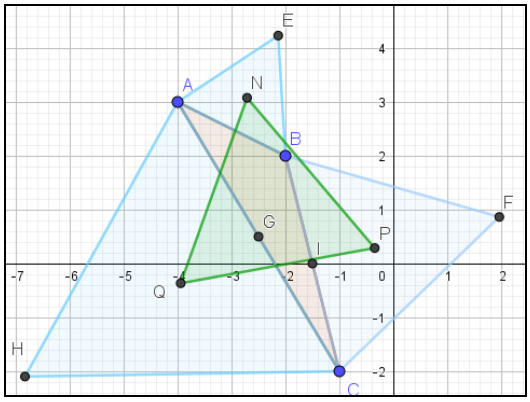
Determiniamo i terzi vertici dei triangoli equilateri:

$$\begin{cases}(x+4)^2+(y-3)^2=(x+2)^2+(y-2)^2\\(x+2)^2+(y-2)^2=(-4+2)^2+(3-2)^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}8x+16-6y+9=4x+4+4-4y\\x^2+4x+4+y^2-4y+4=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-6\pm\sqrt{3}}{2}\\y=\dfrac{5\pm2\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

ovviamente le soluzioni sono due perché i triangoli costruiti sul lato sono due, consideriamo quelli del triangolo esterno: $\left(\frac{-6+\sqrt{3}}{2};\frac{5+2\sqrt{3}}{2}\right)$. In modo analogo troviamo gli altri due vertici: $\left(\frac{-6+4\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{-5-5\sqrt{3}}{2};\frac{1-3\sqrt{3}}{2}\right)$. I baricentri dei triangoli sono:

$N\equiv\left(\dfrac{-4-2+\frac{-6+\sqrt{3}}{2}}{3};\dfrac{3+2+\frac{5+2\sqrt{3}}{2}}{3}\right)\equiv\left(\frac{-18+\sqrt{3}}{6};\frac{15+2\sqrt{3}}{6}\right)$; $P\equiv\left(\frac{-9+4\sqrt{3}}{6};\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$,

$Q\equiv\left(\frac{-15-5\sqrt{3}}{6};\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$. facilmente si verifica che NPQ è equilatero.

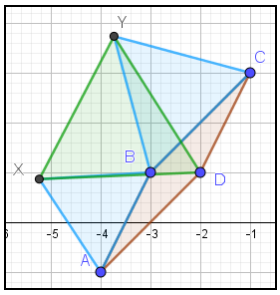


7. Dato il parallelogramma di vertici i punti $A\equiv(-4;-1)$, $B\equiv(-3;1)$, $C\equiv(-1;3)$, $D\equiv(-2;1)$, verificare il teorema: *costruiti sui lati adiacenti AB e BC di un parallelogramma ABCD i triangoli equilateri ABX e BCY, il triangolo XYD è equilatero.*

Determiniamo i vertici dei triangoli equilateri:

$$\begin{cases}(x+4)^2+(y+1)^2=(x+3)^2+(y-1)^2\\(x+4)^2+(y+1)^2=(-4+3)^2+(-1-1)^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}8x+16+2y+1=6x+9-2y+1\\x^2+8x+16+y^2+2y+1=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-7\pm2\sqrt{3}}{2}\\y=\dfrac{\pm\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

, poiché non è specificato se i triangoli devono essere costruiti internamente o esternamente abbiamo due soluzioni $X\equiv\left(\frac{-7\pm2\sqrt{3}}{2};\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, in modo analogo determiniamo $Y\equiv\left(\pm\sqrt{3}-2;2\pm\sqrt{3}\right)$, facilmente si verifica che



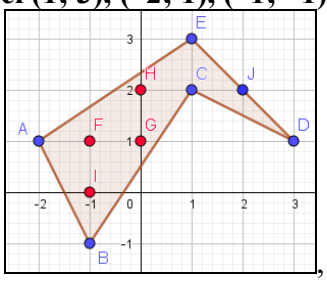
XYD è equilatero di lato che misura $\sqrt{5}$ e $2\sqrt{2}$

8. Dati tre corpi di massa $m_1;m_2;m_3$; disposte ai vertici di un triangolo, il baricentro del sistema è il punto ove si immagina posto un corpo di massa $m_1+m_2+m_3$; in modo che si trovi a distanze inversamente proporzionali dalle masse iniziali. Se le tre masse sono disposte rispettivamente nei

punti $A_1 \equiv (x_1; y_1)$, $A_2 \equiv (x_2; y_2)$, $A_3 \equiv (x_3; y_3)$, determinare le coordinate del baricentro.

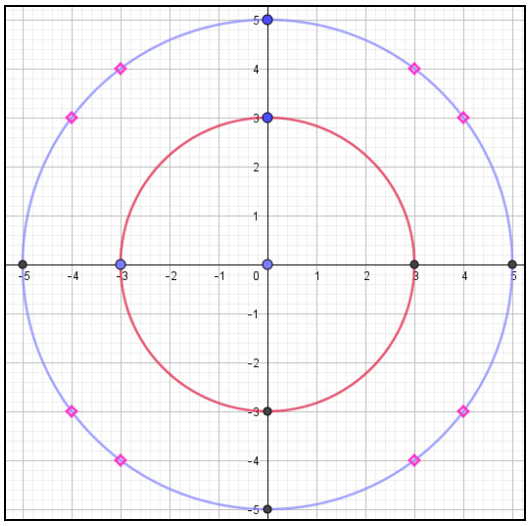
Vedi esercizio 4: $G \equiv \left(\frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + m_3 \cdot x_3}{m_1 + m_2 + m_3}; \frac{m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2 + m_3 \cdot y_3}{m_1 + m_2 + m_3} \right)$

9. Verificare la validità del seguente Teorema di Pick: L'area di ogni poligono semplice (privo cioè di intersezioni fra i suoi lati), i cui vertici sono punti reticolo, è ($p/2 + i - 1$), in cui p è il numero dei punti reticolo sul perimetro del poligono, i quello dei punti reticolo interni. Applicarla al poligono di vertici (1; 3), (–2; 1), (–1; –1), (1; 2), (3; 1).

Consideriamo la figura 

, facilmente si calcola che l'area misura 6. Si ha inoltre $i = 4$ e $p = 6$, quindi la formula di Pick diventa: $(6/2 + 4 - 1) = 3 + 4 - 1 = 6$.

10. Per quali valori di n, numero naturale, i punti reticolo contenuti dentro il cerchio di centro l'origine e raggio n sono solo 4 in meno di quelli contenuti dentro il cerchio e sulla circonferenza?

Consideriamo la figura. 
In ogni caso sulla circonferenza, per n intero vi sono i 4 punti reticolo (n; 0), (0; n), (–n; 0) e (0; –n). Se però n è ipotenusa di una terna pitagorica, allora avremo anche altri punti, per esempio per $n = 5$ quelli mostrati in figura. questo perché se $a^2 + b^2 = n^2$, allora avremo anche gli 8 punti ($\pm a$; $\pm b$).

11. Con riferimento al precedente quesito se i punti in più superano i 4, quanti sono?

Sono almeno 8 in più, come detto prima, ma possono anche essere 16 se n è ipotenusa di due diverse terne pitagoriche, per esempio: 65 fa parte di (13; 63; 65) ma anche di (33; 56; 65).

12. Un quadrilatero con centro di simmetria ha il baricentro in tale punto, determinarne le coordinate in funzione di quelle dei vertici.

Tenuto conto dell'esercizio 8, avremo ovviamente la media aritmetica per 4 punti, ossia: $G \equiv \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}; \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4} \right)$

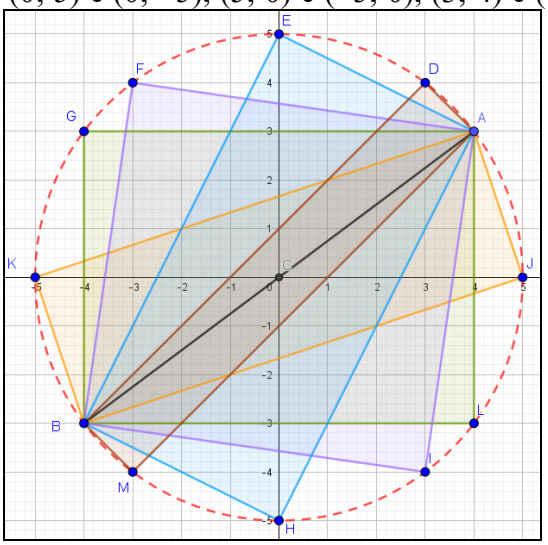
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali.

1. (AHSME 1987) Consideriamo il triangolo *OAB*, con *O* ≡ (0; 0), *A* ≡ (36; 15) , *B* ≡ (*a*, *b*), con *a*, *b* ∈ ℤ . Qual è il minimo valore che può assumere l'area di *OAB*?

L'area di OAB è $\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix}0 & 0 & 1\\ 36 & 15 & 1\\ a & b & 1\end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix}36 & 15\\ a & b\end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\cdot|36b-15a| = \frac{3}{2}\cdot|12b-5a|$. Dato che a e b devono essere interi, il minimo valore che può assumere il valore assoluto è 1, il che effettivamente accade per esempio per $a = 5$ e $b = 2$. Quindi il minimo valore dell'area è 3/2.

2. (AHSME 1995) Due vertici non adiacenti di un rettangolo hanno coordinate (4; 3) e (−4;−3). Se le coordinate degli altri due vertici sono entrambe intere, quanti sono tali rettangoli?

Le diagonali del rettangolo hanno la stessa lunghezza e si tagliano a metà. La diagonale data misura $\sqrt{(4+4)^2+(3+3)^2} = 10$ e il suo punto medio è l'origine: (0; 0). L'altra diagonale deve avere gli estremi sul cerchio di raggio 5 centrato sull'origine e deve avere coordinate intere sugli estremi. Quindi dobbiamo trovare le soluzioni intere dell'equazione $x^2 + y^2 = 5^2$. Le uniche soluzioni possibili sono le diagonali di estremi le coppie seguenti: (0; 5) e (0; −5), (5; 0) e (−5; 0), (3; 4) e (−3; −4), (−3; 4) e (3; −4), (4; −3) e (−4; 3).

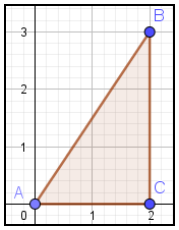
Quindi la risposta è 5. 

3. (OMI1997) In un piano cartesiano sono dati i punti seguenti: *A* = (0; 15); *B* = (20; 0); *C* = (0; 0). Qual è la larghezza minima di una striscia rettilinea che contiene tutti e tre i punti? (Chiamiamo striscia rettilinea la porzione di piano compresa tra due rette parallele, comprese le due rette)

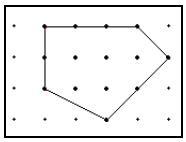
Consideriamo la figura,

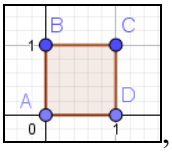
la striscia deve essere formata da rette che passano per i 3 punti, quella mostrata è certamente la più "stretta". Abbiamo indicato un triangolo rettangolo di area 1/2 · 15 · 20 = 150. Dato che l'ipotenusa è lunga 25 (terna pitagorica 3 · 5, 4 · 5, 5 · 5), l'altezza a essa relativa (che è la lunghezza cercata) è 150 · 2 /25 = 12.

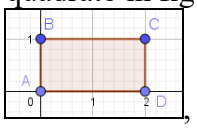
4. (OMI1998) Sia D il dominio del piano cartesiano dei punti (*x*; *y*) tali che *x* – [*x*] ≤ *y* – [*y*]. Con 0 ≤*x*≤2, 0 ≤ *y* ≤ 3, ricordiamo che [a] indica la parte intera di a ossia il più grande intero minore o uguale ad a. Quanto misura l'area di D?

Abbiamo: $x-[x]=\begin{cases} x & 0\le x<1 \\ x-1 & 1\le x<2 \\ 0 & x=2 \end{cases}$ e $y-[y]=\begin{cases} y & 0\le y<1 \\ y-1 & 1\le y<2 \\ y-2 & 2\le y<3 \\ 0 & y=3 \end{cases}$, perciò in ogni caso $0 \le x - [x] \le 1$ e $0 \le y - [y] \le 1$, quindi D è l'area mostrata in figura 

che misura 3

5. (HSMC2002) Un *geoboard* è una tavola simile a un piano cartesiano, su cui sono piantati dei chiodi a distanze uguali, in modo da formare ascisse e ordinate. Tendiamo un elastico come in figura, in modo da formare un poligono.  **Per aree di tali poligoni vale la formula di Pick: $A = a \cdot I + b \cdot C + c$, con a, b e c valori costanti, I il numero di *chiodi* dentro la figura e C sul contorno. Determinare $a \cdot b \cdot c$. Suggerimento: considerare casi particolari, non per forza la figura.**

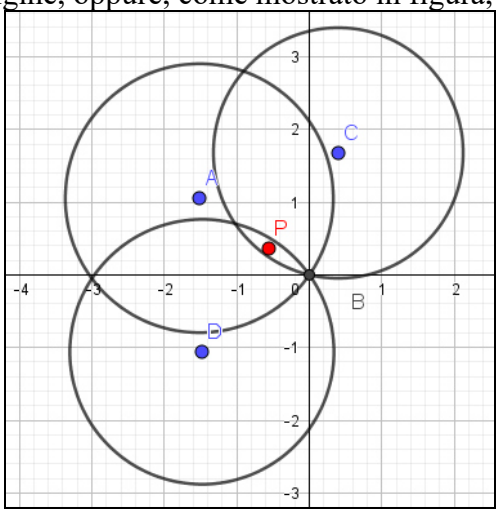
Se consideriamo il quadrato in figura, 

, si ha: $A = 1$; $I = 0$ e $C = 4$, quindi deve essere $1 = 4b + c$. Per il rettangolo 

, si ha: $A = 2$; $I = 0$ e $C = 6$, quindi deve essere $2 = 6b + c$. Possiamo perciò già trovare b e c: $\begin{cases} 4b+c=1 \\ 6b+c=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b=1 \\ 6b+c=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=1/2 \\ c=-1 \end{cases}$. Per trovare a usiamo la figura fornita dal testo per la quale si ha: $17/2 = 5a + 9 \cdot 1/2 - 1 \Rightarrow 5a = 5 \Rightarrow a = 1$. Infine $a \cdot b \cdot c = 1 \cdot 1/2 \cdot (-1) = -1/2$

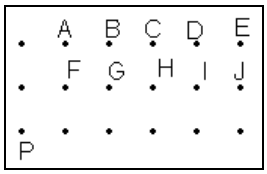
6. (OMI2003) Tre circonferenze passano per l'origine. Il centro della prima circonferenza sta nel primo quadrante, il centro della seconda sta nel secondo quadrante, il centro della terza sta nel terzo quadrante. Se P è un punto interno alle tre circonferenze, allora P
A) sta nel II quadrante B) sta nel I o III quadrante C) sta nel IV quadrante D) non esiste E) non si può dire nulla

Osserviamo che se una circonferenza ha il centro in un quadrante e passa per O nessuno dei suoi punti può appartenere al quadrante opposto, così P non può stare né nel I, III o IV quadrante, quindi o non esiste, le tre circonferenze si incontrnao nell'origine, oppure, come mostrato in figura, sta nel II quadrante. Risposta A



7. (HSMC2003) Ogni punto della griglia sottostante dista un'unità dai punti più vicini in

orizzontale e in verticale. Quale punto è esattamente a $\sqrt{10}$ unità da P?



Dato che la distanza si misura con il teorema di Pitagora e le misure dei cateti sno tutte intere, l'unico modo per ottenere $\sqrt{10}$ è che i cateti siano lunghi 1 e 3, il che accade solo per il punto *H*.

8. (Rice 2007) Quanto vale l'area del più piccolo triangolo con tutti i lati misurati da numeri razionali e tutti i vertici punti reticolo?

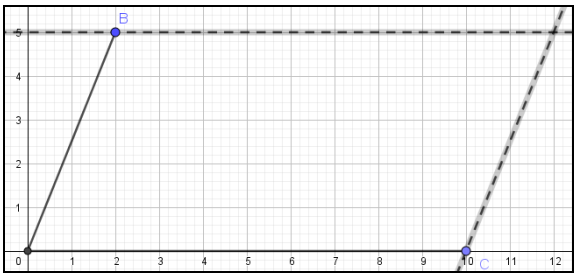
Il triangolo deve avere almeno un lato che non è parallelo agli assi cartesiani e poiché (3, 4, 5) è la più piccola terna pitagorica, la più piccola lunghezza per il detto lato è 5, scegliendo i cateti come 3 e 4, otteniamo l'area minima, 6.

9. (HSMC) Four points $P_1 \equiv (x_1; y_1)$, $P_2 \equiv (x_2; y_2)$, $P_3 \equiv (x_3; y_3)$, $P_4 \equiv (x_4; y_4)$, are placed in the plane so that the quadrilateral $P_1P_2P_3P_4$ is convex. Denote the triangles $T_1 = P_2P_3P_4$, $T_2 = P_1P_3P_4$, $T_3 = P_1P_2P_4$, $T_4 = P_1P_2P_3$. Let $Q_1Q_2Q_3Q_4$, denote the centroids[1] of triangles T_1, T_2, T_3, T_4 respectively and form the lines that pass through the points P_iQ_i for i = 1, 2, 3, 4. These lines intersect in a common point. Find this common point of intersection.

The problem is equivalent at finding the centroid of the quadrilateral, so it is

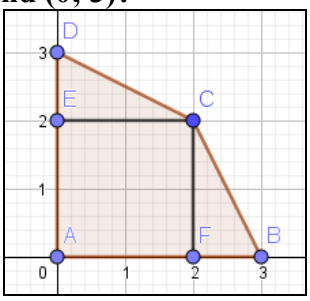
$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4};\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}\right)$$

10. (HSMC2003) A parallelogram has vertices at (0; 0) ; (2; 5) ; (m; n) and (10;0), where m and n are both positive numbers. How many units are in the length of the longest diagonal of the parallelogram?

Using the figure 

we obtain m = 12 and n = 5, so the diagonal measure $\sqrt{5^2+12^2}=13$

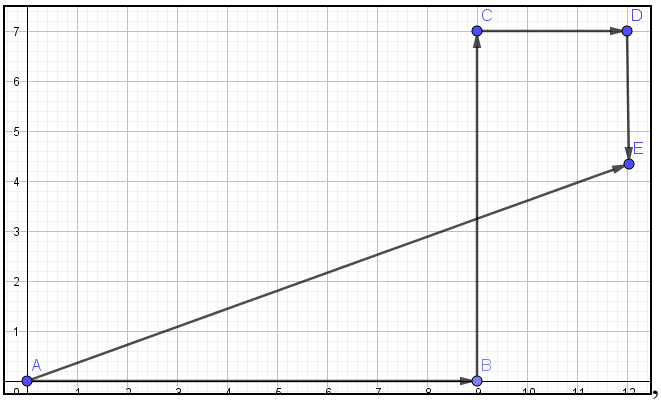
11. (HSMC2004) How many square units are in the area of the quadrilateral with vertices (0; 0), (3; 0), (2; 2) and (0; 3)?

Using the figure 

and dividing as shown we have: 4 + 1 · 2/2 + 1 · 2 /2 = 6

12. (HSMC2004) Starting at home, a man travelled 9 miles east, then 7 miles north, then 3 miles east, then x miles south. At that point, he was 13 miles from home. Find all possible values for x.

[1] Baricentri

Consider the figure 

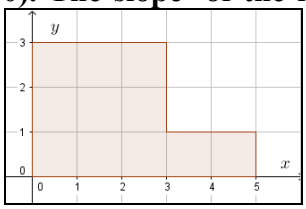
, where $DE = x$ and $AE = 13$. We have: $13=\sqrt{12^2+(7-x)^2} \Rightarrow 169=144+(7-x)^2 \Rightarrow (7-x)^2=25 \Rightarrow 7-x=5 \vee 7-x=-5 \Rightarrow x=2 \vee x=12$

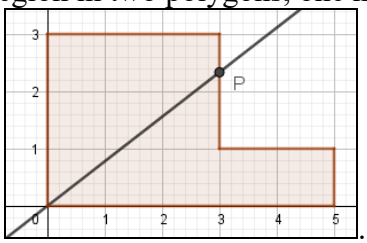
13. (HSMC2006) The two points *A*(2; 0) and *B*(3; 5) are given. Find all values of *c* such that a third point *C*(0; *c*) makes ABC a right triangle with the right angle at *C*.

We must have: $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}^2 \Rightarrow (2^2+c^2)+\left[3^2+(5-c)^2\right]=1^2+5^2 \Rightarrow 4+c^2+9+25-10c+c^2=26 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2c^2-10c-12=0 \Rightarrow c^2-5c-6=0 \Rightarrow c=2 \vee =3$.

14. (HSMC2008) The distance between the points (*x*; *x*²) and (2*x*; 4*x*²) is $\sqrt{38}$. Find all possible values of *x*.

$(x-2x)^2+(x^2-4x^2)=38 \Rightarrow x^2+9x^4-38=0 \Rightarrow x^2=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+1368}}{18}=\dfrac{-1\pm 37}{18}=\begin{cases}2\\ -19/9\ (NA)\end{cases} \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$

15. (MT1997) In the *xy*-plane, consider the L-shaped region bounded by horizontal and vertical segments with vertices at (0; 0), (0; 3), (3; 3), (3; 1), (5, 2; 1) and (5; 0). The slope[2] of the line through the origin that divides the area of this region exactly in half is? 

The line divide the L-shaped region in two polygons, one ha the form of a right trapezoid, whose area measures 11/2 (see the figure) 

. Thus determine the slope is equivalent to find coordinates of *P*. We have: $11/2 = [3 + (3 - y_P)] \cdot 3/2 \Rightarrow 11 = 18 - 3y_P \Rightarrow y_P = 7/3 \Rightarrow P \equiv (3; 7/3)$ and the slope is $(7/3)/3 = 7/9$.

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. (Accademia militare) In un sistema cartesiano, i punti *A* ≡ (2; 5) e *B* ≡ (–2;–5) sono:
A) asimmetrici **B) simmetrici rispetto all'asse *y***
C) simmetrici rispetto all'asse delle *x* **D) simmetrici rispetto all'origine**

La risposta è ovviamente D

2. (Accademia militare) Dato nel piano cartesiano il triangolo ABC, i cui vertici hanno rispettivamente le coordinate: *A* ≡ (6; 2), *B* ≡ (4; 5), *C* ≡ (3; 3) le coordinate dei vertici del triangolo *A*' *B*'*C*' ad esso simmetrico rispetto all'asse *y* sono:
A) *A*' ≡ (–6; 2), *B*' ≡ (–4; 5), *C*' ≡ (–3; 3) **B) *A*' ≡ (–6; –2), *B*' ≡ (–4; –5), *C*' ≡ (–3; –3)**
C) *A*' ≡ (3; 3) , *B*' ≡ (5; 4), *C*' ≡ (6; 2) **D) *A*' ≡ (6; –2), *B*' ≡ (4; –5), *C*' ≡ (3;–3)**

[2] Pendenza

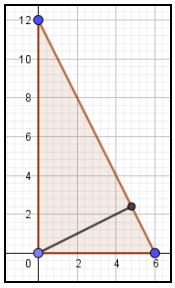
La simmetria rispetto a y comporta il fatto che si mantengono le ordinate e cambia il segno delle ascisse, pertanto la risposta è A

3. (Architettura 2002) Quanto misura l'area del triangolo che ha vertici in *A*(−1; 1), *B* (3; 2), *C* (1; −2)? A) 7,5 B) 7 C) 8 D) 6,5 E) Nessuno degli altri valori.

Possiamo usare la formula di Lagrange: $\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix}-1 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 1\end{matrix}\begin{matrix}-1 & 1\\ 3 & 2\\ 1 & -2\end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|-2+1-6-(2+2+3)\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|-14\right| = 7$,

risposta B

4. (Architettura 2002) Si consideri il segmento che congiunge fra di loro i punti di coordinate (0; 12) e (6; 0) del piano cartesiano. Quanto vale la distanza di questo segmento dall'origine del piano? A) $12\cdot\sqrt{5}/5$ **B)** $13\cdot\sqrt{5}/5$ **C)** $8\cdot\sqrt{5}/5$ **D)** $11\cdot\sqrt{5}/5$ **E)** $9\cdot\sqrt{5}/5$

La distanza altri non è che l'altezza relativa all'ipotenusa del triangolo rettangolo in figura, la cui area misura 1/2 · 12 · 6 = 36, 

, e poiché l'ipotenusa misura $\sqrt{12^2+6^2} = 6\sqrt{5}$. La distanza misura $\frac{2\cdot 36}{6\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$, che è la risposta A

5. (Veterinaria 2004) Il punto T ≡ (–*k*; *k*² + 1) A) appartiene al semipiano positivo delle *y* per ogni valore di *k* B) appartiene al semipiano positivo delle *y* solo se *k* > 0 C) appartiene al secondo quadrante per ogni valore di *k* D) appartiene all'asse delle ascisse per *k* = 0 E) appartiene al semipiano negativo delle *x* per ogni valore di *k*

Osserviamo che –*k* può assumere qualsiasi segno, mentre $k^2 + 1$ è sempre positivo, pertanto la risposta corretta è A

6. (Ingegneria Università di Napoli, 2009) Dati i punti *A* ≡ (2; 5), *B* ≡ (4; 4), *C* ≡ (7; 0), *D* ≡ (1; 6), quale rappresenta il punto più lontano dall'origine?

Basta considerare quale fra i seguenti numeri è maggiore:

$$\sqrt{4+25} = \sqrt{29}, \sqrt{16+16} = \sqrt{32}, \sqrt{49} = 7, \sqrt{1+36} = \sqrt{37}$$

Quindi la risposta è C