3. Rette e trasformazioni geometriche

3.1. Curve di primo grado

Concetto di luogo geometrico–analitico

Tradurre in equazione i seguenti luoghi di punti del piano cartesiano

1. La somma fra l'ascissa e il doppio dell'ordinata è 1

Detta x l'ascissa e y l'ordinata, si ha: $x + 2y = 1$

2. Il triplo dell'ascissa differisce dal doppio dell'ordinata di 5

Detta x l'ascissa e y l'ordinata, si ha: $3x - 2y = 5$

3. Il quadruplo dell'ascissa supera la metà dell'ordinata di 1

Detta x l'ascissa e y l'ordinata, si ha: $4x = y/2 + 1$

4. La differenza tra la metà dell'ascissa e un quarto dell'ordinata è 4

Detta x l'ascissa e y l'ordinata, si ha: $x/2 - y/4 = 4$

5. La somma fra il quadruplo dell'ascissa e un terzo dell'ordinata è 1

Detta x l'ascissa e y l'ordinata, si ha: $4x + y/3 = 1$

6. Il triplo dell'ordinata supera il doppio dell'ascissa di 2

Detta x l'ascissa e y l'ordinata, si ha: $3y = 2x + 2$

7. Il quadrato dell'ascissa è il doppio dell'ordinata

Detta x l'ascissa e y l'ordinata, si ha: $x^2 = 2y$

8. Il cubo dell'ordinata è 5 volte il quadrato dell'ascissa

Detta x l'ascissa e y l'ordinata, si ha: $5x^2 = y^3$

9. La differenza fra la quarta potenza dell'ascissa e l'ordinata è 3

Detta x l'ascissa e y l'ordinata, si ha: $x^4 - y = 3$

10. La somma fra il quadrato dell'ascissa e il cubo dell'ordinata è 7

Detta x l'ascissa e y l'ordinata, si ha: $x^2 + y^3 = 7$

11. La distanza dall'origine è metà della distanza da $A \equiv (1; -2)$

Detta x l'ascissa e y l'ordinata, si ha: $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}/2$, quadrando e semplificando: $3x^2+3y^2+2x-4y-5=0$

12. La distanza da $A \equiv (3; 2)$ è doppia della distanza da $B \equiv (2; 3)$

$\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2} = 2\cdot\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$, quadrando e semplificando: $3x^2+3y^2-10x-20y+39=0$

13. Il quadrato della distanza da $A \equiv (-2; 0)$ è uguale al quadrato della distanza da $B \equiv (-2; -5)$

$\left(\sqrt{(x+2)^2+y^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x+2)^2+(y+5)^2}\right)^2 \Leftrightarrow 2y+5=0$

14. Un terzo della distanza da $A \equiv (3; -2)$ sottratto ai 3/5 della distanza da $B \equiv (-1;-1)$ è 0

$\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2}/3 - 3\cdot\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}/5 = 0$ quadrando e semplificando: $56x^2+56y^2+312x+62y-163=0$

15. La somma del quadrato della distanza da $A \equiv (3; -5)$ con la distanza da $B \equiv (2; -4)$ è 7

$\left(\sqrt{(x-3)^2+(y+5)^2}\right)^2 + \sqrt{(x-2)^2+(y+4)^2} = 7$ che si semplifica in: $x^4-12x^3+2x^2y^2+20x^2y+89x^2-12xy^2-120xy-320x+y^4+20y^3+153y^2+532y+709=0$

16. La somma dei quadrati delle distanze da $A \equiv (-1; 0)$ e da $B \equiv (1; 0)$ è 4

$\left(\sqrt{(x+1)^2+y^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(x-1)^2+y^2}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow x^2+y^2-1=0$

17. Il rapporto della distanza da $A \equiv (-2; 1)$ rispetto alla distanza da $B \equiv (3; -1)$ è 3

$\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}/\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2} = 3$, quadrando e semplificando: $8x^2+8y^2-58x-20y-85=0$

18. Il prodotto delle distanze dall'origine e dal punto $A \equiv (-3; 4)$ è uguale a 15

$\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{(x+3)^2+(y-4)^2}=15$, quadrando e semplificando: $x^4+6x^3+2x^2y^2-8x^2y+25x^2+6xy^2+y^4-8y^3+25y^2-225=0$

19. Il cubo della distanza dall'origine differisce di 4 dal quadrato della distanza da $A \equiv (0; -3)$

$\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3=\left(\sqrt{x^2+(y+3)^2}\right)^2+4$, che si semplifica in: $x^6+3x^4y^2-x^4+3x^2y^4-2x^2y^2-12x^2y-10x^2+y^6-y^4-12y^3-46y^2-60y-25=0$

20. Il quadrato della somma dei quadrati delle distanze da $A \equiv (-1; 0)$ e da $B \equiv (1; 0)$ è 4

$x^4+y^4+2x^2y^2+2x^2+2y^2=0$

21. Formano con i vertici $A \equiv (2; 1)$, $B \equiv (0; 3)$ un triangolo isoscele di base AB

Imponiamo la condizione che i lati siano uguali: $\left(\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}\right)^2=\left(\sqrt{x^2+(y-3)^2}\right)^2$, semplifichiamo: $x-y+1=0$

22. Formano con i vertici $A \equiv (0; 4)$, $B \equiv (-1; 3)$ un triangolo rettangolo di ipotenusa AB

Scriviamo il Teorema di Pitagora: $\left(\sqrt{x^2+(y-4)^2}\right)^2+\left(\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}\right)^2=\left(\sqrt{1^2+(-1)^2}\right)$, che si semplifica in $x^2+y^2+x-7y+12=0$

23. La differenza dei quadrati delle distanze dall'origine e da $A \equiv (3; 0)$ è uguale alla somma dei quadrati delle distanze da $B \equiv (0; 1)$ e da $C \equiv (0; -2)$

$\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2-\left(\sqrt{(x-3)^2+y^2}\right)^2=\left(\sqrt{x^2+(y-1)^2}\right)^2+\left(\sqrt{x^2+(y+2)^2}\right)^2$, ossia $x^2+y^2-3x+y+7=0$

24. La somma dei quadrati delle distanze da $A \equiv (1; 1)$ e da $B \equiv (-2; 1)$ è uguale al rapporto dei quadrati delle distanze da $C \equiv (-1; -1)$ e da $D \equiv (1; -2)$

$\left(\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}\right)^2+\left(\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}\right)=\left(\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}\,/\,\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}\right)^2$

$\Leftrightarrow 2x^4-2x^3+4x^2y^2+4x^2y+12x^2-2xy^2+16xy-6x+2y^4+4y^3+6y+33=0$

25. La somma della distanza dall'asse x è il triplo della distanza dall'origine

$|y|=3\cdot\sqrt{x^2+y^2}$, quadrando e semplificando: $3x^2+2y^2=0$

26. Il quadrato della distanza da $A \equiv (2; 0)$ è maggiore della distanza da $B \equiv (-3; 0)$

$\left(\sqrt{(x-2)^2+y^2}\right)>\sqrt{(x+3)^2+y^2} \Leftrightarrow x^4-8x^3+2x^2y^2+23x^2-8xy^2-38x+y^4-7y^2+7>0$

27. La distanza dall'asse delle ascisse è uguale alla distanza dall'asse delle ordinate

Le distanze dagli assi sono ovviamente i valori assoluti delle incognite: $|x| = |y| \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0$

28. Il rapporto delle distanze dagli assi coordinati è 3

Come sopra : $|x|/|y| = 3 \vee |y|/|x| = 3 \Leftrightarrow x = \pm 3y,\ y \neq 0 \vee y = \pm 3x,\ x \neq 0$

29. Il prodotto delle distanze dagli assi coordinati è maggiore del rapporto della distanza dall'origine rispetto alla distanza da $A \equiv (-2; 4)$

$|x\cdot y|>\sqrt{x^2+y^2}\,/\,\sqrt{(x-2)^2+(y+4)^2} \Leftrightarrow x^4y^2-4x^3y^2+x^2y^4+8x^2y^3+20x^2y^2-x^2-y^2>0$

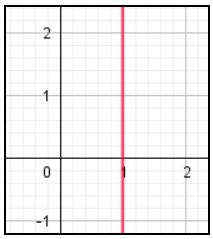
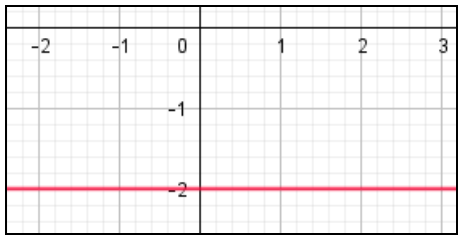
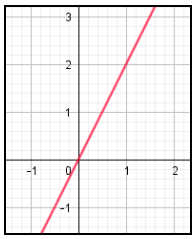
30. I punti che formano con i vertici $A \equiv (1; -3)$, $B \equiv (2; 0)$ un triangolo di area 1

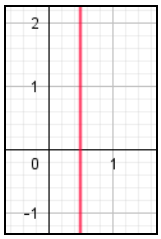
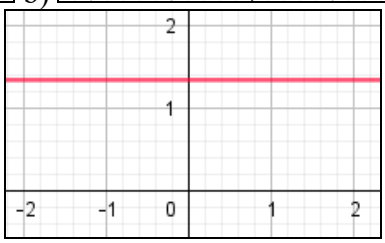
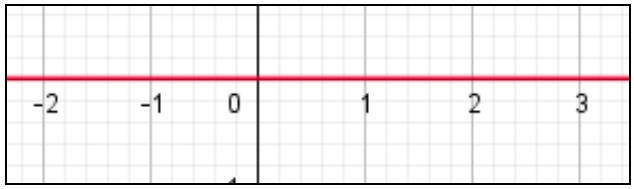
Applichiamo il Teorema di Lagrange: $\frac{1}{2}\cdot abs\left(\begin{vmatrix}1 & -3 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ x & y & 1\end{vmatrix}\right)=1 \Leftrightarrow 9x^2-6xy+y^2-36x+12y+32=0$, con abs indichiamo il valore assoluto.

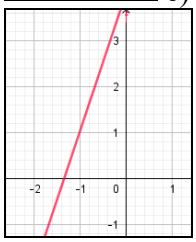
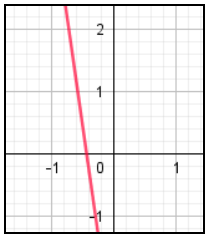
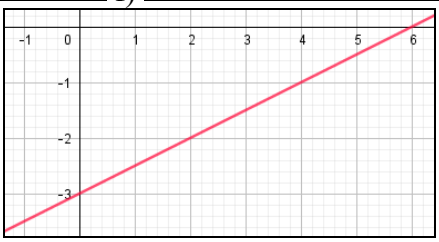
Equazione della retta

Rappresentare le rette aventi le seguenti equazioni

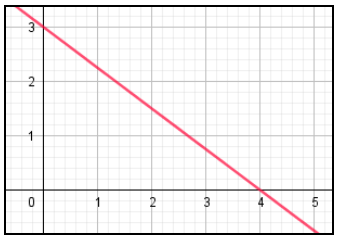
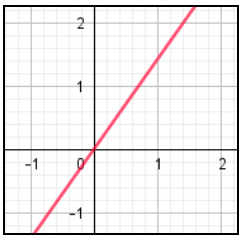
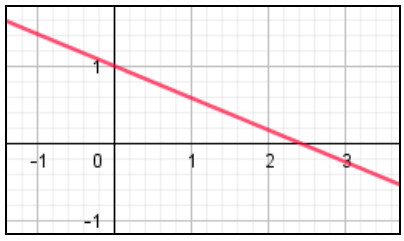
1. a) $x = 1$; b) $y = -2$; c) $y = 2x$; d) $2x = 1$; e) $3y = 4$; f) $5y = 0$; g) $y = 3x + 4$; h) $y = -7x - 3$; i) $y = x/2 - 3$

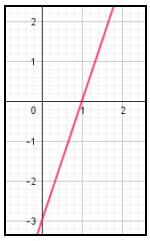
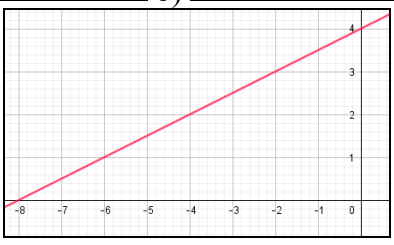
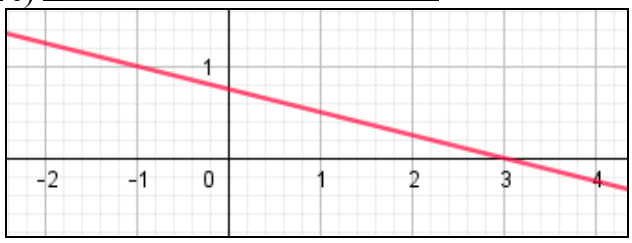
a) 
b) 
c) 

d) 
e) 
f) 

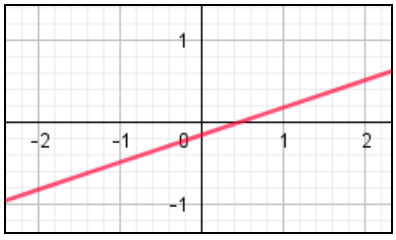
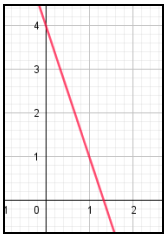
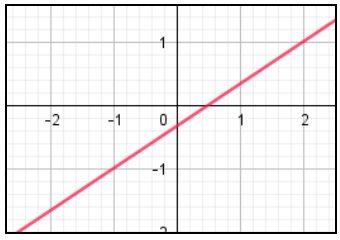
g) 
h) 
i) 

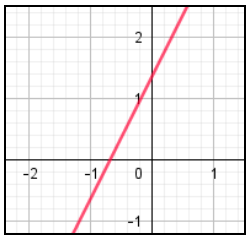
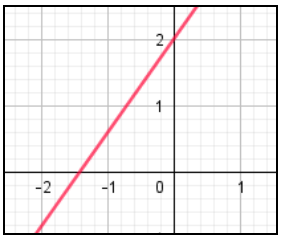
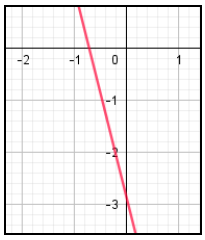
2. a) $y = -3/4x + 3$; b) $y = \sqrt{2}x$; c) $y = \left(1-\sqrt{2}\right)x + 1$; d) $3x - y - 3 = 0$; e) $2y = x + 8$; f) $x = -4y + 3$

a) 
b) 
c) 

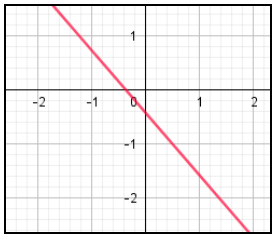
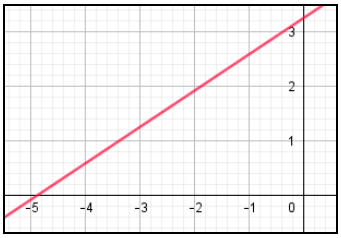
d) 
e) 
f) 

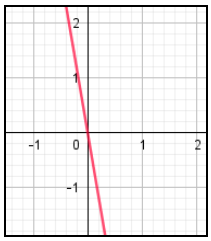
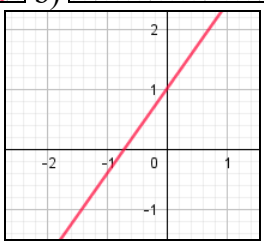
3. a) $2x - 6y - 1 = 0$; b) $4 = 3x + y$; c) $0 = 3y + 1 - 2x$; d) $1/2y - 2/3 = x$; e) $\sqrt{2}x = y - 2$; f) $-\sqrt{2} = 2x + \frac{1}{2}y$

a) 
b) 
c) 

d)  e)  f) 

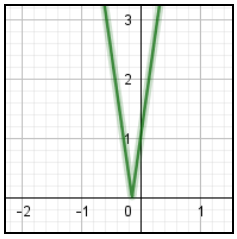
4. **a)** $2x-\sqrt{3}y+1-\sqrt{3}=0$; **b)** $\frac{2}{3}x-y+1+\sqrt{5}=0$; **c)** $\left(1+\sqrt{2}\right)x-\left(1-\sqrt{2}\right)y=0$; **d)** $\sqrt{2}x-y+1=0$

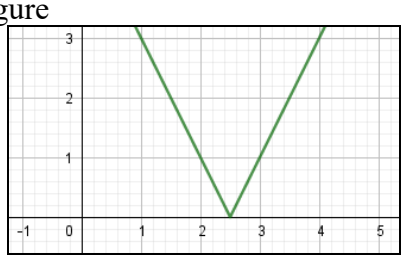
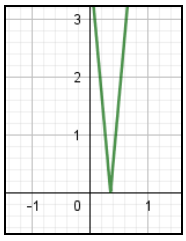
a)  b) 

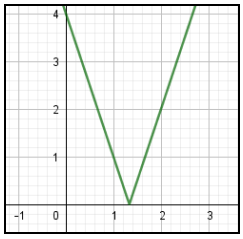
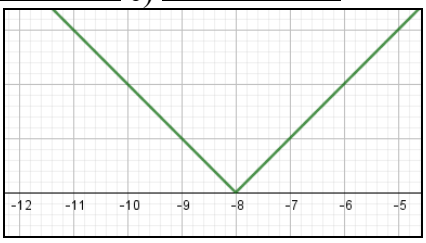
c)  d) 

Rappresentare le seguenti funzioni formate da porzioni di retta

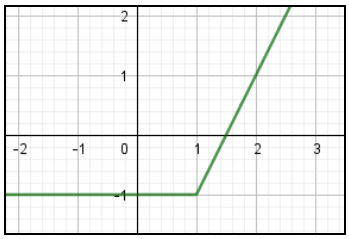
5. **a)** $y = |7x + 1|$; **b)** $y = |2x – 5|$; **c)** $y = |4 – 11x|$; **d)** $y = |4 – 3x|$; **e)** $y = |–x –8|$; **f)** $y = |x – 1| + x – 2$

a) Si ha: $\begin{cases} y=7x+1 & x\geq -1/7 \\ y=-7x-1 & x<-1/7 \end{cases}$, pertanto avremo due semirette che si incontrano nel loro punto comune di ascissa –1/7  tutti i successivi esercizi si svolgono allo stesso modo, presentiamo solo le figure

b)  c) 

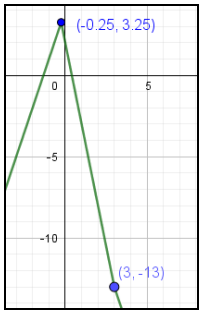
d)  e) 

f) $\begin{cases} y = x - 1 + x - 2 & x \geq 1 \\ y = -x + 1 + x - 2 & x < -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 & x \geq 1 \\ y = -1 & x < -1 \end{cases}$

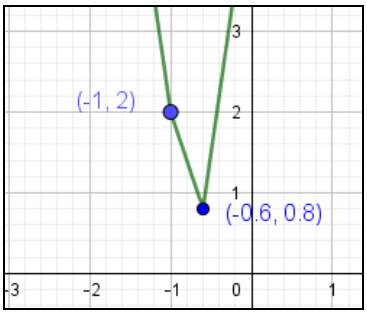


6. a) $y = |3 - x| - |4x + 1|$; b) $y = |5x + 3| + 2 \cdot |x + 1|$; c) $y = 3 \cdot |4 - x| - |-3x - 7|$; d) $y = 2 \cdot |6x + 1| - 2 \cdot |8x + 1|$

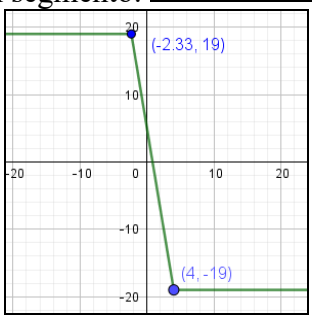
a) $\begin{cases} y = 3 - x + 4x + 1 & x \leq -1/4 \\ y = 3 - x - 4x - 1 & -1/4 < x < 3 \\ y = +3 + x - 4x - 1 & x \geq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x + 4 & x \leq -1/4 \\ y = -5x + 2 & -1/4 < x < 3 \\ y = -3x + 2 & x \geq 3 \end{cases}$ stavolta quindi sono due semirette e un segmento:



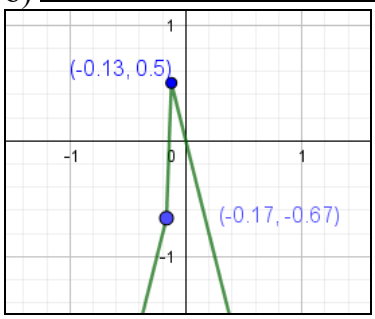
b)



c)

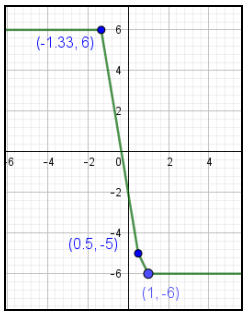


d)

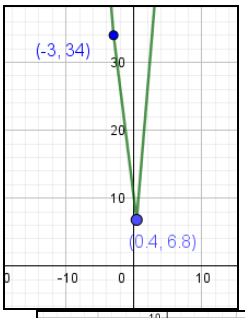


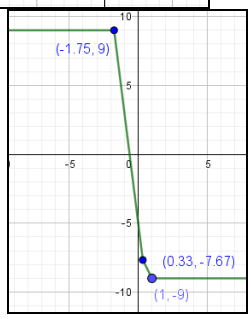
7. a) $y = |x - 1| + |2x - 1| - |3x + 4|$; b) $y = 2 \cdot |5x - 2| + |-x - 3| + |x + 3|$; c) $y = |1 - 3x| - |4x + 7| + |x - 1|$

a) $\begin{cases} y = -x + 1 - 2x + 1 + 3x + 4 & x \leq -4/3 \\ y = -x + 1 - 2x + 1 - 3x - 4 & -4/3 < x < 1/2 \\ y = -x + 1 + 2x - 1 - 3x - 4 & 1/2 \leq x \leq 1 \\ y = x - 1 + 2x - 1 - 3x - 4 & x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 6 & x \leq -4/3 \\ y = -6x - 2 & -4/3 < x < 1/2 \\ y = -2x - 4 & 1/2 \leq x \leq 1 \\ y = -6 & x > 1 \end{cases}$ stavolta avremo due semirette e due segmenti:

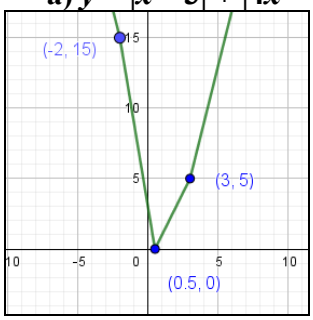


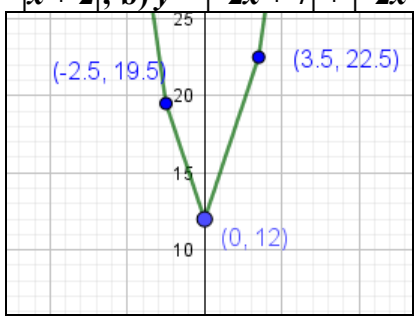
b) stavolta ci sono due semirette e un segmento perché i valori che annullano gli argomenti sono solo 2 ($x = -3$, annullano secondo e terzo valore assoluto)



c) 

8. a) $y = |x - 3| + |4x - 2| - |x + 2|$; b) $y = |-2x + 7| + |-2x - 5| + |3x|$

a) 

b) 

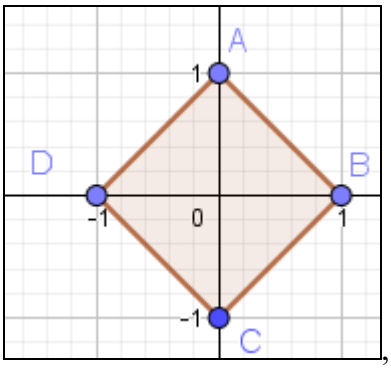
9. Risolvere il seguente sistema $\begin{cases} |x|+|y|=1 \\ x+y=0 \end{cases}$.

Il sistema si suddivide in 4 diversi sistemi, a seconda che siano entrambi positivi, entrambi negativi o di segni diversi gli argomenti dei due valori assoluti: $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=0 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=0 \\ x \geq 0, y < 0 \end{cases}$; $\begin{cases} -x+y=1 \\ x+y=0 \\ x < 0, y \geq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} -x-y=1 \\ x+y=0 \\ x < 0, y < 0 \end{cases}$, il primo e il quarto sono ovviamente impossibili perché le due equazioni si contraddicono. Per le altre due:

$$\begin{cases} 2x=1 \\ y=-x \\ x \geq 0, y < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1/2 \\ y=-1/2 \\ x \geq 0, y < 0 \end{cases}; \begin{cases} 2y=1 \\ x=-y \\ x < 0, y \geq 0 \end{cases}; \begin{cases} y=1/2 \\ x=-1/2 \\ x < 0, y < 0 \end{cases}$$

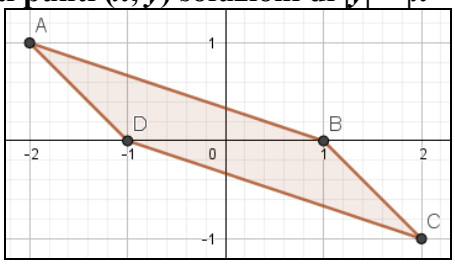
10. Determinare l'area della regione piana costituita dai punti (x, y) soluzioni di $|x| + |y| \leq 1$.

La disequazione equivale a 4 disequazioni, pertanto è la zona determinata dai 4 segmenti: $\begin{cases} x+y \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x-y \leq 1 \\ x \geq 0, y < 0 \end{cases}$; $\begin{cases} -x+y \leq 1 \\ x < 0, y \geq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} -x-y \leq 1 \\ x < 0, y < 0 \end{cases}$, che è il quadrato in figura, che ha lato $\sqrt{2}$:



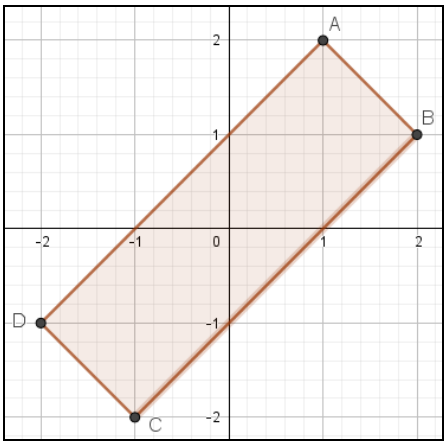
, quindi l'area cercata misura 2

11. Determinare l'area della regione piana costituita dai punti (x, y) soluzioni di $|y| + |x + 2y| \leq 1$.

Come nel precedente, stavolta abbiamo un parallelogramma 

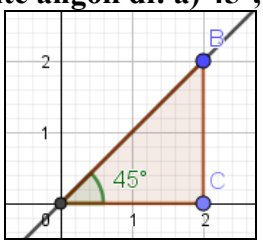
di area 2

12. Determinare l'area della regione piana costituita dai punti (x, y) soluzioni di $|x - 2y| + |2x - y| \leq 3$.

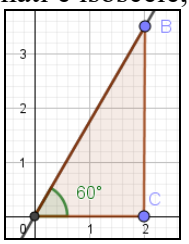


il rettangolo ha lati che misurano $3\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$, quindi l'area è 6

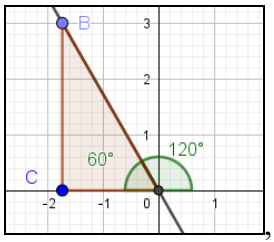
13. Scrivere l'equazione della retta passante per l'origine e formante con il semiasse positivo delle ascisse rispettivamente angoli di: a) 45°, b) 60°, c) 120°, d) 135°, e) 150°.

a) Come mostrato in figura 

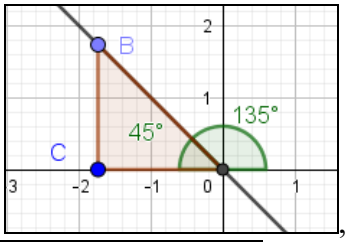
il generico triangolo formato dalla retta e dagli assi coordinati è isoscele, pertanto si ha $y = x$.

b) 

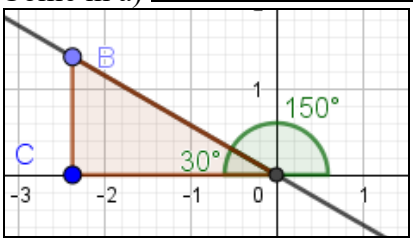
In questo caso il triangolo generico è metà di un triangolo equilatero, pertanto BC è l'altezza ed OC metà base, quindi $\overline{BC} = \sqrt{3} \cdot \overline{OC} \Rightarrow y = \sqrt{3}x$.

c) Come in b) 

, ma cambia il segno, quindi: $y = -\sqrt{3}x$

d) Come in a) 

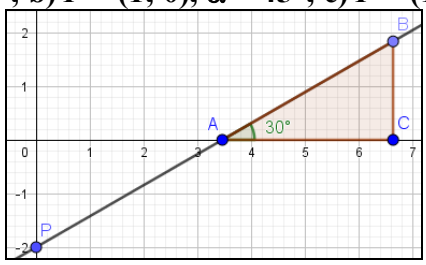
, cambia il segno, $y = -x$

e) 

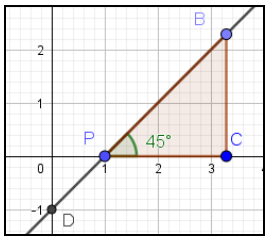
Stavolta BC è metà base del triangolo equilatero mentre OC è altezza, quindi: $\overline{OC} = \sqrt{3} \cdot \overline{BC} \Rightarrow x = \sqrt{3}y \Rightarrow y = \frac{x}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = \frac{x\sqrt{3}}{3}$

Scrivere l'equazione delle rette passanti per il punto P indicato e formanti con il semiasse positivo delle ascisse l'angolo α indicato

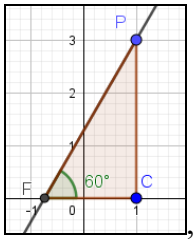
14. a) $P \equiv (0; -2)$, $\alpha = 30°$; b) $P \equiv (1; 0)$, $\alpha = 45°$; c) $P \equiv (1; 3)$, $\alpha = 60°$

a) Come mostrato in figura 

tenuto conto dei precedenti quesiti l'equazione della retta è $y = mx + p$, in cui $m = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB}/2}{\sqrt{3}\,\overline{AB}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e p è l'ordinata all'origine di P, ossia –2, quindi $y = \sqrt{3}x/3 - 2$

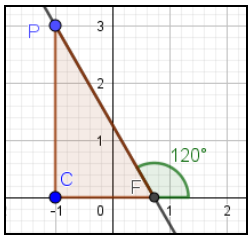
b) 

In questo caso $m = 1$ e $p = -1$, quindi $y = x - 1$

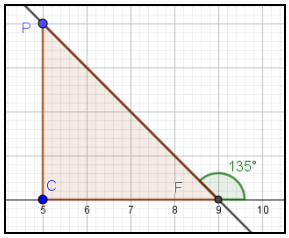
c) 

, $m = \sqrt{3}$ (vedi 13b), è più complicato determinare l'ordinata all'origine, quindi usiamo la forma $y - y_P = m \cdot (x - x_P) \Rightarrow y - 3 = \sqrt{3}(x-1) \Rightarrow y = \sqrt{3}x + 3 - \sqrt{3}$

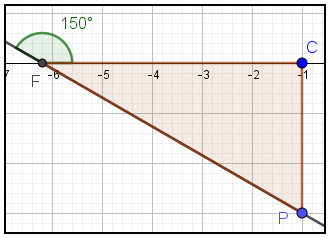
15. a) $P \equiv (-1; 3)$, $\alpha = 120°$; b) $P \equiv (5; 4)$, $\alpha = 135°$; c) $P \equiv (-1; -3)$, $\alpha = 150°$

a) 

si ha $m=-\sqrt{3}$, $y-3=-\sqrt{3}(x+1)\Rightarrow y=-\sqrt{3}x+3-\sqrt{3}$.

b) 

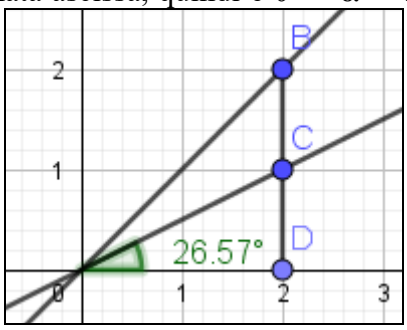
si ha $m=-1$, $y-4=-1\cdot(x-5)\Rightarrow y=-x+9$

c) 

si ha $m=-\sqrt{3}/3$, $y+3=-\sqrt{3}/3(x+1)\Rightarrow y=-\sqrt{3}/3x-3-\sqrt{3}/3$.

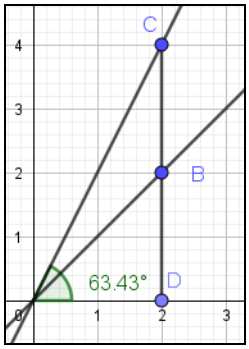
16. Tenuto conto che una retta che forma con il semiasse positivo delle ascisse un angolo α = 45°, ha coefficiente angolare *m* = 1, se 0 < *m* < 1, quanto vale α?

Se diminuisce *m* vuol dire che diminuisce il rapporto ordinata ascissa, quindi è 0° < α < 45°, vedi la figura per maggiore chiarimento, *OD* non varia, mentre *CD* < *BD*



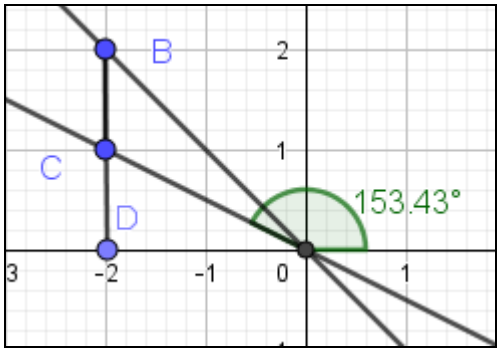
17. Con riferimento al precedente esercizio quanto vale α se è *m* > 1?

Tenuto conto di quanto già detto, ovviamente sarà 45° < α < 90°,

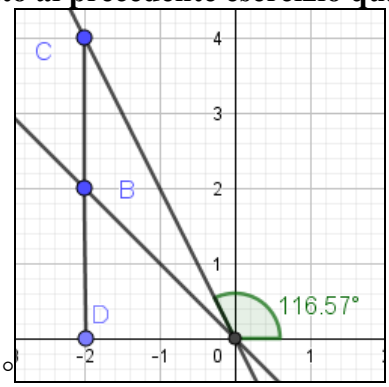


18. Tenuto conto che una retta che forma con il semiasse positivo delle ascisse un angolo α = 135°, ha coefficiente angolare *m* = –1, se –1 < *m* < 0, quanto vale α?

Tenuto conto di quanto detto prima: 135° < α < 180°



19. Con riferimento al precedente esercizio quanto vale α se è *m* <–1?



Si ha: $90° < \alpha < 135°$

Porre in forma segmentaria le seguenti equazioni

20. a) $2x - y - 1 = 0$; b) $x + 3y + 1 = 0$; c) $-2x + 4y - 1 = 0$

a) Basta portare il termine noto al secondo membro, scrivere 2 come 1/(1/2) e portare –1 al denominatore: $\frac{x}{1/2} + \frac{y}{-1} = 1$

b) $\frac{x}{-1/2} + \frac{y}{1/4} = 1$

c) $\frac{x}{-1} + \frac{y}{-1/3} = 1$

21. a) $6x + 7y - 3 = 0$; b) $x - y - 7 = 0$; c) $4x + 2y + 5 = 0$

a) Prima dividiamo per 3 e poi facciamo come prima: $\frac{x}{1/2} + \frac{y}{3/7} = 1$

b) Dividiamo per 7 ; $\frac{x}{7} + \frac{y}{-7} = 1$

c) Dividiamo per –5 $\frac{x}{-5/4} + \frac{y}{-5/2} = 1$

22. a) $1/2x - y - 1 = 0$; b) $x - 2y/3 + 1 = 0$; c) $-2x/5 + 3y/4 - 2 = 0$

a) $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} = 1$

b) $\frac{x}{-1} + \frac{y}{3/2} = 1$

c) $\frac{x}{-5} + \frac{y}{8/3} = 1$

23. a) $\sqrt{2}\,x - 2y - 1 = 0$; b) $x - y + \sqrt{2} = 0$

a) $\frac{x}{\sqrt{2}/2} + \frac{y}{-1/2} = 1$

b) $\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = 1$

24. a) $x + y - 1 + \sqrt{3} = 0$; b) $3x/2 - y/4 + \sqrt{3} = 0$

a) Dividiamo per $1-\sqrt{3}$, $\frac{x}{1-\sqrt{3}} + \frac{y}{1+\sqrt{3}} = 1$

b) Dividiamo per $-\sqrt{3}$ $\frac{x}{-2/\sqrt{3}} + \frac{y}{4/\sqrt{3}} = 1$

Scrivere le equazioni delle rette passanti per le seguenti coppie di punti, utilizzando uno dei tre procedimenti mostrati nel box precedente

25. a) (1; –3), (4; –5); b) (–1; –4), (0; –2); c) (–7; 7), (–5; –1)

a) $\frac{x-1}{4-1}=\frac{y+3}{-5+3}\Rightarrow -2x+2=3y+9\Rightarrow 2x+3y+7=0$;

b) $\frac{x+1}{0+1}=\frac{y+4}{-2+4}\Rightarrow 2x+2=y+4\Rightarrow 2x-y-2=0$;

c) $\frac{x+7}{-5+7}=\frac{y-7}{-1-7}\Rightarrow -8x-56=2y-14\Rightarrow 8x+2y+42=0\Rightarrow 4x+y+21=0$

26. a) (1/4; 1/2), (–2; 1); b) (0; –1/3), (2/3; –1/3); c) (0; 0), $\left(\sqrt{2};-1\right)$

a) $\frac{x-1/4}{-2-1/4}=\frac{y-1/2}{1-1/2}\Rightarrow \frac{x}{2}-\frac{1}{8}=-\frac{9}{4}y+\frac{9}{8}\Rightarrow 4x+18y-10=0\Rightarrow 2x+9y-5=0$;

b) $y=-1/3\Rightarrow 3y+1=0$;

c) $\frac{x}{\sqrt{2}}=\frac{y}{-1}\Rightarrow x+\sqrt{2}y=0$

27. a) (0; 4/5), (–5/2; –1); b) (–3/4; –2), (–1; 0)

a) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 4/5 & 1 \\ -5/2 & -1 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} x & y \\ 0 & 4/5 \\ -5/2 & -1 \end{matrix}=0\Rightarrow \frac{4}{5}x-\frac{5}{2}y+2+x=0\Rightarrow \frac{9}{5}x-\frac{5}{2}y+2=0\Rightarrow 18x-25y+20=0$;

b) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -3/4 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} x & y \\ -3/4 & -2 \\ -1 & 0 \end{matrix}=0\Rightarrow -2x-y-2+\frac{3}{4}y=0\Rightarrow 8x+y+8=0$

28. a) $\left(1-\sqrt{3};1\right),\left(1;1+\sqrt{3}\right)$**; b)** $\left(-1;-\sqrt{2}/2\right),\left(-\sqrt{2};2\right)$

a) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1-\sqrt{3} & 1 & 1 \\ 1 & 1+\sqrt{3} & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} x & y \\ 1-\sqrt{3} & 1 \\ 1 & 1+\sqrt{3} \end{matrix}=0\Rightarrow x+y-2-1-\left(1+\sqrt{3}\right)x-\left(1-\sqrt{3}\right)y=0\Rightarrow \sqrt{3}x-\sqrt{3}y+3=0\Rightarrow x-y+\sqrt{3}=0$;

b) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & -\sqrt{2}/2 & 1 \\ -\sqrt{2} & 2 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} x & y \\ -1 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2} & 2 \end{matrix}=0\Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}x-\sqrt{2}y-2-1-2x+y=0\Rightarrow \left(\sqrt{2}+4\right)x+2\left(\sqrt{2}-1\right)y+6=0$

29. $\left(1-\sqrt{2};1\right),\left(1+\sqrt{2};-3\right)$

Cerchiamo un'equazione del tipo $y = mx + p$, per risolvere il sistema sottraiamo le due equazioni:

$$\begin{cases} 1=\left(1-\sqrt{2}\right)m+p \\ -3=\left(1+\sqrt{2}\right)m+p \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 4=-2\sqrt{2}m \\ p=-3-\left(1+\sqrt{2}\right)m \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} m=-\sqrt{2} \\ p=-3+\sqrt{2}+2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} m=-\sqrt{2} \\ p=-1+\sqrt{2} \end{cases}\Rightarrow y=-\sqrt{2}x-1+\sqrt{2}$$

30. $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{2}{\sqrt{5}}\right),\left(-\frac{1}{2};1-\sqrt{5}\right)$

$$\begin{cases} \frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}m+p \\ 1-\sqrt{5}=-\frac{1}{2}m+p \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}m+p \\ 1-\sqrt{5}=-\frac{1}{2}m+p \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \frac{7\sqrt{5}-5}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}m \\ p=1-\sqrt{5}+\frac{1}{2}m \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} m=\frac{90-38\sqrt{5}}{5} \\ p=\frac{50-24\sqrt{5}}{5} \end{cases}\Rightarrow y=\frac{90-38\sqrt{5}}{5}x+\frac{50-24\sqrt{5}}{5}$$

31. Esistono rette che non contengono alcun punto reticolo? In caso affermativo proporre un esem-

pio ed enunciare una condizione sufficiente.

Per esempio $2x + 1 = 0$; Solo due dei tre coefficienti dell'equazione $ax + by + c = 0$ sono irrazionali

32. Quali punti reticolo le cui coordinate hanno entrambe valori compresi tra –3 e 3, appartengono alla retta di equazione $x + y = 1$?

Dobbiamo determinare tutte le soluzioni intere dell'equazione. Si ha: $x = 1 - y$, pertanto assegnando a y i 7 valori interi da –3 a 3, in teoria dovremmo ottenere 7 punti, ma per $y = -3$, si ottiene $x = 4$, quindi solo i seguenti 6 punti: (–2; –3), (–1; –2), (0; –1), (1; 0), (2; 1), (3; 2)

33. Quali punti reticolo le cui coordinate hanno entrambe valori compresi tra –3 e 3, appartengono alla retta di equazione $x + 2y = 0$?

Come prima: $x = -2y$, stavolta solo 3 valori sono accettabili, dato che $-3 \le -2y \le 3 \Rightarrow -3/2 \le y \le 3/2$, quindi gli unici valori interi sono: (2; –1), (0; 0), (–2; 1).

34. Per quale valore del parametro intero m l'equazione $x + y = m$, ammette esattamente 7 punti reticolo le cui coordinate hanno entrambe valori compresi tra –3 e 3?

$x = m - y$, si ha: $-3 \le m - y \le 3 \Rightarrow m - 3 \le y \le m + 3$. Se m fosse intero avremmo $2 \cdot (m + 3) + 1$ valori accettabili, quindi deve essere $2 \cdot (m + 3) + 1 = 7 \Rightarrow m = 0$

35. Dimostrare che la retta passante per l'origine e per $\left(1;\sqrt{2}\right)$ incontra un solo punto reticolo, l'origine.

L'equazione della retta è $y = \sqrt{2}x$, che ha soluzione in interi solo per $x = y = 0$.

Scrivere le equazioni delle mediane dei triangoli di cui forniamo i vertici, verificando poi che tali mediane si incontrano sempre nel baricentro

36. a) (4; 1), (–2; 0), (1; –1); b) (1/3, 5/9), (2/3; 7/9), (–1/2; 0)

I punti medi sono: $M_1 \equiv (1; 1/2)$, $M_2 \equiv (5/2; 0)$, $M_3 \equiv (-1/2; -1/2)$. Le mediane hanno equazioni: $x = 1$; $y = 0$; $\frac{x-4}{-1/2-4} = \frac{y-1}{-1/2-1} \Rightarrow \frac{x-4}{\cancel{-9/2}^{\,3}} = \frac{y-1}{\cancel{-3/2}} \Rightarrow x-4 = 3y-3 \Rightarrow x-3y-1=0$. Il baricentro è $G \equiv (1; 0)$ che facilmente si verifica appartenere a tutte e tre le rette

b) I punti sono allineati: $\begin{vmatrix} 1/3 & 5/9 & 1 \\ 2/3 & 7/9 & 1 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1/3 & 5/9 \\ 2/3 & 7/9 \\ -1/2 & 0 \end{matrix} = \frac{7}{27} - \frac{5}{18} + \frac{7}{18} - \frac{10}{27} = 0$

37. (1; 2), (–1; 3), (–2; –1)

I punti medi sono: $M_1 \equiv (0; 5/2)$, $M_2 \equiv (-1/2; 1/2)$, $M_3 \equiv (-3/2; 1)$. Le mediane hanno equazioni:

$\frac{x}{-2} = \frac{y-5/2}{-1-5/2} \Rightarrow \frac{x}{-2} = \frac{y-5/2}{-7/2} \Rightarrow \frac{7}{2}x = 2y-5 \Rightarrow 7x-4y+10=0$;

$\frac{x+1/2}{-1+1/2} = \frac{y-1/2}{3-1/2} \Rightarrow \frac{x+1/2}{\cancel{-1/2}} = \frac{y-1/2}{\cancel{5/2}} \Rightarrow 5x+\frac{5}{2} = -y+\frac{1}{2} \Rightarrow 5x+2y+2=0$;

$\frac{x+3/2}{1+3/2} = \frac{y-1}{2-1} \Rightarrow \frac{x+3/2}{5/2} = \frac{y-1}{1} \Rightarrow x+\frac{3}{2} = \frac{5}{2}y-\frac{5}{2} \Rightarrow 2x-5y+8=0$. Il baricentro è $G \equiv (-2/3; 4/3)$ che facilmente si verifica appartenere a tutte e tre le rette

38. (3; 0), (–2; 1), (–4; –1)

I punti medi sono: $M_1 \equiv (1/2; 1/2)$, $M_2 \equiv (-1/2; -1/2)$, $M_3 \equiv (-3; 0)$. Le mediane hanno equazioni:

$\frac{x-1/2}{-4-1/2} = \frac{y-1/2}{-1-1/2} \Rightarrow \frac{x-1/2}{\cancel{-9/2}^{\,3}} = \frac{y-1/2}{\cancel{-3/2}} \Rightarrow x-\frac{1}{2} = 3y-\frac{3}{2} \Rightarrow x-3y+1=0$;

$\frac{x+1/2}{-2+1/2} = \frac{y+1/2}{1+1/2} \Rightarrow \frac{x+1/2}{\cancel{-3/2}} = \frac{y+1/2}{\cancel{3/2}} \Rightarrow x+\frac{1}{2} = -y-\frac{1}{2} \Rightarrow x+y+1=0$; $y = 0$. Il baricentro è $G \equiv (-1; 0)$ che facilmente si verifica appartenere a tutte e tre le rette

39. (1/2; –1), (–1; 2/3), (–3; 0)

I punti medi sono: $M_1 \equiv (-1/4; -1/6)$, $M_2 \equiv (-5/4; -1/2)$, $M_3 \equiv (-2; 1/3)$. Le mediane hanno equazioni:

$$\frac{x+1/4}{-3+1/4}=\frac{y+1/6}{1/6}\Rightarrow\frac{x+1/4}{-11/\cancel{4}^{2}}=\frac{y+1/6}{1/\cancel{6}^{3}}\Rightarrow\frac{1}{3}x+\frac{1}{12}=-\frac{11}{2}y-\frac{11}{12}\Rightarrow 2x+33y+6=0;$$

$$\frac{x+5/4}{-1+5/4}=\frac{y+1/2}{2/3+1/2}\Rightarrow\frac{x+5/4}{1/\cancel{4}^{2}}=\frac{y+1/2}{7/\cancel{6}^{3}}\Rightarrow\frac{7}{3}x+\frac{35}{12}=\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}\Rightarrow 14x-3y+16=0;$$

$$\frac{x+2}{1/2+2}=\frac{y-1/3}{-1-1/3}\Rightarrow\frac{x+2}{5/2}=\frac{y-1/3}{-4/3}\Rightarrow-\frac{4}{3}x-\frac{8}{3}=\frac{5}{2}y-\frac{5}{6}\Rightarrow 8x+15y+11=0.$$

Il baricentro è $G \equiv (-7/6; -1/9)$ che facilmente si verifica appartenere a tutte e tre le rette

40. Determinare l'equazione della mediana condotta da (x_A; y_A) al lato opposto di vertici (x_B; y_B) e (x_C; y_C). Verificare la correttezza di tale formula applicandola ai dati degli esercizi precedenti. Verificare poi che il baricentro appartiene a tutte e tre le mediane di un qualsiasi triangolo.

Il punti medio è: $\left(\frac{x_B+x_C}{2};\frac{y_B+y_C}{2}\right)$; la mediana perciò ha equazione:

$$\frac{x-x_A}{\frac{x_B+x_C}{2}-x_A}=\frac{y-y_A}{\frac{y_B+y_C}{2}-y_A}\Rightarrow\frac{x-x_A}{x_B+x_C-2x_A}=\frac{y-y_A}{y_B+y_C-2y_A}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(y_B+y_C-2y_A\right)x-x_Ay_B-x_Ay_C+\cancel{2x_Ay_A}=\left(x_B+x_C-2x_A\right)y-x_By_A-x_Cy_A+\cancel{2x_Ay_A}\Rightarrow$$

$(2y_A - y_B - y_C) \cdot x - (2x_A - x_B - x_C) \cdot y + x_A \cdot (y_B + y_C) - y_A \cdot (x_B + x_C) = 0$

Verifichiamo solo il 36 a: $(2 \cdot 1 - 0 - (-1)) \cdot x - (2 \cdot 4 - (-2) - 1) \cdot y + 4 \cdot (0 - 1) - 1 \cdot (-2 + 1) = 0 \Rightarrow 3x - 9y - 3 = 0 \Rightarrow x - 3y - 1 = 0$. Allo stesso modo tutti gli altri.

Scrivere le equazioni degli assi dei lati dei triangoli di cui forniamo i vertici, verificando poi che tali assi si incontrano sempre in un punto C, di cui si chiedono le coordinate

41. (–1; 0), (–2; 1), (3; –1)

Imponendo la condizione di asse di un segmento si ha: $(x + 1)^2 + y^2 = (x + 2)^2 + (y - 1)^2 \Rightarrow 2x + 1 = 4x + 4 - 2y + 1 \Rightarrow 2x - 2y + 4 \Rightarrow x - y + 2 = 0$; $(x + 1)^2 + y^2 = (x - 3)^2 + (y + 1)^2 \Rightarrow 2x + 1 = -6x + 9 + 2y + 1 \Rightarrow 8x - 2y - 9 = 0$; $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = (x + 2)^2 + (y - 1)^2 \Rightarrow -6x + 9 + 2y + 1 = 4x + 4 - 2y + 1 \Rightarrow 10x - 4y - 5 = 0$; Si verifica poi che l'intersezione comune è $C \equiv (13/6; 25/6)$

42. (4; 1), (–1; 3), (–2; 5)

$(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = (x + 1)^2 + (y - 3)^2 \Rightarrow -8x + 16 - 2y + 1 = 2x + 1 - 6y + 9 \Rightarrow 10x - 4y - 7 = 0$; $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = (x + 2)^2 + (y - 5)^2 \Rightarrow -8x + 16 - 2y + 1 = 4x + 4 - 10y + 25 \Rightarrow 12x - 8y + 12 = 0 \Rightarrow 3x - 2y + 3 = 0$; $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = (x + 2)^2 + (y - 5)^2 \Rightarrow 2x + 1 - 6y + 9 = 4x + 4 - 10y + 25 \Rightarrow 2x - 4y + 19 = 0$. Si verifica poi che l'intersezione comune è $C \equiv (13/4; 51/8)$

43. (–2/3; 3), (–3/4; 4/5), (–1/2; 1/2)

$(x + 2/3)^2 + (y - 3)^2 = (x + 3/4)^2 + (y - 4/5)^2 \Rightarrow 4/3x + 4/9 - 6y + 9 = 3/2x + 9/16 - 8/5y + 16/25 \Rightarrow 2x - 2y + 4 \Rightarrow 600x + 15840y - 29671 = 0$; $(x + 2/3)^2 + (y - 3)^2 = (x + 1/2)^2 + (y - 1/2)^2 \Rightarrow 4/3x + 4/9 - 6y + 9 = x + 1/4 - y + 1/4 \Rightarrow 6x - 90y + 161 = 0$; $(x + 3/4)^2 + (y - 4/5)^2 = (x + 1/2)^2 + (y - 1/2)^2 \Rightarrow 3/2x + 9/16 - 8/5y + 16/25 = 3/2x + 9/16 - 8/5y + 16/25 \Rightarrow 200x - 240y + 281 = 0$; Si verifica poi che l'intersezione comune è $C \equiv (445/552; 15257/8280)$

44. (3; 2), (5; 0), (0; 2)

$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = (x - 5)^2 + y^2 \Rightarrow -6x + 9 - 4y + 4 = -10x + 25 \Rightarrow x - y - 3 = 0$; $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = x^2 + (y - 2)^2 \Rightarrow -6x + 9 - 4y + 4 = -6x + 9 + 2y + 1 \Rightarrow 2x - 3 = 0$; $(x - 5)^2 + y^2 = x^2 + (y - 2)^2 \Rightarrow -10x + 25 = 4x + 4 - 2y + 1 \Rightarrow 10x - 4y - 21 = 0$. Si verifica poi che l'intersezione comune è $C \equiv (3/2; -3/2)$

45. (1/2; –2), (0; –2/3), (–1; 3)

$(x - 1/2)^2 + (y + 2)^2 = x^2 + (y + 2/3)^2 \Rightarrow -x + 1/4 + 4y + 4 = 4/3y + 4/9 \Rightarrow 36x - 96y - 137 = 0$; $(x - 1/2)^2 + (y + 2)^2 = (x + 1)^2 + (y - 3)^2 \Rightarrow -x + 1/4 + 4y + 4 = 2x + 1 - 6y + 9 \Rightarrow 12x - 40y + 23 = 0$; $x^2 + (y + 2/3)^2 = (x + 1)^2 + (y - 3)^2 \Rightarrow 4/3y + 4/9 = 2x + 1 - 6y + 9 \Rightarrow 9x - 33y + 43 = 0$. Si verifica poi che l'intersezione comune è $C \equiv (961/12; 103/12)$

Determinare il valore del parametro reale m in modo tale che la data retta sia asse del segmento di estremi dati

46. a) (–1; 3), (m; 4), $x + y - 6 = 0$; b) (4; –2), (1 + m; 3), $12x + 40y - 77 = 0$

a $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = (x - m)^2 + (y - 4)^2 \Rightarrow 2x + 1 - 6y + 9 = -2mx + m^2 - 8y + 16 \Rightarrow (1 + m)x + y - 3/2 = 0$.

Dato che il coefficiente di y coincide, mentre il termine noto no, non esiste alcun valore di m, per cui la retta data è asse del segmento.

b) $(x-4)^2+(y+2)^2=(x-1-m)^2+(y-3)^2 \Rightarrow -8x+16+4y+4=-2(1+m)x+(1+m)^2-6y+9 \Rightarrow (2m-6)x+10y+10-2m-m^2=0$. Per avere lo stesso coefficiente y moltiplichiamo tutto per 4 ed uguagliamo termine a termine:

$$\begin{cases}4\cdot(2m-6)=12\\40-8m-4m^2=-77\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2m-6=3\\4m^2+8m-117=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=9/2\\4\cdot 81/4+8\cdot 9/2-117=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}m=9/2\\81+36-117=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=9/2\\0=0\end{cases}\Rightarrow m=\frac{9}{2}$$

47. a) $(1-m;\ 2)$, $(-2;\ 3-m)$, $4x+2y+3=0$; b) $(1-2m;\ m+3)$, $(3;\ -5)$, $16x-22y+27=0$

a) $(x-1+m)^2+(y-2)^2=(x+2)^2+(y-3-m)^2 \Rightarrow 2(1+m)x-4y+m^2-2m+5=4x+2(m-3)y+m^2-6m+13 \Rightarrow (m-3)x+(1-m)y+2m-4=0$. Uguagliamo i coefficienti: $\begin{cases}m-3=4\\1-m=2\\2m-4=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=7\\m=-1\\m=7/2\end{cases}$, ovviamente non vi sono soluzioni.

b) $(x-1+2m)^2+(y-m-3)^2=(x-3)^2+(y+5)^2 \Rightarrow 4(1+m)x-2(8+m)y+5m^2+2m-24=0$.

$$\begin{cases}1+m=4\\8+m=11\\5m^2+2m-24=27\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=3\\m=3\\5\cdot 9+6-24=27\end{cases}\Rightarrow m=3$$

48. $(0;\ 2-m)$, $(2m+3;\ 4m+7)$, r: $7x+15y-107=0$

$x^2+(y-2+m)^2=(x-3-2m)^2+(y-4m-7)^2 \Rightarrow 2(3+2m)x+10y(1+m)-19m^2-72m-54=0$.

$$\begin{cases}3+2m=7\\1+m=3\\-19m^2-72m-44=-214\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=2\\m=2\\-19\cdot 4-72\cdot 2-44=-214\end{cases}\Rightarrow m=2$$

49. Determinare l'equazione dell'asse del segmento di estremi i punti $A\equiv(x_A;\ y_A)$ e $B\equiv(x_B;\ y_B)$

Basta applicare la formula: $2\cdot(x_B-x_A)\cdot x+2\cdot(y_B-y_A)\cdot y+x_A^2-x_B^2+y_A^2-y_B^2=0$

50. Determinare un punto C appartenente alla retta di equazione $3x+5y-1=0$, in modo che il triangolo ABC, con $A\equiv(1;\ 5)$ e $B\equiv(-1;\ 2)$, sia rettangolo di ipotenusa AC.

Se C appartiene alla retta vuol dire che con le sue coordinate verifica l'equazione, quindi $y=\frac{1-3x}{5}$, perciò $C\equiv\left(x;\frac{1-3x}{5}\right)$, da cui:

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{AC}^2\Rightarrow(1+1)^2+(5-2)^2+(x+1)^2+\left(\frac{1-3x}{5}-2\right)^2=(1-x)^2+\left(5-\frac{1-3x}{5}\right)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4+9+\cancel{x^2}+2x+\cancel{1}+\cancel{\left(\frac{1-3x}{5}\right)^2}-4\cdot\frac{1-3x}{5}+4=\cancel{1}-2x+\cancel{x^2}+25-10\cdot\frac{1-3x}{5}+\cancel{\left(\frac{1-3x}{5}\right)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8-\frac{6-18x}{5}-4x=0\Rightarrow 40-6+18x-20x=0\Rightarrow 2x=34\Rightarrow x=17\Rightarrow C\equiv\left(17;\frac{1-51}{5}\right)\equiv(17;-10)$$

51. Determinare un punto C appartenente alla retta di equazione $4x-y+2=0$, in modo che il triangolo ABC, con $A\equiv(0;\ 3)$ e $B\equiv(1;\ -4)$, sia rettangolo di ipotenusa AB.

$C\equiv(x;4x+2)\Rightarrow x^2+(4x+2-3)^2+(1-x)^2+(4x+2+4)^2=1+7^2\Rightarrow 17x^2+19x-6=0\Rightarrow$

$$C_1\equiv\left(-\frac{19+\sqrt{769}}{34};-\frac{4+2\cdot\sqrt{769}}{17}\right)\vee C_2\equiv\left(\frac{-19+\sqrt{769}}{34};\frac{-4+2\cdot\sqrt{769}}{17}\right)$$

52. Determinare un punto C appartenente alla retta di equazione $5x+2y-3=0$, in modo che il triangolo ABC, con $A\equiv(0;\ -3)$ e $B\equiv(4;\ -1)$ sia isoscele sulla base AB.

$$C \equiv \left(x; \frac{3-5x}{2}\right) \Rightarrow x^2 + \left(\frac{3-5x}{2}+3\right)^2 = (x-4)^2 + \left(\frac{3-5x}{2}+1\right)^2 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow C \equiv (-1;4)$$

53. Determinare un punto *C* appartenente alla retta di equazione *x* – 2*y* + 1 = 0, in modo che il triangolo *ABC*, con *A* ≡ (2; –1) e *B* ≡ (–3; –4) sia equilatero.

$$C \equiv (2y-1;\, y) \Rightarrow \begin{cases} (2+3)^2+(-1+4)^2 = (2y-1-2)^2+(y+1)^2 \\ (2+3)^2+(-1+4)^2 = (2y-1+3)^2+(y+4)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 34 = 5y^2-10y+10 \\ 34 = 5y^2+16y+20 \end{cases} \Rightarrow$$

, apparentemente

$$\Rightarrow 5y^2-10y+10 = 5y^2+16y+20 \Rightarrow 26y=-10 \Rightarrow y = -\frac{5}{13}$$

vi è una soluzione, il problema è che con tale valore le distanze al quadrato non valgono 34, quindi è impossibile

54. Determinare un punto *C* appartenente alla retta di equazione 2*x* + *y* – 5 = 0, in modo che il triangolo *ABC*, con *A* ≡ (3; 2) e *B* ≡ (–3; 0) sia isoscele sulla base *BC*.

$C \equiv (x;\ 5-2x) \Rightarrow (x-3)^2 + (5-2x-2)^2 = (3+3)^2 + 2^2 \Rightarrow 5x^2 - 18x - 22 = 0$

$$\Rightarrow C_1 \equiv \left(\frac{9-\sqrt{191}}{5}; \frac{7+\sqrt{191}}{5}\right) \vee C_2 \equiv \left(\frac{9+\sqrt{191}}{5}; \frac{7-\sqrt{191}}{5}\right)$$

55. Sulla retta 3*x* + 7*y* – 4 = 0, determinare un punto *C* in modo che sia terzo vertice del triangolo *ABC* con *A* ≡ (1; 3) e *B* ≡ (2; –5), il cui baricentro sia *G* ≡ (–8/9; 1/3).

$$C \equiv \left(x; \frac{4-3x}{7}\right) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1+2+x}{3} = -\dfrac{8}{9} \\ \dfrac{3-5+\dfrac{4-3x}{7}}{3} = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9+3x=-8 \\ -10-3x=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{17}{3} \\ x=-\dfrac{17}{3} \end{cases} \Rightarrow C \equiv \left(-\frac{17}{3}; 3\right)$$

56. Sulla retta 2*x* – 5*y* + 2 = 0, determinare un punto *C* in modo che sia terzo vertice del triangolo *ABC*, con *A* ≡ (3; –2) e *B* ≡ (–1; 4), la cui area misuri 3.

$$C \equiv \left(x; \frac{2x+2}{5}\right) \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ x & \dfrac{2x+2}{5} & 1 \end{matrix} \right\| = 3 \Rightarrow \frac{|21-19x|}{5} = 3 \Rightarrow |21-19x| = 15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{36}{19} \vee x = \frac{6}{19} \Rightarrow C_1 \equiv \left(\frac{36}{19}; \frac{22}{19}\right) \vee C_2 \equiv \left(\frac{6}{19}; \frac{10}{19}\right)$$

57. *P* ≡ (x_P; y_P) e *Q* ≡ (x_Q; y_Q) stanno entrambi su uno dei semipiani individuati dalla retta *ax* + *by* + *c* = 0, che segno ha il prodotto (*a* · x_P + *b* · y_P + *c*) · (*a* · x_Q + *b* · y_Q + *c*)?

Se stanno dallo stesso lato vuol dire che i fattori hanno lo stesso segno, quindi il prodotto è positivo

58. Determinare il valore di *m* in modo che i punti *P*≡(–1; –2), *Q* ≡ (4; 2), *R* ≡ (1; *m*) siano allineati.

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5m+2=0 \Rightarrow m = -\frac{2}{5}$$

59. L'equazione $x^2 - y^2 = 0$ può scriversi anche come (*x* – *y*) · (*x* + *y*) = 0, quindi rappresenta le due bisettrici dei quadranti. Possiamo dire che, in generale, l'equazione $ax^2 - by^2 = 0$, rappresenta due rette che si incontrano nell'origine, qualunque siano i numeri reali *a* e *b*?

No, solo se $ab > 0$ perché se $a = 0$ otteniamo due volte l'asse x, e per $b = 0$ due volte l'asse y.

60. Cosa rappresenta l'equazione $x^2 = 0$?

L'asse y contato due volte, dato che può pensarsi come $x \cdot x = 0$

61. Cosa rappresenta l'equazione *xy* = 0?

Gli assi coordinati, dato che equivale a $x = 0$ e $y = 0$

62. Cosa rappresenta l'equazione *xy* – *ax* – *by* + *ab* = 0?

Si può scrivere $x \cdot (y - a) - b \cdot (y - a) = 0$, cioè $(x - b) \cdot (y - a) = 0$, che rappresentano due rette parallele agli assi coordinati

63. a) Possiamo dire che l'equazione $ax^2 + by^2 = c$, con tutti i coefficienti non nulli, non rappresenta mai rette? b) E l'equazione $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$?

a) Si perché non si può fattorizzare; b) No, p.e. $x^2 - 5xy + 6y^2 = 0$]

64. Con riferimento al precedente quesito, quando $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$, rappresenta rette?

Da quanto detto, quando si può scomporre nel prodotto di due espressioni di I grado

Posizioni reciproche di due rette

Determinare le reciproche posizioni delle seguenti coppie di rette, calcolando anche le coordinate del loro eventuale punto comune I

1. a) $3x + 4y - 5 = 0$, $-2x + 7y + 1 = 0$; b) $x + y - 1 = 0$, $2x - 3y - 2 = 0$

a) Risolviamo il sistema: $\begin{cases} 3x+4y=5 \\ 2x-7y=1 \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & -7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -7 \end{vmatrix}} = \dfrac{-35-4}{-21-8} = \dfrac{-39}{-29} = \dfrac{39}{29}; y = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{-29} = \dfrac{3-10}{-29} = \dfrac{7}{29}$

b) $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x-3y=2 \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}} = \dfrac{-3-2}{-3-2} = 1; y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{-5} = \dfrac{2-2}{-5} = 0$

2. a) $6x - 4y + 10 = 0$, $3x - 2y - 5 = 0$; b) $3x - y + 5 = 0$, $12x - 4y + 20 = 0$

a) Osserviamo che $6/3 = -4/(-2) \neq 10/(-5)$, quindi le rette sono fra loro parallele;

b) Osserviamo che $3/12 = -1/(-4) = 5/20$, quindi le rette sono fra loro coincidenti

3. a) $x/2 + y/3 + 1/4 = 0$, $6x - 4y + 3 = 0$; b) $x/4 - 4y + 20 = 0$, $x/2 - y/10 + 1 = 0$

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = -\dfrac{1}{4} \\ 6x - 4y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x+4y=-3 \\ 6x-4y=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x=-6 \\ 8y=0 \end{cases} x = -\dfrac{1}{2}; y = 0$, abbiamo rispettivamente sommato e sottratto le due equazioni termine a termine

b) $\begin{cases} \dfrac{x}{4} - 4y = -20 \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{10} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-16y=-80 \\ 5x-y=-10 \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{\begin{vmatrix} -80 & -16 \\ -10 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -16 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}} = \dfrac{80-160}{-1+80} = -\dfrac{80}{79}; y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -80 \\ 5 & -10 \end{vmatrix}}{79} = \dfrac{-10+400}{79} = \dfrac{390}{79}$

4. a) $\sqrt{2}x - y + 1 = 0, 2x - \sqrt{2}y + \sqrt{2} = 0$; b) $\sqrt{2}x - y + 1 = 0, x - \sqrt{2}y + \sqrt{2} = 0$

a) Osserviamo che $\sqrt{2}/2 = -1/\left(-\sqrt{2}\right) = 1/\sqrt{2}$, quindi le rette sono fra loro coincidenti;

b) $\begin{cases} \sqrt{2}x - y = -1 \\ x - \sqrt{2}y = -\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2}x - y = -1 \\ \sqrt{2}x - 2y = -2 \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ -\sqrt{2} & -2 \end{vmatrix}} = \dfrac{2-2}{-2\sqrt{2}+\sqrt{2}} = 0; y = \dfrac{\begin{vmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{2} & -2 \end{vmatrix}}{-\sqrt{2}} = \dfrac{-2\sqrt{2}+\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = 1$

5. a) $x - 2y + 1 = 0$, $x + \sqrt{3}y = 0$; b) $\sqrt{3}/2x - y/3 - 2 = 0, 9x - 2 \cdot \sqrt{3}y - 1 = 0$

a) $\begin{cases} x - 2y = -1 \\ x + \sqrt{3}y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & \sqrt{3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix}} = \dfrac{-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2} = \dfrac{-\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-2\right)}{3-4} = 3 - 2\sqrt{3}; y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{3}+2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}+2} = 2 - \sqrt{3}$

b) Osserviamo che $\frac{\sqrt{3}/2}{9}=\frac{-1/3}{-2\sqrt{3}}\neq\frac{-2}{-1}$, quindi le rette sono fra loro parallele

6. $\left(1-\sqrt{2}\right)x-2y=0, x+\left(1+\sqrt{2}\right)y+1=0$

$$\begin{cases}\left(1-\sqrt{2}\right)x-2y=0\\ x+\left(1+\sqrt{2}\right)y=-1\end{cases}\Rightarrow x=\frac{\begin{vmatrix}0 & -2\\ -1 & 1+\sqrt{2}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1-\sqrt{2} & -2\\ 1 & 1+\sqrt{2}\end{vmatrix}}=\frac{-2}{(1-2)+2}=-2; y=\begin{vmatrix}1-\sqrt{2} & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1+\sqrt{2}\left[I\equiv\left(-2;\sqrt{2}-1\right)\right]$$

7. Determinare perimetro e area del triangolo rettangolo che la retta di equazione $x - 3y + 5 = 0$ forma con gli assi coordinati.

Determiniamo le intersezioni: $X \equiv (-5; 0)$, $Y \equiv (0; 5/3)$, l'area è perciò: $1/2 \cdot 5 \cdot 5/3 = 25/6$. Determiniamo la misura dell'ipotenusa: $\sqrt{5^2+\left(\frac{5}{3}\right)^2}\sqrt{25+\frac{25}{9}}=\frac{5\sqrt{10}}{3}$, pertanto

$$2p=5+\frac{5}{3}+\frac{5\sqrt{10}}{3}=\frac{20+5\sqrt{10}}{3}=\frac{5\cdot\left(4+\sqrt{10}\right)}{3}$$

8. Consideriamo le rette di equazioni: $y = 3x + 2$; $y = -3x + 2$ e $y = -2$, esse racchiudono una porzione di piano che rappresenta che figura geometrica?

Determiniamo i vertici:

$$\begin{cases}y=3x+2\\ y=-3x+2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2y=4\\ 6x=0\end{cases}\Rightarrow A\equiv(0;2);\begin{cases}y=3x+2\\ y=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-\frac{4}{3}\\ y=-2\end{cases}\Rightarrow B\equiv\left(-\frac{4}{3};-2\right);\begin{cases}y=-3x+2\\ y=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{4}{3}\\ y=-2\end{cases}\Rightarrow C\equiv\left(\frac{4}{3};-2\right)$$

Osserviamo che A ha l'ascissa che è media fra quelle di B e C, quindi abbiamo un triangolo isoscele. Non è equilatero perché le coordinate sono tutte razionali.

9. Determinare perimetro e area del triangolo determinato dalle rette: $2x + y - 4 = 0$, $y = x - 2$, $x = 2 - 3y$.

Determiniamo i vertici:

$\begin{cases}y=4-2x\\ y=x-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x=6\\ y=x-2\end{cases}\Rightarrow A\equiv(2;0);\begin{cases}x=y+2\\ x=2-3y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=y+2\\ 4y=0\end{cases}\Rightarrow A\equiv(0;2)$, quindi le rette sono incidenti e non determinano alcun triangolo

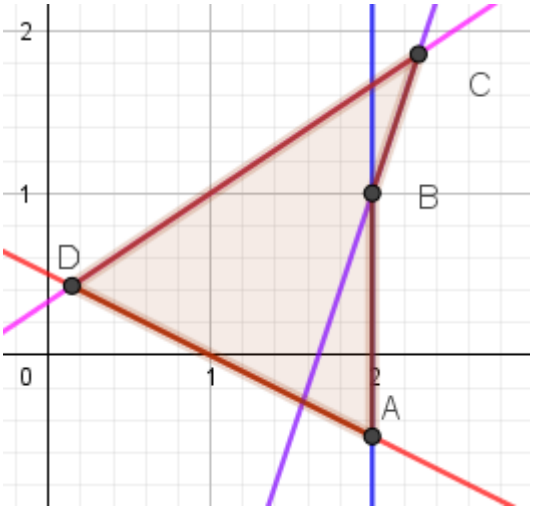
10. Determinare perimetro e area del triangolo determinato dalle rette: $-4x + 5y = 0$, $3y + 7x + 5 = 0$ e $2x - 9y + 1 = 0$.

Risolvendo i sistemi troviamo: $A\equiv\left(-\frac{25}{47};-\frac{20}{47}\right), B\equiv\left(\frac{5}{26};\frac{2}{13}\right), C\equiv\left(-\frac{16}{23};-\frac{1}{23}\right)$ I lati misurano: $\overline{AB}=\frac{177\sqrt{41}}{1222};\overline{AC}=\frac{59\sqrt{58}}{1081};\overline{BC}=\frac{59\sqrt{85}}{598}$, sommando determiniamo il perimetro. Per l'area troviamo l'altezza relativa ad AB: $\frac{\left|-4\cdot(-16/23)+5\cdot(-1/23)\right|}{\sqrt{(-4)^2+5^2}}=\frac{59}{23\cdot\sqrt{41}}$, quindi l'area è

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{59}{23\cdot\cancel{\sqrt{41}}}\cdot\frac{177\cdot\cancel{\sqrt{41}}}{1222}=\frac{10443}{56212}$$

11. Determinare il perimetro del quadrilatero determinato dalle rette di equazioni: $x + 2y - 1 = 0$, $x = 2$, $3x - y - 5 = 0$ e $2x - 3y + 1 = 0$.

Rappresentiamo le rette, osservando che si possono ottenere diversi quadrilateri, noi consideriamo quello i cui vertici sono le intersezioni delle rette nell'ordine in cui sono scritte.



Risolvendo i sistemi troviamo: $A \equiv \left(2;-\frac{1}{2}\right), B \equiv (2;1), C \equiv \left(\frac{16}{7};\frac{13}{7}\right), D \equiv \left(\frac{1}{7};\frac{3}{7}\right)$ I lati misurano: $\overline{AB} = \frac{3}{2}; \overline{BC} = \frac{2\sqrt{10}}{7}; \overline{CD} = \frac{5\sqrt{13}}{7}, \overline{AD} = \frac{13\sqrt{5}}{14}$, sommando determiniamo il perimetro.

Determinare il valore del parametro m in modo che le seguenti rette abbiano in comune il punto indicato

12. a) $x + my - 1 = 0, -x + y + 1 = 0, I \equiv (1; 0)$; b) $mx + 2y = 0, 3x - y - 1 = 0, I \equiv (0; 0)$

a) Risolviamo il sistema $\begin{cases} x+my-1=0 \\ -x+y+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m+1)y=0 \\ x=y-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=1 \end{cases}$, queste sono le coordinate del punto intersezione, che è sempre quello richiesto,, pertanto va bene qualsiasi valore di m.

b) Stavolta si ha: $\begin{cases} mx+2y=0 \\ 3x-y=1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{-m-6}, y = \frac{\begin{vmatrix} m & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{-m-6} = \frac{m}{-m-6}$, stavolta si vede che non vi sono soluzioni, dato che x non può mai assumere il valore 0 per nessun valore reale di m.

13. $3mx + y = 0, 4x - 3y - 1 = 0, I \equiv (1/13; -3/13)$

$$\begin{cases} 3mx+y=0 \\ 4x-3y=1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3m & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{-9m-4} = \frac{1}{4+9m}, y = \frac{\begin{vmatrix} 3m & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}{-9m-4} = -\frac{3m}{4+9m} \Rightarrow \begin{cases} 4+9m=13 \\ \frac{3m}{4+9m} = \frac{3}{13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=1 \end{cases}$$

14. $(1 - m) \cdot x - y + 1 = 0, x - (1 + m) \cdot y - 1 = 0, I \equiv (6; 10)$

$$\begin{cases} (1-m)x-y=-1 \\ x-(1+m)y=1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1-m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-m & -1 \\ 1 & -1-m \end{vmatrix}} = \frac{1+m+1}{-1+m^2+1} = \frac{m+2}{m^2}, y = \frac{\begin{vmatrix} 1-m & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{m^2} = \frac{1-m+1}{m^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{m+2}{m^2} = 6 \\ \frac{2-m}{m^2} = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6m^2 - m - 2 = 0 \\ 10m^2 + m - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{1 \pm 7}{12} \prec \begin{matrix} -1/2 \\ 2/3 \end{matrix} \\ m = \frac{-1 \pm 9}{20} = \prec \begin{matrix} 2/5 \\ -1/2 \end{matrix} \end{cases} \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

15. $mx - y + 1 - m = 0, x - 3y + 2 = 0, I \equiv (4/13; 10/13)$

$$\begin{cases} mx - y = m - 1 \\ x - 3y = -2 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} m-1 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{3-3m-2}{-3m+1} = \frac{1-3m}{1-3m} = 1, m \neq \frac{1}{3}$$, dato che l'ascissa del punto intersezione non può mai uguagliare quella di I, vuol dire che il problema non ha soluzione

16. $x + 2y - 3 = 0$, $2x + y + 3 = 0$, $I \equiv (1 - m, 3)$

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + y = -3 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3+6}{1-4} = -3, y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}}{-3} = -\frac{-3-6}{-3} = 3 \Rightarrow 1 - m = -3 \Rightarrow m = 4$$

17. $(1 - 2m) \cdot x + y - 2 = 0$, $(1 + m) \cdot x + y - 3 = 0$, $I \equiv \left(m; \left(8 - \sqrt{3}\right)/3\right)$

$$\begin{cases} (1-2m)x + y = 2 \\ (1+m)x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-2m & 1 \\ 1+m & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2-3}{1-2m-1-m} = \frac{1}{3m}, y = \frac{\begin{vmatrix} 1-2m & 2 \\ 1+m & 3 \end{vmatrix}}{-3m} = -\frac{3-6m-2-2m}{-3m} = \frac{8m-1}{3m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3m} = m \\ \frac{8m-1}{3m} = \frac{8-\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3m^2 = 1 \\ 24m - 3 = 24m - 3\sqrt{3}m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \\ m = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Rightarrow m = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

18. Determinare i valori reali del parametro m in modo che l'area del triangolo rettangolo che la retta di equazione $mx - y + m = 0$, forma con gli assi coordinati sia 3.

Le intersezioni fra la retta e gli assi sono i punti $X \equiv (0; m)$ e $Y \equiv (-1; 0)$, quindi la sua area sarà $\frac{1}{2} \cdot |m|$ che vale 3 solo per $m = \pm 6$

19. Determinare i valori reali del parametro m in modo che le rette: $x + my - 1 = 0$, $3x + 2y = 0$ e $x = 1$, racchiudano un triangolo di area 4.

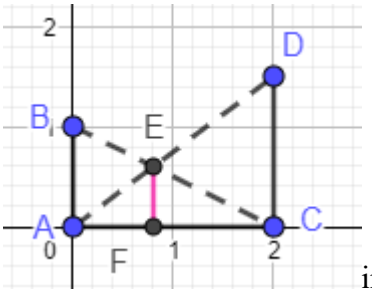
Le intersezioni delle tre rette sono: $A \equiv \left(\frac{2}{2-3m}; \frac{3}{3m-2}\right), B \equiv (1;0), C \equiv \left(1; -\frac{3}{2}\right)$, la cui area misura:

$$\frac{1}{2} \cdot abs\left(\begin{vmatrix} \frac{2}{2-3m} & \frac{3}{3m-2} & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{3}{2} & 1 \end{vmatrix}\right) = \frac{9}{4} \cdot \left|\frac{m}{3m-2}\right|$$, pertanto deve essere $\frac{9}{4} \cdot \left|\frac{m}{3m-2}\right| = 4 \Rightarrow m = \frac{32}{57} \vee m = \frac{32}{39}$

20. Enunciare una condizione sufficiente sui segni dei coefficienti delle equazioni di due rette, per potere dire che esse sono incidenti: $ax + by + c = 0$ e $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$.

Non devono essere parallele quindi deve essere $a \cdot b \neq \alpha \cdot \beta$, ciò accade certamente se i due prodotti hanno segni diversi

21. Due pali alti 10 m e 15 m distano 20 m. Uniamo con dei cavi le cime dei pali alle basi dei pali opposti, vogliamo sapere a che altezza dal suolo si incontrano i cavi.

Consideriamo la situazione in figura 

in cui abbiamo rappresentato il tutto in un

sistema di riferimento cartesiano con origine su A, per semplificare abbiamo considerato che 1 equivale a 10. Pertanto la retta per AD ha equazione $y = 15/20x$ cioè $y = 3/4x$, mentre BC ha equazione $\frac{x}{20}=\frac{y-10}{-10}\Rightarrow\frac{x}{2}=-y+10\Rightarrow x=-2y+20$, per determinare le coordinate di E risolviamo il sistema: $\begin{cases} y=\frac{3}{4}x \\ x=-2y+20 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y=-\frac{3}{2}y+15 \\ x=-2y+20 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y=6 \\ x=8 \end{cases}$, quindi la risposta è 6

Determinare l'equazione della retta parallela alla retta r e passante per il punto P

22. a) r: $3x – 2y = 0$, $P \equiv (1; – 3)$; b) r: $2x + 5y = 0$, $P \equiv (4; – 1)$

a) $3(x – 1) – 2(y + 3) = 0 \Rightarrow 3x – 2y – 9 = 0$; b) $2(x – 4) + 5(y + 1) = 0 \Rightarrow 2x + 5y – 3 = 0$

23. a) r: $–x – 3y = 0$, $P \equiv (0; 1)$; b) r: $–4x + y – 5 = 0$, $P \equiv (–2; –3)$

a) $x + 3(y – 1) = 0 \Rightarrow x + 3y – 3 = 0$; b) $–4(x + 2) + y + 3 = 0 \Rightarrow 4x – y + 5 = 0$

24. a) r: $y = –3x + 5$, $P \equiv (1/2; –3/2)$; b) r: $y = –5/6x – 3$, $P \equiv (–2; –4/3)$

a) $y + 3/2 = –3(x – 1/2) \Rightarrow y = –3x$; b) $y + 4/3 = –5/6(x +2) \Rightarrow y = –5/6x – 3$

25. a) r: $x/3 – 2/5y – 7/8 = 0$, $P \equiv (–1/3; 3/4)$; b) r: $x/3 = 4/5y$, $P \equiv \left(-\sqrt{3}/3;1/2\right)$

a) r: $1/3\ (x + 1/3) – 2/5(y – ¾) = 0 \Rightarrow 30x – 36y + 37 = 0$;

b) $\frac{1}{3}\left(x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{4}{5}\left(y-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow 15x-36y+5\sqrt{3}+18=0$

26. r: $x-y/2+1-\sqrt{2}=0,\ P\equiv\left(\sqrt{2};-3\right)$

$x.\sqrt{2}-\frac{1}{2}\left(y+3\right)=0\Rightarrow 2x-y-3-2\sqrt{2}=0$

27. r: $2=-4/3x+6/5y, P\equiv\left(-3/4;1+\sqrt{2}\right)$

$\frac{4}{3}\left(x+\frac{3}{4}\right)-\frac{6}{5}\left(y-1-\sqrt{2}\right)=0\Rightarrow 20x-18y+33+18\cdot\sqrt{2}=0$

28. La risposta del quesito 23b è l'equazione data, come mai?

[P appartiene alla retta]

Determinare i valori del parametro m in modo tale che le rette r e s siano fra loro parallele

29. a) r: $3x – 4y + 1= 0$, s: $mx + 5y – 3 = 0$; b) r: $2x + 5y = 0$, s: $(1 – m) \cdot x + 4y = 0$

a) Deve essere $ab' = a'b \Rightarrow 15 = –4m \Rightarrow m = –15/4$; b) $8 = 5 – 5m \Rightarrow m = –3/5$

30. r: $mx + 6y + 3 = 0$, s: $3x + my + 7 = 0$

$m^2 = 18 \Rightarrow m = \pm 3\cdot\sqrt{2}$

31. a) r: $2x + 3y – 8 = 0$, s: $x + (2 – m)\cdot y + 6 = 0$; b) r: $2x – my + m = 0$, s: $mx + 4y – 1 = 0$

a) $4 – 2m = 3 \Rightarrow m = 1/2$; b) $8 = –m^2$ che ovviamente non ha soluzioni reali

32. r: $(1 – 2m) \cdot x + 8y – 7 = 0$, s: $(m – 4) \cdot x + 2y = 0$

$2 – 4m = 8m – 32 \Rightarrow m = 17/6$

33. r: $(3 – 2m) \cdot x + my + 1 = 0$, s: $3x + 2y = 0$

$6 – 4m = 3m \Rightarrow m = 6/7$

34. r: $x – y = 0$, s: $(m + 3) \cdot x + (5 – 2m) \cdot y + 2 = 0$

$5 – 2m = –m – 3 \Rightarrow m = 8$

35. r: $3mx + my + 1 – m = 0$, s: $3x + y – 4 = 0$

$3m = 3m$, è un'identità sempre, ma se $m = 0$ non abbiamo le rette, quindi deve essere $m \neq 0$

36. r: $mx + 5y + 1 = 0$, s: $x + 5my = 0$

$5m^2 = 5 \Rightarrow m = \pm 1$

37. Dato il quadrilatero di vertici $A \equiv (–4; 3)$, $B \equiv (–2; 1)$, $C \equiv (2; 0)$, $D \equiv (–1; 4)$, verificare che il quadrilatero avente per vertici i punti medi dei lati di $ABCD$ è un parallelogramma.

I punti medi sono $M_{AB} \equiv (–3; 2)$, $M_{BC} \equiv (0; 1/2)$, $M_{CD} \equiv (1/2; 2)$, $M_{AD} \equiv (–5/2; 7/2)$. Tenuto conto che il coeffi-

ciente angolare di una retta passante per due punti di coordinate $(x_A; y_A)$ e $(x_B; y_B)$ è $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, le rette passanti per i detti punti, a due a due, hanno coefficienti angolari:

$$\frac{1/2-2}{0+3}=-\frac{1}{2};\frac{2-1/2}{1/2}=3;\frac{7/2-2}{-5/2-1/2}=-\frac{1}{2};\frac{2-7/2}{-3+5/2}=3$$

Il che vale come verifica corretta

38. Dato il quadrilatero di vertici $A \equiv (-4; 2)$, $B \equiv (-1; 0)$, $C \equiv (1; 1)$, $D \equiv (-2; 3)$, verificare che è un parallelogramma. Condotte poi le rette passanti per il punto d'incontro delle diagonali di *ABCD* e di coefficienti angolari rispettivamente –5/3, 4/3, si calcolino le coordinate dei punti *E*, *F*, *G*, *H*, intersezioni di tali rette con i lati di *ABCD*. Verificare che il quadrilatero *EFGH* è esso stesso un parallelogramma.

La prima verifica è uguale alla precedente: $\frac{0-2}{-1+4}=-\frac{2}{3};\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2};\frac{3-1}{-2-1}=-\frac{2}{3};\frac{2-3}{-4+2}=\frac{1}{2}$. Il punto d'incontro delle diagonali è $M_{AC} \equiv (-3/2; 3/2)$.

Le rette hanno equazioni: $y - 3/2 = -5/3\ (x + 3/2) \Rightarrow y = -5/3x - 1$ e $y - 3/2 = 4/3\ (x + 3/2) \Rightarrow y = 4/3x + 7/2$, queste rette incontrano i lati nei punti $E \equiv (-1/3; -4/9)$, $F \equiv (-18/5; -13/10)$, $G \equiv (-8/3; 31/9)$, $H \equiv (3/5; 43/10)$. Le rette dei lati di questo quadrilatero si verifica che hanno coefficienti angolari a due a due uguali: 11/42 e 61/12.

39. Dato il quadrilatero di vertici $A \equiv (-5; 0)$, $B \equiv (-2; -1)$, $C \equiv (2; 2)$, $D \equiv (-1; 3)$, verificare che è un parallelogramma. Siano poi *E* ed *F* i punti medi di due lati opposti di *ABCD*. Verificare che *AECF* è un parallelogramma.

Tralasciamo la verifica, determiniamo $E \equiv M_{AB} \equiv (-7/2; -1/2)$, $F \equiv M_{CD} \equiv (1/2; 5/2)$, determiniamo i coefficienti angolari dei lati *EC* e *AF* di *AECF*, dato che gli altri due coincidono con i lati paralleli *AB* e *CD*, ottenendo come coefficiente angolare comune 5/11

40. Dato il triangolo di vertici $A \equiv (-5; 2)$, $B \equiv (-3; -1)$, $C \equiv (2; 1)$, si consideri la mediana *BM*. Si tracci poi il segmento *CD*, con *D* sul lato *AB*, passante per il punto medio *E* di *BM*. Si consideri infine il punto *F* su *CD* in modo che *EF* ed *ED* siano fra loro isometrici. Verificare che *BFMD* è un parallelogramma.

$M \equiv M_{AC} \equiv (-3/2; 3/2)$, $E \equiv M_{BM} \equiv (-9/4; 1/4)$, la retta per *C* ed *E* ha equazione $3x - 17y + 11 = 0$. Il punto *D* ha coordinate che sono soluzioni del sistema $\begin{cases} 3x-17y+11=0 \\ 3x+2y+11=0 \end{cases}$ cioè $D \equiv (-11/3; 0)$. *F* appartiene alla retta $3x - 17y + 11 = 0$, quindi ha coordinate $((17a - 11)/3; a)$, deve essere $(((17a - 11)/3 + 9/4)^2 + (a - ¼)^2 = (-11/3 + 9/4)^2 + (- ¼)^2$, da cui $a = 1/2$ (l'altra soluzione è ovviamente 0, ossia *D*). Pertanto $F \equiv (-5/6; 0)$. Verifichiamo al solito modo di avere un parallelogramma.

41. Dato il quadrilatero *ABCD*, con $A \equiv (-3; -4)$, $B \equiv (-6; -2)$, $C \equiv (-2; -3)$, $D \equiv (1; -1)$, Verificare che il quadrilatero *EFGH*, avente come vertici i punti medi di due lati opposti e i punti medi delle diagonali di *ABCD*, è un parallelogramma.

Analogo ai precedenti

Dei triangoli seguenti, di cui sono fornite le coordinate dei vertici, determinare i punti che dividono i lati AB ed AC nel rapporto k indicato, dalla parte di A. Verificare poi che il segmento congiungente tali punti è parallelo a BC e misura k volte esso. Nelle risposte è dato il coefficiente angolare comune

Livello 2

42. a) $A \equiv (1; 2)$, $B \equiv (-1; 3)$, $C \equiv (-2; -1)$, $k = 3/4$; b) $A \equiv (3; 0)$, $B \equiv (-2; 1)$, $C \equiv (-4; -1)$, $k = 4/5$

a) I punti cercati si trovano usando la formula $\left(\frac{(n-m)\cdot x_A + m\cdot x_B}{n};\frac{(n-m)\cdot y_A + m\cdot y_B}{n}\right)$, che fornisce i punti $D \equiv (-1/2; 11/4)$, $E \equiv (-5/4; -1/4)$. Il coefficiente angolare della retta per *DE* è $m = (11/4 + 1/4)/(-1/2 + 5/4) = 3/(3/4) = 4$, che è lo stesso della retta per *BC*;

b) Si ha: $D \equiv (-1; 4/5)$, $E \equiv (-13/5; -4/5)$. Il coefficiente angolare della retta per *DE* è $m = 1$, che è lo stesso della retta per *BC*

43. a) $A \equiv (4; 1)$, $B \equiv (-3; 3)$, $C \equiv (-4; -1)$, $k = 1/4$; b) $A \equiv (0; 2)$, $B \equiv (-1; 2)$, $C \equiv (-3; -2)$, $k = 1/3$

a) Si ha: $D \equiv (9/4; 3/2)$, $E \equiv (2; 1/2)$. Il coefficiente angolare della retta per *DE* è $m = 4$, che è lo stesso della

retta per BC; b) Si ha: $D \equiv (-1/3; 2)$, $E \equiv (-1; 2/3)$. Il coefficiente angolare comune è $m = 2$

44. a) $A \equiv (4; 1)$, $B \equiv (2; -1)$, $C \equiv (-3; 2)$, $k = 3/7$ b) $A \equiv (1; -3)$, $B \equiv (1/2; 0)$, $C \equiv (-4/3; 1/2)$, $k = 3/4$

a) Si ha: $D \equiv (22/7; 1/7)$, $E \equiv (1; 10/7)$. Il coefficiente angolare comune è $m = -3/5$; b) Si ha: $D \equiv (5/8; -3/4)$, $E \equiv (-3/4; -3/8)$. Il coefficiente angolare comune è $m = -3/11$

45. $A \equiv (0; -5/2)$, $B \equiv (-1/2; 1)$, $C \equiv (-1/3; 2)$, $k = 7/8$

Si ha: $D \equiv (-7/16; 9/16)$, $E \equiv (-7/24; 23/16)$. Il coefficiente angolare comune è $m = 6$

46. $A \equiv (2/3; -2)$, $B \equiv (3; -2/3)$, $C \equiv (-1/2; 1/2)$, $k = 1/5$

Si ha: $D \equiv (17/15; -26/15)$, $E \equiv (13/30; -3/2)$. Il coefficiente angolare comune è $m = -1/3$

47. $A \equiv \left(\sqrt{2}; -1\right)$, $B \equiv (-1/2; 1)$, $C \equiv (-1/3; 0)$, $k = 1/2$

Si ha: $D \equiv \left(\frac{2\sqrt{2}-1}{4}; 0\right)$, $E \equiv \left(\frac{3\sqrt{2}-1}{6}; -\frac{1}{2}\right)$. Il coefficiente angolare comune è $m = -6$

48. $A \equiv \left(1-\sqrt{2}; -1\right)$, $B \equiv \left(\sqrt{2}; 1\right)$, $C \equiv \left(-1; 1+\sqrt{2}\right)$, $k = 3/4$

Si ha: $D \equiv \left(\frac{2\sqrt{2}+1}{4}; \frac{1}{2}\right)$, $E \equiv \left(\frac{-\sqrt{2}-2}{4}; \frac{3\sqrt{2}+2}{4}\right)$. Il coefficiente angolare comune è $m = \sqrt{2} - 2$

Scrivere l'equazione della retta perpendicolare alla retta data e passante per il punto dato

49. a) $5x + 2y = 0$, $(-3; 2)$; b) $7x + 3y - 1 = 0$, $(2; 5)$

a) $2(x + 3) - 5(y - 2) = 0 \Rightarrow 2x - 5y + 16 = 0$; b) $3(x - 2) - 7(y - 5) = 0 \Rightarrow 3x - 7y + 29 = 0$

50. a) $y = -x + 2$, $(-1/2 ; 2)$; b) $y = 5/6x + 7$, $(-1 ; 5/3)$

a) $x + 1/2 - (y - 2) = 0 \Rightarrow 2x - 2y + 5 = 0$; b) $5/6(x + 1) - (y - 5/3) = 0 \Rightarrow 18x + 15y - 7 = 0$

51. a) $-1/3x + y - 2 = 0$, $(1/3; -4)$; b) $2x - y + \sqrt{2} = 0$, $(-\sqrt{2} ; 0)$

a) $1/3(x - 1/3) + (y + 4) = 0 \Rightarrow 3x + y + 3 = 0$; b) $2(x + \sqrt{2}) + y = 0 \Rightarrow x + 2y + \sqrt{2} = 0$

52. a) $4 - 4/3x = y/5$, $\left(\sqrt{3}/2; 0\right)$; b) $3x - y + 1 = 0$, $(1; -3)$

a) $4/3\left(x - \sqrt{3}/2\right) - 1/5y = 0 \Rightarrow 6x - 40y - 3\sqrt{3} = 0$; b) $3(x - 1) + y + 3 = 0 \Rightarrow x + 3y + 8 = 0$

53. a) $4/5x - 6/7y = 0$, $\left(-1/4; 1-\sqrt{2}\right)$; b) $2x - 7y = 0$, $(-2; 3)$

a) $4/5(x + 1/4) + 6/7\left(y - 1 + \sqrt{2}\right) = 0 \Rightarrow 60x + 56y + 56\sqrt{2} - 41 = 0$; b) $2(x + 2) + 7(y - 3) = 0 \Rightarrow 7x + 2y + 8 = 0$

Determinare gli eventuali valori del parametro m in modo che le rette r e s siano fra loro perpendicolari

54. a) r: $4x - 3y + 1 = 0$, s: $2mx + y - 1 = 0$; b) r: $3x + my = 0$, s: $(1 + m)\cdot x + y = 0$

a) Deve essere $4 \cdot 2m - 3 \cdot 1 = 0 \Rightarrow 8m - 3 = 0 \Rightarrow m = 3/8$; b) $3 \cdot (1 + m) + m \cdot 1 = 0 \Rightarrow 4m + 3 = 0 \Rightarrow m = -3/4$

55. r : $-x + my - 1 = 0$, s: $3mx + (1 - m) \cdot y + 3 = 0$

$-1 \cdot 3m + m \cdot (1 - m) = 0 \Rightarrow m^2 + 2m = 0 \Rightarrow m = 0 \vee m = -2$

56. r: $4x + (2 - 5m) \cdot y = 0$, s: $x + my + 1 - m = 0$

$4 \cdot 1 + m \cdot (2 - 5m) = 0 \Rightarrow 5m^2 - 2m - 4 = 0 \Rightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{5}$

57. a) r : $x - 5my + 1 = 0$, s: $5mx + y - 1 = 0$; b) r: $(m - 3) \cdot x + 2y = 0$, s: $x + 2y = 0$

a) $1 \cdot 5m - 5m \cdot 1 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow \forall m \in \mathbb{R}$; b) $(m - 3) \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 0 \Rightarrow m + 1 = 0 \Rightarrow m = -1$

58. r: $(3 - 4m) \cdot x + y = 0$, s: $(5m - 1) \cdot x + y = 0$

$(3 - 4m) \cdot (5m - 1) + 1 \cdot 1 = 0 \Rightarrow 20m^2 - 19m - 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{19 \pm \sqrt{201}}{40}$

59. r: $mx - my = 0$, s: $(3m + 1) \cdot x + (4 - m) \cdot y = 0$

$m \cdot (3m + 1) - m \cdot (4 - m) = 0 \Rightarrow 4m^2 - 3m = 0 \Rightarrow m = 3/4$. La soluzione $m = 0$ non è accettabile perché diversamente la prima retta non esisterebbe

60. r: $(3 + 6m) \cdot x + y - m = 0$, s: $x + 4my - 7 = 0$

$(3 + 6m) \cdot 1 + 1 \cdot 4m = 0 \Rightarrow 10m + 3 = 0 \Rightarrow m = -3/10$]

61. r: $x + y + m = 0$, s: $mx + (1 + 5m) \cdot y - 8 = 0$

$1 \cdot m + 1 \cdot (1 + 5m) = 0 \Rightarrow 6m + 1 = 0 \Rightarrow m = -1/6$

Verificare che le altezze di un triangolo si incontrano in uno stesso punto, considerando i seguenti vertici, determinare perciò le coordinate dell'ortocentro

62. a) (3; – 1), (–2; 1), (–2; 4); b) (2; 2), (–3; 0), (–5; 2); c) (3; 1), (–2; 5), (–3; 0)

a) Le equazioni delle tre altezze si ottengono con la formula $(y - yA) = (xB - xC) /(yC - yB) \cdot (x - xA)$, con A vertice da cui si conduce l'altezza, in questo caso sono: $y = -1$, $y = x + 3$ e $2y = 5x + 18$, l'ortocentro è $H \equiv (-4; -1)$;

b) Le altezze sono: $y = x$, $x = -3$ e $2y = 5x + 21$, l'ortocentro è $H \equiv (-3; -3)$. In questo caso la seconda equazione non s può ottenere con la formula precedente perché perpendicolare all'asse delle x, quindi la sua equazione è semplicemente x = l'ascissa del vertice.

c) Le altezze sono: $5y = 8 - x$, $y = 6x - 7$ e $4y = 5x + 15$, l'ortocentro è $H \equiv (-43/29; 55/29)$

63. a) (1/3; 0), (–1; 2/3), (2; –1); b) (0; 2), (–4; 0), (3; –1)

a) Le altezze sono: $5y = 9x - 3$, $3y = 5x + 7$ e $y = 2x - 5$, l'ortocentro è $H \equiv (22; 39)$;

b) Le altezze sono: $y = 7x + 2$, $y = x + 4$ e $y = 5 - 2x$, l'ortocentro è $H \equiv (1/3; 13/3)$

64. a) (3; 2), (–5; 0), (–2; –2); b) (3/2; 3/7), (–1/5; –1), (0; 0); c) (–4/3; 1), (–2; –5/2), (–1; 0)

a) Le altezze sono: $2y = 3x - 5$, $4y = 5x + 25$ e $y = -4x - 10$, l'ortocentro è $H \equiv (-15/11; -50/11)$;

b) Le altezze sono: $70y = 51 - 14x$, $10y = -35x - 17$ e $100y = -119x$, l'ortocentro è $H \equiv (-170/231; -289/330)$;

c) Le altezze sono: $15y = 7 - 6x$, $6y = 2x - 11$ e $21y = -4x - 1$, l'ortocentro è $H \equiv (69/22; -26/33)$

65. a) $\left(-\sqrt{2};1\right),\left(1-\sqrt{2};0\right),\left(3;-4\right)$; b) (3; 4), (–2; 0), (–1; –1)

a) Le altezze sono: $4y=\left(2+\sqrt{2}\right)x+2\sqrt{2}+6, 5y=\left(\sqrt{2}+3\right)x+2\sqrt{2}-1, y=x-7$, l'ortocentro è $H \equiv \left(36+19\cdot\sqrt{2},\ 29+19\cdot\sqrt{2}\right)$;

b) Le altezze sono: $y = x + 1$, $5y = -4x - 2$ e $4y = -5x - 9$, l'ortocentro è $H \equiv (-13/9; -4/9)$

66. a) $\left(-2/3;1+\sqrt{2}\right),\left(-1;\sqrt{2}/2\right),\left(0;0\right)$; b) (4; –1), (1; 1), (3; 4)

a) Le altezze sono: $3y=3\sqrt{2}x+5\sqrt{2}+3, 6y=4\left(\sqrt{2}-1\right)x+7\sqrt{2}-4, 3y=\left(\sqrt{2}-2\right)x$, l'ortocentro è

$$H \equiv \left(\frac{2\sqrt{2}-7}{2};\frac{18-11\sqrt{2}}{6}\right)$$

b) Le altezze sono: $3y = 5 - 2x$, $5y = x + 4$, $2y = 3x - 1$, l'ortocentro è $H \equiv (1; 1)$

67. Nel precedente quesito l'ortocentro coincide con uno dei vertici, perché?

Il triangolo è rettangolo e l'ortocentro è il vertice dell'angolo retto

68. Determinare l'equazione dell'altezza condotta dal vertice $A \equiv (x_A; y_A)$ al lato opposto di vertici i punti $B \equiv (x_B; y_B)$ e $C \equiv (x_C; y_C)$. Verificare la correttezza di tale formula applicandola ai dati degli esercizi precedenti.

L'abbiamo già detto all'inizio degli esercizi, adesso la scirivmao in forma implicita: $(x_B - x_C) \cdot x + (y_B - y_C) \cdot y + (x_C - x_B) \cdot x_A + (y_C - y_B) \cdot y_A = 0$

69. Dato il triangolo di vertici i punti $A \equiv (2; 4)$, $B \equiv (-1; 2)$, $C \equiv (-1; 1)$, verificare la validità del seguente teorema: *Il circocentro K, il baricentro G e l'ortocentro H di uno stesso triangolo sono allineati.* La linea di appartenenza viene detta retta di Eulero.

Il baricentro è $G \equiv (0;7/3)$, l'ortocentro $H \equiv (-3;4)$, il circocentro $K \equiv (3/2;3/2)$, la linea di Eulero: $5x + 9y - 21 = 0$

70. Dato il triangolo di vertici i punti $A \equiv (1; 2)$, $B \equiv (3; 3)$, $C \equiv (5; -1)$, dopo avere verificato che è rettangolo di ipotenusa AC, verificare che la sua retta di Eulero passa per B.

I punti notevoli sono: $G \equiv (3; 4/3)$, $H \equiv B$, $K \equiv (3; 1/2)$, la retta: $x = 3$

71. Dato il triangolo di vertici i punti $A \equiv (1; 2)$, $B \equiv (3; -1)$, $C \equiv (6; 1)$, dopo avere verificato che è

isoscele sulla base *AC*, verificare che la sua retta di Eulero passa per *B*.

$G \equiv (10/3; 2/3)$, $H \equiv B$, $K \equiv (7/2; 3/2)$, $5x - y - 16 = 0$

72. Dato il triangolo di vertici i punti $A \equiv (3; 4)$, $B \equiv (-2; 1)$, $C \equiv (2; -1)$, verificare la validità del seguente teorema: *in ogni triangolo le rette congiungenti i punti medi dei lati con i punti medi delle rispettive altezze si incontrano in un punto L, detto di Lemoine*.

Le rette hanno equazioni: $24x - 62y + 33 = 0$, $18x - 19y = 0$ e $64x + 18y - 77 = 0$, il punto è $L \equiv (19/20; 9/10)$

Determinare la distanza dei punti seguenti dalle rette assegnate

73. a) $(2; -1)$, $3x - 5y + 1 = 0$; b) $(4; 5)$, $2x + y - 4 = 0$; c) $(-3; 0)$, $4x - 7y + 12 = 0$

a) $\dfrac{|3\cdot 2 - 5\cdot(-1) + 1|}{\sqrt{3^2 + (-5)^2}} = \dfrac{6\cdot\sqrt{34}}{17}$; b) $\dfrac{|2\cdot 4 + 5 - 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \dfrac{9\cdot\sqrt{5}}{5}$; c) 0 perché il punto sta sulla retta

74. a) $(-1; -1)$, $-x + 8y + 2 = 0$; b) $(0; 3)$, $4x + 3y - 7 = 0$; c) $(-1/2; 3)$, $4x - 5y + 2 = 0$

a) $\dfrac{|-1\cdot(-1) + 8\cdot(-1) + 2|}{\sqrt{(-1)^2 + 8^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{65}} = \dfrac{\sqrt{65}}{13}$; b) $\dfrac{|4\cdot 0 + 3\cdot 3 - 7|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \dfrac{2}{5}$; c) $\dfrac{|4\cdot(-1/2) - 5\cdot 3 + 2|}{\sqrt{4^2 + (-5)^2}} = \dfrac{15}{\sqrt{41}}$

75. a) $(-1/2; -3/2)$, $-x/3 + 2 = 0$; b) $(4; -4/5)$ $x - \sqrt{2}\,y + 1 = 0$

a) $\dfrac{|-1/3\cdot(-1/2) + 2|}{\sqrt{(-1/3)^2 + 0^2}} = \dfrac{13/6}{1/3} = \dfrac{13}{2}$; b) $\dfrac{|1\cdot 4 - \sqrt{2}\cdot(-4/5) + 1|}{\sqrt{1^2 + (-\sqrt{2})^2}} = \dfrac{25 + 4\sqrt{2}}{5\sqrt{3}} = \dfrac{4\sqrt{6} + 15\sqrt{3}}{15}$

76. a) $(1 - \sqrt{5}; -1)$, $3x + 2y = 0$; b) $(1 - 2\cdot\sqrt{3}; -3/2)$, $x + y - \sqrt{3} = 0$

a) $\dfrac{|3\cdot(1 - \sqrt{5}) + 2\cdot(-1)|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \dfrac{3\cdot\sqrt{65} - \sqrt{13}}{13}$; b) $\dfrac{|1 - 2\sqrt{3} - 3/2 - \sqrt{3}|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \dfrac{2\cdot\sqrt{2} + 3\cdot\sqrt{6}}{4}$

Determinare l'area dei triangoli di cui sono date le coordinate dei vertici

77. a) $A \equiv (-1; 2)$, $B \equiv (0; -1)$, $C \equiv (3; 1)$; b) $D \equiv (-2; 1)$, $E \equiv (3; -2)$, $F \equiv (1; 3)$

a) $\dfrac{1}{2}\cdot abs\left(\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right) = \dfrac{11}{2}$; b) $\dfrac{1}{2}\cdot abs\left(\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}\right) = \dfrac{19}{2}$

78. a) $A \equiv (-4; 0)$, $B \equiv (2; 2)$, $C \equiv (-2; -1)$; b) $D \equiv (-1; 2)$, $E \equiv (2; -1)$, $F \equiv (3; 0)$

a) $\dfrac{1}{2}\cdot abs\left(\begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}\right) = 55$; b) $\dfrac{1}{2}\cdot abs\left(\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right) = 3$

79. a) $A \equiv (2; 1)$, $B \equiv (-4; 1)$, $C \equiv (0; 0)$; b) $D \equiv (-5; 2)$, $E \equiv (-2; -3)$, $F \equiv (2; 0)$

a) $\dfrac{1}{2}\cdot abs\left(\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right) = 1$; b) $\dfrac{1}{2}\cdot abs\left(\begin{vmatrix} -5 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right) = \dfrac{29}{2}$

Determinare l'eventuale valore del parametro m affinché i seguenti triangoli, di cui sono dati i vertici, abbiano l'area S assegnata

80. a) $A \equiv (m; 1)$, $B \equiv (3; -2)$, $C \equiv (1; 1)$, $S = 2$; b) $D \equiv (m - 2; 0)$, $E \equiv (3; 1)$, $F \equiv (0; m)$, $S = 4$

a) $\dfrac{1}{2}\cdot abs\left(\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right) = 2 \Rightarrow \dfrac{3\cdot|m - 1|}{2} = 2 \Rightarrow 3m - 3 = 4 \vee 3m - 3 = -4 \Rightarrow m = \dfrac{7}{3} \vee m = -\dfrac{1}{3}$

b) $\frac{1}{2}\cdot abs\left(\begin{vmatrix} m-2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & m & 1 \end{vmatrix}\right)=4 \Rightarrow \frac{|m^2-6m+2|}{2}=4 \Rightarrow m^2-6m-6=0 \vee m^2-6m+10=0 \Rightarrow m=3\pm 15 \vee \varnothing$

81. a) $A \equiv (m+1;\ 1)$, $B \equiv (1;\ 2)$, $C \equiv (-m;\ -1)$, $S = 3{,}5$; b) $D \equiv (m-1;\ m)$, $E \equiv (1;\ -1)$, $F \equiv (2;\ 0)$, $S = 4{,}2$

a) $\frac{1}{2}\cdot abs\left(\begin{vmatrix} m+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -m & -1 & 1 \end{vmatrix}\right)=\frac{7}{2} \Rightarrow \frac{|4m+1|}{2}=\frac{7}{2} \Rightarrow 4m+1=7 \vee 4m+1=-7 \Rightarrow m=\frac{3}{2} \vee m=-2$;

b) $\frac{1}{2}\cdot abs\left(\begin{vmatrix} m-1 & m & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right)=4{,}2 \Rightarrow \frac{3}{2}=4{,}2 \Rightarrow \varnothing$

Negli esercizi seguenti determinare per quale valore del parametro m il punto indicato ha la distanza d indicata dalla retta data

82. a) $(1-m;\ 1+m)$, $d = 2$, $4x+3y-1=0$; b) $(2+m;\ 1-3m)$, $d = 4$, $4x-3y-1=0$

a) $\frac{|4\cdot(1-m)+3\cdot(1+m)-1|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2 \Rightarrow \frac{|6-m|}{5}=2 \Rightarrow 6-m=10 \vee 6-m=-10 \Rightarrow m=-4 \vee m=16$;

b) $\frac{|4\cdot(2+m)-3\cdot(1-3m)-1|}{\sqrt{4^2+3^2}}=4 \Rightarrow \frac{|4+13m|}{5}=4 \Rightarrow 4+13m=20 \vee 4+13m=-20 \Rightarrow m=\frac{16}{13} \vee m=-\frac{24}{13}$

83. a) $(m;\ 1-m)$, $d = 3$, $5x+12y-1=0$; b) $(1+3m;\ -m)$, $d = 1$, $12x+5y-1=0$

a) $\frac{|5\cdot m+12\cdot(1-m)-1|}{\sqrt{5^2+12^2}}=3 \Rightarrow \frac{|11-7m|}{13}=3 \Rightarrow 11-7m=39 \vee 11-7m=-39 \Rightarrow m=-4 \vee m=\frac{50}{7}$;

b) $\frac{|12\cdot(1+3m)+5\cdot(-m)-1|}{\sqrt{12^2+5^2}}=1 \Rightarrow \frac{|11+31m|}{13}=1 \Rightarrow 11+31m=13 \vee 11+31m=-13 \Rightarrow m=\frac{2}{31} \vee m=-\frac{24}{31}$

84. a) $(2m;\ 2-m)$, $d = 1$, $12x-5y-1=0$; b) $(1+4m;\ -m)$, $d = 2$, $6x+8y=0$

a) $\frac{|12\cdot(2m)-5\cdot(2-m)-1|}{\sqrt{12^2+5^2}}=1 \Rightarrow \frac{|29m-11|}{13}=1 \Rightarrow 29m-11=13 \vee 29m-11=-13 \Rightarrow m=\frac{24}{29} \vee m=-\frac{2}{29}$;

b) $\frac{|6\cdot(1+4m)+8\cdot(-m)|}{\sqrt{6^2+8^2}}=2 \Rightarrow \frac{|6+16m|}{10}=2 \Rightarrow 6+16m=20 \vee 6+16m=-20 \Rightarrow m=\frac{7}{8} \vee m=-\frac{13}{8}$

85. a) $(1-2m;\ 1-m)$, $d = 2$, $8x+6y+3=0$; b) $(4-m;\ 1+m)$, $d = 3$, $8x-6y-5=0$

a) $\frac{|8\cdot(1-2m)+6\cdot(1-m)+3|}{\sqrt{8^2+6^2}}=2 \Rightarrow \frac{|17-22m|}{10}=2 \Rightarrow 17-22m=20 \vee 17-22m=-20 \Rightarrow m=-\frac{3}{22} \vee m=\frac{37}{22}$;

b) $\frac{|8\cdot(4-m)-6\cdot(1+m)-5|}{\sqrt{8^2+6^2}}=3 \Rightarrow \frac{|21-14m|}{10}=3 \Rightarrow 21-14m=30 \vee 21-14m=-30 \Rightarrow m=-\frac{9}{14} \vee m=\frac{51}{14}$

86. a) $(4+3m;\ m)$, $d = 4$, $6x-8y+1=0$; b) $(m;\ 1-5m)$, $d = 2$, $9x+12y-2=0$

a) $\frac{|6\cdot(4+3m)-8\cdot m+1|}{10}=4 \Rightarrow \frac{|25+10m|}{10}=4 \Rightarrow 5+2m=8 \vee 5+2m=-8 \Rightarrow m=\frac{3}{2} \vee m=-\frac{13}{2}$;

b) $\frac{|9\cdot m+12\cdot(1-5m)-2|}{\sqrt{9^2+12^2}}=2 \Rightarrow \frac{|10-51m|}{15}=2 \Rightarrow 10-51m=30 \vee 10-51m=-30 \Rightarrow m=-\frac{20}{51} \vee m=\frac{40}{51}$

87. a) $(2m-1;\ 1-m)$, $d = 3$, $x+2y=0$; b) $(2m-1;\ 1-m)$, $d=1/\sqrt{5}$, $x+2y=0$

a) $\frac{|2m-1+2\cdot(1-m)|}{\sqrt{1^2+2^2}}=3 \Rightarrow \frac{|1|}{\sqrt{5}}=3 \Rightarrow \varnothing$;

b) $\frac{|2m-1+2\cdot(1-m)|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\Rightarrow\frac{|1|}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\Rightarrow\forall m\in\mathbb{R}$

88. Spiegare perché l'esercizio 87a non ha soluzione.

P appartiene a una parallela a $x + 2y = 0$ la cui distanza è diversa da *d*

89. Spiegare perché l'esercizio 87b è indeterminato.

P appartiene a una parallela a $x + 2y = 0$ la cui distanza è uguale a *d*

90. Dato il triangolo di vertici i punti $A \equiv (0; 4)$, $B \equiv (-3; 1)$, $C \equiv (-2; 5)$, verificare la validità della seguente proprietà: *Ogni altezza è minore della semisomma dei lati concorrenti in essa*.

Verifichiamolo per una sola altezza, gli altri due casi sono analoghi. L'equazione dell'altezza condotta da (0; 4) è $x + 4y - 16 = 0$, il piede dell'altezza è $\begin{cases} x+4y-16=0 \\ \frac{x+3}{-2+3}=\frac{y-1}{5-1} \end{cases}\Rightarrow H\equiv\left(-\frac{36}{17};\frac{77}{17}\right)$, quindi $\overline{AH}=\frac{9}{\sqrt{17}}\approx 2{,}18$, mentre $\frac{\overline{AB}+\overline{AC}}{2}=\frac{\sqrt{5}+3\sqrt{2}}{2}\approx 3{,}24$

91. Dato il triangolo di vertici i punti $A \equiv (-1; 3)$, $B \equiv (2; -4)$, $C \equiv (0; -2)$, verificare la validità della seguente proprietà: *La somma delle tre altezze è minore del perimetro*.

Per semplificare determiniamo la misura delle altezze mediante l'area: $\frac{1}{2}\cdot abs\left(\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}\right)=4$, pertanto le altezze misurano $\overline{AH}=\frac{2\cdot 4}{\overline{BC}}=\frac{8}{2\sqrt{2}}=2\sqrt{2};\overline{BK}=\frac{2\cdot 4}{\overline{AC}}=\frac{8}{\sqrt{26}}=\frac{4\sqrt{26}}{13};\overline{CL}=\frac{2\cdot 4}{\overline{AB}}=\frac{8}{\sqrt{58}}=\frac{4\sqrt{58}}{29}$, la somma delle tre altezze è circa 8,3, mentre il perimetro è circa 15,5.

92. Dato il triangolo di vertici i punti $A \equiv (4; 0)$, $B \equiv (1; 3)$, $C \equiv (-2; -1)$, calcolare le coordinate dell'ortocentro e poi verificare la validità la seguente proprietà: *Ognuno dei 4 punti è ortocentro del triangolo formato dagli altri 3 punti*.

Abbiamo: $H\equiv\left(\frac{8}{7};\frac{15}{7}\right)$. A questo punto basta effettuare le verifiche.

93. Determinare l'equazione della bisettrice delle rette $3x - 2y + 1 = 0$ e $3x - 2y + 7 = 0$.

Dobbiamo imporre la equidistanza di un generico punto dalle rette: $\frac{|3x-2y+1|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\frac{|3x-2y+7|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}\Rightarrow(3x-2y+1)^2=(3x-2y+7)^2\Rightarrow(3x-2y)^2+2\cdot(3x-2y)+1=(3x-2y)^2+2\cdot 7\cdot(3x-2y)+49\Rightarrow 12\cdot(3x-2y)+48=0\Rightarrow 3x-2y+4=0$. Ovviamente ve ne è solo una perché le rette sono parallele,

94. Determinare l'equazione della bisettrice delle rette $ax + by + c = 0$ e $ax + by + d = 0$.

$$\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|ax+by+d|}{\sqrt{a^2+b^2}}\Rightarrow\cancel{(ax+by)^2}+2c\cdot(ax+by)+c^2=\cancel{(ax+by)^2}+2d\cdot(ax+by)+d^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot(c-d)\cdot(ax+by)+c^2-d^2=0$$

95. Determinare le equazioni delle bisettrici degli angoli formati dalle rette fra loro incidenti, di equazioni $4x - y + 5 = 0$ e $2x + 3y - 5 = 0$.

$$\frac{|4x-y+5|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}}=\frac{|2x+3y-5|}{\sqrt{2^2+3^2}}\Rightarrow\sqrt{13}\cdot(4x-y+5)=\pm\sqrt{17}\cdot(2x+3y-5)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\left(2\sqrt{13}\mp\sqrt{17}\right)x-\left(\sqrt{13}\pm 3\sqrt{17}\right)y+5\left(\sqrt{13}\pm\sqrt{17}\right)=0$$

96. Con riferimento all'esercizio precedente, qual è la reciproca posizione delle due bisettrici?

Sono perpendicolari:

$$2\cdot\left(2\sqrt{13}-\sqrt{17}\right)\cdot 2\cdot\left(2\sqrt{13}+\sqrt{17}\right)+\left(\sqrt{13}+3\sqrt{17}\right)\cdot\left(\sqrt{13}-3\sqrt{17}\right)=4\cdot(52-17)+(13-153)=140-140=0$$

97. Dato il quadrilatero di vertici i punti $A \equiv (0; 2)$, $B \equiv (-2; 1)$, $C \equiv (-3; -4)$, $D \equiv (3; -1)$, dopo aver verificato che è un trapezio, verificare che le bisettrici degli angoli interni adiacenti a uno qualsiasi dei suoi lati obliqui sono fra loro perpendicolari.

Le rette dei lati hanno equazioni rispettive $x - 2y + 4 = 0$, $5x - y + 11 = 0$, $x - 2y - 5 = 0$ e $x + y - 2 = 0$, ed effettivamente solo due lati opposti sono paralleli. Consideriamo le bisettrici degli angoli adiacenti a BC, esse sono:

$$\frac{|x-2y+4|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{|5x-y+11|}{\sqrt{5^2+1^2}} \Rightarrow \sqrt{26}\cdot(x-2y+4) = \pm\sqrt{5}\cdot(5x-y+11) \Rightarrow$$

e

$$\Rightarrow \left(\sqrt{26} \mp 5\sqrt{5}\right)x - \left(2\sqrt{26} \mp \sqrt{5}\right)y + 4\sqrt{26} \mp 11\sqrt{5} = 0$$

$$\frac{|x-2y-5|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{|5x-y+11|}{\sqrt{5^2+1^2}} \Rightarrow \sqrt{26}\cdot(x-2y-5) = \pm\sqrt{5}\cdot(5x-y+11) \Rightarrow$$

.

$$\Rightarrow \left(\sqrt{26} \mp 5\sqrt{5}\right)x - \left(2\sqrt{26} \mp \sqrt{5}\right)y - 5\sqrt{26} \mp 11\sqrt{5} = 0$$

Verifichiamo: $\left(\sqrt{26} - 5\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{26} + 5\sqrt{5}\right) + \left(2\sqrt{26} - \sqrt{5}\right)\cdot\left(2\sqrt{26} + \sqrt{5}\right) = 26 - 125 + 104 - 5 = 0$

Scrivere le equazioni delle bisettrici degli angoli interni dei triangoli di cui forniamo i vertici, determinare quindi le coordinate dell'incentro I

98. $A \equiv (0; 2)$, $B \equiv (-1; 2)$, $C \equiv (-3; -2)$

Determiniamo le equazioni dei lati: quella che passa per A e B è ovviamente $y = 2$, per le altre:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} x & y \\ 0 & 2 \\ -3 & -2 \end{matrix} = 0 \Rightarrow 2x - 3y + 6 + 2x = 0 \Rightarrow 4x - 3y + 6 = 0;$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} x & y \\ -1 & 2 \\ -3 & -2 \end{matrix} = 0 \Rightarrow 2x - 3y + 2 + 6 + 2x + y = 0 \Rightarrow 2x - y + 4 = 0$$

Imponiamo le condizioni di luogo delle bisettrici, ovviamente otteniamo anche quelle esterne:

$$|y-2| = \frac{|4x-3y+6|}{\sqrt{16+9}} \Rightarrow 5y - 10 = \pm(4x-3y+6) \Rightarrow x - 2y + 4 = 0 \vee 2x + y - 2 = 0;$$

$$|y-2| = \frac{|2x-y+4|}{\sqrt{4+1}} \Rightarrow \sqrt{5}y - 2\sqrt{5} = \pm(2x-y+4) \Rightarrow \pm 2x + \left(\sqrt{5} \mp 1\right)y + 2\sqrt{5} \pm 4 = 0;$$

Met

$$\frac{|2x-y+4|}{\sqrt{4+1}} = \frac{|4x-3y+6|}{\sqrt{16+9}} \Rightarrow 10x - 5y + 20 = \pm\sqrt{5}(4x-3y+6) \Rightarrow 2\left(\sqrt{5} \pm 2\right)x - \left(\sqrt{5} \pm 3\right)y + 4\sqrt{5} \pm 6 = 0;$$

tiamo a sistema e determiniamo le coordinate dell'incentro: $I \equiv \left(\sqrt{5} - 3; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

99. $A \equiv (-1/4 ; 5/33)$, $B \equiv (6/25; -9/50)$, $C \equiv (7/11; 23/66)$

Come sopra: $14x + 112y - 5 = 0$, $2x - 14y - 3 = 0$, $54x + 42y - 49 = 0$, $I \equiv (163/770; 1/55)$]

100. $A \equiv (4; 1)$, $B \equiv (2; -1)$, $C \equiv (-3; 2)$

Come sopra

$$x - 3y - 1 = 0,\ \left(3 + \sqrt{17}\right)\cdot x - \left(\sqrt{17} - 5\right)\cdot y - 1 - 3\cdot\sqrt{17} = 0\ \left(15 + \sqrt{17}\right)\cdot x + \left(25 + 7\cdot\sqrt{17}\right)\cdot y - 5 - 11\cdot\sqrt{17} = 0$$

$$I \equiv \left(\frac{3\cdot\sqrt{17} - 5}{4}; \frac{\sqrt{17} - 3}{4}\right)$$

101. A quali quadranti può appartenere un punto della retta di equazione $3x + 5y = 15$, che verifica la proprietà di essere equidistante dagli assi coordinati? Giustificare la risposta.

I punti cercati sono le intersezioni delle due bisettrici con la retta. Poiché la detta retta ha equazione seg-

mentaria $\frac{x}{5}+\frac{y}{3}=1$, vuol dire che non passa per il III quadrante, quindi l'incontro con la prima bisettrice è nel primo quadrante. Per quel che riguarda l'incontro con la seconda bisettrice si tenga conto che il suo coefficiente angolare è –3/5, quindi rispetto alla seconda bisettrice forma un angolo maggiore con il semiasse maggiore delle x, quindi incontra la bisettrice nel II quadrante. Verifichiamo. Un punto della data retta ha coordinate $\left(x;\frac{15-3x}{5}\right)$, la sua equidistanza dagli assi equivale a:

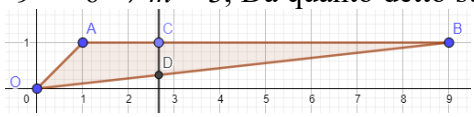
$$|x|=\left|\frac{15-3x}{5}\right| \Rightarrow \pm x=\frac{15-3x}{5} \Rightarrow \pm 5x+3x-15=0 \Rightarrow 8x-15=0 \vee -2x-15=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{15}{8} \vee x=-\frac{15}{2} \Rightarrow \left(\frac{15}{8};\frac{15}{8}\right) \vee \left(-\frac{15}{2};\frac{15}{2}\right)$$

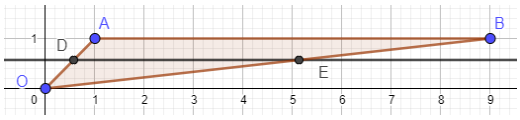
102. Dato il triangolo di vertici *O* ≡ (0; 0), *A* ≡ (1; 1), *B* ≡ (9; 1), determinare il valore del parametro *m*, in modo che le rette seguenti dividano *OAB* in due regioni equivalenti: a) *x* = *m*; b) *y* = *m*; c) *y* = *mx* + 1.

Rappresentiamo il triangolo e determiniamo le equazioni di *OB*: *y*= *x*/9, e di *OA*: *y*= *x*, perché ci serviranno.

a) Le rette $x = m$ sono parallele all'asse y, quindi incontrano il triangolo, e lo dividono in due parti, solo se $0 < m < 9$. Intuitivamente si avrà $m > 1$, quindi divideremo il triangolo in un quadrilatero e un triangolo, lavoriamo su quest'ultimo che deve avere area metà di *OAB*, la cui area è ovviamente $½ \cdot 8 \cdot 1 = 4$, quindi il triangolo diviso deve avere area 2. Un triangolo del genere è ovviamente rettangolo, i suoi vertici hanno coordinate $C \equiv (m; 1)$; $D \equiv (m; m/9)$ e *B*. Quindi l'area di *CBD* misura $½ \cdot (9 - m) \cdot (1 - m/9) = (m - 9)^2/18$. Tale valore deve essere uguale a 2, quindi: $(m - 9)^2 = 36 \Rightarrow m - 9 = -6 \Rightarrow m = 3$, Da quanto detto sui valori ammissibili di *m* abbiamo subito escluso la seconda equazione.



b) Stavolta le rette $y = m$ sono parallele all'asse x, quindi incontrano il triangolo, e lo dividono in due parti, solo se $0 < m < 1$. Ancora una volta divideremo il triangolo in un quadrilatero e un triangolo, lavoriamo su quest'ultimo. I cui vertici hanno coordinate $D \equiv (m; m)$; $E \equiv (9m; m)$ e *O*. Quindi l'area di *ODE* misura $½ \cdot (9m - m) \cdot m = 4m^2$. Tale valore deve essere uguale a 2, quindi: $4m^2 = 2 \Rightarrow m=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Anche stavolta abbiamo subito escluso la seconda equazione.



c) Abbiamo un fascio di centro (0; 1), le rette incontrano il triangolo, e lo dividono in due parti, solo se $m < 0$. Ancora una volta divideremo il triangolo in un quadrilatero e un triangolo, lavoriamo su quest'ultimo. I cui vertici hanno coordinate

$$\begin{cases} y=x \\ y=mx+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{1-m} \\ y=\frac{1}{1-m} \end{cases} \Rightarrow D \equiv \left(\frac{1}{1-m};\frac{1}{1-m}\right); \begin{cases} y=x/9 \\ y=mx+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{9}{1-9m} \\ y=\frac{1}{1-9m} \end{cases} \Rightarrow E \equiv \left(\frac{9}{1-9m};\frac{1}{1-9m}\right)$$

Quindi troviamo l'area di *OCD* e la poniamo uguale a 2

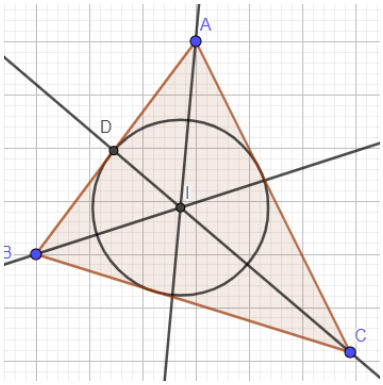
$$\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{1-m} & \frac{1}{1-m} & 1 \\ \frac{9}{1-9m} & \frac{1}{1-9m} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\left|\frac{1}{1-m}\cdot\frac{1}{1-9m}-\frac{1}{1-m}\cdot\frac{9}{1-9m}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\frac{1}{1-m}\cdot\left(\frac{1}{1-9m}-\frac{9}{1-9m}\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left|\frac{1}{1-m}\cdot\frac{-8}{1-9m}\right|; \left|\frac{1}{1-m}\cdot\frac{-8}{1-9m}\right| = 4 \Rightarrow \left|\frac{-2}{9m^2-10m+1}\right| = 1 \Rightarrow 9m^2-10m+1 = 2 \Rightarrow m = \frac{5-\sqrt{34}}{9}$$

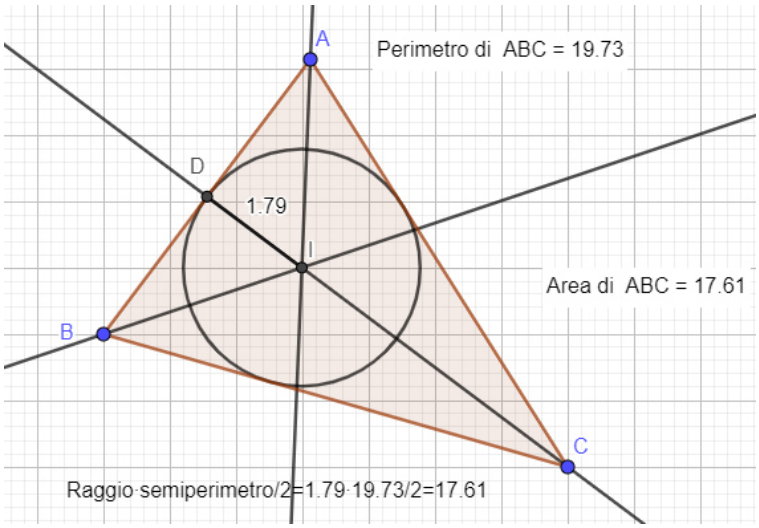
I seguenti esercizi si riferiscono a teoremi veri per qualsiasi triangolo, si richiede di verificarli con un software o una calcolatrice grafica riferendosi a un triangolo a piacere. Indichiamo con R il raggio della circonferenza circoscritta (distanza circocentro vertici), con r il raggio della circonferenza inscritta (distanza incentro lati)

103. Verificare che l'incentro è equidistante dai lati del triangolo, determinando così il raggio del cerchio inscritto.

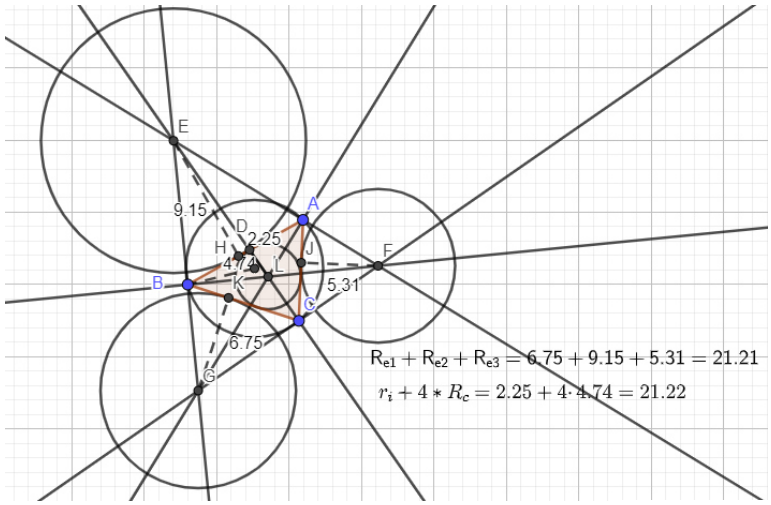
Usiamo Geogebra:



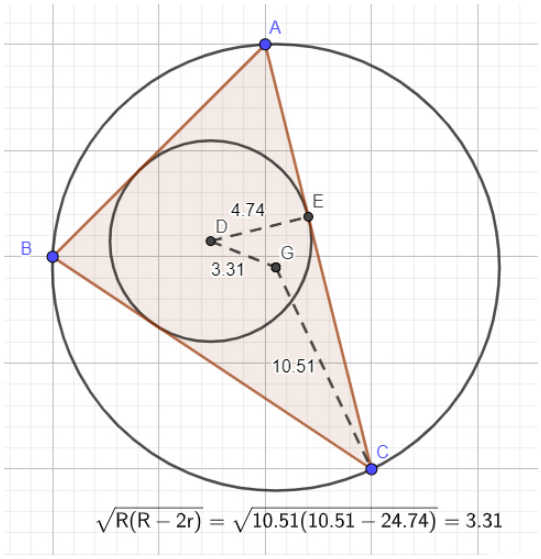
104. Verificare che l'area di un triangolo si trova moltiplicando il raggio *r* del cerchio inscritto per il semiperimetro.



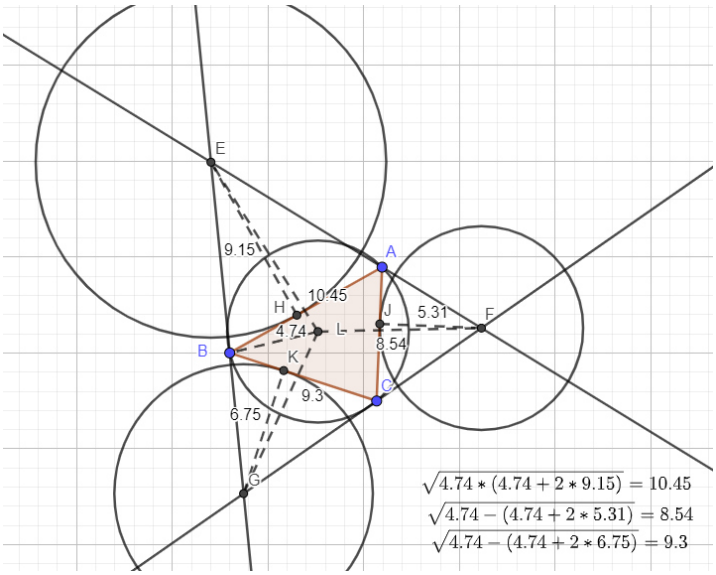
105. La somma dei raggi degli excerchi è uguale alla somma del raggio del cerchio inscritto e del quadruplo del raggio del cerchio circoscritto.



106. La distanza dei centri delle circonferenze inscritta e circoscritta è $\sqrt{R \cdot (R - 2r)}$.



107. Le distanze del circocentro da uno qualsiasi degli excentri è $\sqrt{R \cdot (R + 2\rho)}$, con ρ raggio dell'ex-cerchio considerato.



Verificare che i seguenti luoghi geometrici sono formati da rette o da loro parti

108. Punti le cui distanze da due rette incidenti hanno un rapporto assegnato.

Si ha: $\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{\sqrt{d^2+e^2}}{|dx+ey+f|} = k \Rightarrow \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = k \cdot \frac{|dx+ey+f|}{\sqrt{d^2+e^2}}$, che in effetti rappresenta l'equazione di

due rette: $(ah \pm dp)x + (bh \pm ep)y + ch \pm fp = 0, h = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}, p = \frac{k}{\sqrt{d^2+e^2}}$ che non sono parallele a nessuna delle rette date

109. Punti le cui distanze da due rette parallele hanno un rapporto assegnato.

Si ha: $\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|ax+by+f|} = k \Rightarrow |ax+by+c| = k \cdot |ax+by+f| \Rightarrow a \cdot (1 \pm k) + b \cdot (1 \pm k) + c \pm f = 0$, che sono due rette parallele alle date

110. Punti che hanno costante la differenza dei quadrati da due punti dati.

$$\left(\sqrt{(x-x_P)^2+(y-y_P)^2}\right)^2 - \left(\sqrt{(x-x_Q)^2+(y-y_Q)^2}\right)^2 = k \Rightarrow$$

Si ha: $\Rightarrow \cancel{x^2} - 2x_P x + x_P^2 + \cancel{y^2} - 2y_P y + y_P^2 - \cancel{x^2} + 2x_Q x - x_Q^2 - \cancel{y^2} + 2y_Q y - y_Q^2 - k = 0 \Rightarrow$ che è una retta per-

$$\Rightarrow 2(x_Q - x_P)x + 2(y_Q - y_P)y + x_P^2 + y_P^2 - x_Q^2 - y_Q^2 - k = 0$$

pendicolare alla retta per i punti dati, infatti il suo coefficiente angolare è $\frac{x_P - x_Q}{y_Q - y_P}$, che è anti reciproco a quello della retta che passa per $P \equiv (x_P; y_P), Q \equiv (x_Q; y_Q)$

111. Baricentri dei triangoli di vertici (0; 0), (1; 2), (*k*, 4 + *k*), al variare di *k* nell'insieme dei numeri reali. Suggerimento: scrivere l'equazione parametrica e poi eliminare il parametro.

Si ha: $\begin{cases} x = \frac{0+1+k}{3} \\ y = \frac{0+2+4+k}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1+k}{3} \\ y = \frac{6+k}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 3x-1 \\ y = \frac{6+3x-1}{3} \end{cases} \Rightarrow y = x + \frac{5}{3}$

Fasci di rette

Nei fasci di rette seguenti determinare le rette: a) parallele agli assi coordinati; b) passanti per l'origine; c) passanti per il punto indicato; d) determinare infine il centro del fascio.

1. $(4 - 3k) \cdot x + (7k + 2) \cdot y + k + 4 = 0$; (1; –4)

a) // x: $4 - 3k = 0 \Rightarrow k = 4/3 \Rightarrow 17y + 8 = 0$; //$y$: $\Rightarrow 7k + 2 = 0 \Rightarrow k = -2/7 \Rightarrow 17x + 13 = 0$;
b) $k + 4 = 0 \Rightarrow k = -4 \Rightarrow 8x - 13y = 0$; c) $(4 - 3k) \cdot 1 + (7k + 2) \cdot (-4) + k + 4 = 0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow 2x + y + 2 = 0$;
d) basta risolvere le equazioni a), ottenendo $C \equiv (-13/17; -8/17)$

2. $(3 + 2k) \cdot x - (5k - 1) \cdot y + k - 1 = 0$; (–1; 2)

a) // x: $3 + 2k = 0 \Rightarrow k = -3/2 \Rightarrow 17y - 5 = 0$; //$y$: $\Rightarrow 5k - 1 = 0 \Rightarrow k = 1/5 \Rightarrow 17x - 4 = 0$;
b) $k - 1 = 0 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow 5x - 4y = 0$;
c) $(3 + 2k) \cdot (-1) - (5k - 1) \cdot 2 + k - 1 = 0 \Rightarrow k = -2/11 \Rightarrow 29x + 21y - 13 = 0$; d) Da a): (4/17; 5/17)

3. $(5 - 3k) \cdot x - (6k - 2) \cdot y + 2k - 1 = 0$; (–3; 4)

a) // x: $5 - 3k = 0 \Rightarrow k = 5/3 \Rightarrow 24y - 7 = 0$; //$y$: $\Rightarrow 6k - 2 = 0 \Rightarrow k = 1/3 \Rightarrow 12x - 1 = 0$;
b) $2k - 1 = 0 \Rightarrow k = ½ \Rightarrow 7x - 2y = 0$;
c) $(5 - 3k) \cdot (-3) - (6k - 2) \cdot 4 + 2k - 1 = 0 \Rightarrow k = -8/13 \Rightarrow 89x + 74y - 29 = 0$; d) Da a): (1/12; 7/24)]

4. $(1 - 6k) \cdot x + (5k - 3) \cdot y + k + 4 = 0$; (4; 1)

a) // x: $1 - 6k = 0 \Rightarrow k = 1/6 \Rightarrow 13y - 25 = 0$; //$y$: $\Rightarrow 5k - 3 = 0 \Rightarrow k = 3/5 \Rightarrow 13x - 23 = 0$;
b) $k + 4 = 0 \Rightarrow k = -4 \Rightarrow 25x - 23y = 0$;
c) $(1 - 6k) \cdot 4 + (5k - 3) \cdot 1 + k + 4 = 0 \Rightarrow k = 5/18 \Rightarrow 12x + 29y - 77 = 0$; d) Da a): (23/13; 25/13)]

5. $(-2 + 3k) \cdot x - (4k - 1) \cdot y + 3k - 1 = 0$; (–2; 3)

a) // x: $-2 + 3k = 0 \Rightarrow k = 2/3 \Rightarrow 5y - 3 = 0$; //$y$: $\Rightarrow 4k - 1 = 0 \Rightarrow k = 1/3 \Rightarrow 5x + 1 = 0$;
b) $3k - 1 = 0 \Rightarrow k = 1/3 \Rightarrow 3x + y = 0$;
c) $(-2 + 3k) \cdot (-2) - (4k - 1) \cdot 3 + 3k - 1 = 0 \Rightarrow k = 2/5 \Rightarrow 4x + 3y - 1 = 0$; d) Da a): (–1/5; 3/5)

6. $(4 + k) \cdot x + y + k + 4 = 0$; (2; –4)

a) // x: $4 + k = 0 \Rightarrow k = -4 \Rightarrow y = 0$; //$y$: non si trova alcun valore di k, ma lo stesso la retta vi deve essere, ciò significa che è la retta del fascio che non si trova per alcun valore del parametro. Riscriviamo l'equazione del fascio: $4x + y + 4 + k(x + 1) = 0$, quindi la retta cercata è $x + 1 = 0$;

b) $k + 4 = 0 \Rightarrow k = -4 \Rightarrow y = 0$; c) $(4 + k) \cdot 2 - 4 + k + 4 = 0 \Rightarrow k = -8/3 \Rightarrow 4x + 3y + 4 = 0$;

d) Da a): (–1; 0)

7. $(-2 + k) \cdot x - (3k + 5) \cdot y + 7k = 0$; (–1; –2)

a) // x: $-2 + k = 0 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow 11y - 14 = 0$; //$y$: $\Rightarrow 3k + 5 = 0 \Rightarrow k = -5/3 \Rightarrow 11x + 35 = 0$;

b) $k = 0 \Rightarrow 2x + 5y = 0$; c) $(-2 + k) \cdot (-1) - (3k + 5) \cdot (-2) + 7k = 0 \Rightarrow k = -1 \Rightarrow 3x + 2y + 7 = 0$;

d) Da a): (–35/11; 14/11)]

8. $(-1 + 3k) \cdot x - (5k - 1) \cdot y + 3k - 1 = 0$; (1; –5)

a) // x: $-1 + 3k = 0 \Rightarrow k = 1/3 \Rightarrow y = 0$; //$y$: $\Rightarrow 5k - 1 = 0 \Rightarrow k = 1/5 \Rightarrow x + 1 = 0$;

b) $3k - 1 = 0 \Rightarrow k = 1/3 \Rightarrow y = 0$; c) $(-1 + 3k) \cdot 1 - (5k - 1) \cdot (-5) + 3k - 1 = 0 \Rightarrow k = 7/31 \Rightarrow 5x + 2y + 5 = 0$;

d) Da a): (–1; 0)

9. $(2 + 4k) \cdot x + (k + 5) \cdot y + 7k - 2 = 0$; (–2; –1)

a) // x: $2 + 4k = 0 \Rightarrow k = -2 \Rightarrow 9y - 11 = 0$; //$y$: $\Rightarrow 7k - 2 = 0 \Rightarrow k = 2/7 \Rightarrow 18x + 37 = 0$;

b) $7k - 2 = 0 \Rightarrow k = 2/7 \Rightarrow 22x + 37y = 0$;

c) $(2 + 4k) \cdot (-2) + (k + 5) \cdot (-1) + 7k - 2 = 0 \Rightarrow k = -11/2 \Rightarrow 40x + y + 81 = 0$; d) Da a): (–37/18; 11/9)

10. $(7 + k) \cdot x - (k - 1) \cdot y + 4 = 0$; (3; 1)

a) // x: $7 + k = 0 \Rightarrow k = -7 \Rightarrow 2y + 1 = 0$; //$y$: $\Rightarrow k - 1 = 0 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow 2x + 1 = 0$;

b) Nessun valore di k. $7x + y + 4 + k(x - y) = 0 \Rightarrow x - y = 0$;

c) $(7 + k) \cdot 3 - (k - 1) \cdot 1 + 4 = 0 \Rightarrow k = -13 \Rightarrow 3x - 7y - 2 = 0$; d) Da a): (–1/2 ; –1/2)

11. $k \cdot x - (5k + 1) \cdot y + k + 9 = 0$; (0; –1)

a) // x: $k = 0 \Rightarrow y - 9 = 0$; //$y$: $5k + 1 = 0 \Rightarrow k = -1/5 \Rightarrow x - 44 = 0$;

b) $k + 9 = 0 \Rightarrow k = -9 \Rightarrow 9x - 44y = 0$; c) $k \cdot 0 - (5k + 1) \cdot (-1) + k + 9 = 0 \Rightarrow k = -5/3 \Rightarrow 5x - 22y - 22 = 0$;

d) Da a): (44; 9)

12. $(12 - 7k) \cdot x + (3k + 1) \cdot y + 2k = 0$; (4; 1)

a) // x: $12 - 7k = 0 \Rightarrow k = 7/12 \Rightarrow 43y + 24 = 0$; //$y$: $3k + 1 = 0 \Rightarrow k = -1/3 \Rightarrow 43x - 2 = 0$;

b) $k = 0 \Rightarrow 12x + y = 0$; c) $(12 - 7k) \cdot 4 + (3k + 1) \cdot 1 + 2k = 0 \Rightarrow k = 49/23 \Rightarrow 67x - 170y - 98 = 0$;

d) Da a): (2/43; –24/43)

13. $(2 - 9k) \cdot x + (8k + 1) \cdot y + 3 = 0$; (1/2; –2/3)

#1: $(2 - 9\cdot k)\cdot x + (8\cdot k + 1)\cdot y + 3 = 0$

Esercizi a)

Parallela asse x

#2: SOLVE(2 – 9·k = 0, k)

#3: $k = \frac{2}{9}$

#4: $\left(2 - 9\cdot\frac{2}{9}\right)\cdot x + \left(8\cdot\frac{2}{9} + 1\right)\cdot y + 3 = 0$

#5: $\frac{25\cdot y}{9} + 3 = 0$

Parallela asse y

#6: SOLVE(8·k + 1 = 0, k)

#7: $k = -\frac{1}{8}$

#8: $\left(2 - 9\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)\right)\cdot x + \left(8\cdot\left(-\frac{1}{8}\right) + 1\right)\cdot y + 3 = 0$

#9: $\frac{25\cdot x}{8} + 3 = 0$

b) Passanti per O. Impossibile perché il termine noto non dipende da k. Ma siccome ci deve essere sarà la retta che non vediamo

#10: $2\cdot x + y + 3 + (-9\cdot x + 8\cdot y)\cdot k = 0$

Quindi sarà 9x–8y=0

c) passante per (1/2; -2/3)

#11: $\text{SOLVE}\left((2 - 9\cdot k)\cdot\frac{1}{2} + (8\cdot k + 1)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) + 3 = 0, k\right)$

#12: $k = \frac{20}{59}$

#13: $\left(2 - 9\cdot\frac{20}{59}\right)\cdot x + \left(8\cdot\frac{20}{59} + 1\right)\cdot y + 3 = 0$

#14: $-\frac{62\cdot x}{59} + \frac{219\cdot y}{59} + 3 = 0$

d) centro del fascio. Scegliamo due rette a casao fra le precedenti, meglio le parallele agli assi e le intersechiamo

#15: $\text{SOLVE}\left(\frac{25\cdot y}{9} + 3 = 0 \wedge \frac{25\cdot x}{8} + 3 = 0, [x, y]\right)$

#16: $x = -\frac{24}{25} \wedge y = -\frac{27}{25}$

14. $(-1 + 5k) \cdot x + (7k - 1) \cdot y + k = 0$; $(-1/4; 1)$
a) // x: $(-1 + 5k = 0 \Rightarrow k = 1/5 \Rightarrow 2y + 1 = 0$; //$y$: $7k - 1 = 0 \Rightarrow k = 1/7 \Rightarrow 2x - 1 = 0$;
b) $k = 0 \Rightarrow x + y = 0$; c) $(-1 + 5k) \cdot (-1/4) + (7k - 1) \cdot 1 + k = 0 \Rightarrow k = 1/9 \Rightarrow 4x + 2y - 1 = 0$;
d) Da a): $(1/2; -1/2)$]
15. $(1 - k/2) \cdot x - 3y + 1 + k/3 = 0$; $(-1; 3/4)$

#17: $\left(1 - \frac{k}{2}\right)\cdot x - 3\cdot y + 1 + \frac{k}{3} = 0$

a) //x

#18: $\text{SOLVE}\left(1 - \frac{k}{2}, k\right)$

#19: $k = 2$

#20: $\left(1 - \frac{2}{2}\right)\cdot x - 3\cdot y + 1 + \frac{2}{3} = 0$

#21: $\frac{5}{3} - 3\cdot y = 0$

//y non dovrebbe esserci perché il coefficiente di y non dipende da k, quindi è la retta nascosta

#22: $x - 3\cdot y + 1 + \left(-\frac{1}{2}\cdot x + \frac{1}{3}\right)\cdot k = 0$

E'3x–2=0

b) Passante per 0

#23: $\text{SOLVE}\left(1 + \frac{k}{3} = 0, k\right)$

#24: $k = -3$

#25: $\left(1 - \frac{-3}{2}\right)\cdot x - 3\cdot y + 1 + \frac{-3}{3} = 0$

#26: $\frac{5\cdot x}{2} - 3\cdot y = 0$

c) Passante per (-1; 3/4)

#27: $\text{SOLVE}\left(\left(1 - \frac{k}{2}\right)\cdot(-1) - 3\cdot\frac{3}{4} + 1 + \frac{k}{3} = 0, k\right)$

#28: $k = \frac{27}{10}$

#29: $\left(1 - \frac{\frac{27}{10}}{2}\right)\cdot x - 3\cdot y + 1 + \frac{\frac{27}{10}}{3} = 0$

#30: $-\frac{7\cdot x}{20} - 3\cdot y + \frac{19}{10} = 0$

d) centro del fascio

#31: $\text{SOLVE}\left(\frac{5}{3} - 3\cdot y = 0 \wedge 3\cdot x - 2 = 0, [x, y]\right)$

#32: $x = \frac{2}{3} \wedge y = \frac{5}{9}$

16. $3x - (1/2 + k) \cdot y - (k + 4)/3 = 0$; (1; 2/3)

a) // x: $3x - 1/2y - 4/3 - k(y + 1/3) = 0 \Rightarrow 3y + 1 = 0$; //$y$: $½ + k = 0 \Rightarrow k = -1/2 \Rightarrow 18x - 7 = 0$;
b) $k + 4 = 0 \Rightarrow k = -4 \Rightarrow 6x + 7y = 0$; c) $3 \cdot 1 - (1/2 + k) \cdot 2/3 - (k + 4)/3 = 0 \Rightarrow k = 4/3 \Rightarrow 54x - 33y - 32 = 0$;
d) Da a): (7/18; –1/3)

17. $3k \cdot x - (1 + k) \cdot y - 2k + 1 = 0$; $\left(\sqrt{2}; 1-\sqrt{2}\right)$

a) // x: $k = 0 \Rightarrow y - 1 = 0$; //$y$: $1 + k = 0 \Rightarrow k = -1 \Rightarrow x - 1 = 0$;

b) $1 - 2k = 0 \Rightarrow k = ½ \Rightarrow x - y = 0$; c) $\Rightarrow 3\sqrt{2}k - (1+k)\cdot\left(1-\sqrt{2}\right) - 2k + 1 = 0 \Rightarrow k = -\frac{8+3\sqrt{2}}{23} k = \Rightarrow$

$\left(8+3\cdot\sqrt{2}\right)\cdot x + \left(5-\sqrt{2}\right)\cdot y - 2\cdot\sqrt{2} - 13 = 0$; d) Da a): (1; 1)

18. $k \cdot x - 2k \cdot y + 3k = 0$; (–2/3; 3/2)
Non è un fascio, perché per $k \neq 0$ genera sempre la stessa retta

Con riferimento ai fasci di rette degli esercizi dal* 1 *al* 17*, determinare le rette: a) parallele alla retta r; b) perpendicolari alla retta s

19. r: $2x - 7y + 7 = 0$; s: $3x + 5y + 7 = 0$
a) $(4 - 3k)/2 = -(7k + 2)/7 \Rightarrow k = 32/7 \Rightarrow 34x - 119y - 30 = 0$;
b) $3\cdot(4 - 3k) + 5\cdot(7k + 2) \Rightarrow k = -11/13 \Rightarrow 85x - 51y + 41 = 0$

20. r: $3x - 2y + 1 = 0$; s: $-x + 5y + 2 = 0$
a) $(3 + 2k)/3 = (5k - 1)/2 \Rightarrow k = 9/11 \Rightarrow 51x - 34y - 2 = 0$;
b) $(3 + 2k)\cdot(-1) - (5k - 1)\cdot 5 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow 85x + 17y - 25 = 0$

21. r: $3x + 2y + 8 = 0$; s: $2x + y = 0$
a) $(5 - 3k)/3 = -(6k - 2)/2 \Rightarrow k = -1/3 \Rightarrow 18x + 12y - 5 = 0$;
b) $(5 - 3k)\cdot 2 - (6k - 2)\cdot 1 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow 2x - 4y + 1 = 0$

22. r: $x - 3y + 4 = 0$; s: $4x + y = 0$
a) $(1 - 6k)/1 = (5k - 3)/(-3) \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x - 3y + 4 = 0$;
b) $(1 - 6k)/1 = (5k - 3)/(-3) \Rightarrow k = 1/19 \Rightarrow 13x - 52y + 77 = 0$

23. r: $4x + y + 5 = 0$; s: $7x - 2y + 2 = 0$
a) $(-2 + 3k)/4 = (-4k + 1)/1 \Rightarrow k = 6/19 \Rightarrow 20x + 5y + 1 = 0$;
b) $(-2 + 3k)\cdot 7 + (-4k + 1)\cdot(-2) \Rightarrow k = 16/29 \Rightarrow 10x + 35y - 19 = 0$

24. r: $-3x + y = 0$; s: $7x + y - 2 = 0$
a) $(4 + k)/(-3) = 1/1 \Rightarrow k = -7 \Rightarrow 3x - y + 3 = 0$;
b) $(4 + k)/(-3) = 1/1 \Rightarrow k = -29/7 \Rightarrow x - 7y + 1 = 0$

25. r: $8x - y + 1 = 0$; s: $9x + y = 0$
a) $(-2 + k)/8 = (-3k - 5)/(-1) \Rightarrow k = -42/23 \Rightarrow 88x - 11y + 294 = 0$;
b) $(-2 + k)\cdot 9 + (-3k - 5)\cdot 1 \Rightarrow k = 23/6 \Rightarrow 11x - 99y + 161 = 0$

26. r: $2x + 3y + 7 = 0$; s: $4x - 3y + 7 = 0$
a) $(-1 + 3k)/2 = (-5k + 1)/3 \Rightarrow k = 5/19 \Rightarrow 2x + 3y + 2 = 0$;
b) $(-1 + 3k)\cdot 4 + (-5k + 1)\cdot(-3) \Rightarrow k = 7/27 \Rightarrow 3x + 4y + 3 = 0$

27. r: $4x - 5y + 1 = 0$; s: $6x - 8y = 0$
a) $(2 + 4k)/4 = (k + 5)/(-5) \Rightarrow k = -5/4 \Rightarrow 12x - 15y + 43 = 0$;
b) $(2 + 4k)\cdot 6 + (k + 5)\cdot(-8) \Rightarrow k = 7/4 \Rightarrow 36x + 27y + 41 = 0$

28. r: $x - y + 1 = 0$; s: $2x + 4y = 0$
a) $(7 + k)/1 = (-k + 1)/(-1) \Rightarrow 7 = -1$, quindi la retta cercata è quella del fascio generatore: $7x + y + 4 + k \cdot (x - y) = 0 \Rightarrow x - y = 0$;
b) $(7 + k)\cdot 2 + (-k + 1)\cdot 4 \Rightarrow k = 9 \Rightarrow 4x - 2y + 1 = 0$

29. r: $2y + 1 = 0$; s: $x + 5y + 1 = 0$
a) $k = 0 \Rightarrow y - 9 = 0$;
b) $k\cdot 1 + (-5k - 1)\cdot 5 \Rightarrow k = -5/24 \Rightarrow 5x - y + 211 = 0$

30. r: $-x + 6y = 0$; s: $3x - y + 2 = 0$
a) $(12 - 7k)/(-1) = (3k + 1)/6 \Rightarrow k = 73/39 \Rightarrow 43x - 258y - 146 = 0$;
b) $(12 - 7k)\cdot 3 + (3k + 1)\cdot(-1) \Rightarrow k = 35/24 \Rightarrow 43x + 129y + 70 = 0$

31. ***r: x/2 – y + 1 = 0; s: –2x + 3/4y = 0***

a) $(2 - 9k)/(1/2) = (8k + 1)/(-1) \Rightarrow k = ½ \Rightarrow 5x - 10y - 6 = 0$;

b) $(2 - 9k)\cdot(-2) + (8k + 1)\cdot(3/4) \Rightarrow k = 13/96 \Rightarrow 75x + 200y + 288 = 0$

32. ***r: –x/2 + 3/4y = 0; s: –x + 5/2y – 1 = 0***

a) $(-1 + 5k)/(-1/2) = (7k - 1)/(3/4) \Rightarrow k = 5/29 \Rightarrow 4x - 6y - 5 = 0$;

b) $(-1 + 5k)\cdot(-1) + (7k - 1)\cdot(5/2) \Rightarrow k = 3/25 \Rightarrow 10x + 4y - 3 = 0$

33. ***r: 5x/2 – 3y = 0; s: –6x/5 + y = 0***

a) $(1 - k/2)/(5/2) = (-3)/(-3) \Rightarrow k = -3 \Rightarrow 5x - 6y = 0$;

b) $(1 - k/2)\cdot(-6/5) + (-3)\cdot 1 \Rightarrow k = 7 \Rightarrow 15x + 18y - 20 = 0$

34. ***r: –x + 4/5y = 0; s: 3x + y/4 = 0***

a) $3/(-1) = (-1/2 - k)/(4/5) \Rightarrow k = 19/10 \Rightarrow 90x - 72y - 59 = 0$;

b) $3\cdot 3 + (-1/2 - k)\cdot 1/4 \Rightarrow k = 71/2 \Rightarrow 18x - 216y - 79 = 0$

35. $r:\left(1-\sqrt{3}\right)\cdot x+y+1=0; s:\left(1-\sqrt{2}\right)\cdot x+\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot y=0$

a) $\dfrac{3k}{1-\sqrt{3}}=\dfrac{-1-k}{1}\Rightarrow k=\dfrac{3\sqrt{3}-1}{13}\Rightarrow\left(3\sqrt{3}-1\right)x-\left(\sqrt{3}+4\right)y-2\sqrt{3}+5=0$

b) $3k\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)+\left(-1-k\right)\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)=0\Rightarrow k=-\dfrac{3\sqrt{2}+5}{14}\Rightarrow\left(3\sqrt{2}+5\right)x+\left(3-\sqrt{2}\right)y-2\sqrt{2}-8=0$

Con riferimento ai fasci di rette definiti negli esercizi dal n. 1 al 16, determinare, usando eventualmente un software come Derive o una calcolatrice grafico–simbolica, gli eventuali valori reali di k, per i quali si ottengono rette formanti: a) con gli assi coordinati un triangolo di area A assegnata; b) con le rette r e s degli esercizi precedenti, un'area S assegnata; c) determinare poi la retta del fascio che non si ottiene per alcun valore reale di k

36. ***A = 1; S = 1***

a) Determiniamo le intersezioni della generica retta del fascio con gli assi coordinati: $(4 - 3k)\cdot x + k + 4 = 0 \Rightarrow x=-\dfrac{k+4}{7k+2}$; $(7k + 2)\cdot y + k + 4 = 0 \Rightarrow y=\dfrac{k+4}{3k-4}$, quindi risolviamo:

$$\frac{1}{2}\cdot\left|-\frac{k+4}{7k+2}\cdot\frac{k+4}{3k-4}=1\Rightarrow k\in\left\{\frac{26\pm 2\cdot\sqrt{497}}{41},\ 0,\ \frac{36}{43}\right\}\right|.$$

b) Uguale procedura per le rette *r* e *s*, determinando le intersezioni con la generica retta del fascio:

$$\begin{cases}(4-3k)x+(7k+2)y+k+4=0\\ 2x-7y+7=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{14\cdot(4k+3)}{7k-32}\\ y=\dfrac{23k-20}{7k-32}\end{cases};\begin{cases}(4-3k)x+(7k+2)y+k+4=0\\ 3x+5y+7=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{22k-3}{7-18k}\\ y=\dfrac{4\cdot(2-3k)}{18k-7}\end{cases};$$

$$\begin{cases}3x+5y+7=0\\ 2x-7y+7=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{84}{31}\\ y=\dfrac{7}{31}\end{cases}$$

A questo punto risolviamo l'equazione

$$\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}\dfrac{14\cdot(4k+3)}{7k-32} & \dfrac{23k-20}{7k-32} & 1\\ \dfrac{22k-3}{7-18k} & \dfrac{4\cdot(2-3k)}{18k-7} & 1\\ -\dfrac{84}{31} & \dfrac{7}{31} & 1\end{vmatrix}=1\Rightarrow k=\frac{52\,243\pm 31\cdot\sqrt{647\,249}}{62\,924}$$

c) Basta isolare i termini che contengono *k*: $3x - 7y - 1 = 0$

Negli esercizi seguenti mostriamo solo le soluzioni dei vari passi ottenute con Derive con analoga procedura a quella qui mostrata. Abbiamo definito le seguenti funzioni:

$$a_tr(xa,\ ya,\ xb,\ yb,\ xc,\ yc) := \frac{1}{2}\cdot\left|\mathrm{DET}\begin{bmatrix} xa & ya & 1 \\ xb & yb & 1 \\ xc & yc & 1 \end{bmatrix}\right|$$

per il calcolo dell'area di un triangolo di dati vertici.

$$area(f,\ r,\ s) := [SOLUTIONS(f \wedge r,\ [x,\ y]),\ SOLUTIONS(f \wedge s,\ [x,\ y]),\ SOLUTIONS(r \wedge s,\ [x,\ y])]$$

per trovare le coordinate dei vertici del triangolo formato dal generico fascio e dalle rette date *r* ed *s*. Mentre abbiano inserito preventivamente l'equazione del fascio in una funzione del tipo fascioN(k, x, y). In alcuni risultati Derive mostra un risulato strano e ovviamente assurdo, ossia ∞.

37. $A = 2$; $S = 4$

a)

$$SOLUTIONS(fascio2(k,\ 0,\ x) \wedge fascio2(k,\ y,\ 0),\ [x,\ y])$$

$$\left[\left[\frac{k-1}{5\cdot k-1},\ \frac{1-k}{2\cdot k+3}\right]\right]$$

$$SOLUTIONS\left(\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{k-1}{5\cdot k-1}\cdot\frac{1-k}{2\cdot k+3}\right| = 2,\ k\right)$$

$$\left[\frac{2\cdot\sqrt{309}}{39}-\frac{9}{13},\ -\frac{2\cdot\sqrt{309}}{39}-\frac{9}{13},\ \frac{2\cdot\sqrt{269}}{41}-\frac{25}{41},\ -\frac{2\cdot\sqrt{269}}{41}-\frac{25}{41}\right]$$

b)

$$area(fascio2(k,\ x,\ y),\ 3\cdot x-2\cdot y+1,\ -x+5\cdot y+2)$$

$$\begin{bmatrix} \left[\frac{3\cdot k+1}{9-11\cdot k},\ \frac{k-6}{11\cdot k-9}\right] \\ \left[\frac{55}{5\cdot k+16}-3,\ -\frac{5\cdot(k+1)}{5\cdot k+16}\right] \\ \left[-\frac{9}{13},\ -\frac{7}{13}\right] \end{bmatrix}$$

$$SOLVE\left(a_tr\left(\frac{3\cdot k+1}{9-11\cdot k},\ \frac{k-6}{11\cdot k-9},\ \frac{55}{5\cdot k+16}-3,\ -\frac{5\cdot(k+1)}{5\cdot k+16},\ -\frac{9}{13},\ -\frac{7}{13}\right) = 4,\ k\right)$$

$$k = -\frac{13\cdot\sqrt{168194}}{3310}-\frac{2701}{3310} \vee k = \frac{13\cdot\sqrt{168194}}{3310}-\frac{2701}{3310} \vee k = -\frac{39\cdot\sqrt{24726}}{2410}-\frac{4111}{2410} \vee k = \frac{39\cdot\sqrt{24726}}{2410}-\frac{4111}{2410}$$

c) $2x - 5y + 1 = 0$

38. $A = 3$; $S = 1$

a)

$$SOLUTIONS(fascio3(k,\ 0,\ x) \wedge fascio3(k,\ y,\ 0),\ [x,\ y])$$

$$\left[\left[\frac{2\cdot k-1}{2\cdot(3\cdot k-1)},\ \frac{2\cdot k-1}{3\cdot k-5}\right]\right]$$

$$SOLUTIONS\left(\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{\frac{2\cdot k-1}{2\cdot(3\cdot k-1)}\cdot(2\cdot k-1)}{3\cdot k-5}\right| = 3,\ k\right)$$

$$\left[\frac{5\cdot\sqrt{51}}{52}+\frac{53}{52},\ \frac{53}{52}-\frac{5\cdot\sqrt{51}}{52},\ \frac{\sqrt{1317}}{56}+\frac{55}{56},\ \frac{55}{56}-\frac{\sqrt{1317}}{56}\right]$$

b)

```
area(fascio3(k, x, y), 3·x + 2·y + 8, 2·x + y)
```

$$\left[\left[\frac{53}{6\cdot(3\cdot k+1)}-\frac{13}{3},\ \frac{30\cdot k-43}{4\cdot(3\cdot k+1)}\right],\ \left[\frac{1-2\cdot k}{9\cdot k+1},\ \frac{2\cdot(2\cdot k-1)}{9\cdot k+1}\right],\ [8,\ -16]\right]$$

$$\mathrm{SOLVE}\left(a_tr\left(\frac{53}{6\cdot(3\cdot k+1)}-\frac{13}{3},\ \frac{30\cdot k-43}{4\cdot(3\cdot k+1)},\ \frac{1-2\cdot k}{9\cdot k+1},\ \frac{2\cdot(2\cdot k-1)}{9\cdot k+1},\ 8,\ -16\right)=1,\ k\right)$$

$$k=-\frac{\sqrt{1310}}{2630}-\frac{47}{526}\ \vee\ k=\frac{\sqrt{1310}}{2630}-\frac{47}{526}$$

c) $3x + 6y - 2 = 0$

39. $\boldsymbol{A = 4; S = 5}$

a)

```
SOLUTIONS(fascio4(k, 0, x) ∧ fascio4(k, y, 0), [x, y])
```

$$\left[\left[\frac{k+4}{3-5\cdot k},\ \frac{k+4}{6\cdot k-1}\right]\right]$$

$$\mathrm{SOLVE}\left(\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{\frac{k+4}{3-5\cdot k}\cdot(k+4)}{6\cdot k-1}\right|=4,\ k\right)$$

$$k=\frac{96}{239}-\frac{2\cdot\sqrt{1826}}{239}\ \vee\ k=\frac{2\cdot\sqrt{1826}}{239}+\frac{96}{239}$$

b)

```
area(fascio4(k, x, y), x - 3·y + 4, 4·x + y)
```

$$\left[\left[\frac{23}{13},\ \frac{25}{13}\right],\ \left[\frac{k+4}{13\cdot(2\cdot k-1)},\ \frac{4\cdot(k+4)}{13\cdot(1-2\cdot k)}\right],\ \left[-\frac{4}{13},\ \frac{16}{13}\right]\right]$$

$$\mathrm{SOLVE}\left(a_tr\left(\frac{23}{13},\ \frac{25}{13},\ \frac{k+4}{13\cdot(2\cdot k-1)},\ \frac{4\cdot(k+4)}{13\cdot(1-2\cdot k)},\ -\frac{4}{13},\ \frac{16}{13}\right)=5,\ k\right)$$

false

$$\left[k=\frac{130}{179},\ k=\frac{130}{341}\right]$$

In realtà l'equazione ha soluzioni

c) $6x - 5y - 1 = 0$

40. $\boldsymbol{A = 3; S = 1}$

a)

```
SOLUTIONS(fascio5(k, 0, x) ∧ fascio5(k, y, 0), [x, y])
```

$$\left[\left[\frac{3\cdot k - 1}{4\cdot k - 1}, \frac{1 - 3\cdot k}{3\cdot k - 2}\right]\right]$$

$$\text{SOLVE}\left(\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{3\cdot k - 1}{4\cdot k - 1}\cdot\frac{1 - 3\cdot k}{3\cdot k - 2}\right| = 3,\ k\right)$$

$$k = \frac{10}{21} - \frac{\sqrt{23}}{21} \vee k = \frac{\sqrt{23}}{21} + \frac{10}{21} \vee k = \frac{4}{9} - \frac{\sqrt{3}}{9} \vee k = \frac{\sqrt{3}}{9} + \frac{4}{9}$$

b)

```
area(fascio5(k, x, y), 4·x + y + 5, 7·x − 2·y + 2)
```

$$\left[\begin{array}{c}\left[-\frac{24}{19\cdot(19\cdot k - 6)} - \frac{23}{19}, \frac{3\cdot(2 - k)}{19\cdot k - 6}\right]\\ \left[\frac{2\cdot k}{3 - 22\cdot k}, \frac{3\cdot(5\cdot k - 1)}{22\cdot k - 3}\right]\\ \left[-\frac{4}{5}, -\frac{9}{5}\right]\end{array}\right]$$

$$\text{SOLVE}\left(\text{a_tr}\left(-\frac{24}{19\cdot(19\cdot k - 6)} - \frac{23}{19}, \frac{3\cdot(2 - k)}{19\cdot k - 6}, \frac{2\cdot k}{3 - 22\cdot k}, \frac{3\cdot(5\cdot k - 1)}{22\cdot k - 3}, -\frac{4}{5}, -\frac{9}{5}\right) = 1,\ k\right)$$

$$k = \frac{1647}{8743} - \frac{15\cdot\sqrt{865}}{8743} \vee k = \frac{15\cdot\sqrt{865}}{8743} + \frac{1647}{8743} \vee k = -\frac{15\cdot\sqrt{385}}{383} - \frac{243}{383} \vee k = \frac{15\cdot\sqrt{385}}{383} - \frac{243}{383}$$

c)$3x - 4y + 3 = 0$

41. $A = 4$; $S = 6$

a)

```
SOLUTIONS(fascio6(k, 0, x) ∧ fascio6(k, y, 0), [x, y])
```

$$[[-k - 4, -1]]$$

$$\text{SOLVE}\left(\frac{1}{2}\cdot|(-k - 4)\cdot(-1)| = 4,\ k,\ \text{Real}\right)$$

$$k = -12 \vee k = 4$$

b)

```
area(fascio6(k, x, y), − 3·x + y, 7·x + y − 2)
```

$$\left[\begin{array}{c}\left[-\frac{k + 4}{k + 7}, -\frac{3\cdot(k + 4)}{k + 7}\right]\\ \left[-\frac{9}{k - 3} - 1, \frac{9\cdot(k + 4)}{k - 3}\right]\\ \left[\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right]\end{array}\right]$$

$$\text{SOLVE}\left(\text{a_tr}\left(-\frac{k + 4}{k + 7}, -\frac{3\cdot(k + 4)}{k + 7}, -\frac{9}{k - 3} - 1, \frac{9\cdot(k + 4)}{k - 3}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right) = 6,\ k\right)$$

$$k = -\frac{5\cdot\sqrt{190}}{22} - \frac{37}{11} \vee k = \frac{5\cdot\sqrt{190}}{22} - \frac{37}{11} \vee k = -\frac{5\cdot\sqrt{10}}{2} - 17 \vee k = \frac{5\cdot\sqrt{10}}{2} - 17$$

c) $x + 1 = 0$

42. $A = 5$; $S = 3$

a)

```
SOLUTIONS(fascio7(k, 0, x) ∧ fascio7(k, y, 0), [x, y])
```

$$\left[\left[\frac{7\cdot k}{3\cdot k+5}, \frac{7\cdot k}{2-k}\right]\right]$$

$$\text{SOLVE}\left(\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{\frac{7\cdot k}{3\cdot k+5}\cdot 7\cdot k}{2-k}\right| = 5,\ k,\ \text{Real}\right)$$

$$k = \pm\infty \vee k = \frac{5}{79} - \frac{5\cdot\sqrt{317}}{79} \vee k = \frac{5\cdot\sqrt{317}}{79} + \frac{5}{79}$$

b)

```
area(fascio7(k, x, y), 8·x − y + 1, 9·x + y)
```

$$\left[\begin{array}{c}\left[\frac{4\cdot k-5}{23\cdot k+42}, \frac{55\cdot k+2}{23\cdot k+42}\right]\\ \left[-\frac{7\cdot k}{28\cdot k+43}, \frac{63\cdot k}{28\cdot k+43}\right]\\ \left[-\frac{1}{17}, \frac{9}{17}\right]\end{array}\right]$$

$$\text{SOLVE}\left(\text{a_tr}\left(\frac{4\cdot k-5}{23\cdot k+42}, \frac{55\cdot k+2}{23\cdot k+42}, -\frac{7\cdot k}{28\cdot k+43}, \frac{63\cdot k}{28\cdot k+43}, -\frac{1}{17}, \frac{9}{17}\right) = 3,\ k\right)$$

$$k = -\frac{17\cdot\sqrt{9003387}}{57407} - \frac{114328}{57407} \vee k = \frac{17\cdot\sqrt{9003387}}{57407} - \frac{114328}{57407}$$

c) $x - 3y + 7 = 0$

43. $A = 6$; $S = 10$

a)

```
SOLUTIONS(fascio8(k, 0, x) ∧ fascio8(k, y, 0), [x, y])
```

$$\left[\left[\frac{3\cdot k-1}{5\cdot k-1}, -1\right]\right]$$

$$\text{SOLVE}\left(\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{3\cdot k-1}{5\cdot k-1}\cdot(-1)\right| = 6,\ k,\ \text{Real}\right)$$

$$k = \frac{13}{63} \vee k = \frac{11}{57}$$

b)

```
area(fascio8(k, x, y), 2·x + 3·y + 7, 4·x − 3·y + 7)
```

$$\left[\begin{array}{c}\left[-\frac{30}{19\cdot(19\cdot k-5)} - \frac{44}{19}, \frac{5\cdot(1-3\cdot k)}{19\cdot k-5}\right]\\ \left[\frac{18}{11\cdot(11\cdot k-1)} - \frac{26}{11}, \frac{3\cdot(1-3\cdot k)}{11\cdot k-1}\right]\\ \left[-\frac{7}{3}, -\frac{7}{9}\right]\end{array}\right]$$

$$\text{SOLVE}\left(\text{a_tr}\left(-\frac{30}{19\cdot(19\cdot k-5)} - \frac{44}{19}, \frac{5\cdot(1-3\cdot k)}{19\cdot k-5}, \frac{18}{11\cdot(11\cdot k-1)} - \frac{26}{11}, \frac{3\cdot(1-3\cdot k)}{11\cdot k-1}, -\frac{7}{3}, -\frac{7}{9}\right) = 10,\ k\right)$$

$$k = \frac{3335}{18811} - \frac{270\cdot\sqrt{30}}{18811} \vee k = \frac{270\cdot\sqrt{30}}{18811} + \frac{3335}{18811} \vee k = \frac{475}{2687} - \frac{270\cdot\sqrt{42}}{18809} \vee k = \frac{270\cdot\sqrt{42}}{18809} + \frac{475}{2687}$$

c) $3x - 5y + 3 = 0$

44. $A = 5$; $S = 8$

a)

```
SOLUTIONS(fascio9(k, 0, x) ∧ fascio9(k, y, 0), [x, y])
```

$$\left[\left[\frac{2 - 7\cdot k}{k + 5}, \frac{2 - 7\cdot k}{2\cdot(2\cdot k + 1)}\right]\right]$$

$$\mathrm{SOLVE}\left(\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{2 - 7\cdot k}{k + 5}\cdot\frac{2 - 7\cdot k}{2\cdot(2\cdot k + 1)}\right| = 5,\ k,\ \mathrm{Real}\right)$$

$$k = \pm\infty \vee k = \frac{124}{9} - \frac{4\cdot\sqrt{1015}}{9} \vee k = \frac{4\cdot\sqrt{1015}}{9} + \frac{124}{9}$$

b)

```
area(fascio9(k, x, y), 4·x − 5·y + 1, 6·x − 8·y)
```

$$\left[\begin{array}{c}\left[\frac{25}{3\cdot(4\cdot k + 5)} - \frac{3}{2}, \frac{5 - 12\cdot k}{3\cdot(4\cdot k + 5)}\right] \\ \left[\frac{4\cdot(2 - 7\cdot k)}{19\cdot k + 23}, \frac{3\cdot(2 - 7\cdot k)}{19\cdot k + 23}\right] \\ [-4, -3]\end{array}\right]$$

$$\mathrm{SOLVE}\left(\mathrm{a_tr}\left(\frac{25}{3\cdot(4\cdot k + 5)} - \frac{3}{2}, \frac{5 - 12\cdot k}{3\cdot(4\cdot k + 5)}, \frac{4\cdot(2 - 7\cdot k)}{19\cdot k + 23}, \frac{3\cdot(2 - 7\cdot k)}{19\cdot k + 23}, -4, -3\right) = 8,\ k\right)$$

$$k = -\frac{\sqrt{3066}}{447} - \frac{723}{596} \vee k = \frac{\sqrt{3066}}{447} - \frac{723}{596}$$

c) $4x + y + 7 = 0$

45. $A = 8$; $S = 1$

a)

```
SOLUTIONS(fascio10(k, 0, x) ∧ fascio10(k, y, 0), [x, y])
```

$$\left[\left[\frac{4}{k - 1}, -\frac{4}{k + 7}\right]\right]$$

$$\mathrm{SOLVE}\left(\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{4}{k - 1}\cdot\left(-\frac{4}{k + 7}\right)\right| = 8,\ k,\ \mathrm{Real}\right)$$

$$k = -\sqrt{17} - 3 \vee k = \sqrt{17} - 3 \vee k = -\sqrt{15} - 3 \vee k = \sqrt{15} - 3$$

b)

```
area(fascio10(k, x, y), x - y + 1, 2·x + 4·y)
```

$$\begin{bmatrix} \left[\frac{k-5}{8}, \frac{k+3}{8}\right] \\ \left[-\frac{8}{3\cdot k+13}, \frac{4}{3\cdot k+13}\right] \\ \left[-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right] \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{SOLVE}\left(\mathrm{a_tr}\left(\frac{k-5}{8}, \frac{k+3}{8}, -\frac{8}{3\cdot k+13}, \frac{4}{3\cdot k+13}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = 1, k\right)$$

$$k = \frac{23}{3} - 8\cdot\sqrt{2} \vee k = 8\cdot\sqrt{2} + \frac{23}{3} \vee k = -\frac{25}{3}$$

c) $x - y = 0$

46. $A = \frac{1}{2}$; $\boldsymbol{S = 3}$

a)

```
SOLUTIONS(fascio11(k, 0, x) ∧ fascio11(k, y, 0), [x, y])
```

$$\left[\left[\frac{k+9}{5\cdot k+1}, -\frac{k+9}{k}\right]\right]$$

$$\mathrm{SOLVE}\left(\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{k+9}{5\cdot k+1}\cdot\left(-\frac{k+9}{k}\right)\right| = \frac{1}{2}, k, \mathrm{Real}\right)$$

$$k = \pm\infty \vee k = \frac{17}{8} - \frac{\sqrt{1585}}{8} \vee k = \frac{\sqrt{1585}}{8} + \frac{17}{8}$$

b)

```
area(fascio11(k, x, y), 2·y - 1, x + 5·y + 1)
```

$$\begin{bmatrix} \left[\frac{3\cdot k-17}{2\cdot k}, \frac{1}{2}\right] \\ \left[-\frac{2\cdot(5\cdot k+23)}{10\cdot k+1}, \frac{9}{10\cdot k+1}\right] \\ \left[-\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right] \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{SOLVE}\left(\mathrm{a_tr}\left(\frac{3\cdot k-17}{2\cdot k}, \frac{1}{2}, -\frac{2\cdot(5\cdot k+23)}{10\cdot k+1}, \frac{9}{10\cdot k+1}, -\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right) = 3, k\right)$$

$$k = -\frac{3\cdot\sqrt{511}}{35} - \frac{13}{10} \vee k = \frac{3\cdot\sqrt{511}}{35} - \frac{13}{10}$$

c) $x - 5y + 1 = 0$

47. $A = \frac{4}{3}; S = \frac{5}{8}$

a)

```
SOLUTIONS(fascio12(k, 0, x) ∧ fascio12(k, y, 0), [x, y])
```

$$\left[\left[-\frac{2\cdot k}{3\cdot k+1}, \frac{2\cdot k}{7\cdot k-12}\right]\right]$$

$$\text{SOLVE}\left(\frac{1}{2}\cdot\left|-\frac{\frac{2\cdot k}{3\cdot k+1}\cdot 2\cdot k}{7\cdot k-12}\right| = \frac{4}{3}, k, \text{Real}\right)$$

$$k = \pm\infty \vee k = \frac{29}{45} - \frac{\sqrt{1921}}{45} \vee k = \frac{\sqrt{1921}}{45} + \frac{29}{45} \vee k = \frac{29}{39} - \frac{\sqrt{1777}}{39} \vee k = \frac{\sqrt{1777}}{39} + \frac{29}{39}$$

b)

```
area(fascio12(k, x, y), -x + 6·y, 3·x - y + 2)
```

$$\left[\begin{array}{c}\left[\frac{12\cdot k}{39\cdot k-73}, \frac{2\cdot k}{39\cdot k-73}\right]\\ \left[\frac{58}{2\cdot k+15}-4, \frac{4\cdot(6-5\cdot k)}{2\cdot k+15}\right]\\ \left[-\frac{12}{17}, -\frac{2}{17}\right]\end{array}\right]$$

$$\text{SOLVE}\left(\text{a_tr}\left(\frac{12\cdot k}{39\cdot k-73}, \frac{2\cdot k}{39\cdot k-73}, \frac{58}{2\cdot k+15}-4, \frac{4\cdot(6-5\cdot k)}{2\cdot k+15}, -\frac{12}{17}, -\frac{2}{17}\right) = \frac{5}{8}, k\right)$$

$$k = \frac{93501}{113612} - \frac{17\cdot\sqrt{36391985}}{113612} \vee k = \frac{17\cdot\sqrt{36391985}}{113612} + \frac{93501}{113612}$$

c) $7x - 3y - 2 = 0$

48. $A = \frac{6}{7}; S = 1$

a)

```
SOLUTIONS(fascio13(k, 0, x) ∧ fascio13(k, y, 0), [x, y])
```

$$\left[\left[-\frac{3}{8\cdot k+1}, \frac{3}{9\cdot k-2}\right]\right]$$

$$\text{SOLVE}\left(\frac{1}{2}\cdot\left|\left(-\frac{3}{8\cdot k+1}\right)\cdot\frac{3}{9\cdot k-2}\right| = \frac{6}{7}, k, \text{Real}\right)$$

$$k = \frac{7}{144} - \frac{\sqrt{2137}}{144} \vee k = \frac{\sqrt{2137}}{144} + \frac{7}{144}$$

b)

$$\text{area}\left(\text{fascio13}(k, x, y), \frac{x}{2} - y + 1, -2\cdot x + \frac{3}{4}\cdot y\right)$$

$$\begin{bmatrix} \left[\frac{8\cdot(2\cdot k + 1)}{5\cdot(2\cdot k - 1)}, \frac{18\cdot k - 1}{5\cdot(2\cdot k - 1)}\right] \\ \left[-\frac{9}{37\cdot k + 14}, -\frac{24}{37\cdot k + 14}\right] \\ \left[\frac{6}{13}, \frac{16}{13}\right] \end{bmatrix}$$

$$\text{SOLVE}\left(\text{a_tr}\left(\frac{8\cdot(2\cdot k + 1)}{5\cdot(2\cdot k - 1)}, \frac{18\cdot k - 1}{5\cdot(2\cdot k - 1)}, -\frac{9}{37\cdot k + 14}, -\frac{24}{37\cdot k + 14}, \frac{6}{13}, \frac{16}{13}\right) = 1, k\right)$$

$$k = \frac{5543}{4144} - \frac{13\cdot\sqrt{336505}}{4144} \vee k = \frac{13\cdot\sqrt{336505}}{4144} + \frac{5543}{4144}$$

c) $9x - 8y = 0$

49. $A = \frac{3}{2}; S = \frac{7}{2}$

a)

$$\text{SOLUTIONS}(\text{fascio14}(k, 0, x) \wedge \text{fascio14}(k, y, 0), [x, y])$$

$$\left[\left[\frac{k}{1 - 7\cdot k}, \frac{k}{1 - 5\cdot k}\right]\right]$$

$$\text{SOLVE}\left(\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{k}{1 - 7\cdot k}\cdot\frac{k}{1 - 5\cdot k}\right| = \frac{3}{2}, k, \text{Real}\right)$$

$$k = \pm\infty \vee k = \frac{9}{53} - \frac{\sqrt{6}}{106} \vee k = \frac{\sqrt{6}}{106} + \frac{9}{53} \vee k = \frac{9}{52} - \frac{\sqrt{3}}{52} \vee k = \frac{\sqrt{3}}{52} + \frac{9}{52}$$

b)

$$\text{area}\left(\text{fascio14}(k, x, y), -\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\cdot y, -x + \frac{5}{2}\cdot y - 1\right)$$

$$\begin{bmatrix} \left[\frac{3\cdot k}{5 - 29\cdot k}, \frac{2\cdot k}{5 - 29\cdot k}\right] \\ \left[\frac{2 - 19\cdot k}{39\cdot k - 7}, \frac{2\cdot(4\cdot k - 1)}{39\cdot k - 7}\right] \\ \left[\frac{3}{2}, 1\right] \end{bmatrix}$$

$$\text{SOLVE}\left(\text{a_tr}\left(\frac{3\cdot k}{5 - 29\cdot k}, \frac{2\cdot k}{5 - 29\cdot k}, \frac{2 - 19\cdot k}{39\cdot k - 7}, \frac{2\cdot(4\cdot k - 1)}{39\cdot k - 7}, \frac{3}{2}, 1\right) = \frac{7}{2}, k\right)$$

$$k = \frac{619}{3478} - \frac{\sqrt{581}}{3478} \vee k = \frac{\sqrt{581}}{3478} + \frac{619}{3478}$$

c) $3x - 2 = 0$

50. $A = \frac{7}{4}; S = \frac{13}{3}$

a)

SOLUTIONS(fascio15(k, 0, x) ∧ fascio15(k, y, 0), [x, y])

$$\left[\left[\frac{k+3}{9}, \frac{2\cdot(k+3)}{3\cdot(k-2)}\right]\right]$$

$$\text{SOLVE}\left(\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{k+3}{9}\cdot\frac{2\cdot(k+3)}{3\cdot(k-2)}\right| = \frac{7}{4}, k, \text{Real}\right)$$

$$k = \pm\infty \vee k = -\frac{3\cdot\sqrt{5649}}{8} - \frac{213}{8} \vee k = \frac{3\cdot\sqrt{5649}}{8} - \frac{213}{8} \vee k = \frac{165}{8} - \frac{3\cdot\sqrt{2289}}{8} \vee k = \frac{3\cdot\sqrt{2289}}{8} + \frac{165}{8}$$

b)

$$\text{area}\left(\text{fascio15}(k, x, y), \frac{5\cdot x}{2} - 3\cdot y, -\frac{6}{5}\cdot x + y\right)$$

$$\left[\begin{array}{c}\left[\frac{2}{3}, \frac{5}{9}\right] \\ \left[\frac{10\cdot(k+3)}{3\cdot(5\cdot k+26)}, \frac{4\cdot(k+3)}{5\cdot k+26}\right] \\ [0, 0]\end{array}\right]$$

$$\text{SOLVE}\left(\text{a_tr}\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{9}, \frac{10\cdot(k+3)}{3\cdot(5\cdot k+26)}, \frac{4\cdot(k+3)}{5\cdot k+26}, 0, 0\right) = \frac{13}{3}, k\right)$$

$$\left[k = -\frac{3009}{574}, k = -\frac{3075}{596}\right]$$

c) $3x - 2 = 0$

51. $A = \frac{45}{2}; S = \frac{101}{2}$

a)

SOLUTIONS(fascio16(k, 0, x) ∧ fascio16(k, y, 0), [x, y])

$$\left[\left[-\frac{2\cdot(k+4)}{3\cdot(2\cdot k+1)}, \frac{k+4}{9}\right]\right]$$

$$\text{SOLVE}\left(\frac{1}{2}\cdot\left|\left(-\frac{2\cdot(k+4)}{3\cdot(2\cdot k+1)}\right)\cdot\frac{k+4}{9}\right| = \frac{45}{2}, k, \text{Real}\right)$$

$$k = \pm\infty \vee k = -\frac{9\cdot\sqrt{18435}}{2} - \frac{1223}{2} \vee k = \frac{9\cdot\sqrt{18435}}{2} - \frac{1223}{2} \vee k = \frac{1207}{2} - \frac{9\cdot\sqrt{18015}}{2} \vee k = \frac{9\cdot\sqrt{18015}}{2} + \frac{1207}{2}$$

b)

$$\text{area}\left(\text{fascio16}(k, x, y), -x + \frac{4}{5}\cdot y, 3\cdot x + \frac{y}{4}\right)$$

$$\left[\begin{array}{c}\left[\frac{8\cdot(k+4)}{3\cdot(19-10\cdot k)}, \frac{10\cdot(k+4)}{3\cdot(19-10\cdot k)}\right] \\ \left[\frac{k+4}{9\cdot(4\cdot k+3)}, -\frac{4\cdot(k+4)}{3\cdot(4\cdot k+3)}\right] \\ [0, 0]\end{array}\right]$$

$$\text{SOLVE}\left(\text{a_tr}\left(\frac{8\cdot(k+4)}{3\cdot(19-10\cdot k)}, \frac{10\cdot(k+4)}{3\cdot(19-10\cdot k)}, \frac{k+4}{9\cdot(4\cdot k+3)}, -\frac{4\cdot(k+4)}{3\cdot(4\cdot k+3)}, 0, 0\right) = \frac{101}{2}, k\right)$$

$$k = \frac{62297}{109186} - \frac{3\cdot\sqrt{2296388823}}{109186} \vee k = \frac{3\cdot\sqrt{2296388823}}{109186} + \frac{62297}{109186} \vee k = \frac{63145}{108974} - \frac{3\cdot\sqrt{2345657835}}{108974} \vee k = \frac{3\cdot\sqrt{2345657835}}{108974} + \frac{63145}{108974}$$

c) $3y + 1 = 0$

52. Scrivere l'equazione del fascio di rette parallele alla retta di equazione $3x - 5y = 0$ e determinare in esso l'unica retta passante per il punto (–2; 4).

Il fascio ha equazione, per esempio, $3x - 5y + k = 0$, o una a essa equivalente. Imponiamo il passaggio per il punto: $3 \cdot (-2) - 5 \cdot 4 + k = 0 \Rightarrow k = 26$ e quindi la retta cercata ha equazione: $3x - 5y + 26 = 0$

53. Scrivere l'equazione del fascio di rette di centro il punto (3; –1), e determinare in esso l'unica ret-

ta parallela alla retta di equazione $3x - 2y + 1 = 0$.

Il fascio ha equazione, per esempio, $y + 1 = m \cdot (x - 3)$, o una a essa equivalente. La retta parallela deve avere lo stesso coefficiente angolare, quindi; $y = 3/2x - 11/2$

54. Determinare l'unica retta appartenente a entrambi i fasci di equazioni $(3 - k)\,x - 2y + 5k + 6 = 0$ e $(2 + 7k)\,x + (2 - 3k)\,y + k - 2 = 0$.

Devono esistere due diversi numeri k1 e k2 che sostituiti nelle equazioni dei due fasci danno come risultato la stessa equazione. Si tenga conto che $x+y+1= 0$ e $2x+2y+2=0$, quindi deve essere

#34: $\mathrm{SOLVE}\left(\frac{3 - k1}{2 + 7\cdot k2} = \frac{-2}{2 - 3\cdot k2} \wedge \frac{5\cdot k1 + 6}{k2 - 2} = \frac{-2}{2 - 3\cdot k2}, [k1, k2]\right)$

#35: $k1 = -\frac{25}{24} \wedge k2 = -\frac{58}{9}$

Verifichiamo:

#36: $\left(3 - -\frac{25}{24}\right)\cdot x - 2\cdot y + 5\cdot\left(-\frac{25}{24}\right) + 6 = 0$

#37: $\frac{97\cdot x}{24} - 2\cdot y + \frac{19}{24} = 0$

#38: $\left(\frac{97\cdot x}{24} - 2\cdot y + \frac{19}{24} = 0\right)\cdot 24$

#39: $97\cdot x - 48\cdot y + 19 = 0$

#40: $\left(2 + 7\cdot\left(-\frac{58}{9}\right)\right)\cdot x + \left(2 - 3\cdot\left(-\frac{58}{9}\right)\right)\cdot y + -\frac{58}{9} - 2 = 0$

#41: $-\frac{388\cdot x}{9} + \frac{64\cdot y}{3} - \frac{76}{9} = 0$

#42: $\left(-\frac{388\cdot x}{9} + \frac{64\cdot y}{3} - \frac{76}{9} = 0\right)\cdot 9$

#43: $-4\cdot(97\cdot x - 48\cdot y + 19) = 0$

Quindi la retta cercata è $97x - 48y + 19 = 0$

55. Nel fascio di centro il punto (4; –1) determinare le eventuali rette che incontrano gli assi coordinati determinando due segmenti che sono uno doppio dell'altro.

Il fascio ha equazione $(x–4)+k(y+1)=0$, le sue intersezioni con gli assi sono:

$\mathrm{SOLVE}(x - 4 + k\cdot(y + 1) = 0 \wedge x = 0, [x, y])$

$x = 0 \wedge y = \frac{4 - k}{k}$

$\mathrm{SOLVE}(x - 4 + k\cdot(y + 1) = 0 \wedge y = 0, [x, y])$

$x = 4 - k \wedge y = 0$

Perciò i segmenti cercati misurano rispettivamente: $|(4–k)/k|$ e $|4–k|$. Quindi ci sono due casi:

$$\text{SOLVE}\left(\left|\frac{4-k}{k}\right| = 2\cdot|4-k|,\ k,\ \text{Real}\right)$$

$$k = -\frac{1}{2} \vee k = \frac{1}{2} \vee k = 4$$

$$\text{SOLVE}\left(2\cdot\left|\frac{4-k}{k}\right| = |4-k|,\ k,\ \text{Real}\right)$$

$$k = 4 \vee k = -2 \vee k = 2$$

Abbiamo perciò le seguenti rette:

$$x - 4 + \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(y+1) = 0$$

$$\left[x - 4 + \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(y+1) = 0,\ x - 4 + \frac{1}{2}\cdot(y+1) = 0,\ x - 4 + 4\cdot(y+1) = 0\right]$$

$$[2\cdot x - y - 9 = 0,\ 2\cdot x + y = 7,\ x + 4\cdot y = 0]$$

$$[x - 4 + (-2)\cdot(y+1) = 0,\ x - 4 + 2\cdot(y+1) = 0]$$

$$[x - 2\cdot y = 6,\ x + 2\cdot y = 2]$$

Non è accettabile $x + 4y = 0$ perché passa per l'origine, quindi i due segmenti non esistono.

56. Nell'esercizio precedente si trova come soluzione anche $k = 4$, perché non si accetta?

La retta passa per l'origine e i segmenti non esistono

57. Scrivere l'equazione del fascio di rette contenenti entrambe le rette $x - 5y = 0$ e $2x + y - 1 = 0$. Determinare in esso i valori di k per cui la generica retta stacca sull'asse x un segmento di lunghezza 3.

Il fascio ha equazione $x - 5y + k \cdot (2x + y - 1) = 0$ o una a essa equivalente. L'intersezione con l'asse x è il punto $P \equiv P \equiv \left(\frac{k}{1+2k};0\right)$, quindi il segmento OP misura $\overline{OP} = \left|\frac{k}{1+2k}\right|$ e misura 3 se $\left|\frac{k}{1+2k}\right| = 3 \Rightarrow \pm k = 3 + 6k \Rightarrow k = -\frac{3}{5} \vee k = -\frac{3}{7}$

58. Nei fasci di centri rispettivi $P \equiv (0; 3)$ e $Q \equiv (-3; 1)$ determinare le rette che siano tra loro perpendicolari e che si incontrino in un punto che verifichi le seguenti condizioni: a) abbia ascissa maggiore di 3; b) abbia ordinata minore di 2; c) abbia ascissa e ordinata uguali; d) abbia ascissa minore di 5 e ordinata maggiore di 0. Studiare il problema al variare del coefficiente angolare m della generica retta del fascio di centro Q.

I fasci hanno equazioni: $y - 3 = hx \Rightarrow y = hx + 3$ e $y - 1 = m(x + 3) \Rightarrow y = mx + 3h + 1$. La condizione di perpendicolarità è che si abbia $mh = -1$, quindi le rette generiche hanno equazioni: $y = -1/mx + 3$ e $y = mx + 3m + 1$. Il loro punto comune ha coordinate: $P \equiv \left(\frac{2m-3m^2}{m^2+1};\frac{3m^2+3m+1}{m^2+1}\right)$, infatti:

$$-\frac{1}{m}x + 3 = mx + 3m + 1 \Rightarrow \left(m^2+1\right)x = 2m - 3m^2 \Rightarrow x = \frac{2m-3m^2}{m^2+1};\ y = -\frac{1}{m}\cdot\frac{2m-3m^2}{m^2+1} + 3 = \frac{3m^2+3m+1}{m^2+1}$$

a) $\frac{2m-3m^2}{m^2+1} > 3 \Rightarrow 2m - 3m^2 > 3m^2 + 3 \Rightarrow 6m^2 - 2m + 3 < 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 72 < 0 \Rightarrow \varnothing$

b) $\frac{3m^2+3m+1}{m^2+1} < 2 \Rightarrow 3m^2 + 3m + 1 < 2m^2 + 2 \Rightarrow m^2 + 3m - 1 < 0 \Rightarrow -\frac{3+\sqrt{13}}{2} < m < \frac{3-\sqrt{13}}{2}$

c) $\dfrac{2m-3m^2}{m^2+1}=\dfrac{3m^2+3m+1}{m^2+1}\Rightarrow 6m^2+m+1=0\Rightarrow \Delta=1-24<0\Rightarrow \varnothing$

d) $\begin{cases}\dfrac{2m-3m^2}{m^2+1}<5\\ \dfrac{3m^2+3m+1}{m^2+1}>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m^2-2m+5>0\\ 3m^2+3m+1>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\Delta=4-20<0\\ \Delta=9-12<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\forall m\in\mathbb{R}\\ \forall m\in\mathbb{R}\end{cases}\Rightarrow\forall m\in\mathbb{R}$

L'angolo della MateFisica

Le domande sono riferite a moti di un punto materiale in un sistema di riferimento spazio-tempo.

1. Cosa rappresenta una semiretta parallela all'asse delle ascisse?

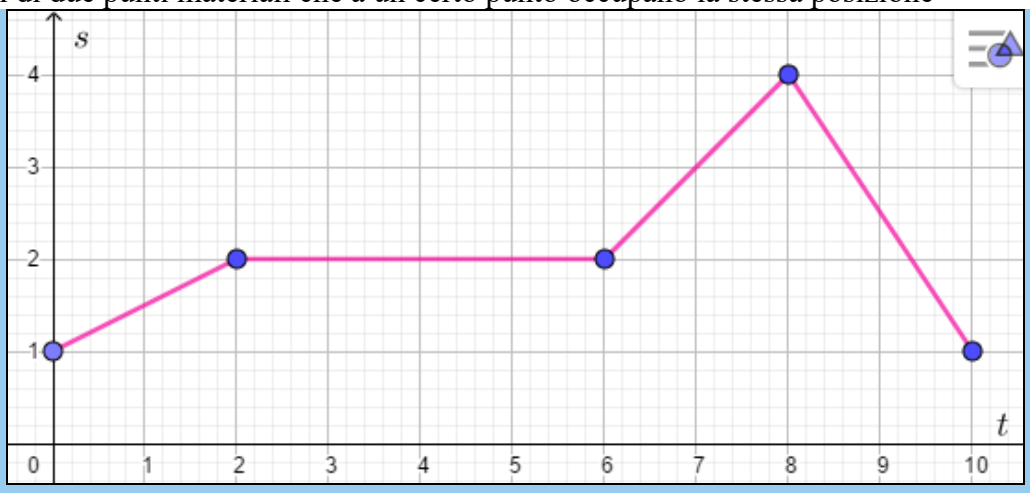
Un corpo fermo, dato che al passare del tempo lo spazio percorso non muta.

2. Cosa rappresentano, dal punto di vista fisico due rette parallele?

Moti con uguale velocità, dato che la pendenza di una retta rappresenta appunto la velocità

3. Due rette che si incontrano in un punto cosa rappresentano?

I moti di due punti materiali che a un certo punto occupano la stessa posizione

4. 

Con riferimento al grafico, determinare la velocità del corpo nell'istante a) $t = 1$ *s*; b) $t = 4$ *s*; c) $t = 7$ *s*; d) $t = 9$ *s*.

Basta considerare la pendenza delle rette. Pertanto: a) 2*m/s* dato che il rapporto ordinata/ascissa per un generico punto del segmento di cui fa parte il punto di ascissa 1 è ½ (si consideri il punto di ascissa 2); b) 0*m/s* dato che il segmento è parallelo all'asse delle ascisse; c) 1*m/s*, il rapporto è 2/2; d) –1,5 *m/s*, il rapporto è 3/(–2), dato che il segmento decresce.

5. Se mettiamo sulla ascisse il tempo e sulle ordinate la velocità, in un moto uniformemente accelerato, il grafico è sempre rettilineo? Giustifica la risposta.

Sì, poiché in un moto ad accelerazione costante si ha $v = v_i + at$

6. Nella I legge di Ohm, cosa rappresenta la pendenza della curva?

La Resistenza, dato che la legge è $V = Ri$

7. Nella II legge della dinamica, cosa rappresenta la pendenza della curva?

La massa, dato che si ha $F = ma$

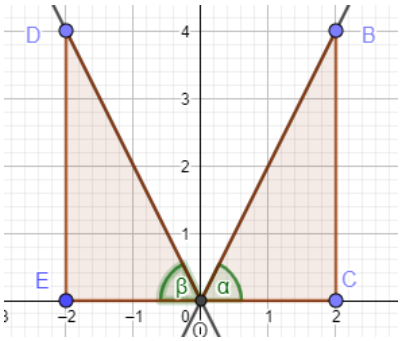
8. Vi è una differenza sostanziale fra il grafico del moto rettilineo uniforme e quello della I legge di Ohm o della II legge della dinamica, quale?

Gli altri due non possono avere pendenza negativa, perché resistenza e massa sono grandezze scalari sempre positive

La sfida

1. In che relazione sono gli angoli formati con il semiasse positivo delle ascisse, da due rette con coefficienti angolari opposti (p.e. $y = 2x$ e $y = -2x$)?

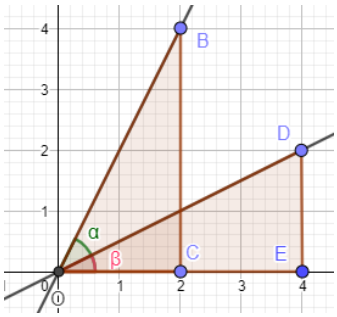
Consideriamo la figura, riferita proprio alle rette dell'esempio, ma ovviamente il discorso vale per qualsiasi altra coppia simile.



Facilmente si mostra che i due triangoli sono uguali, pertanto anche gli angoli α e β lo sono, e perciò l'angolo che la retta $y = -2x$ forma con il semiasse positivo delle ascisse è supplementare di α

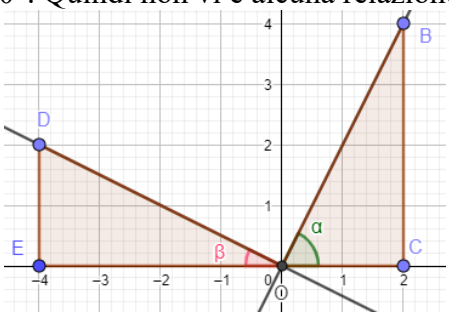
2. In che relazione sono gli angoli formati con il semiasse positivo delle ascisse, da due rette con coefficienti angolari inversi e positivi (p.e. $y = 2x$ e $y = x/2$)?

Consideriamo la figura riferita alle rette dell'esempio. Anche stavolta i triangoli sono uguali, ma stavolta gli angoli α e β sono complementari



3. In che relazione sono gli angoli formati con il semiasse positivo delle ascisse, da due rette con coefficienti angolari inversi e negativi (p.e. $y = 2x$ e $y = -x/2$)?

Ancora una volta i triangoli sono uguali, quindi α e β sono complementari, ma per la retta con coefficiente angolare negativo a noi interessa il supplementare di β, pertanto la somma degli angoli richiesti è α + (180° – β) = α + 180° – (90° – α) = 2α + 90°. Quindi non vi è alcuna relazione particolare



4. Dimostrare che il quadrilatero avente per vertici i punti medi dei lati di un altro quadrilatero convesso è un parallelogramma.

Consideriamo il quadrilatero di vertici consecutivi: $(x_A; y_A)$, $(x_B; y_B)$, $(x_C; y_C)$ e $(x_D; y_D)$. Il secondo quadrilatero ha per vertici consecutivi:

$$\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right),\left(\frac{x_B+x_C}{2};\frac{y_B+y_C}{2}\right),\left(\frac{x_C+x_D}{2};\frac{y_C+y_D}{2}\right),\left(\frac{x_A+x_D}{2};\frac{y_A+y_D}{2}\right)$$

Proviamo che i lati opposti son paralleli, determinando i relativi coefficienti angolari delle rette cui appartengono:

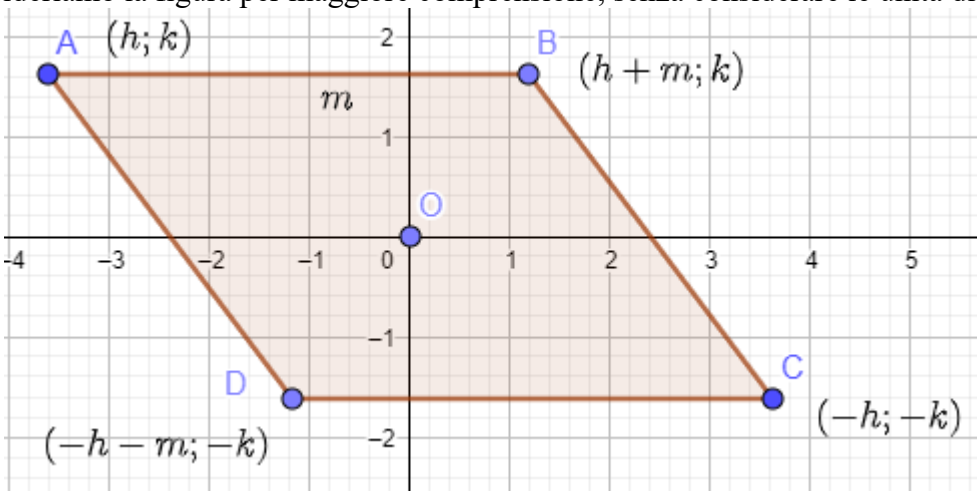
$$m_1=\frac{\frac{y_B+y_C}{2}-\frac{y_A+y_B}{2}}{\frac{x_B+x_C}{2}-\frac{x_A+x_B}{2}}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A};m_3=\frac{\frac{y_A+y_D}{2}-\frac{y_C+y_D}{2}}{\frac{x_A+x_D}{2}-\frac{x_C+x_D}{2}}=\frac{y_A-y_C}{x_A-x_C};$$

$$m_2=\frac{\frac{y_C+y_D}{2}-\frac{y_B+y_C}{2}}{\frac{x_C+x_D}{2}-\frac{x_B+x_C}{2}}=\frac{y_D-y_B}{x_D-x_B};m_4=\frac{\frac{y_A+y_B}{2}-\frac{y_A+y_D}{2}}{\frac{x_A+x_B}{2}-\frac{x_A+x_D}{2}}=\frac{y_B-y_D}{x_B-x_D}$$

5. Si considerino due rette passanti per il punto d'incontro delle diagonali di un parallelogramma

***ABCD*. Dimostrare che il quadrilatero *EFGH*, avente per vertici i punti d'intersezione delle dette rette con i lati del parallelogramma è esso stesso un parallelogramma.**

Dato che la scelta del sistema di riferimento non incide sulla dimostrazione, consideriamo un parallelogramma che ha due lati paralleli all'asse x ed è centrato sull'origine, pertanto i suoi vertici sono: $(h; k)$, $(h + m; k)$, $(-h; -k)$ e $(-h - m; -k)$. Abbiamo tenuto conto del fatto che il centro del parallelogramma è centro si simmetria. Consideriamo la figura per maggiore comprensione, senza considerare le unità di misura.



Due rette qualsiasi per O hanno equazioni $y = ax$ e $y = bx$. Le rette dei lati hanno equazioni $y = k$; $\frac{y+k}{k+k}=\frac{x+h}{h+m+h}\Rightarrow y=\frac{2k}{2h+m}x-\frac{mk}{2h+m}$; $y = -k$ e $y=\frac{2k}{2h+m}x+\frac{mk}{2h+m}$. Pertanto le intersezioni delle generiche rette con i lati del parallelogramma sono i punti, considerando la retta $y = ax$ che interseca i lati paralleli all'asse x: $\left(\frac{k}{a};k\right),\left(\frac{km}{2k-2hb-bm};\frac{bkm}{2k-2hb-bm}\right),\left(-\frac{k}{a};-k\right),\left(-\frac{km}{2k-2hb-bm};-\frac{bkm}{2k-2hb-bm}\right)$, i coefficienti angolari dei lati opposti di questo quadrilatero si vede che sono uguali, dato che di fatto i quattro vertici possono indicarsi nel seguente modo semplificato: (A; B), (C; D), (–A; –B) e (–C; –D).

6. *E* ed *F* sono punti medi di due lati opposti di uno stesso parallelogramma *ABCD*. Dimostrare che *AECF* è un parallelogramma.

Sempre nell'ordine di idee del precedente quesito scegliamo come lati opposti quelli paralleli all'asse x, pertanto avremo: $A \equiv (h; k)$, $C \equiv (-h; -k)$, $E\equiv\left(\frac{2h+m}{2};k\right), F\equiv\left(-\frac{2h+m}{2};-k\right)$. Dobbiamo mostrare soltanto che i lati EC ed AF sono paralleli, dato che gli altri ovviamente lo sono. I loro coefficienti angolari sono: $\frac{k+k}{\frac{2h+m}{2}+h}=\frac{4k}{4h+m};\frac{-k-k}{-\frac{2h+m}{2}-h}=\frac{4k}{4h+m}$. Potevamo fare la stessa osservazione precedente ed evitare il calcolo.

7. Determinare il luogo dei punti del piano cartesiano per cui la somma delle distanze da due rette incidenti è costante.

Siano $ax + by + c = 0$ e $dx + ey + f = 0$ le equazioni delle due rette. La condizione è

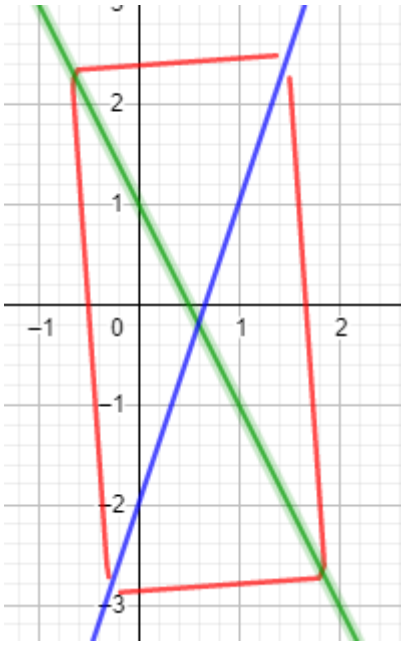
$$\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{|dx+ey+f|}{\sqrt{d^2+e^2}}=k$$

Essa equivale alle seguenti 4: $\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{dx+ey+f}{\sqrt{d^2+e^2}}=\pm k;\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}-\frac{dx+ey+f}{\sqrt{d^2+e^2}}=\pm k$ che rappresentano le equazioni di rette, ma tenuto conto del fatto che devono valere le condizioni per i valori assoluti in effetti sono dei segmenti. Inoltre sono coppie di rette parallele, ma anche sono a due a due perpendicolari, infatti:

$$\left(a\cdot\sqrt{d^2+e^2}+d\cdot\sqrt{a^2+b^2}\right)\cdot\left(a\cdot\sqrt{d^2+e^2}-d\cdot\sqrt{a^2+b^2}\right)+\left(b\cdot\sqrt{d^2+e^2}+e\cdot\sqrt{a^2+b^2}\right)\cdot\left(b\cdot\sqrt{d^2+e^2}-e\cdot\sqrt{a^2+b^2}\right)=$$

$$=a^2\cdot\left(d^2+e^2\right)-d^2\cdot\left(a^2+b^2\right)+b^2\cdot\left(d^2+e^2\right)-e^2\cdot\left(a^2+b^2\right)=\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(d^2+e^2\right)-\left(d^2+e^2\right)\cdot\left(a^2+b^2\right)=0$$

quindi sono i lati di un rettangolo che ha le date rette per diagonali, dato che i vertici del rettangolo dovendo avere la stessa distanza dalle rette devono appartenere ad una di esse. In figura Geogebra mostra il luogo per due rette particolari.



8. Determinare il luogo dei punti del piano cartesiano per cui la differenza delle distanze da due rette incidenti date è costante.

Come nel precedente quesito, si ha sempre: $\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{dx+ey+f}{\sqrt{d^2+e^2}}=\pm k;\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}-\frac{dx+ey+f}{\sqrt{d^2+e^2}}=\pm k$, solo che stavolta le condizioni sui valori assoluti sono opposte e quindi otteniamo non il rettangolo, bensì il prolungamento dei suoi lati. La conferma di Geogebra è nella figura seguente:

9. Trovare le coordinate dei punti equidistanti dagli assi coordinati e dalla retta $x + y = 2$.

Dobbiamo imporre: $|x|=|y|$ per la distanza dagli assi, quindi i punti hanno coordinate: $(x; x)$, $(x; -x)$, con x numero reale qualsiasi. Imponiamo adesso la uguale distanza dalla retta:

$$|x|=\frac{|x+y-2|}{\sqrt{2}}\Rightarrow\sqrt{2}|x|=|x+x-2|\vee\sqrt{2}|x|=|x-x-2|\Rightarrow\sqrt{2}|x|=|2x-2|\vee\sqrt{2}|x|=|-2|\Rightarrow|x|=2\frac{|x-1|}{\sqrt{2}}\vee|x|=\frac{2}{\sqrt{2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow|x|=\sqrt{2}|x-1|\vee|x|=\sqrt{2}\Rightarrow\begin{cases}x=\sqrt{2}x-\sqrt{2}\\x\le 0\vee x\ge 1\end{cases}\vee\begin{cases}x=-\sqrt{2}x+\sqrt{2}\\0<x<1\end{cases}\vee x=\pm\sqrt{2}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\\x\le 0\vee x\ge 1\end{cases}\vee\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\\0<x<1\end{cases}\vee x=\pm\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=2+\sqrt{2}\\x\le 0\vee x\ge 1\end{cases}\vee\begin{cases}x=2-\sqrt{2}\\0<x<1\end{cases}\vee x=\pm\sqrt{2}\Rightarrow\left(2-\sqrt{2};2-\sqrt{2}\right),\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right),\left(2+\sqrt{2};2+\sqrt{2}\right),\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$$

Temi assegnati agli esami di stato

1. (Liceo scientifico 1990/91) In un piano cartesiano ortogonale *Oxy* si consideri il punto $A\equiv(2x;0)$. a) Si trovi il luogo *L* del punto $B\equiv(x;y)$ tale che il triangolo *OAB* abbia perimetro $2p$. b) Se B_0 è il punto di *L* del primo quadrante la cui ascissa è $p/4$ e A_0 il terzo vertice del relativo triangolo, si calcoli l'area del triangolo OA_0B_0. c) Si individuino inoltre le altre 7 posizioni di *B* tali che il triangolo *OAB* sia equivalente a OA_0B_0.

a) Si ha:

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(2x-x)^2+y^2}+|2x|=2p\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+y^2}+|2x|=2p\Rightarrow 2\sqrt{x^2+y^2}+|2x|=2p\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}=p-|x|$$

Deve ovviamente essere $p-|x|>0\Rightarrow -p<x<p$, da cui:

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}=p-|x|\\-p<x<p\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2=(p-|x|)^2\\-p<x<p\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cancel{x^2}+y^2=p^2-2p|x|+\cancel{x^2}\\-p<x<p\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y^2=p^2-2px\\0<x<p\end{cases}\vee\begin{cases}y^2=p^2+2px\\-p<x<0\end{cases},$$ che

sono le equazioni del luogo, che non sono rette, bensì curve di secondo grado che riconosceremo nelle prossime unità.

b) Troviamo l'ordinata di B_0: $y^2=p^2-2p\cdot\frac{p}{4}\Rightarrow y^2=\frac{p^2}{2}\Rightarrow y=\frac{p}{\sqrt{2}}\Rightarrow B_0\equiv\left(\frac{p}{4};\frac{p\sqrt{2}}{2}\right)$; il punto $A_0\equiv\left(2\cdot\frac{p}{4};0\right)\equiv\left(\frac{p}{2};0\right)$, l'area di OA_0B_0 è pari a: $\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}0&0&1\\p/2&0&1\\p/4&p\sqrt{2}/2&1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{p^2\sqrt{2}}{4}\right|=\frac{p^2\sqrt{2}}{8}$.

c) Il generico triangolo *OAB* ha area $\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}0&0&1\\2x&0&1\\x&y&1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot|2xy|=|xy|$, deve quindi essere: $|xy|=\frac{p^2\sqrt{2}}{8}$, sottoposto alle condizioni: $y^2=p^2-2p|x|$, $|x|<p$, $|y|<p$. Da cui

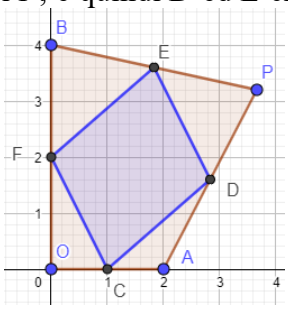
$$\begin{cases}y^2=p^2-2p|x|\\|x|\cdot|y|=p^2\sqrt{2}/8\\|x|<p,|y|<p\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y^2=p^2-2p\cdot\dfrac{p^2\sqrt{2}}{8|y|}\\|x|\cdot|y|=p^2\sqrt{2}/8\\|x|<p,|y|<p\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4y^2|y|=4p^2|y|-p^3\sqrt{2}\\|x|\cdot|y|=p^2\sqrt{2}/8\\|x|<p,|y|<p\end{cases}$$

Otteniamo così 8 sistemi da risolvere che forniscono le soluzioni seguenti: $\left(\pm\frac{p}{4};\pm\frac{p\cdot\sqrt{2}}{2}\right),\left(\pm\frac{p\cdot\left(1+\sqrt{5}\right)}{8};\pm\frac{p\cdot\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)}{4}\right)$

2. (Liceo scientifico PNI 1995/96) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (*Oxy*), sono assegnati i punti $A\equiv(2;0)$ e $B\equiv(0;4)$. Sia $P\equiv(x;y)$ un punto di detto piano con $x>0$ e $y>0$, e *C*, *D*, *E*, *F* i punti medi dei lati *OA*, *AP*, *PB*, *BO* del quadrilatero *OAPB*. Il candidato:

a) dica quali posizioni deve occupare *P* affinché *OAPB* degeneri in un triangolo; b) dimostri che il quadrilatero *CDEF* è un parallelogramma; c) dica quali posizioni deve occupare *P* affinché il parallelogramma *CDEF* sia un rettangolo d) dica quali posizioni deve occupare *P* affinché il parallelogramma *CDEF* sia un rombo; e) determini le coordinate di *P* quando il parallelogramma *CDEF* è un quadrato; f) dimostri che l'area del parallelogramma *CDEF* è metà dell'area del quadrilatero *OAPB*; g) esprima in funzione dell'ascissa di *P* il rapporto *z* tra l'area del quadrato di lato *EF* e l'area del parallelogramma *CDEF*, quando *P*, oltre a rispettare le condizioni inizialmente assegnate, appartiene alla retta *y* = 4 – *x*.

Ci riferiamo alla figura seguente, in cui *P*, e quindi *D* ed *E* che da esso dipendono, hanno posizione variabile.



a) Dato che le coordinate di *P* sono entrambe positive, l'unica possibilità è che *P* appartenga al segmento *AB*; b) Lo abbiamo già provato in generale. In questo caso particolare si ha: $C \equiv (1;0), D \equiv \left(\frac{x+2}{2};\frac{y}{2}\right), E \equiv \left(\frac{x}{2};\frac{y+4}{2}\right); F \equiv (0;2)$, quindi i coefficienti angolari delle rette cui appartengono i lati di *CDEF* sono:

$$m_{CD} = \frac{y/2}{(x+2)/2-1} = \frac{y}{x}; m_{DE} = \frac{y+4-y}{x-x-2} = -2; m_{EF} = \frac{2-(y+4)/2}{-x/2} = \frac{y}{x}; m_{FC} = \frac{-2}{1} = -2$$

c) Affinché *CDEF* sia rettangolo basta che sia $DE \perp EF \Rightarrow -2\cdot\frac{y}{x} = -1 \Rightarrow y = \frac{x}{2} \Rightarrow P \equiv \left(x;\frac{x}{2}\right), x > 0;$

d) Per essere un rombo deve essere

$$\overline{DE}^2 = \overline{EF}^2 \Rightarrow \left(\frac{x+2}{2}-\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y+4}{2}-\frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y+4}{2}-2\right)^2 \Rightarrow 1+4 = \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4} \Rightarrow x^2+y^2 = 20, x>0, y>0;$$

e) Un quadrato è un rombo rettangolo quindi: $x^2 + (x/2)^2 = 20 \Rightarrow 5x^2 = 80 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow P \equiv (4; 2)$;

f) L'area di *OAPB* misura (ricordiamo che *x* e *y* sono entrambi positivi)

$$S_{OAB} + S_{APB} = \frac{4\cdot 2}{2} + \frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 4 + \frac{1}{2}\cdot|2y+4x-8| = 4 + |y+2x-4| = 4+y+2x-4 = y+2x,$$ per quella di

CDEF: L'area di *CDEF* è effettivamente la metà di quella di *OAPB*:

$$S_{CDE} + S_{EFC} = \frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ (x+2)/2 & y/2 & 1 \\ x/2 & (y+4)/2 & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} x/2 & (y+4)/2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\left|\frac{y}{2} + \frac{(x+2)(y+4)}{4} - \frac{xy}{4} - \frac{y+4}{2}\right| +$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\left|x+\frac{y+4}{2}-2\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\frac{2y+\cancel{xy}+\cancel{2y}+4x+\cancel{8}-\cancel{xy}-\cancel{2y}-\cancel{8}}{4}\right| + \frac{1}{2}\cdot\left|\frac{2x+y+\cancel{4}-\cancel{4}}{2}\right| = \frac{y+2x}{4}+\frac{2x+y}{4} = \frac{2x+y}{2}$$

g) Se *P* appartiene a *y* = 4 – *x*, vuol dire che le sue coordinate sono (*x*; 4 – *x*), quelle di $E \equiv \left(\frac{x}{2};\frac{4-x+4}{2}\right) \equiv \left(\frac{x}{2};\frac{8-x}{2}\right)$, quindi $\overline{EF}^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{8-x}{2}-2\right)^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{16-8x+x^2}{4} = \frac{8-4x+x^2}{2}$ e l'area di *CDEF*: $\frac{2x+4-x}{2} = \frac{x+4}{2}$. Infine il rapporto richiesto è: $z = \frac{x^2-4x+8}{x+4}, 0 < x < 4$

3. (Liceo scientifico PNI 1997/98) Sia dato il seguente sistema lineare: $\begin{cases}(k+1)x-y-1=0\\2kx-y-1=0\\2x+y+1+h=0\end{cases}$ **. Il candidato:**

a) dica per quali valori di *h* e *k* il sistema ammette soluzioni; b) interpretate le equazioni del sistema come quelle di tre rette *r*, *s*, *t* di un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali *Oxy*, dica quali sono le posizioni delle rette quando il sistema ha soluzione; c) nei casi in cui il sistema non ha soluzione, determini, per via algebrica o geometrica, quando le tre rette individuano un triangolo.

a) Abbiamo un sistema di 3 equazioni in 2 incognite, per il Teorema di Rouchè-Capelli, esso ammette soluzioni solo se il rango delle matrici completa e incompleta coincidono. Quello della matrice incompleta non può superare 2, quindi dobbiamo fare in modo che il determinante della matrice completa sia nullo.

$$\begin{vmatrix}k+1 & -1 & 1\\2k & -1 & 1\\2 & 1 & -1-h\end{vmatrix}\begin{matrix}k+1 & -1\\2k & -1\\2 & 1\end{matrix}=0\Rightarrow(k+1)\cdot(1+h)\cancel{-2}+\cancel{2k}+\cancel{2}-k-1-\cancel{2k}-2hk=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\cancel{k}+kh+\cancel{1}+h-\cancel{k}-\cancel{1}-2hk=0\Rightarrow h\cdot(1-k)=0\Rightarrow h=0\vee k=1$$

b) Se $h = 0$ il sistema diventa: $\begin{cases}(k+1)x-y=1\\y=-1\\2x+y=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(k+1)x=0\\y=-1\\2x=0\end{cases}$, quindi le rette si incontrano nel punto (0; –1), ma deve essere $k \neq 1$ se no le prime due rette coincidono; se $k = 1$: $\begin{cases}2x-y=1\\2x-y=1\\2x+y=-1-h\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=2x-1\\2x+2x-1=-1-h\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-\dfrac{h}{2}-1\\x=-\dfrac{h}{4}\end{cases}$, due rette coincidono e hanno in comune con la terza il punto $P\equiv\left(-\dfrac{h}{4};-\dfrac{h+2}{2}\right)$

c) Deve essere $h \neq 0 \wedge k \neq 1$ Imponiamo che le rette siano tutte distinte e non parallele: $k + 1 \neq 2k \Rightarrow k \neq 1$, quindi le prime due sono sempre distinte $\begin{cases}(k+1)x-y=1\\2kx-y=1\end{cases}\Rightarrow(k-1)x=0\Rightarrow x=0, y=-1$ e si incontrano nel punto (0; –1).

$$\begin{cases}(k+1)x-y=1\\2x+y=-1-h\end{cases}\Rightarrow\begin{vmatrix}k+1 & -1\\2 & 1\end{vmatrix}\neq0\Rightarrow k+1+2\neq0\Rightarrow k\neq-3\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\begin{vmatrix}1 & -1\\-1-h & 1\end{vmatrix}}{k+3}=\dfrac{1-1-h}{k+3}=-\dfrac{h}{k+3}\\y=\dfrac{\begin{vmatrix}k+1 & -1\\2 & -1-h\end{vmatrix}}{k+3}=\dfrac{-k-hk-1-h+2}{k+3}=-\dfrac{k+hk+h-1}{k+3}\end{cases}$$

la prima e la terza si incontrano se $k \neq -3$. Infine la seconda e la terza si incontrano se $k \neq -1$.

$$\begin{cases}2kx-y=1\\2x+y=-1-h\end{cases}\Rightarrow\begin{vmatrix}2k & -1\\2 & 1\end{vmatrix}\neq0\Rightarrow 2k+2\neq0\Rightarrow k\neq-1\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\begin{vmatrix}1 & -1\\-1-h & 1\end{vmatrix}}{2k+2}=\dfrac{1-1-h}{2k+2}=-\dfrac{h}{2k+2}\\y=\dfrac{\begin{vmatrix}2k & -1\\2 & -1-h\end{vmatrix}}{2k+2}=\dfrac{-2k+2hk+2}{2k+2}=\dfrac{hk-k+1}{k+1}\end{cases}$$

Quelli che … vogliono sapere di più

Cenni sulla programmazione lineare

1. **Affittando una macchina possiamo scegliere di pagare un fisso di € 30,00 al giorno senza limite di chilometri, oppure un fisso di € 12,00 più € 0,10 al chilometro. Studiare la soluzione più conveniente al variare del numero di chilometri percorsi in un giorno.**

Le leggi sono: $y1(x) = 30$ e $y2(x) = 12 + 0{,}1x$. Si ha: $y1(x) < y2(x) \Rightarrow 30 < 12 + 0{,}1x \Rightarrow 0{,}1x > 18 \Rightarrow x > 180$. Quindi fino a 180 *km* è più conveniente la seconda opzione

2. **Un muratore per demolire e ricostruire fa pagare o un fisso di € 100,00 fino a un massimo di 500 m^2; oppure un fisso di € 25,00 più € 0,25 al m^2. Studiare la soluzione più conveniente al variare del numero intero di metri quadrati di parete.**

Le leggi sono: $y1(x) = 100$ e $x \leq 500$ e $y2(x) = 25 + 0{,}25x$. Si ha: $y1(x) < y2(x) \Rightarrow \begin{cases} 100 < 25 + 0{,}25x \\ x \leq 500 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0{,}25x > 75 \\ x \leq 500 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 300 \\ x \leq 500 \end{cases} \Rightarrow 300 < x \leq 500$. Quindi fino a 300 m^2 conviene la seconda opzione

3. **Una compagnia telefonica propone due abbonamenti, il primo prevede il costo fisso di € 0,10 per chiamata, aumentato di € 0,01 ogni minuto di conversazione; oppure € 0,05 per ogni chiamata, aumentato di € 0,02 per ogni minuto o sottomultiplo di chiamata. Studiare la soluzione più conveniente al variare del numero di minuti della media giornaliera delle chiamate.**

Le leggi sono: $y1(x) = 0{,}10 + 0{,}01x$ e $y2(x) = 0{,}05 + 0{,}02x$. Si ha: $y1(x) < y2(x) \Rightarrow 0{,}10 + 0{,}01x < 0{,}05 + 0{,}02x \Rightarrow 0{,}01x > 0{,}05 \Rightarrow x > 5$. Quindi fino a 5 minuti conviene la seconda opzione

4. **L'abbonamento a Internet da parte di una compagnia ha due opzioni. Un fisso di € 2,00 al giorno aumentato di € 0,01 per minuto, oppure € 0,10 per minuto di collegamento. Studiare la soluzione più conveniente al variare del numero medio intero di minuti di collegamento giornalieri.**

Le leggi sono: $y1(x) = 2 + 0{,}01x$ e $y2(x) = 0{,}1x$. Si ha: $y1(x) < y2(x) \Rightarrow 2 + 0{,}01x < 0{,}1x \Rightarrow 0{,}09x > 2 \Rightarrow x > 22$ (consideriamo il valore intero). Quindi fino a 22 minuti conviene la seconda opzione

5. **Davide è indeciso a quale compagnia di telefonia mobile affidarsi. La Teleconomia fa pagare un fisso di € 10,00 mensili e poi € 0,01 per ogni minuto di conversazione. Una seconda compagnia, la Free invece propone un costo di € 0,14 ogni minuto di conversazione. Studiare l'andamento dei costi al variare del tempo medio di conversazione mensile.**

Le leggi sono: $y1(x) = 10 + 0{,}01x$ e $y2(x) = 0{,}14x$. Si ha: $y1(x) < y2(x) \Rightarrow 10 + 0{,}01x < 0{,}14x \Rightarrow 0{,}13x > 10 \Rightarrow x > 76$ (consideriamo sempre il massimo intero contenuto nel risultato). Quindi fino a 76 minuti conviene la seconda

6. **Una azienda di prestiti per il rimborso delle somme prevede le seguenti due possibilità. Un fisso di € 100,00 più il 2% della somma prestata; oppure il 4,50% della somma prestata. Studiare la soluzione più conveniente al debitore, al variare della somma prestata.**

Le leggi sono: $y1(x) = 100 + 0{,}02x$ e $y2(x) = 0{,}045x$. Si ha: $y1(x) < y2(x) \Rightarrow 100 + 0{,}02x < 0{,}045x \Rightarrow 0{,}13x > 10 \Rightarrow x > 4000$. Quindi fino a un prestito di € 4000,00 conviene la seconda opzione

7. **Una banca offre un nuovo servizio per i suoi clienti titolari di un conto corrente. Prima faceva pagare €20,00 l'anno e € 0,10 per ogni operazione, adesso invece richiede € 25,00 l'anno e € 0,06 per ogni operazione. Quante operazioni l'anno deve effettuare al minimo un cliente affinché il nuovo servizio risulti più economico?**

Le leggi sono: $y1(x) = 20 + 0{,}10x$ e $y2(x) = 25 + 0{,}06x$. Si ha: $y1(x) < y2(x) \Rightarrow 20 + 0{,}10x < 25 + 0{,}06x \Rightarrow 0{,}01x < 5 \Rightarrow x < 125$. Quindi minimo 126, dato che per 125 spende lo stesso di prima

8. **Una banca offre le seguenti alternative per la tenuta di una carta di debito: € 12,00 di spese fisse e € 0,10 ogni operazione, oppure spese fisse di € 18,00 e € 0,15 per ogni operazione. Studiare l'andamento dei costi al variare del numero delle operazioni.**

Le leggi sono: $y1(x) = 12 + 0{,}10x$ e $y2(x) = 18 + 0{,}15x$. Si ha: $y1(x) < y2(x) \Rightarrow 12 + 0{,}10x < 18 + 0{,}15x \Rightarrow 0{,}05x > -6 \Rightarrow x > -120$. Quindi conviene sempre la prima

9. **Come nell'esercizio 7, ma con una terza alternativa: costo di € 1,80 per ogni operazione senza spese fisse. Quando questa conviene?**

La terza legge è: $y3(x) = 1{,}8x$. Si ha: $y3(x) < y1(x) \Rightarrow 1{,}8x < 20 + 0{,}10x \Rightarrow x < 12$ e $y3(x) < y2(x) \Rightarrow 1{,}8x < 25 + 0{,}06x \Rightarrow x < 15$. Quindi fino a 11 operazioni conviene la terza alternativa.

10. Con riferimento al problema 1, tenere conto dell'ulteriore opzione: € 0,18 al chilometro. Quando questa conviene?

La terza legge è: $y3(x) = 0{,}18x$. Si ha: $y3(x) < y1(x) \Rightarrow 0{,}18x < 30 \Rightarrow x < 167$ e $y3(x) < y2(x) \Rightarrow 0{,}18x < 12 + 0{,}1x \Rightarrow x < 150$. Quindi fino a 150 *km* conviene la terza, da 151 *km* a 180 *km* la seconda, da 180 *km* in poi la prima]

11. Con riferimento al problema 2, tenere conto dell'ulteriore opzione: solo € 0,40 al m^2. Quando questa conviene?

La terza legge è: $y3(x) = 0{,}4x$. Si ha: $y3(x) < y1(x) \Rightarrow 0{,}4x < 100$ con $x < 500 \Rightarrow x < 250$ e $y3(x) < y2(x) \Rightarrow 0{,}4x < 25 + 0{,}25x \Rightarrow x < 167$. Quindi fino a m^2 166

12. Con riferimento al problema 3, tenere conto dell'ulteriore opzione: € 0,03 per ogni minuto o sottomultiplo di chiamata. Quando questa conviene?

La terza legge è: $y3(x) = 0{,}03x$. Si ha: $y3(x) < y1(x) \Rightarrow 0{,}03x < 0{,}10 + 0{,}01x \Rightarrow x < 5$ e $y3(x) < y2(x) \Rightarrow 0{,}03x < 0{,}05 + 0{,}02x \Rightarrow x < 5$. Quindi fino a 4^m

13. Per affittare un'auto si richiedono tre preventivi. L'agenzia *Ruote Dorate* chiede € 15,00 al giorno più € 0,10 per ogni chilometro percorso. *Sterzo Argentato* vuole € 12,00 di fisso e € 0,12 per ogni chilometro. *Strade infinite* richiede € 0,15 al chilometro senza spesse fisse. Quale delle tre agenzie è più conveniente?

Le leggi sono: $y1(x) = 15 + 0{,}1x$, $y2(x) = 12 + 0{,}12x$ e $y3(x) = 0.15x$. Si ha: $y1(x) < y2(x) \Rightarrow x > 150$; $y1(x) < y3(x) \Rightarrow x > 300$; $y2(x) < y3(x) \Rightarrow x > 400$. Quindi fino a *km* 300 conviene *Strade infinite*, per più di *km* 300 conviene *Ruote Dorate*

14. Una azienda ha bisogno di carta per imballaggio e ha ricevuto i seguenti preventivi da tre ditte fornitrici A: € 0,10 al chilo più € 60,00 per il trasporto; B: € 0,08 al chilo più € 80,00; C: fisso di € 120 aumentato di € 0,06 al chilo. Studiare quali fra le tre ditte propone un servizio più conveniente, al variare della quantità di carta ordinata.

Le leggi sono: $y1(x) = 60 + .1x$, $y2(x) = 80 + 0{,}08x$ e $y3(x) = 120 + 0.06x$. Si ha: $y1(x) < y2(x) \Rightarrow x < 1000$; $y1(x) < y3(x) \Rightarrow x < 1500$; $y2(x) < y3(x) \Rightarrow x < 2000$. Quindi fino a 1000 *kg* conviene A, a 1000 A e B, da *kg* 1001 a *kg* 2000 conviene B a 2000 B e C per più di 2000 *kg* conviene C

15. Un ristorante deve ordinare della pasta e si rivolge a tre diversi pastifici, indicati con A, B e C. Riceve i seguenti tre preventivi. A: € 0,50 al *kg* e € 75,00 per il trasporto; B: € 0,40 al *kg* e € 90,00 per il trasporto; C: € 0,45 al *kg* e € 82,00 per il trasporto. Studiare l'andamento dei costi al variare della quantità ordinata.

Le leggi sono: $y1(x) = 75 + 0.5x$, $y2(x) = 90 + 0{,}4x$ e $y3(x) = 82 + 0.45x$. Si ha: $y1(x) < y2(x) \Rightarrow x < 150$; $y1(x) < y3(x) \Rightarrow x < 140$; $y2(x) < y3(x) \Rightarrow x > 160$. Quindi fino a 139 *kg* conviene A, per 140 *kg* A e C si equivalgono, da 141 *kg* a 159 *kg* è più economico C, per 160 *kg* B e C si equivalgono, per più di 160 *kg* conviene B

16. Un autotrasportatore propone le seguenti tariffe, o un fisso di € 15,00 al viaggio per ogni multiplo di 50 chilometri, con l'intesa che da 1 km a 50 *km* si paga sempre lo stesso; oppure un costo di € 0,40 al chilometro. Studiare la soluzione più conveniente al variare del numero intero di chilometri percorsi.

Le leggi sono: $y1(x) = 15$, $y2(x) = 0.4x$ per i primi 50 *km*, per i successivi 50 diventa $y1(x) = 30$, $y2(x) = .4x$ e così via. Si ha: $15 < 0{,}4x \wedge 0 < x < 50 \Rightarrow x < 38$; $30 < 0{,}4x \wedge 50 < x < 100 \Rightarrow 50 < x < 75$; $45 < 0{,}4x \wedge 100 < x < 150 \Rightarrow 100 < x < 113$; $60 < 0{,}4x \wedge 150 < x < 200 \Rightarrow$ non ci sono soluzioni e non accadrà più che convenga $y1(x)$. Quindi solo nelle fasce di chilometri [0, 37], [51, 75], [101, 112], conviene la seconda opzione. Osserviamo che 75 è un valore di indifferenza, dato che $0{,}4 \cdot 75 = 30$. Non vi sono altri punti di indifferenza.

17. Una ditta deve scegliere fra le seguenti offerte pervenute da parte di 4 corrieri espressi per il recapito di pacchi. L'agenzia *Consegne sicure* vuole un fisso di € 3,00 più € 0,30 per ogni *kg*; la ditta *Più veloci della luce* fa pagare € 0,35 al *kg* per pesi non superiori a 10 *kg*, poi chiede un fisso di € 3,50 per i primi dieci *kg* e € 0,45 per i *kg* eccedenti i 10; l'agenzia *Super espresso* pretende un fisso di € 1,00 per pacchi fino a 10 *kg*, ogni 10 *kg* il fisso aumenta di altri € 0,50, inoltre richiede € 0,40 al *kg*; infine la ditta *Già consegnato* applica le seguenti tariffe: € 0,50 al *kg* fino a 5 *kg*, da 6 a 10 *kg* chiede € 0,55 al *kg*, comprendendo anche i primi 5 *kg*, così un pacco da 5 *kg* costa 2.5 euro

e uno da 6, 3,3 euro. Ogni 5 *kg* aumenta di € 0,05 il *kg*. Tutte le ditte arrotondano per difetto, così un pacco di 300 g. viene fatto pagare come uno da 1 *kg*. Studiare la situazione per consegne il cui peso varia da 1 *kg* a 50 *kg*.

Le leggi sono: $y1(x) = 3 + 0.3x$, $y_2(x)=\begin{cases} 0,35x & 0<x\le 10 \\ 3,50+0,45\cdot(x-10) & x>10 \end{cases}$, $y_3(x)=\begin{cases} 1+0,40x & 0<x\le 10 \\ 1,50+0,40(x-10) & 10<x\le 20 \\ 2,00+0,40(x-20) & 20<x\le 30 \\ \dots \end{cases}$, $y_4(x)=\begin{cases} 0,50x & 0<x\le 5 \\ 2,50+0,55(x-5) & 5<x\le 10 \\ 3,30+0,60(x-10) & 10<x\le 15 \\ \dots \end{cases}$. Ecco la tabella richiesta:

1	3.3	0.35	1.4	0.5
2	3.6	0.7	1.8	1
3	3.9	1.05	2.2	1.5
4	4.2	1.4	2.6	2
5	4.5	1.75	3	2.5
6	4.8	2.1	3.4	3.3
7	5.1	2.45	3.8	3.85
8	5.4	2.8	4.2	4.4
9	5.7	3.15	4.6	4.95
10	6	3.5	5	5.5

11	6.3	3.95	5.9	6.6
12	6.6	4.4	6.3	7.2
13	6.9	4.85	6.7	7.8
14	7.2	5.3	7.1	8.4
15	7.5	5.75	7.5	9
16	7.8	6.2	7.9	10.4
17	8.1	6.65	8.3	11.05
18	8.4	7.1	8.7	11.7
19	8.7	7.55	9.1	12.35
20	9	8	9.5	13

21	9.3	8.45	10.4	14.7
22	9.6	8.9	10.8	15.4
23	9.9	9.35	11.2	16.1
24	10.2	9.8	11.6	16.8
25	10.5	10.25	12	17.5
26	10.8	10.7	12.4	19.5
27	11.1	11.15	12.8	20.25
28	11.4	11.6	13.2	21
29	11.7	12.05	13.6	21.75
30	12	12.5	14	22.5

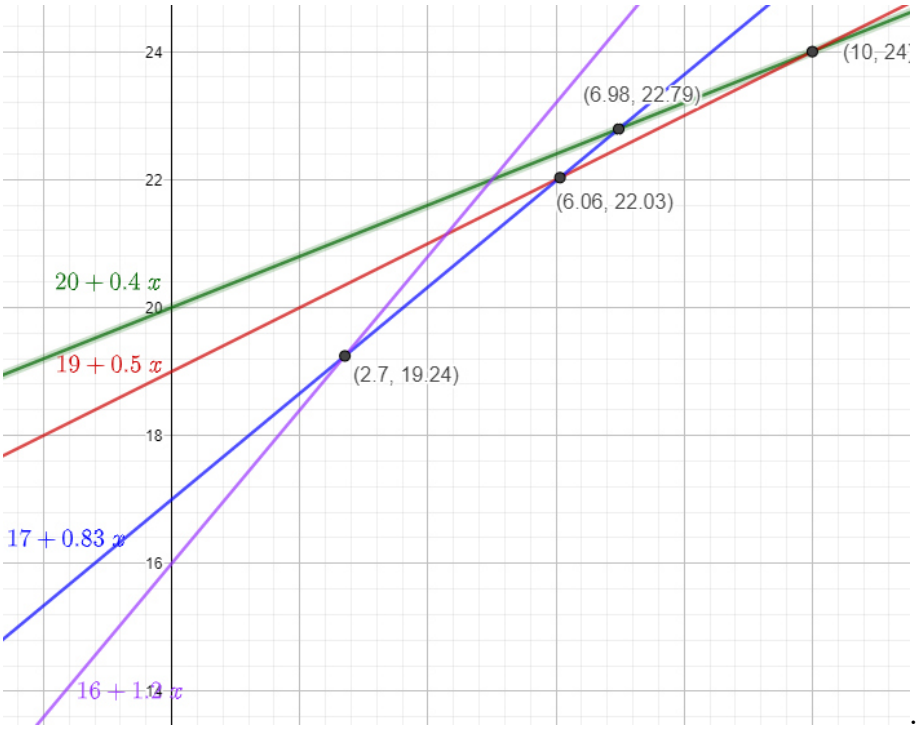
31	12.3	12.95	14.9	24.8
32	12.6	13.4	15.3	25.6
33	12.9	13.85	15.7	26.4
34	13.2	14.3	16.1	27.2
35	13.5	14.75	16.5	28
36	13.8	15.2	16.9	30.6
37	14.1	15.65	17.3	31.45
38	14.4	16.1	17.7	32.3
39	14.7	16.55	18.1	33.15
40	15	17	18.5	34

41	15.3	17.45	19.4	36.9
42	15.6	17.9	19.8	37.8
43	15.9	18.35	20.2	38.7
44	16.2	18.8	20.6	39.6
45	16.5	19.25	21	40.5
46	16.8	19.7	21.4	43.7
47	17.1	20.15	21.8	44.65
48	17.4	20.6	22.2	45.6
49	17.7	21.05	22.6	46.55
50	18	21.5	23	47.5

nella prima colonna c'è il numero di *Kg*. Da essa si evince che la prima conviene da 27 *kg* a 50 *kg*; la seconda da 1 *kg* a 26 *kg*, le altre non convengono mai

18. Per il trasporto di alcuni alunni che abitano in zone particolarmente disagiate, pervengono, da parte di 4 ditte di minibus, le seguenti offerte relative al singolo viaggio. La ditta *Busauto* vuole un fisso di € 20,00 più € 0,40 per ogni passeggero; la ditta *Chi va piano va lontano*, fa pagare € 19,00 di fisso e € 0,50 a persona; l'agenzia *Sicurezza è il nostro mestiere*, vuole € 17,00 di fisso e € 0,83 a persona; infine la ditta *Quattroruote* applica la seguente tariffa: € 16,00 come fisso e € 1,20 a persona. Determinare la ditta che offre il preventivo più economico a seconda del numero di alunni da trasportare.

Le leggi sono: $y1(x) = 20 + 0.4x$, $y2(x) = 19 + 0,50x$, $y3(x) = 17 + 0.83x$ e $y4(x) = 16 + 1.20x$. Mostriamo il

grafico 

. Le ascisse dei punti di indifferenza rappresentano quel che ci interessa, ossia il numero dei passeggeri, le relative ordinate si riferiscono al costo. Quindi possiamo dire che la prima conviene per 10 passeggeri o più di; la seconda da 7 a 10 passeggeri, la terza da 3 a 5 e l'ultima da 1 a 2

19. Una tipografia si rivolge a tre rivenditori per acquistare la carta. Il primo gli prospetta le seguenti possibilità: € 1,20 al *kg* per ordini fino a 1 quintale di carta, dopodiché applica uno sconto del 10% per ordini fino a 5 quintali solo per la parte eccedente 100 *kg*, e uno del 15% sempre rispetto a 1,20, per ordini superiori a 5 quintali, sempre solo per la parte eccedente tale quantità. Un altro fornitore invece propone un prezzo di € 1,00 il chilo più un fisso per il trasporto di € 30,00 per ogni mezza tonnellata o porzione, cioè se ordina 500 *kg*, di carta paga € 30,00 di fisso, se ne ordina 501 paga € 60,00. Un terzo fornitore invece vuole € 1,25 il chilo fino a 250 *kg*, ogni 250 *kg* sconta di € 0,10 il prezzo al chilo, prezzo valido per tutti i chili ordinati: così se ordina 251 *kg*, pagherà € 1,15 il chilo, per 501 *kg* € 1,05 e così via. Tenuto conto che il magazzino del signor Anselmo non può contenere più di 1 tonnellata di carta, studiare le varie possibilità a seconda dell'ordine da effettuare.

Le leggi sono: $y_1(x)=\begin{cases} 1,20x & 0<x\le 100 \\ 120+1,08(x-100) & 100<x\le 500 \\ 552+1,02(x-500) & 500<x<1000 \end{cases}$, $y_2(x)=\begin{cases} 30+x & 0<x\le 500 \\ 60+x & 500<x\le 1000 \end{cases}$

, $y_3(x)=\begin{cases} 1,25x & 0<x\le 250 \\ 1,15x & 250<x\le 500 \\ 1,05x & 500<x\le 750 \\ 0,95x & 750<x\le 1000 \end{cases}$, abbiamo tenuto conto della capienza del magazzino. Mostriamo la

tabella per multipli di 50 kg.

50	60	80	62.5
100	120	130	125
150	174	180	187.5
200	228	230	250
250	282	280	312.5
300	336	330	345
350	390	380	402.5
400	444	430	460
450	498	480	517.5
500	552	530	575
550	603	610	577.5
600	654	660	630
650	705	710	682.5
700	756	760	735
750	807	810	787.5
800	858	860	760
850	909	910	807.5
900	960	960	855
950	1011	1010	902.5
1000	1062	1060	950

Notiamo che fino a 200 *kg* conviene la prima poi prevale la seconda fra 200 e 250, quindi effettuiamo una ricerca più fine

225	255	255	281.25
226	256.08	256	282.5

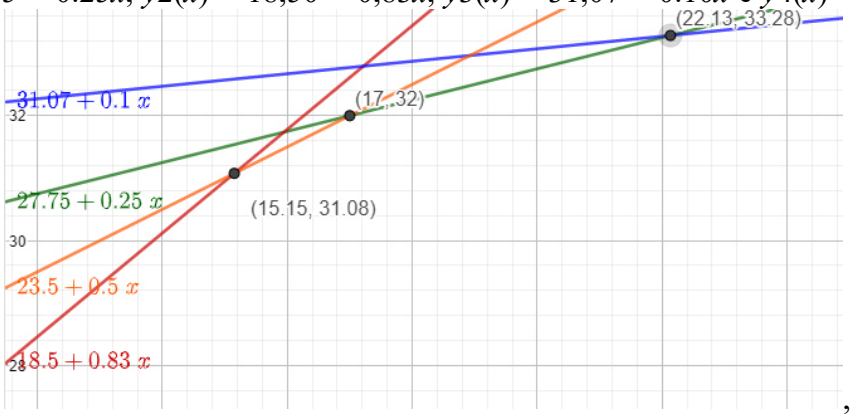
e troviamo che ciò avviene a 226 *kg*. Da 500 a 550 vi è il passaggio al terzo:

500	552	530	575
501	553.02	561	526.05

in effetti a 501 *kg*]

20. Un ufficio deve provvedere all'appalto per le pulizie dei suoi stabili. Riceve le seguenti offerte: la ditta *Linda* chiede € 27,75 di fisso più € 0,25 per ogni stanza; la ditta *Splendor* vuole € 0,83 per ogni stanza più un fisso di € 18,50; la *Nettoben* richiede un fisso di € 31,07 e € 0,10 per ogni stanza; infine la *Pulitutto* propone un fisso di € 23,50 e € 0,50 per ogni stanza. In base al numero di stanze da pulire, determinare l'offerta più conveniente.

Le leggi sono: $y1(x) = 27{,}75 + 0.25x$, $y2(x) = 18{,}50 + 0{,}83x$, $y3(x) = 31{,}07 + 0.10x$ e $y4(x) = 23.50 + 0.50x$. Mostriamo il grafico

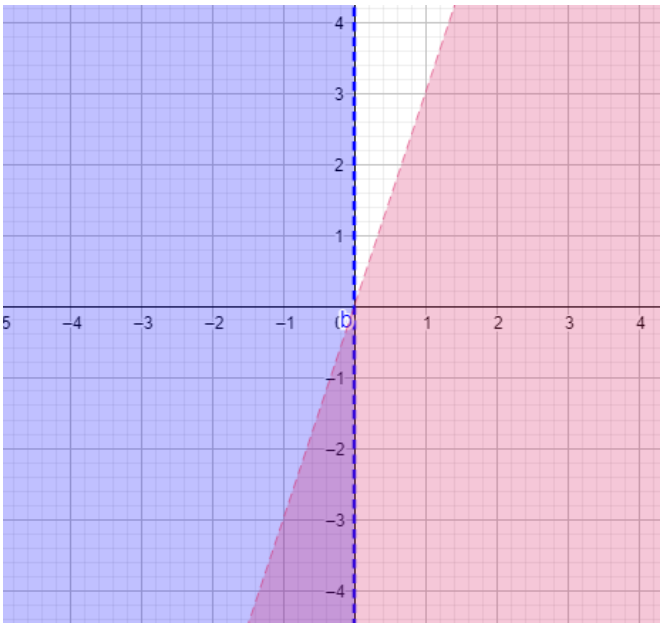


, da cui si evince che fino a 15 stanze si sceglierà la *Splendor*; da 15 a 17 stanze conviene *Pulitutto*; da 17 a 22 stanze si preferisce *Linda*; per più di 22 stanze *Nettoben*

Risolvere graficamente i seguenti sistemi di disequazioni in 2 variabili

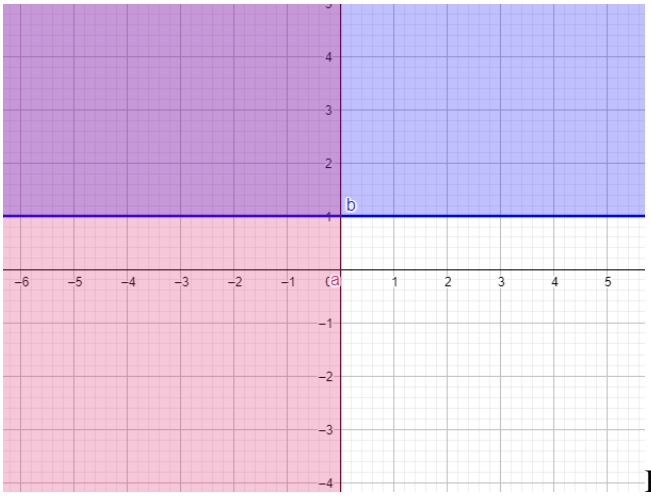
Le figure sono fatte con Geogebra, la soluzione è quella segnata in violetto

21. $\begin{cases} 3x - y > 0 \\ x < 0 \end{cases}$

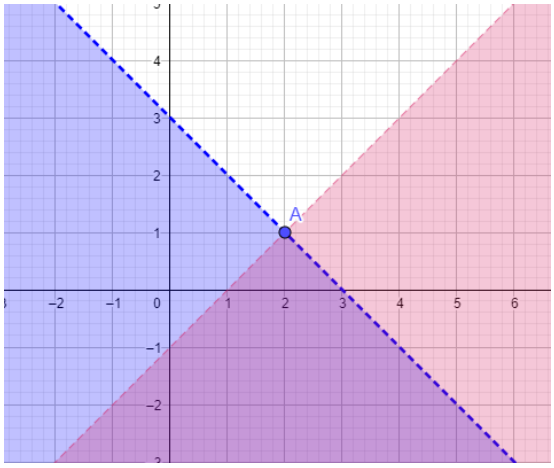


Triangolo infinito con un solo vertice in O e un lato il semiasse negativo delle ordinate

22. **a)** $\begin{cases} x \le 0 \\ y \ge 1 \end{cases}$ **; b)** $\begin{cases} x + y < 3 \\ x - y > 1 \end{cases}$

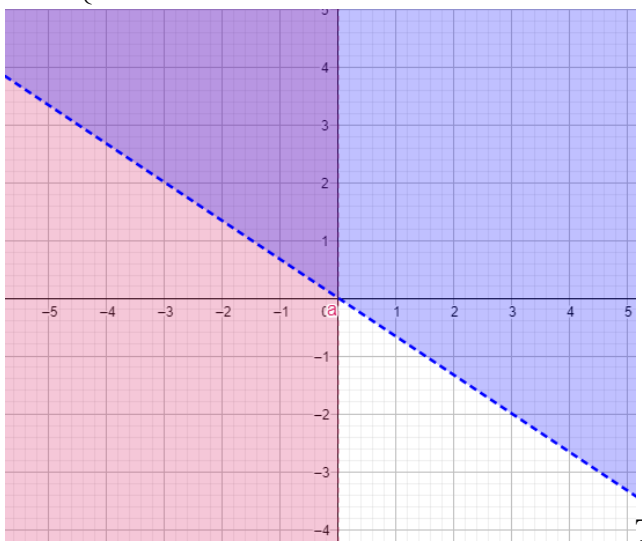
a) 

Rettangolo infinito nel II quadrante;

b) 

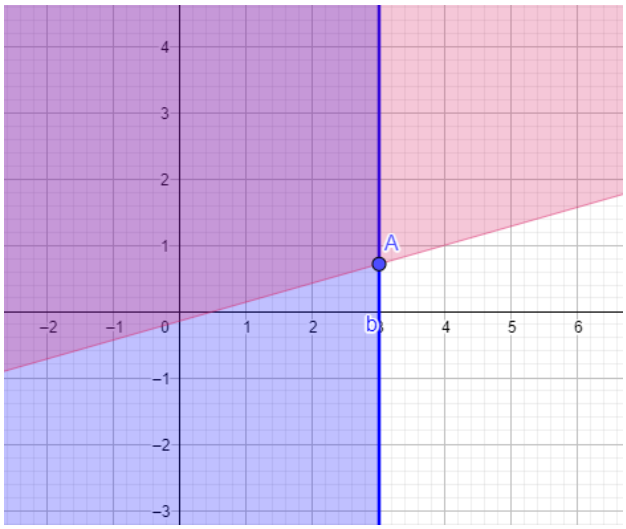
Triangolo infinito con vertice in $A \equiv (2; 1)$

23. $\begin{cases} 2x+3y>0 \\ 3x<0 \end{cases}$

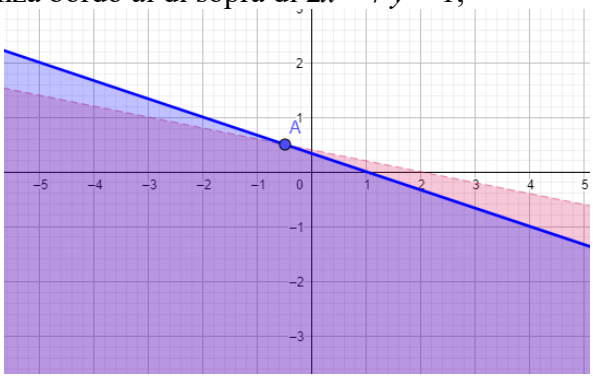


Triangolo infinito con un solo vertice in O e un lato il semiasse positivo delle ordinate

24. **a)** $\begin{cases} 2x-7y\le 1 \\ x\le 3 \end{cases}$ **; b)** $\begin{cases} x+5y-2<0 \\ x+3y\le 1 \end{cases}$

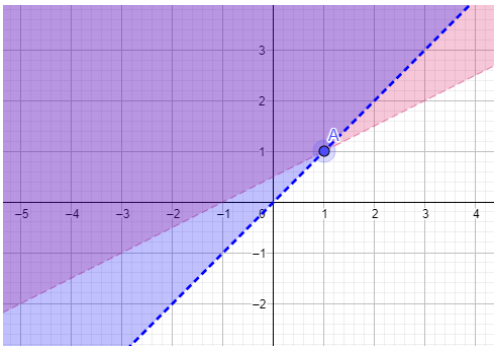
a) 

Triangolo infinito con vertice in, un lato $x = 3$ e un altro senza bordo al di sopra di $2x - 7y = 1$;

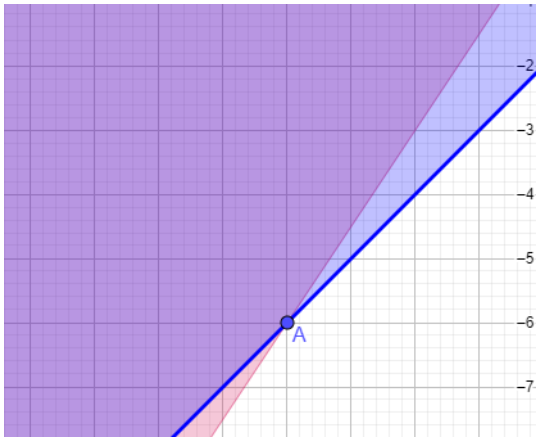
b) 

Triangolo infinito con vertice in $A \equiv (-½; ½)$

25. **a)** $\begin{cases} x-2y<-1 \\ x<y \end{cases}$ **; b)** $\begin{cases} 3x\le 2y \\ 2\ge x-y \end{cases}$

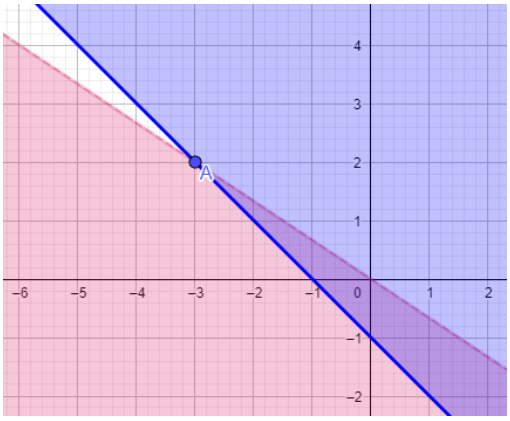
a) 

Triangolo infinito con vertice in $A \equiv (1;1)$;

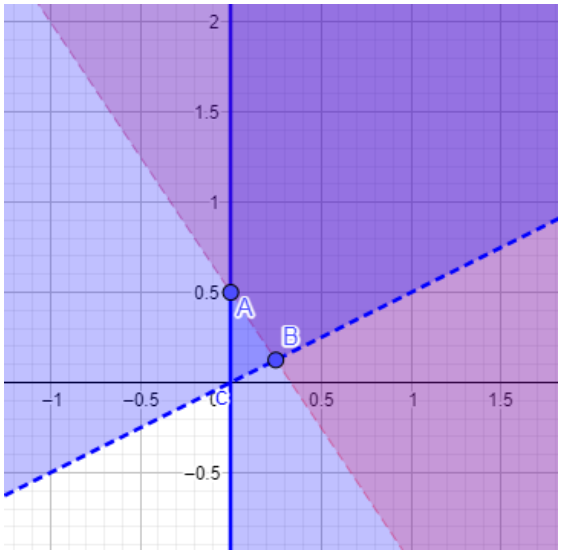
b) 

Triangolo infinito con vertice in $A \equiv (-4;-6)]$

26. **a)** $\begin{cases} 2x+3y<0 \\ x+y>-1 \end{cases}$ **; b)** $\begin{cases} 3x+2y-1>0 \\ x-2y<0 \\ x \geq 0 \end{cases}$

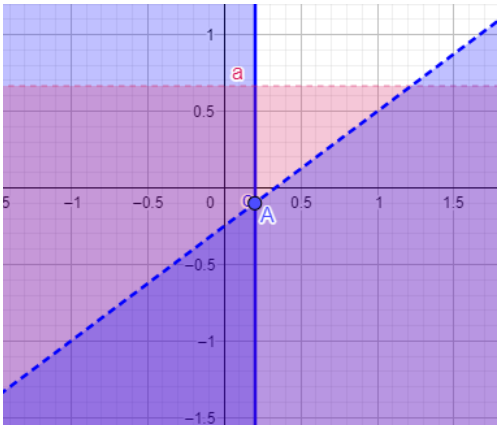
a) 

Triangolo infinito con vertice in $A \equiv (-3;\ 2)$;

b) 

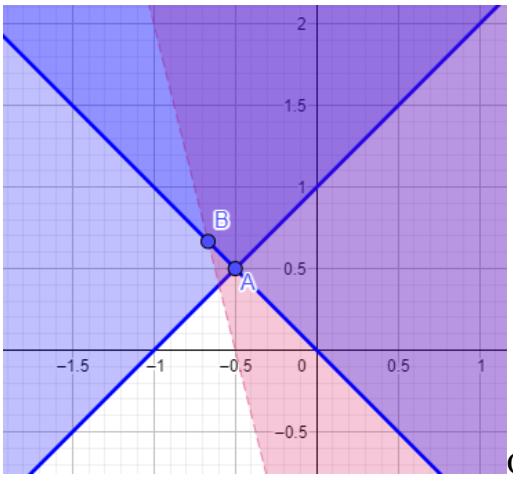
Quadrilatero infinito con vertici in $A \equiv (0;\ ½)$ e $B \equiv (1/4;\ 1/8)$

27. $\begin{cases} 5x-1\le 0 \\ 4y<3x-1 \\ 0>3y-2 \end{cases}$



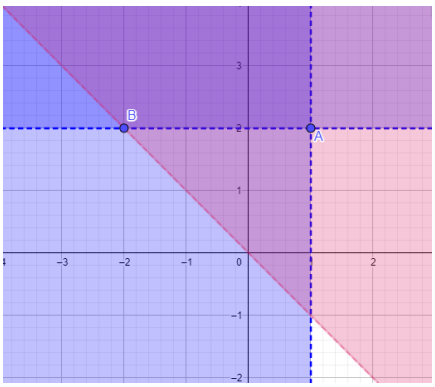
Triangolo infinito con un solo vertice finito in $A \equiv (1/5; -1/10)$]

28. $\begin{cases} -4x<2+y \\ 1+x-y\le 0 \\ x+y\ge 0 \end{cases}$



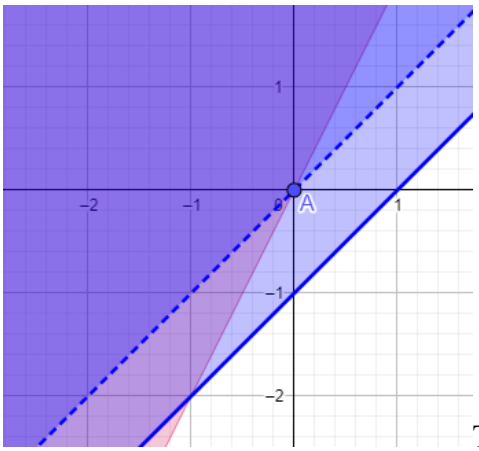
Quadrilatero infinito con due soli vertici finiti in $A \equiv (-1/2; 1/2)$, $B \equiv (-2/3; 2/3)$

29. $\begin{cases} x+y>0 \\ x<1 \\ y>2 \end{cases}$

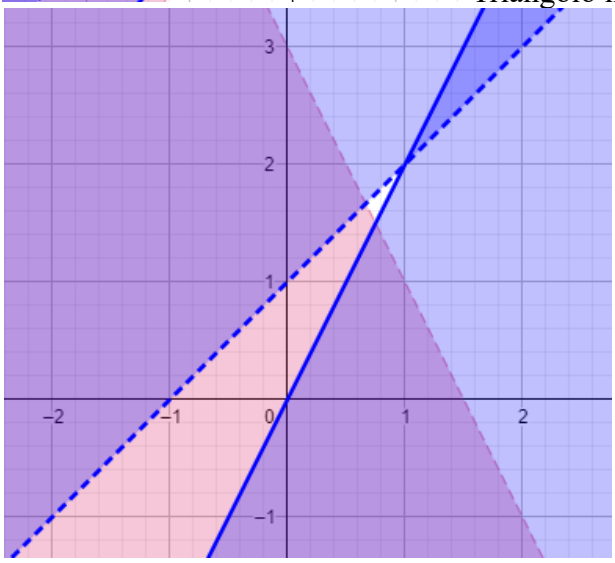


Quadrilatero infinito con due soli vertici finiti in $A \equiv (1; 2)$ e $B \equiv (-2; 2)$

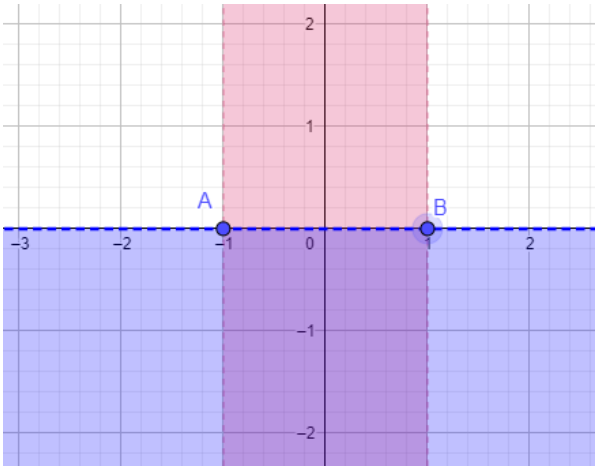
30. **a)** $\begin{cases} 2x-y\le 0 \\ y-x\ge -1 \\ x<y \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} 2x<3-y \\ y>1+x \\ 2x-y\ge 0 \end{cases}$

a) 

Triangolo infinito con un solo vertice finito in O;

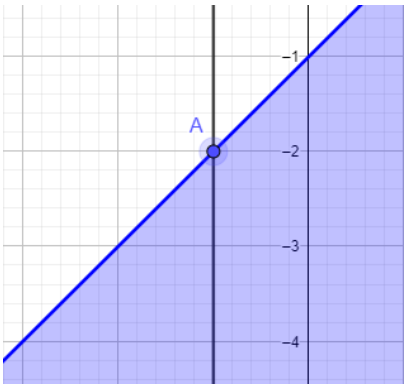
b) 
Non ci sono parti in comune a tutti e tre: $\varnothing$

31. $\begin{cases} |x| < 1 \\ y < 0 \end{cases}$



Rettangolo infinito con due soli vertici finiti in $A \equiv (-1; 0)$ e $B \equiv (1; 0)$]

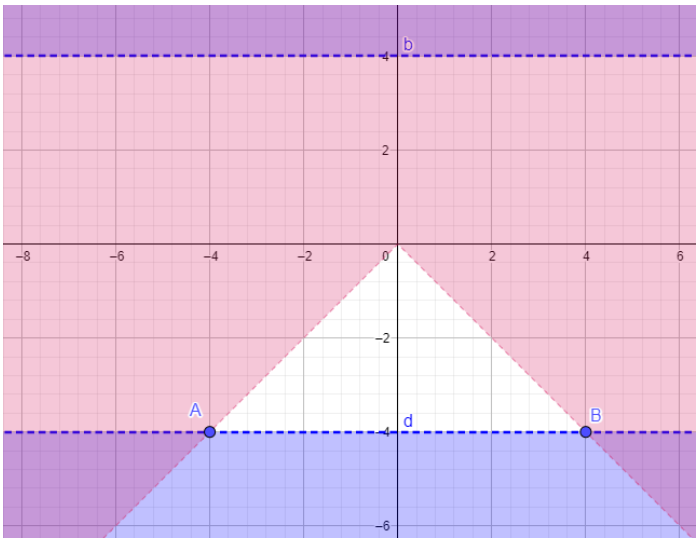
32. **a)** $\begin{cases} |x+1| \le 0 \\ x - y \ge 1 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} |x+y| < 0 \\ x + y \le 2 \end{cases}$

a) 

Semiretta parallela all'asse delle y, vert. il punto $A \equiv (-1; -2)$;

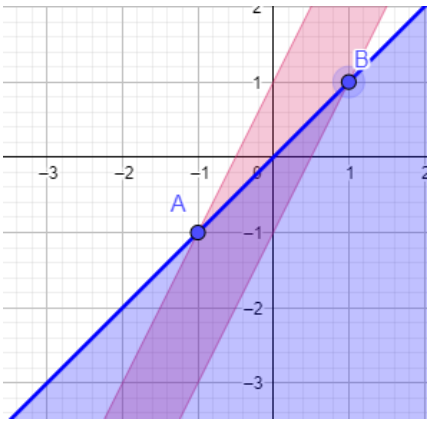
b) Dato che la prima disequazione non è mai verificata, nessuna soluzione

33. $\begin{cases} |x| + y > 0 \\ 3 - |y| < -1 \end{cases}$

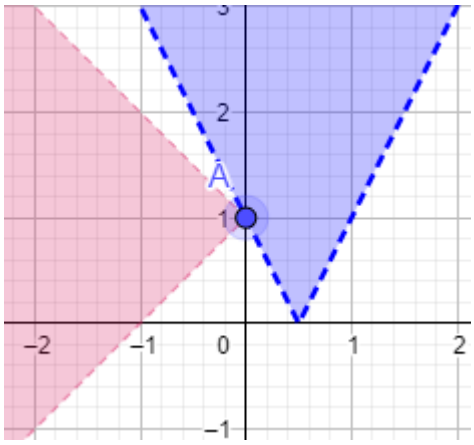


Unione di due triangoli infiniti di vertici $A \equiv (-4; -4)$ e $B \equiv (4; -4)$ e dalla striscia formata dai punti di ordinata maggiore o uguale a 4]

34. **a)** $\begin{cases} |2x - y| \le 1 \\ x \ge y \end{cases}$ **; b)** $\begin{cases} x + |y - 1| < 0 \\ |2x - 1| < y \end{cases}$ **[**

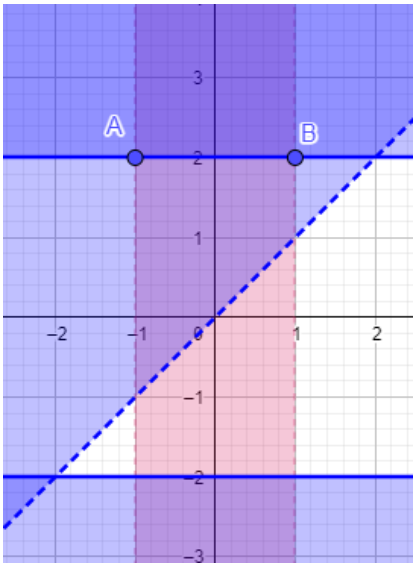
a) 

Quadrilatero inf. con vert. $A \equiv (-1; -1)$ e $B \equiv (1; 1)$;

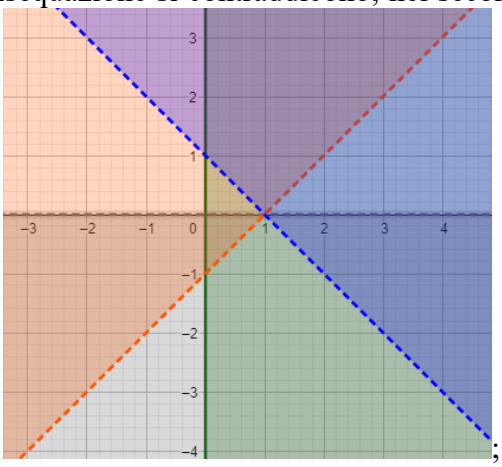
b) 

$A \equiv (0;\ 1)$

35. **a)** $\begin{cases} |x| < 1 \\ |y| \geq 2 \\ x - y < 0 \end{cases}$ **; b)** $\begin{cases} |x| + |y| < 1 \\ x + y > 1 \\ x - y < 1 \end{cases}$

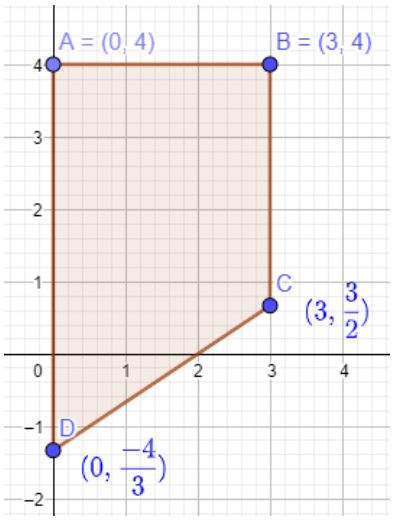
a) 

Rettangolo infinito con vertici finiti in $A \equiv (-1;\ 2)$ e $B \equiv (1;\ 2)$;

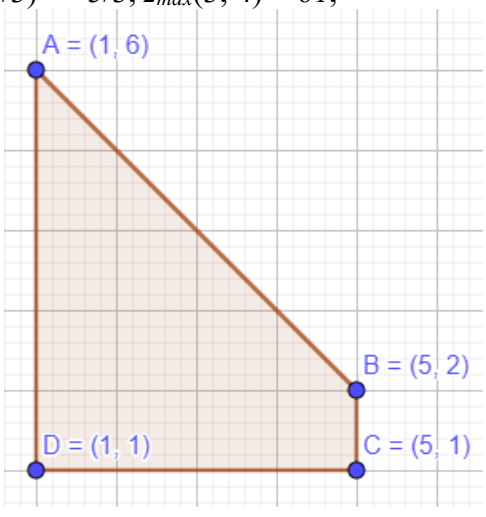
b) Il sistema si compone dei seguenti: $\begin{cases} x + y < 1 \\ x + y > 1 \\ x - y < 1 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x - y < 1 \\ x + y > 1 \\ x - y < 1 \\ x \geq 0, y < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -x + y < 1 \\ x + y > 1 \\ x - y < 1 \\ x < 0, y \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -x - y < 1 \\ x + y > 1 \\ x - y < 1 \\ x < 0, y < 0 \end{cases}$, nel primo prima e seconda disequazione si contraddicono; nel secondo abbiamo il grafico che mostra che non vi sono soluzioni comuni  ; nel terzo prima e terza disequazione si contraddicono; nel quarto la seconda disequazione contiene la prima e la quarta contraddice la seconda. Infine non vi sono soluzioni.

Determinare minimo m e massimo M, delle funzioni seguenti soggetti ai vincoli accanto indicati

36. **a)** $z(x, y) = 12x + 5y + 5$; $\begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ y \le 4 \\ 2x - 3y \le 4 \end{cases}$ **; b)** $z(x; y) = 4x + 3y + 12$; $\begin{cases} 1 \le x \le 5 \\ 1 \le y \le 6 \\ x + y < 7 \end{cases}$

a) Rappresentiamo i vincoli: 

Calcoliamo la z negli estremi, ottenendo: $z_{min}(0; -4/3) = -5/3$, $z_{max}(3; 4) = 61$;

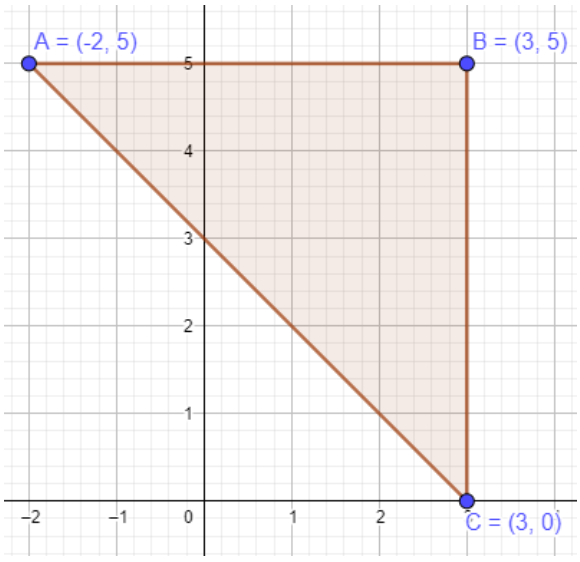
b) 

$z_{min}(1; 1) = 19$, $z_{max}(5; 2) = 38$

37. **a)** $z(x; y) = 15x + 10y - 8$; $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \le 4 \\ x - 3y \le 4 \end{cases}$ **; b)** $z(x; y) = 30x - 20y + 1$; $\begin{cases} x \le 3 \\ y \le 5 \\ x + y \ge 3 \end{cases}$

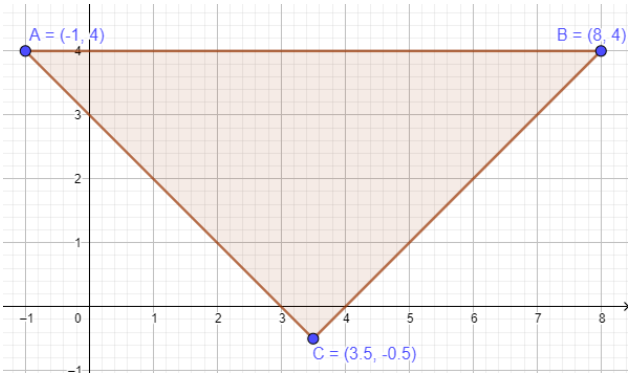
a)

$z_{min}(0; -4/3) = -64/3$, $z_{max}(16; 4) = 272$;

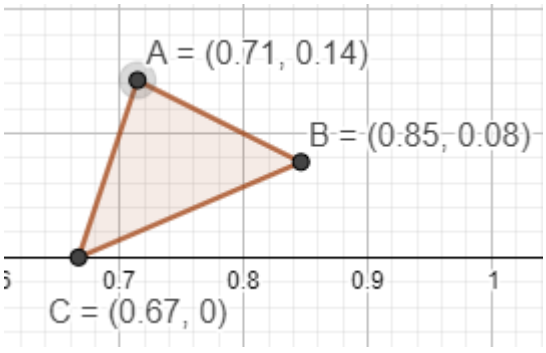
b) 

$z_{min}(-2;\ 5) = -159$, $z_{max}(3;\ 0) = 91$

38. a) $z(x;\ y) = 115x + 315y - 40$; $\begin{cases} x + y \geq 3 \\ y \leq 4 \\ x - y \leq 4 \end{cases}$ **; b)** $z(x;\ y) = 45x + 52y + 10$; $\begin{cases} x + 2y \leq 1 \\ 3x - y \geq 2 \\ 3x - 7y \leq 2 \end{cases}$

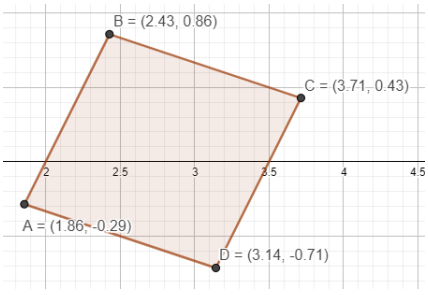
a) 

$z_{min}(7/2;\ -1/2) = 205$, $z_{max}(8;\ 4) = 2140$;

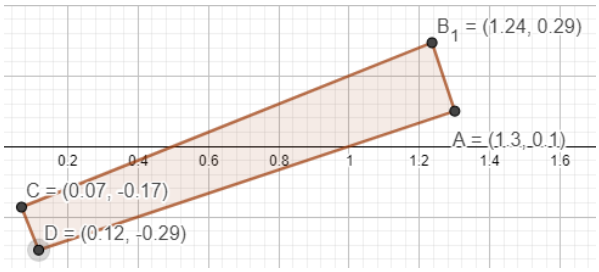
b) 

$z_{min}(2/3;\ 0) = 40$, $z_{max}(11/13;\ 1/13) = 677/12$

39. a) $z(x,\ y) = \frac{25}{4}x + \frac{13}{2}y - \frac{1}{8}$; $\begin{cases} 1 \leq x + 3y \leq 5 \\ 4 \leq 2x - y \leq 7 \end{cases}$ **; b)** $z(x;\ y) = 74x + 31y + 25$; $\begin{cases} 3x + y \leq 4 \\ x - 3y \leq 1 \\ 2x - 5y \geq 1 \\ 5x + 2y \geq 0 \end{cases}$

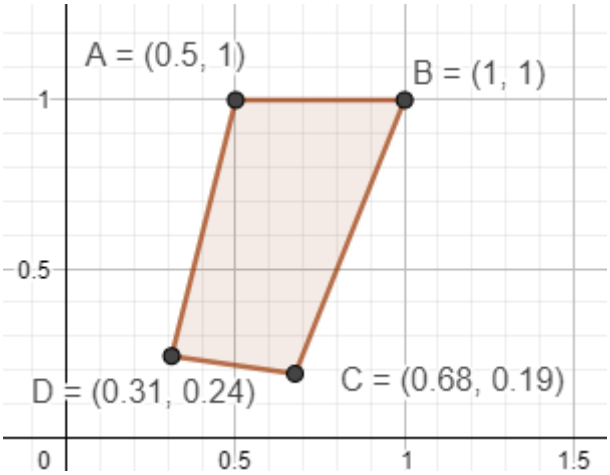
a) 

$z_{min}(13/7;\ -2/7) = 77/8$, $z_{max}(26/7;\ 3/7) = 207/8$;

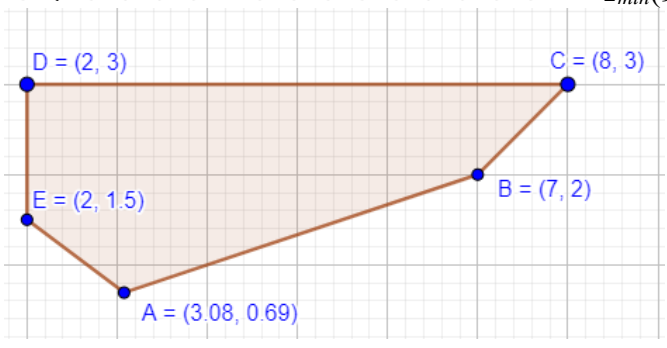
b) 

$z_{min}(2/17; -5/17) = 418/17$, $z_{max}(21/17; 5/17) = 2134/17$

40. a) $z(x; y) = 12{,}5x + 3{,}75y + 12{,}8$; $\begin{cases} 3x+2y \le 5 \\ x+7y \ge 2 \\ 5x-2y \le 3 \\ 4x-y \ge 1 \end{cases}$ **; b)** $z(x; y) = 125x + 15{,}4y + 30$; $\begin{cases} x \ge 2 \\ y \le 3 \\ x-3y \le 1 \\ 3x+4y \ge 12 \\ x-y \le 5 \end{cases}$

a) 

$z_{min}(9/29; 7/29) \approx 17{,}58$, $z_{max}(1; 1) \approx 29{,}05$;

b) 

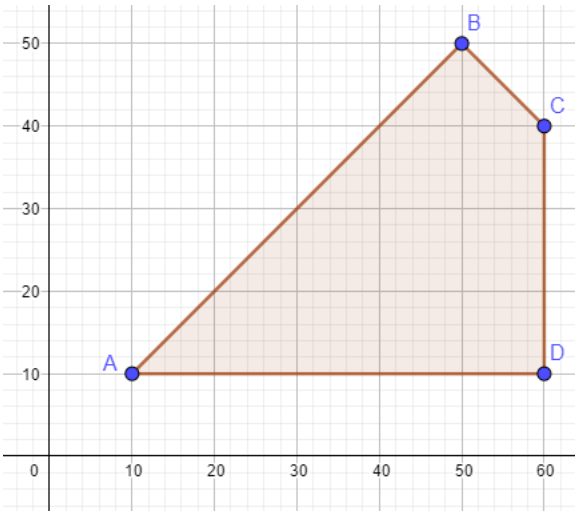
$z_{min}(2; 3/2) = 78{,}1$, $z_{max}(8; 3) = 176{,}2$

Si ricordi che non sempre il valore calcolato è accettabile, poiché in alcuni casi deve essere intero. In tali casi si approssima ai valori interi più vicini

41. Un oste vuole ordinare non più di 100 bottiglie di vino che hanno due prezzi diversi: € 5,00 e € 6,00 la bottiglia. Dalla sua ventennale esperienza sa che non deve comprare meno di 10 né più di 60 bottiglie per ogni tipo e che il numero delle bottiglie da 6 euro non deve superare quello delle bottiglie da € 5,00. Decide di vendere ciascuna bottiglia ai rispettivi prezzi di €10,00 e €12,00. Nell'ipotesi in cui riuscisse a vendere tutte le bottiglie, quante deve comprarne di ciascun tipo per ottenere il massimo guadagno?

La funzione obiettivo è $z(x, y) = (10 - 5)x + (12 - 6)y = 5x + 6y$, soggetta ai vincoli $\begin{cases} 10 \le x \le 60 \\ 10 \le y \le 60 \\ x \ge y \\ 20 < x+y \le 100 \end{cases}$, il po-

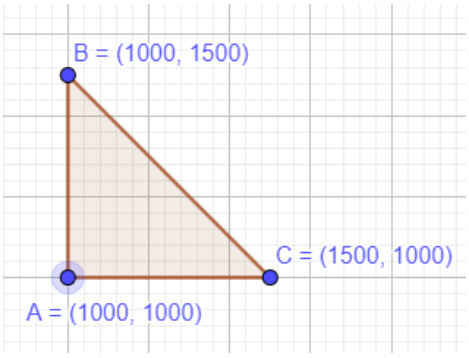
ligono delle soluzioni è il seguente:



abbiamo: $z(10, 10) = 110$, $z(50, 50) = 550$, $z(60, 40) = 540$ e $z(60, 10) = 360$, pertanto il massimo profitto si ottiene comprandone 50 di ciascun tipo

42. Un'impresa produce due beni che hanno costi unitari di produzione pari a € 2,00 e € 1,50 rispettivamente. Indipendentemente dal numero di beni prodotti si spende un fisso di € 1000,00. Sapendo che non si possono produrre complessivamente più di 2500 pezzi al giorno, che si debbono produrre almeno 1000 pezzi e non più di 1500 di ciascun tipo, determinare il numero ottimale di beni di ciascun tipo da produrre per minimizzare i costi.

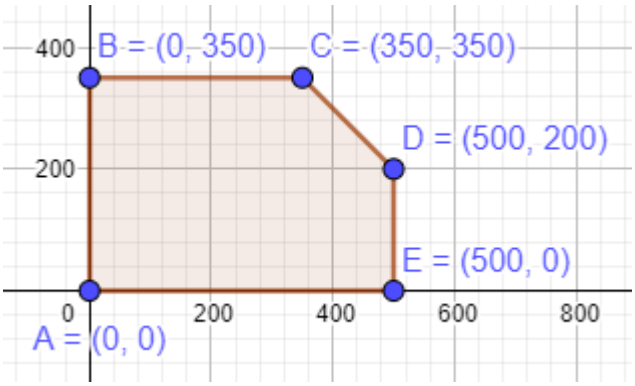
La funzione obiettivo è $z(x, y) = 1000 + 2x + 1{,}5y$, soggetta ai vincoli $\begin{cases} 1000 \le x \le 1500 \\ 1000 \le y \le 1500 \\ 2000 \le x + y \le 2500 \end{cases}$, il poligono delle soluzioni è il seguente:



abbiamo: $z(1000, 1000) = 4500$, $z(1000, 1500) = 5250$, $z(1500, 1000) = 5500$, pertanto il minimo costo si ottiene producendone 1000 di ciascun tipo

43. Un'azienda ha una spesa fissa di € 300,00 per produrre un certo bene A e un fisso di € 250,00 per produrre B, inoltre ogni unità del bene A costa € 6,00, ogni unità di B costa € 4,00. Sappiamo che il prezzo di vendita unitario è rispettivamente di € 8,00 e € 5,50; il mercato non assorbe più di 500 pezzi di tipo A e 350 di tipo B; non possono prodursi più di 700 pezzi complessivi per volta, determinare quanti pezzi di ciascun tipo devono prodursi per ottenere il massimo guadagno, nell'ipotesi che il mercato assorbe tutto il prodotto.

La funzione obiettivo è $z(a, b) = (8 - 6)a - 300 + (5{,}5 - 4)b - 250 = 2a + 1{,}5b - 550$, soggetta ai vincoli

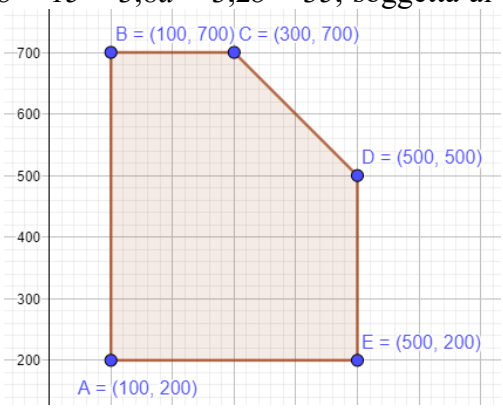


$\begin{cases} 0 \le a \le 500 \\ 0 \le b \le 350 \\ 0 \le a+b \le 700 \end{cases}$, il poligono delle soluzioni è il seguente:

abbiamo: $z(0, 0) = -550$, $z(0, 350) = -25$, $z(350, 350) = 675$, $z(500, 200) = 750$ e $z(500, 0) = 450$, pertanto il massimo profitto si ottiene producendo 500 A e 200 B

44. Un'azienda produce due beni A e B, per un numero totale complessivo non superiore a 1000, Devono prodursi almeno 100 e non più di 500 pezzi di tipo A, almeno 200 e non più di 700 di tipo B. Per distribuire i prodotti si spendono € 20,00 di fisso più € 0,20 per ciascun pezzo di tipo A e un fisso di € 15,00 aumentato di € 0,30 al pezzo per il prodotto B. La vendita di un pezzo A frutta € 4,00, di uno di tipo B € 3,50. Determinare il numero di pezzi da produrre, per tipo, per massimizzare il guadagno.

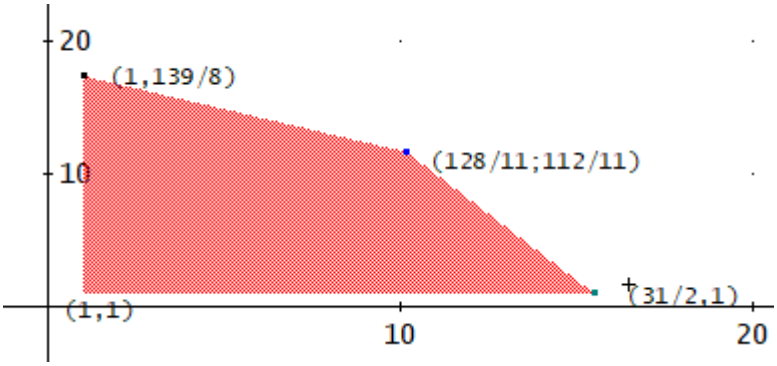
La funzione obiettivo è $z(a, b) = (4 - 0{,}2)a - 20 + (3{,}5 - 0{,}3)b - 15 = 3{,}8a + 3{,}2b - 35$, soggetta ai vincoli



$\begin{cases} 100 \le a \le 500 \\ 200 \le b \le 700 \\ 300 \le a+b \le 1000 \end{cases}$, il poligono delle soluzioni è il seguente: abbiamo: $z(100, 200) = 985$, $z(100, 700) = 2585$, $z(300, 700) = 3345$, $z(500, 500) = 3465$, e $z(500, 200) = 2505$, pertanto il massimo profitto si ottiene comprandone 500 di ogni tipo

45. Un'azienda produce i beni A e B, servendosi di due macchinari, C e D. Per produrre ogni unità di A bisognano 25 minuti di lavoro di C e 30 minuti di D; per produrre un'unità del bene B sono necessari 40 minuti di lavoro di C e 15 minuti di D. Le macchine C e D lavorano rispettivamente 12 e 8 ore al giorno. Sapendo che un'unità di prodotto A frutta un guadagno di € 1500,00 e una di tipo B € 2800,00 stabilire quanti beni di ciascun tipo devono esser prodotti per avere il massimo guadagno giornaliero, tenuto conto che devono prodursi beni di ciascun tipo.

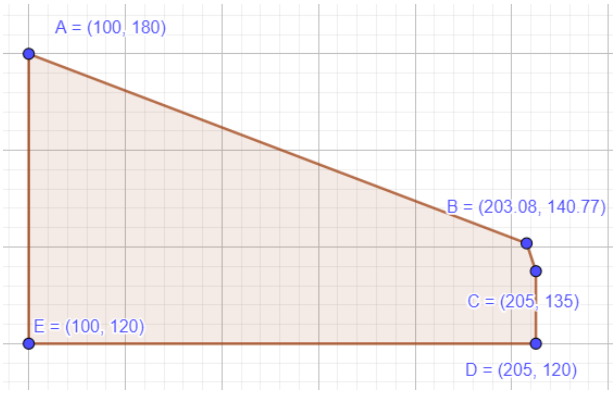
Indichiamo con n e m rispettivamente il numero di beni A e B prodotti giornalmente, quindi usiamo la macchina C per $25n + 40m$ minuti e la macchina D per $30n + 15m$ minuti. Quindi la funzione obiettivo è $z(n, m) = 1500n + 2800m$, soggetta ai vincoli $\begin{cases} 0 \le 25n + 40m \le 720 \\ 0 \le 30n + 15m \le 480 \\ n \ge 1, m \ge 1 \end{cases}$, il poligono delle soluzioni è il seguente:



I valori indicati, a parte (1; 1) non sono accettabili perché non interi, quindi consideriamo i valori interi a essi più vicini ma all'interno del poligono. $z(1, 1) = 4300$, dato che $139/8 \approx 17{,}4$: $z(1, 17) = 49100$; dato che $128/11 \approx 11$ e $112/11 \approx 10$: $z(11, 10) = 44500$, $z(10, 11) = 45800$; dato che $31/2 = 15{,}5$: $z(15, 1) = 25300$. Pertanto il massimo profitto si avrà producendo 1 unità A e 17 B

46. Un'azienda produce due beni, A e B, utilizzando due materie prime, C e D. Sappiamo che per produrre un'unità di A necessitano 3 unità di C e 2 di D; per produrre un'unità di B abbisognano 1 unità di C e 5 unità di D; per questioni economiche non è conveniente produrre meno di 100 unità A e 120 unità B; il mercato è in grado di assorbire un massimo di 205 unità A e 180 unità B; le disponibilità di C e D sono di 750 e 1110 unità rispettivamente. Nell'ipotesi in cui tutto il prodotto sia venduto e che il guadagno unitario sia di € 310,00 per A e di € 275,00 per B, si determinino le quantità ottimali di prodotti dei due beni in modo da assicurare il massimo guadagno.

Indichiamo con n e m rispettivamente il numero di beni A e B prodotti giornalmente, quindi usiamo $3n + m$ C e $2n + 5m$ D. Quindi la funzione obiettivo è $z(n, m) = 310n + 275m$, soggetta ai vincoli $\begin{cases} 100 \le n \le 205 \\ 120 \le m \le 180 \\ 1 \le 3n + m \le 750 \\ 1 \le 2n + 5m \le 1110 \end{cases}$, il poligono delle soluzioni è il seguente:

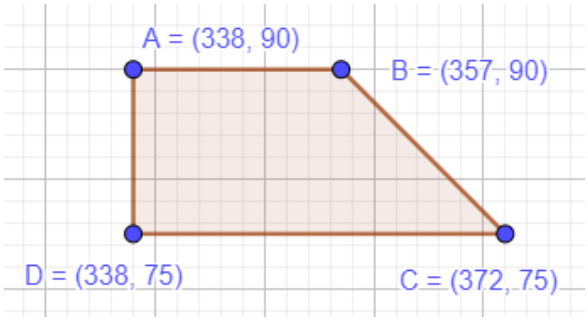


Abbiamo: $z4(100,180) =$ € 83300, $z4(203,140) =$ € 99225, $z4(205,135) =$ € 98225, $z4(205,120) =$ € 93575, $z4(100,120) =$ € 64700; pertanto il massimo profitto di € 99225, si ottiene producendo 203 unità A e 140 unità B

47. Un maschio di 16 – 19 anni ha un fabbisogno energetico giornaliero medio di 2980 calorie. Il 55% – 66% di tali calorie deve essere costituito da glucidi, che si dividono in amidi (pane, pasta, riso, patate) e glucidi semplici (saccarosio, dolciumi, miele). Imponiamo che gli amidi totali forniscano un apporto di calorie compreso tra 1350 e 1650, i glucidi semplici tra 300 e 360, Sapendo che il prezzo medio degli amidi è di € 1,40 al *kg*, quello dei glucidi semplici di € 3,50 al *kg*; ogni grammo di glucidi fornisce 4 calorie; determinare il numero di grammi da consumare per ciascuno dei due tipi di glucidi in modo da minimizzare il costo.

Indichiamo con n e m rispettivamente il numero di grammi di amidi e glucidi semplici. Ci servono da $2980 \cdot 0{,}55 = 1639$ a 1788 calorie da glucidi, perciò una quantità di glucidi compresa tra $1639/4 = 410$ g e $1788/4 = 447$ g; di questi dobbiamo usare da 338g a 413g di amidi e da 75g a 90g di glucidi semplici. Quindi la fun-

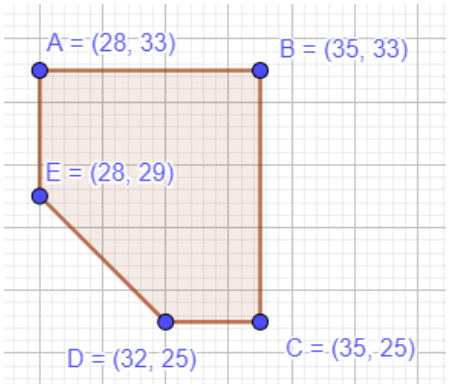
zione obiettivo è $z(n, m) = 0{,}014n + 0{,}035m$, soggetta ai vincoli $\begin{cases} 410 \le n+m \le 447 \\ 338 \le n \le 413 \\ 75 \le m \le 90 \end{cases}$, il poligono delle soluzioni è il seguente:



abbiamo: $z(338, 90) =$ € 0,79; $z(357, 90) =$ € 0,81, $z(372, 75) =$ € 0,78 e $z(338, 75) =$ € 0,74, pertanto il minimo costo, di € 0,74, si ottiene con 338 *g* di amidi e 75 *g* di glucidi semplici

48. Una femmina di 16 – 19 anni ha un fabbisogno energetico giornaliero medio di 2290 calorie. Il 10% – 12% di tali calorie deve essere costituito da protidi, che si dividono in proteine AVB (ad alto valore biologico), presenti in uova, carne, pesce, latte, formaggi e cibi proteici supplementari (cereali, legumi). Vogliamo assicurare un apporto totale di protidi compreso tra 228 e 276 calorie. Imponiamo che le proteine AVB forniscano un apporto di calorie compreso tra 112 e 140, i cibi supplementari tra 100 e 132. Sapendo che il prezzo medio dei cibi contenenti AVB è di € 14,00 al *kg*, quello dei cibi proteici di € 3,00 al *kg*; ogni grammo di protidi fornisce 4 calorie; determinare il numero di grammi da consumare per ciascuno dei due tipi di protidi in modo da minimizzare il costo.

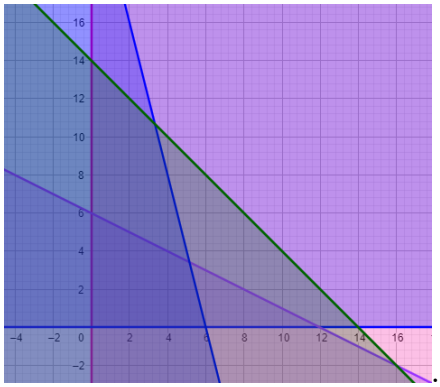
Indichiamo con n e m rispettivamente il numero di grammi di AVB e proteici supplementari. La funzione obiettivo è $z(n, m) = 0{,}014n + 0{,}003m$, soggetta ai vincoli $\begin{cases} 57 \le n+m \le 79 \\ 28 \le n \le 35 \\ 25 \le m \le 33 \end{cases}$, il poligono delle soluzioni è il seguente:

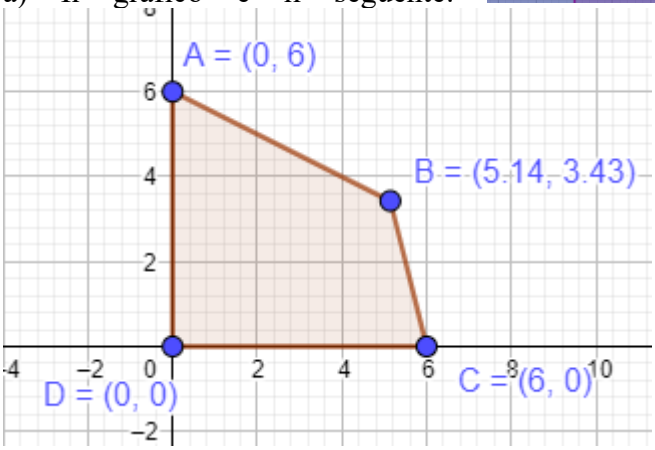


abbiamo: $z(28, 23) =$ € 1,38; $z(35, 33) =$ € 1,48, $z(35,25) =$ € 1,24, $z(32, 25) =$ € 1,20 e $z(28,29) =$ € 1,26. Pertanto il minimo costo si ottiene con 32 *g* di AVB e 25 *g* di proteici supplementari per una spesa di € 1,20

49. (Esami di maturità tecnica commerciale indirizzo: programmatori 1997/98) Il modello matematico di Programmazione Lineare riferito ad una certa azienda che produce gli articoli Alfa e Beta, risulta così strutturato: a) Funzione obiettivo di utile $z = 200000\,x_1 + 100000\,x_2$; b) Vincoli tecnici dipendenti dalla disponibilità di fattori (produzione settimanale) $\begin{cases} 28x_1 + 7x_2 \le 168 \\ 3x_1 + 3x_2 \le 42 \\ 7x_1 + 14x_2 \le 84 \end{cases}$ c) Vincoli economici $\begin{cases} x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$. Il candidato a) costruisca il grafico che evidenzi il campo di scelta di tutte le possibili soluzioni del problema. b) Calcoli il valore di *z* (utile) in corrispondenza dei vertici del poligono di scelta e determini la soluzione che renda massima la funzione obiettivo. Considerando poi che gli articoli Alfa e Beta non possono essere frazionati, il candidato ricerchi la soluzione

ottima a coordinate intere.

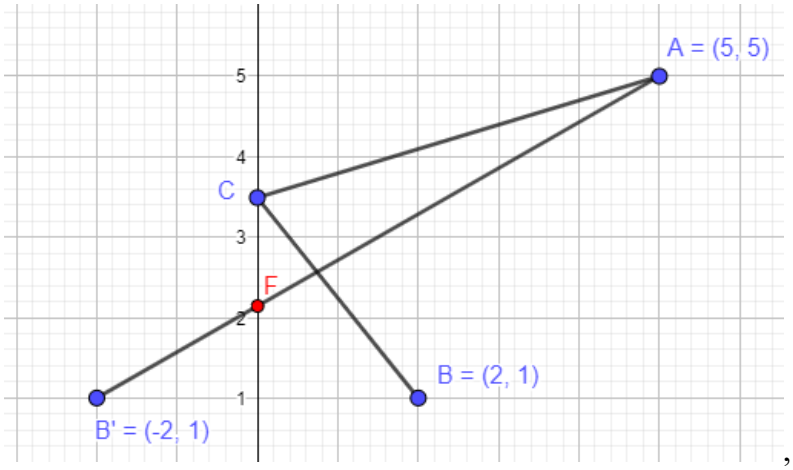
a) Il grafico è il seguente:  . b) il poligono di scelta è:



b) $z(0;\ 0) = 0$, $z\ (0;\ 6) = 600000$, $z\ (36/7;\ 24/7) = 9600000/7$, $z(6;\ 0) = 1200000$; $z(5;\ 3) = 1300000$

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

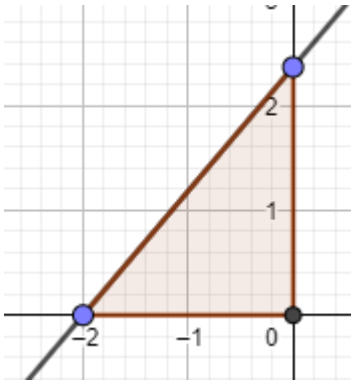
1. (AHSME 1953) Siano $A \equiv (5;\ 5)$, $B \equiv (2;\ 1)$, $C \equiv (0;\ k)$. Quanto vale k affinché $\overline{AC} + \overline{BC}$ sia il minimo possibile?

Consideriamo la figura 

, diciamo che la posizione minima di C è F, ossia l'intersezione del segmento AB' (con B' simmetrico di B rispetto a y) con l'asse y. Infatti $\overline{AF} + \overline{BF} = \overline{AF} + \overline{B'F}$. Quindi

$$\overrightarrow{AB'}: \frac{x+2}{5+2} = \frac{y-1}{5-1} \Rightarrow 4x + 8 = 7y - 7 \Rightarrow 4x - 7y + 15 = 0 \Rightarrow F \equiv \left(\frac{15}{7}; 0\right)$$

2. (AHSME 1964) Una retta passante per $(-a,\ 0)$, determina nel secondo quadrante un triangolo di area T. Qual è l'equazione della retta, in termini di a e T?

Ecco un esempio grafico: 

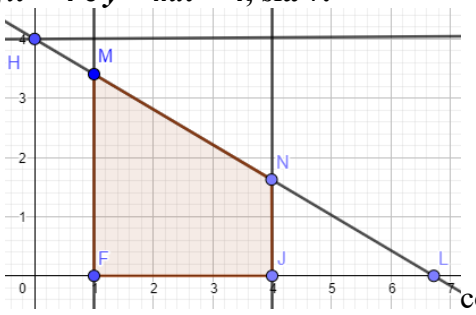
, l'area del triangolo misura $T = ½\, bh$, in cui $b = a$ ed $h = 2T/a$, quindi la retta è quella che passa per $(–a, 0)$ e per $(0; 2T/a)$ e quindi la sua equazione è $\frac{x}{-a}+\frac{y}{2T/a}=1 \Rightarrow 2Tx-a^2y+2aT=0$

3. (AHSME 1966) Determinare tutti i valori reali di *m* in modo che le rette di equazioni 13*x* + 11*y* = 700 e *y* = *mx* – 1 abbiamo in comune un punto a coordinate entrambe intere.

Si ha: $13x + 11mx – 11 = 700 \Rightarrow x=\frac{711}{13+11m}$, che deve essere un valore intero, pertanto $13 + 11m = 711$.

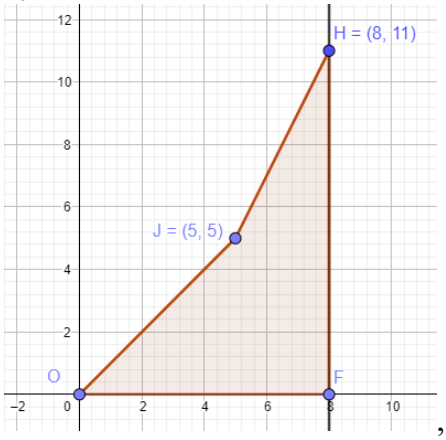
Dato che $711 = 9 \cdot 79 \Rightarrow 11m + 13 = 1 \vee 11m + 13 = 711 \vee 11m + 13 = 9 \vee 11m + 13 = 79 \Rightarrow m = –12/11 \vee m = 698/11 \vee m = –4/11 \vee m = 6$, solo quest'ultimo è accettabile.

4. (AHSME 1967) Determinare il valore di *m* in modo che l'area della regione di piano delimitata dall'asse *x* e dalle rette di equazioni *x* = 1, *x* = 4 e *y* = *mx* + 4, sia 7.

La regione di piano è il trapezio *FMNJ* in figura, 

con $F \equiv (1; 0)$, $M \equiv (1; m + 4)$, $N \equiv (4; 4m + 4)$, $J \equiv (4; 0)$. La sua area è $\frac{m+4+4m+4}{2}\cdot 3=\frac{15m+24}{2}$, deve perciò essere $15m + 24 = 14 \Rightarrow 15m = –10 \Rightarrow m = –2/3$

5. (AHSME 1969) Determinare l'area della regione di piano delimitata dalla retta di equazione *x* = 8 e dalla curva $y=\begin{cases} x & 0\le x\le 5 \\ 2x-5 & 5\le x\le 8 \end{cases}$.

L'area è quella in figura 

, che determiniamo come somma delle aree dei triangoli *OJF* e *JHF* e quindi vale: $½ \cdot 8 \cdot 5 + ½ \cdot 11 \cdot 3 = 73/2 = 36{,}5$

6. (AHSME 1974) *P* ≡ (*a*, *b*) e *Q* ≡ (*c*, *d*) sono due punti della retta di equazione *y* = *mx* + *k*, determinare *PQ* in termini di *a*, *c* e *m*.

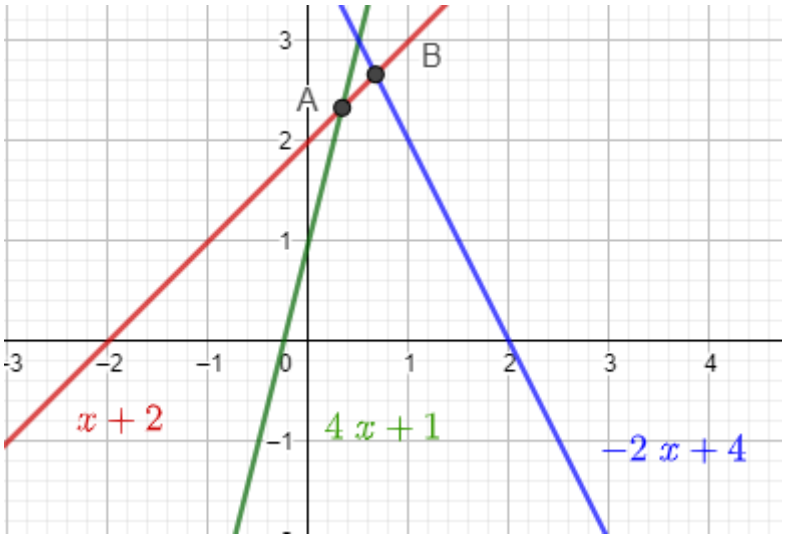
Abbiamo: $P \equiv (a, ma + k)$ e $Q \equiv (c, mc + k)$ e

$$\overline{PQ}=\sqrt{(c-a)^2+(mc+k-ma-k)^2}=\sqrt{(c-a)^2+(mc-ma)^2}=\sqrt{(c-a)^2+m^2(c-a)^2}=|c-a|\sqrt{1+m^2}$$

7. (AHSME 1978) Dato $S=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2:\frac{1}{2}a\le x\le 2a\wedge\frac{1}{2}a\le y\le 2a\wedge x+y\ge a\wedge x+a\ge y\wedge y+a\ge x\right\}$**, rappresentarlo, stabilendo che tipo di figura geometrica rappresenta il suo contorno al variare del parametro reale *a*.**

Poniamo a = 1 e rappresentiamo: otteniamo un esagono con i lati a due a due paralleli; non è difficile capire che ciò accadrà per ogni *a* reale positivo

8. (AHSME 1980) Consideriamo $f(x)=\min_{x\in R}\{4x+1,\ x+2,\ -2x+4\}$, determinare il valore massimo di $f(x)$.

Rappresentiamo le tre rette: 

possiamo dire che

$f(x)=\begin{cases}4x+1 & x<x_A\\ x+2 & x_A\le x\le x_B\\ -2x+4 & x>x_B\end{cases}$, pertanto il massimo è $f(x_B)$, con x_B soluzione dell'equazione $x+2=-2x+4$

$\Rightarrow 3x=2\Rightarrow x=2/3$, perciò la risposta è $f(2/3)=2/3+2=8/3$

9. (AHSME 1986) Costruiamo dei triangoli rettangoli i cui cateti sono paralleli agli assi coordinati e le mediane relative a tali cateti appartengano alle rette di equazioni $y=3x+1$ e $y=mx+2$. Per quanti valori di *m* possiamo fare ciò?

I vertici dei triangoli hanno coordinate $(a;b)$, $(a;c)$, $(d;b)$, con $(a;b)$ vertice dell'angolo retto; i punti medi dei cateti hanno coordinate: $\left(a;\frac{b+c}{2}\right),\left(\frac{a+d}{2};b\right)$, quindi le mediane hanno coefficienti angolari:

$$m_1=\frac{\frac{b+c}{2}-b}{a-d}=\frac{b-c}{2(d-a)};m_2=\frac{b-c}{\frac{a+d}{2}-a}=\frac{2(b-c)}{d-a}$$

Deve perciò essere $\begin{cases}\frac{b-c}{2(d-a)}=3\\ \frac{2(b-c)}{d-a}=m\end{cases}\vee\begin{cases}\frac{b-c}{2(d-a)}=m\\ \frac{2(b-c)}{d-a}=2\end{cases}\Rightarrow\frac{b-c}{d-a}=6\vee\frac{b-c}{d-a}=1\Rightarrow m=12\vee m=\frac{1}{2}$, perciò vi so-

no 2 valori ammissibili.

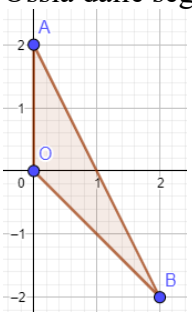
10. (OMI 1991) Determinare l'area della regione piana costituita dai punti (x, y) che verificano la disuguaglianza: $|x| + |x + y| \le 2$.

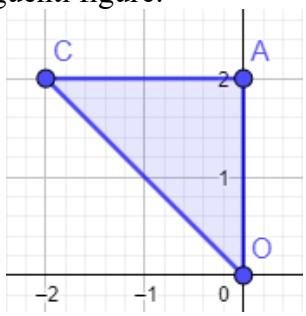
La disuguaglianza equivale all'unione delle seguenti regioni:

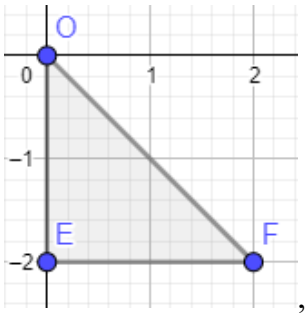
$$\begin{cases} x+x+y\le 2 \\ x\ge 0 \\ x+y\ge 0 \end{cases},\begin{cases} -x+x+y\le 2 \\ x<0 \\ x+y\ge 0 \end{cases},\begin{cases} x-x-y\le 2 \\ x\ge 0 \\ x+y<0 \end{cases},\begin{cases} -x-x-y\le 2 \\ x<0 \\ x+y<0 \end{cases}\Rightarrow$$

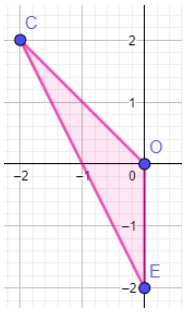
$$\Rightarrow\begin{cases} 2x+y\le 2 \\ x\ge 0 \\ x+y\ge 0 \end{cases},\begin{cases} y\le 2 \\ x<0 \\ x+y\ge 0 \end{cases},\begin{cases} y\ge -2 \\ x\ge 0 \\ x+y<0 \end{cases},\begin{cases} 2x+y\ge -2 \\ x<0 \\ x+y<0 \end{cases}$$

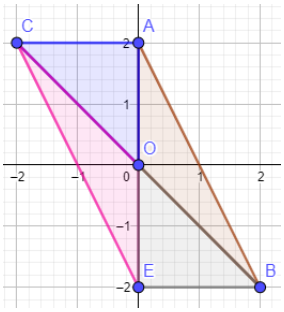
Ossia dalle seguenti figure:





,


,


e quindi: 

che è un parallelogramma di area $4 \cdot 2 = 8$

11. (AHSME 1994) Determinare tutte le rette del fascio di centro $P \equiv (4; 3)$, che incontrano l'asse x in un punto la cui ascissa è un numero primo e l'asse y in un punto la cui ordinata è un numero naturale.

Il fascio ha equazione $y - 3 = m(x - 4)$ ed incontra x in $X \equiv \left(\frac{4m-3}{m};0\right) \equiv \left(4-\frac{3}{m};0\right)$ e y in $Y \equiv (0; 3 - 4m)$.

Deve essere $3 - 4m > 0 \Rightarrow m < ¾$ con m numero intero negativo. L'ascissa di X sarà intera solo se $m = -1$ oppure $m = -3$, quindi avremo: $y - 3 = -(x - 4)$ e $y - 3 = -3(x - 4) \Rightarrow x + y = 7$ e $3x + y - 15 = 0$

12. (AHSME 1995) L'area del triangolo delimitato dalle rette $y = x$, $y = -x$ e $y = 6$ è

A) 12 B) $12\cdot\sqrt{2}$ C) 24 D) $24\cdot\sqrt{2}$ E) 36

Le rette si incontrano nei punti (0; 0), (6; 6), (6; –6) quindi la sua area misura $\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 6 & 6 & 1 \\ -6 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot|36+36| = 36$, che è la risposta E

13. (AHSME 1997) Se m e b sono numeri reali e $m \cdot b > 0$, allora la retta di equazione $y = mx + b$ non può contenere il punto A) (0; 1997) B) (0;–1997) C) (19; 97) D) (19;–97) E) (1997; 0)

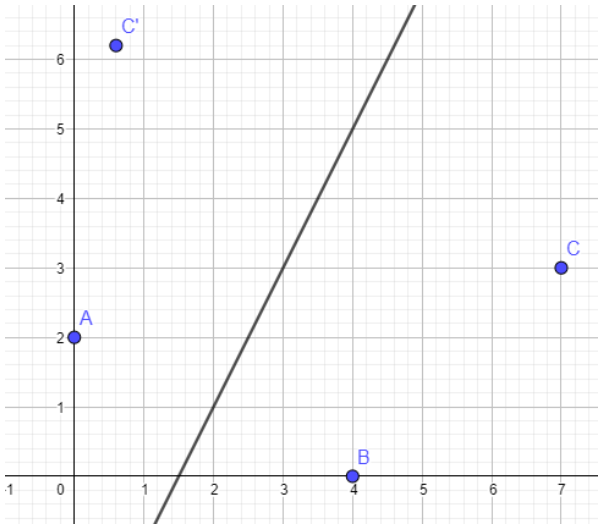
Avremo: A) $1997 = b$, b) $1997 = -b$, c) $97 = 19m + b$, d) $-97 = 19m + b$, E) $0 = 1997m + b$. Solo quest'ultima equazione non ha soluzioni per m e b dello stesso segno. Quindi la risposta è E. Anche se la B) ci dice che è $b < 0$ può essere benissimo $m < 0$.

14. (AHSME 1997) La Mientka Publishing Company stabilisce il prezzo del suo bestseller *Where's*

***Walter*?, con la seguente legge:** $C(n)=\begin{cases}12n & \text{se } 1\le n\le 24\\ 11n & \text{se } 25\le n\le 48\\ 10n & \text{se } n\ge 49\end{cases}$**, in cui *n* è il numero di libri ordinati e *C*(*n*) è il costo in dollari di *n* libri.. Si osservi che 25 libri costano meno di 24. Per quanti valori di *n* è più economico comprare più di *n* libri piuttosto che comprarne *n*?**

Risolviamo le disequazioni: $11n < 12\cdot 24$ e $n \ge 25 \Rightarrow 25 \le n \le 26$, ossia per $n = 25$ e 26; $10n < 11 \cdot 48$ e $n \ge 49 \Rightarrow 49 \le n \le 52$, ossia altri 4 valori, per un totale di 6

15. (AHSME 1998) Un pezzo di carta su cui è stabilito un sistema di riferimento cartesiano ortogonale è piegato in modo che il punto (0; 2) si sovrapponga al punto (4; 0), e il punto (7; 3) al punto (*m*; *n*). Trovare *m* + *n*.

Consideriamo la figura: 

Se A va a finire in B, allora C va in C' che è il suo simmetrico rispetto all'asse del segmento AB. Tale retta ha equazione: $x^2 + (y - 2)^2 = (x - 4)^2 + y^2 \Rightarrow 2x - y - 3 = 0$. Troviamo C', facendo in modo che appartenga alla perpendicolare all'asse condotta da C, ossia alla retta $x - 7 + 2(y - 3) = 0 \Rightarrow x + 2y - 13 = 0$, perciò sarà $m + 2n - 13 = 0$, d'altro canto il punto medio di CC' deve appartenere all'asse e questo punto medio ha coordinate $\left(\frac{7+m}{2};\frac{3+n}{2}\right)$. Quindi

$$\begin{cases}m+2n-13=0\\ 2\cdot\frac{7+m}{2}-\frac{3+n}{2}-3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m+2n-13=0\\ 14+2m-3-n-6=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m+2n-13=0\\ 2m-n+5=0\end{cases}\Rightarrow$$

deve aversi:

$$\Rightarrow\begin{cases}m+4m+10-13=0\\ n=2m+5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=\frac{3}{5}\\ n=\frac{31}{5}\end{cases}\Rightarrow m+n=\frac{34}{5}=6{,}8$$

16. (AHSME 1999) I grafici delle funzioni $y = -|x - a| + b$ e $y = |x - c| + d$ si incontrano nei punti (2; 5) e (8; 3). Determinare *a* + *c*.

Si ha: $5 = -|2 - a| + b$, $5 = |2 - c| + d$, $3 = -|8 - a| + b$ e $3 = |8 - c| + d \Rightarrow -|2 - a| + b = |2 - c| + d$, $-|8 - a| + b = |8 - c| + d \Rightarrow -|2 - a| + b + |8 - a| - b = |2 - c| + d - |8 - c| - d \Rightarrow |8 - a| - |2 - a| = |2 - c| - |8 - c|$. Questa espressione è una contraddizione o un'identità se $a \le 2 \vee a \ge 8$ e se $c \le 2 \vee c \ge 8$. Quindi dobbiamo considerare solo il caso seguente: $\begin{cases}8-a+2-a=-2+c-8+c\\ 2<a<8, 2<c<8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2a+10=2c-10\\ 2<a<8, 2<c<8\end{cases}\Rightarrow a+c=10$

17. (HSMC 2003) Per ogni numero *c*, indichiamo con *Lc* la retta di pendenza 4*c* che contiene il punto (*c*; 0). Determinare tutti i punti (*x*; *y*) che non appartengono a *Lc* per ogni *c*. Scrivere la risposta come disuguaglianza in *x* e *y*.

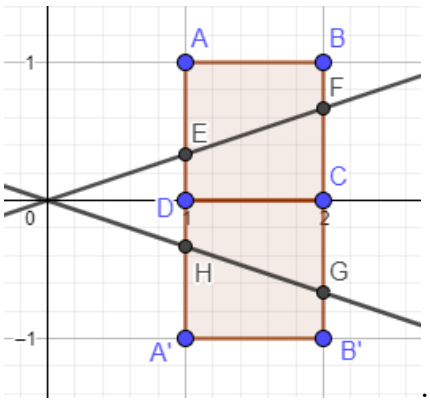
La retta L_c ha equazione $y = 4cx - 4c^2$, come facilmente si vede ($0 = 4c^2 - 4c^2$) quindi i punti che non stanno su questa retta non sono soluzioni dell'equazione $4c^2 - 4cx + y = 0$, per ogni c quindi vuol dire che deve aversi $\Delta/4 < 0 \Rightarrow 4x^2 - 4y < 0 \Rightarrow x^2 < y$.

Questions in english

18. (MT1994) Find the area of the triangle determined by *x*–axis, *y*–axis, and the line *y* = – 2*x* + 10.
Trovare l'area del triangolo determinato dagli assi coordinati e dalla retta $y = -2x + 10$.

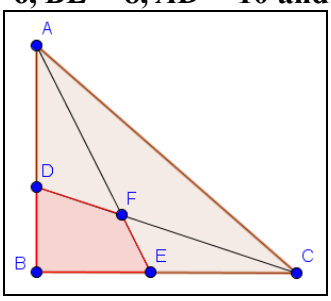
Determiniamo le intersezioni della retta con gli assi, scrivendola in forma segmentaria: $\frac{x}{5}+\frac{y}{10}=1 \Rightarrow$ $X \equiv (5; 0)$, $Y \equiv (0; 10)$, pertanto l'area misura $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10 = 25$

19. (MT1996) *ABCD* is a unit square with *D* ≡ (1; 0) and *C* ≡ (2; 0). Find the equation of the line through the origin that bisects the area of the square.
ABCD è un quadrato di lato 1 con $D \equiv (1; 0)$ e $C \equiv (2; 0)$. Trovare l'equazione della retta che passa per l'origine e biseca l'area del quadrato.



Ci sono due possibili quadrati, mostrati in figura, . La generica retta per l'origine, $y = mx$, incontra il quadrato *ABCD* nei punti $(1; m)$ e $(2; 2m)$, con $0 < m < 1$, dividendo il quadrato il due trapezi rettangoli la cui area deve essere ½. Si ha perciò: $\frac{m+2m}{2}\cdot 1=\frac{1}{2} \Rightarrow 3m=1 \Rightarrow m=1/3 \Rightarrow y=\frac{x}{3}$. Con ragionamento analogo per il quadrilatero *A'B'CD*, si trova $y = -x/3$

20. (MT1996) Given that *AB* ⊥ *BC*, *BD* = 6, *BE* = 8, *AD* = 10 and *CE* = 10, find the area of quadrilateral *DBEF*.



Sapendo che $AB \perp BC$, $BD = 6$, $BE = 8$, $AD = 10$ e $CE = 10$, trovare l'area del quadrilatero *DBEF*. Mettiamo tutto in un riferimento cartesiano ortogonale in cui $B \equiv O$, *AB* giace su *y* e *BC* su *x*, In questo modo avremo: $D \equiv (0; 6)$, $E \equiv (8; 0)$, $A \equiv (0; 16)$ e $C \equiv (18; 0)$, troviamo le coordinate di *F*:

$$\begin{cases}\frac{x}{18}+\frac{y}{6}=1\\ \frac{x}{8}+\frac{y}{16}=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=18-3y\\ x=\frac{16-y}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=18-3y\\ 18-3y=\frac{16-y}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=18-3y\\ 5y=20\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=6\\ y=4\end{cases} \Rightarrow F\equiv(6;4)$$

Quindi l'area cercata misura: $\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}0&0&1\\6&4&1\\0&6&1\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}0&0&1\\6&4&1\\8&0&1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot(36+32)=34$

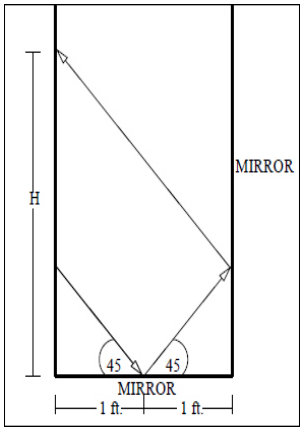
21. (MT1997) In the region –1 < *x* < 1/2, the graph of the function *y* = |*x* + 1| + |2*x* – 1| coincides with the graph of the function *y* = *ax* + *b*. Find *a* and *b*.
Nella regione $-1 < x < 1/2$, il grafo della funzione $y = |x + 1| + |2x - 1|$ coincide con il grafo della fun-

zione $y = ax + b$. Determinare a e b.

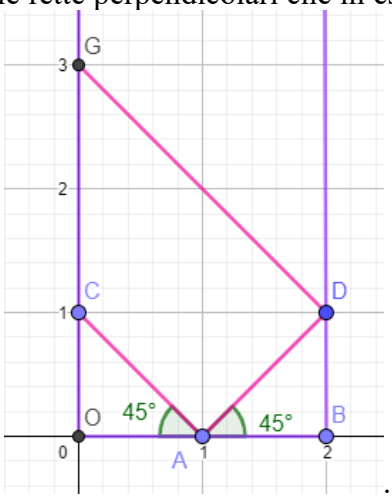
Per $-1 < x < 1/2$ abbiamo: $y = x + 1 - 2x + 1 \Rightarrow = y = -x + 2 \Rightarrow a = 1, b = 2$

22. (HSMC 1999) A beam of light reflects from the mirrors as shown. Find the quantità *H* in the figure[1]. (Hint: choose a system of coordinates and consider the beams of light as lines)

Un fascio di luce è riflesso dagli specchi come mostrato in figura. Trovare la quantità H in figura. (Suggerimento: scegli un sistema di coordinate e considera i fasci di luce come rette



Poniamo l'origine nel vertice in basso a sinistra e gli assi nelle rette perpendicolari che in esso si incontrano, l'unità di misura è 1 ft, pertanto avremo la nuova figura



. Geogebra ci ha fornito la risposta, ma noi preferiamo determinarla per via analitica, anche perché potrebbe non essere precisa al 100%. Le posizioni di C e D sono corrette, la retta per DG è perpendicolare a quella per AD. Poiché il coefficiente angolare di quest'ultima è 1, la retta per DG ha equazione $y - 1 = -(x - 2) \Rightarrow y = -x + 3$, pertanto la sua intersezione G, con l'asse y, ha effettivamente ordinata: $y = 3$ft

23. (HSMC 2000) Quadrilateral W*XYZ* is located in the *xy* plane with the points located at the following coordinates: $W \equiv (3; 8)$, $X \equiv (8; 9)$, $Y \equiv (7; 4)$, $Z \equiv (2; 3)$. Show that the diagonals are perpendicular.

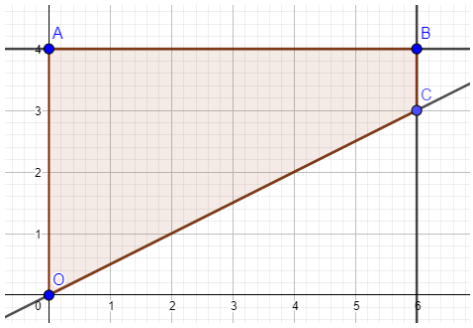
Il quadrilatero W*XYZ* è posto sul piano xy con i vertici che hanno le seguenti coordinate: $W \equiv (3; 8)$, $X \equiv (8; 9)$, $Y \equiv (7; 4)$, $Z \equiv (2; 3)$. Provare che le diagonali sono perpendicolari

Le diagonali appartengono a rette i cui coefficienti angolari sono: $m_{WY} = \frac{8-4}{3-7} = -1, m_{XZ} = \frac{9-3}{8-2} = 1$, che effettivamente sono quelli di due rette fra loro perpendicolari.

24. (HSMC 2001) Find the area of the trapezoid bounded by the graphs of the equations $x = 6$; $y = 4$; $y = x/2$ and the *y*–axis.

Trovare l'area del trapezio delimitato dai grafici delle equazioni $x = 6$; $y = 4$; $y = x/2$ e dall'asse y.

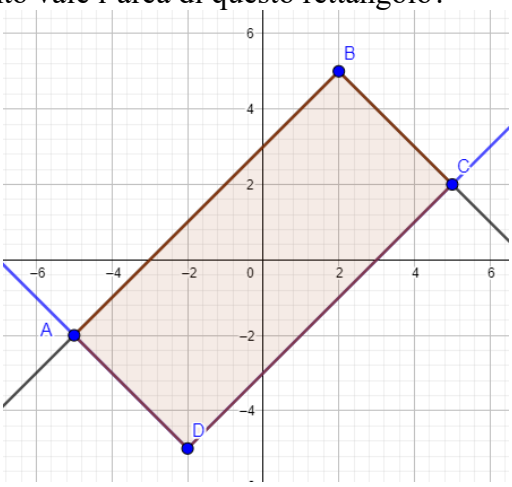
[1] Ft è l'abbreviazione di *feet* (piedi), un'unità di misura di lunghezza di circa 31 cm.

Il trapezio è quello in figura: 

, la cui area misura: $\frac{4+1}{2}\cdot 6=15$, facilmente si trova l'ordinata di C ($y = 6/2 = 3$).

25. (HSMC 2002) The graphs of the equations $y = 5 - |x - 2|$ and $y = |x + 2| - 5$ enclose a rectangular region in the coordinate plane. What is the area of this rectangle?

I grafici delle equazioni $y = 5 - |x - 2|$ e $y = |x + 2| - 5$ racchiudono una regione rettangolare nel piano coordinato. Quanto vale l'area di questo rettangolo?

Ecco la figura: 

Le coordinate dei vertici si trovano come soluzioni dei sistemi:

$$\begin{cases} y=x+3 \\ y=-x-7 \end{cases} \Rightarrow A\equiv(-5;-2);\begin{cases} y=x+3 \\ y=-x+7 \end{cases} \Rightarrow B\equiv(2;5);\begin{cases} y=x-3 \\ y=-x+7 \end{cases} \Rightarrow C\equiv(5;2);\begin{cases} y=x-3 \\ y=-x-7 \end{cases} \Rightarrow D\equiv(-2;-5)$$

Pertanto l'area cercata misura: $\sqrt{(-5-2)^2+(-2-5)^2}\cdot\sqrt{(2-5)^2+(5-2)^2}=7\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}=42$

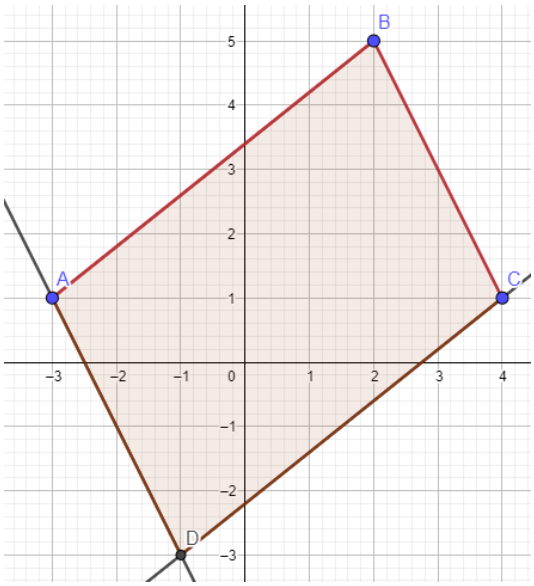
26. (HSMC 2003) Consider a linear function $f(x) = mx + b$. Let $f(1) = 2$ and $f(3) = -5$. What is the change in the value of the function if the change in x is -4?

Considera una funzione lineare $f(x) = mx + b$. Siano $f(1) = 2$ e $f(3) = -5$. Come varia il valore della funzione se cambiamo x in $x - 4$?

Troviamo m e b: $\begin{cases} 2=m+b \\ -5=3m+b \end{cases}$ $-7=-2m \Rightarrow \begin{cases} m=\frac{7}{2} \\ b=-\frac{3}{2} \end{cases}$, pertanto $f(x) = 7/2x - 3/2$ e $f(x - 4) = 7/2(x - 4) - 3/2 = 7/2x - 31/2$ e $f(x - 4) - f(x) = 7/2x - 31/2 - 7/2x + 3/2 = -14$

27. (HSMC 2003) Three vertices of a parallelogram have coordinates (−3; 1); (2; 5) and (4; 1). The remaining vertex lies in the third quadrant. Find the sum of the coordinates of the remaining vertex.

Tre vertici di un parallelogramma hanno coordinate (−3; 1); (2; 5) and (4; 1). Il rimanente vertice giace nel terzo quadrante. Determina la somma delle coordinate del rimanente vertice.

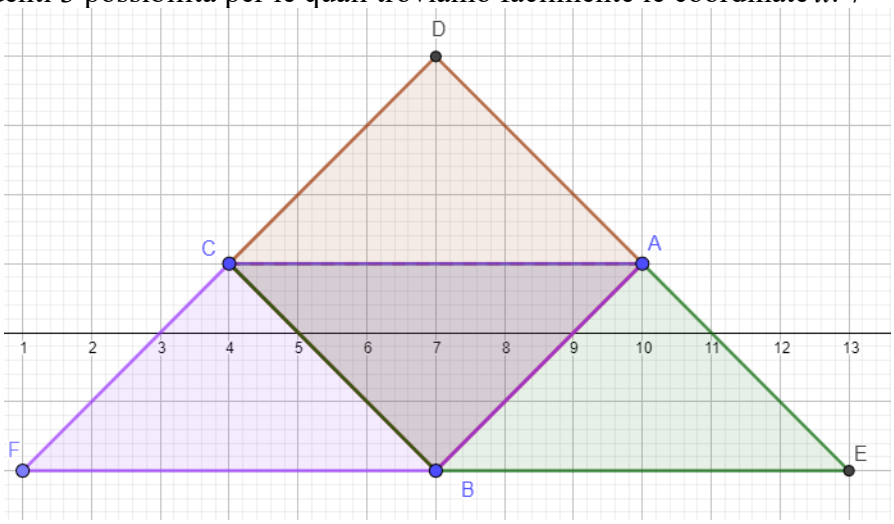
Ecco la figura, 

usando il fatto che le diagonali si incontrano nei loro punti medi otteniamo: $x + 2 = 4 - 3$ e $y + 5 = 2$, quindi $x = -1$ e $y = -3$, perciò $x + y = -4$

28. (HSMC 2004) The coordinates of the vertices of a parallelogram are (10; 1); (7;−2); (4; 1) and (*x*; *y*). What is the sum of the distinct possible values for *x*?

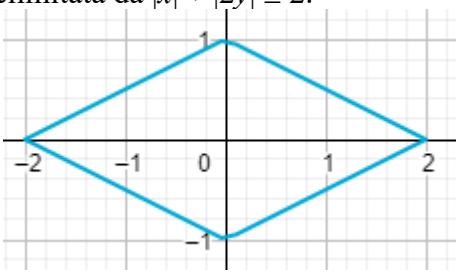
Le coordinate dei vertici di un parallelogramma sono (10; 1); (7;−2); (4; 1) e (x; y). Qual è la somma dei possibili valori distinti di x?

Abbiamo le seguenti 3 possibilità per le quali troviamo facilmente le coordinate x: 7 + 13 + 1 = 21



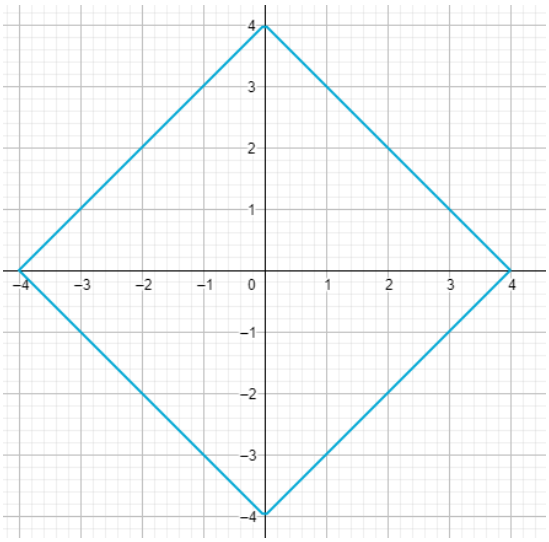
29. (HSMC 2006) Find the area of the region bounded by $|x| + |2y| \leq 2$.

Trovare l'area della regione delimitata da $|x| + |2y| \leq 2$.

L'area è mostrata in figura: 
è quella di un rombo di diagonali lunghe 2 e 4, pertanto l'area misura $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4$

30. (HSMC 2007) Let *T* be the region in the *xy*–plane satisfying $|x| + |y| \leq 4$. Find the area of *T*.

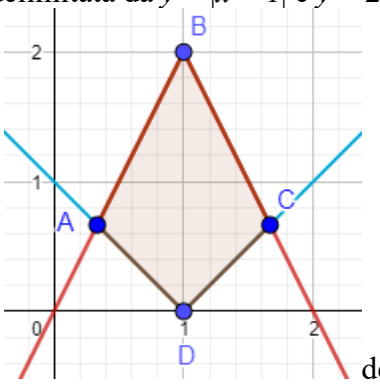
Sia T la regione del piano xy che soddisfa $|x| + |y| \leq 4$. Trovarne l'area.

In figura la regione T: 

, che è un quadrato di lato $4\sqrt{2}$ e quindi di area 32

31. (HSMC 2008) Find the area of the region bounded by $y = |x - 1|$ and $y = 2 - |2x - 2|$.

Trovare l'area della regione delimitata da $y = |x - 1|$ e $y = 2 - |2x - 2|$.

La regione è quella in figura: 

determiniamo le coordinate di A e C:

$$\begin{cases} y = |x-1| \\ y = 2-|2x-2| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = |x-1| \\ |x-1| = 2-2|x-1| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = |x-1| \\ 3|x-1| = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = |x-1| \\ x-1 = \pm 2/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2/3 \\ x = 1/3 \vee x = 5/3 \end{cases} \Rightarrow A \equiv \left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right), C \equiv \left(\frac{5}{3};\frac{2}{3}\right)$$

L'area misura perciò ½ · (5/3 – 1/3) · 2 = 4/3

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. (Accademia militare) Nel piano cartesiano Oxy il grafico della funzione $y = 3x + 1$:
A) interseca l'asse y nel punto di ordinata $y = 1$ **B) interseca l'asse x nel punto di ascissa $x = 1$**
C) passa per l'origine O **D) rappresenta una retta parallela all'asse x**
A è ovviamente corretta, facilmente si prova che le altre opzioni non lo sono

2. (Accademia Navale) L'equazione $x/a + y/b = 1$, con a e b numeri reali non nulli, rappresenta tutte le rette del piano? Giustificare la risposta.
No, mancano le parallele agli assi, dato che per nessun valore dei parametri troviamo $x = h$ o $y = k$

3. (Accademia Navale) Verificare che le equazioni $a(x - 1) + b(y - 1) = 0$ e $c(x - 1) + d(x + y - 2) = 0$ rappresentano lo stesso fascio di rette.
La prima ha centro in (1; 1), il secondo nell'intersezione di $x - 1 = 0$ e $x + y - 2 = 0$, che è sempre (1; 1)

4. (Accademia Navale) Date le rette r: $3x + 4y = 0$ e s: $4x - 3y = 0$ e un P un punto del piano, siano P_r e P_s le sue proiezioni ortogonali sulle due rette rispettivamente, determinare il luogo dei punti P per cui si ha $2 \cdot \overline{OP_r} = \overline{OP_s}$.
Per trovare le proiezioni ortogonali dobbiamo determinare l'intersezione delle rette con le perpendicolari a esse condotte da P:

$$\begin{cases}3x+4y=0\\4(x-x_P)-3(y-y_P)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-4/3y\\4(-4/3y)-4x_P-3y+3y_P=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-4/3y\\-25/3y=4x_P-3y_P\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4/25(4x_P-3y_P)\\y=\dfrac{3}{25}(3y_P-4x_P)\end{cases}$$

$$\begin{cases}4x-3y=0\\3(x-x_P)+4(y-y_P)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3/4y\\3\cdot3/4y-3x_P+4y-4y_P=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3/4y\\25/4y=3x_P+4y_P\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3/25(3x_P+4y_P)\\y=\dfrac{4}{25}(3x_P+4y_P)\end{cases}$$

Quindi: $P_r\equiv\left(\frac{4}{25}(4x_P-3y_P);\frac{3}{25}(3y_P-4x_P)\right),P_s\equiv\left(\frac{3}{25}(3x_P+4y_P);\frac{4}{25}(3x_P+4y_P)\right)$, Pertanto il luogo

$$2\sqrt{\left[\frac{4}{25}(4x-3y)\right]^2+\left[\frac{3}{25}(3y-4x)\right]^2}=\sqrt{\left[\frac{3}{25}(3x+4y)\right]^2+\left[\frac{4}{25}(3x+4y)\right]^2}\Rightarrow$$

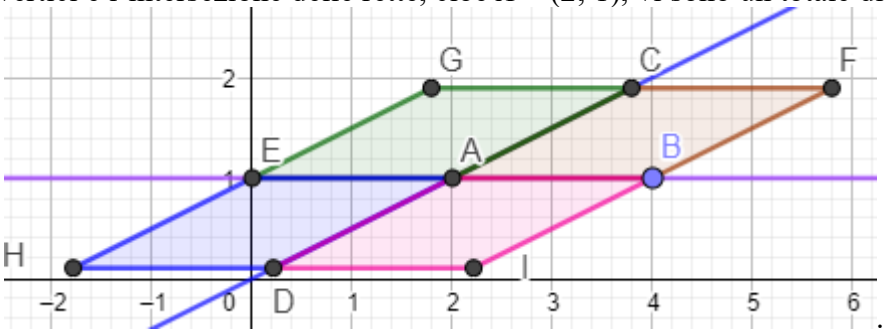
ha equazione: $\Rightarrow 2\sqrt{\left[\frac{4}{25}(4x-3y)\right]^2+\left[-\frac{3}{25}(4x-3y)\right]^2}=\sqrt{\left(\frac{9}{625}+\frac{16}{625}\right)(3x+4y)^2}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\frac{2}{25}|4x-3y|=\frac{1}{25}|3x+4y|\Rightarrow 2(4x-3y)=(3x+4y)\vee 2(3y-4x)=(3x+4y)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x-10y=0\vee 11x-2y=0\Rightarrow x-2y=0\vee 11x-2y=0$$

5. **(Accademia Navale) Date le rette *r*: *y* – 1 = 0 e *s*: *x* – 2*y* = 0, individuare i vertici dei rombi aventi due lati contenuti in *r* e *s* e perimetro 8.**

Il lato misura 2, uno dei vertici è l'intersezione delle rette, cioè $A\equiv(2;1)$, vi sono un totale di 4 rombi, come chiarito in figura,



. Gli altri vertici appartengono alle rette e distano 2 da A, quindi hanno coordinate $B\equiv(4;1)$, $E\equiv(0;1)$ e $C\equiv(2y;\ y)$ con $(2y-2)^2+(y-1)^2=4\Rightarrow 5y^2-10y+1=0$ $y=\frac{5\pm2\sqrt{5}}{5}$, perciò $C\equiv\left(\frac{10+4\sqrt{5}}{5},\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\right),D\equiv\left(\frac{10-4\sqrt{5}}{5},\frac{5-2\sqrt{5}}{5}\right)$. Dei rimanenti vertici, due hanno le stesse ordinate di C e due di D con ascisse rispettivamente 2 in più e due in meno di C e 2 in più e 2 in meno di D, quindi:

$$F\equiv\left(\frac{20+4\sqrt{5}}{5},\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\right),G\equiv\left(\frac{4\sqrt{5}}{5},\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\right),H\equiv\left(\frac{-4\sqrt{5}}{5},\frac{5-2\sqrt{5}}{5}\right),I\equiv\left(\frac{20-4\sqrt{5}}{5},\frac{5-2\sqrt{5}}{5}\right)$$

6. **(Odontoiatria 1998) Una retta inclinata di 45 gradi incontra l'asse delle ordinate nel punto di ordinata 3; l'equazione della retta è:**

A) *y* = 3*x* +1 B) *y* = 45 *x* + 3 C) *y* = *x* D) *y* = *x* – 3 E) *y* = *x* + 3

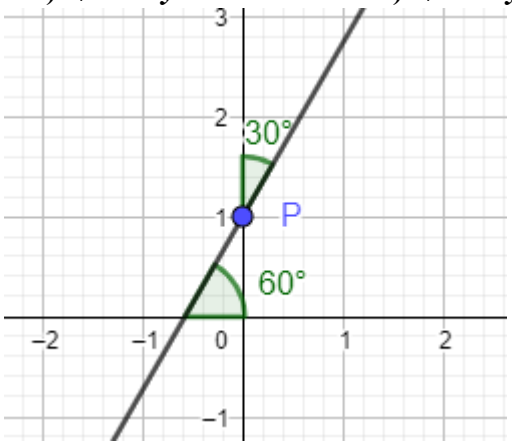
Il coefficiente angolare è 1, l'ordinata all'origine 3, quindi l'equazione è $y = x + 3$, ossia la risposta E

7. **(Medicina 1998) Quale delle seguenti condizioni deve verificarsi affinché la retta *y* = *mx* + *n* non passi per il IV quadrante? A) *m* > 0, *n* > 0 B) *m* < 0, *n* > 0 C) *m* > 0, *n* < 0 D) *m* < 0, *n* < 0 E) *m* > 0, *n* = 0**

La pendenza della retta, ossia m, deve essere positiva, in modo che la retta vada da sinistra a destra. Inoltre non deve incontrare il semiasse negativo delle ordinate, ossia anche $n > 0$, ossia risposta A

8. **(Odontoiatria 2002) Una retta forma con il semiasse positivo delle ordinate un angolo di 30° e passa per il punto *P* ≡ (0; 1). La sua equazione sarà A) $\sqrt{3}/3x-y+1=0$ B) $\sqrt{3}/3x+y+1=0$**

C) $\sqrt{3}x + y + 1 = 0$ **D)** $\sqrt{3}x + y - 1 = 0$ **E)** $\sqrt{3}x - y + 1 = 0$

Come mostrato in figura, 

la retta forma un angolo di 60° con il semiasse positivo delle x, pertanto è $m = \sqrt{3}$, quindi l'equazione è $y - 1 = \sqrt{3}x \Rightarrow \sqrt{3}x - y + 1 = 0$, cioè la risposta E

9. (Ingegneria 2002) Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale *Oxy*, la distanza del punto di coordinate (1; 2) dalla retta di equazione $x + y + 1 = 0$ è A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{2}$ D) 4 E) 2

SI ha: $\frac{|1+2+1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$, cioè C

10. (Ingegneria 2002) In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale *Oxy*, sia *r* la retta $y = \frac{3x+1}{-2}$. Quale delle seguenti equazioni rappresenta una retta parallela ad *r* e passante per (1; 1)?

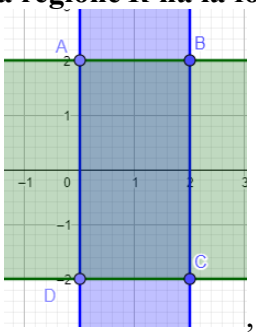
A) $y = 2/3x + 1$ **B)** $y = -3/2x + 1$ **C)** $y = 3/2(x - 1) + 1$ **D)** $y = 1 + 2/3(x - 1)$ **E)** $y = 5/2 - 3x/2$

Il coefficiente angolare deve essere -3/2, quindi le possibili risposte sono B ed E, ma la B non passa per (1; 1), quindi E

11. (Architettura 2002) A quale distanza dall'origine del piano cartesiano si trova il punto in cui la retta di equazione $-x - y = 1$ interseca la retta $1/3x + 2y = 3$? A) $\sqrt{11}$ **B)** $\sqrt{13}$ **C)** $\sqrt{15}$ **D)** $\sqrt{17}$ **E)** $\sqrt{19}$

Il punto è $\begin{cases} -x - y = 1 \\ \frac{x}{3} + 2y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x - y = 1 \\ x + 6y = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases}$, perciò la distanza richiesta è $\sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$, risposta B

12. (Architettura 2002) Si consideri la regione *R* del piano cartesiano costituita da tutti e soli i punti le cui coordinate (*x*; *y*) soddisfano sia la condizione $|x - 1| \le 1$ che la condizione $y^2 \le 4$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta? A) L'area della regione *R* è pari a 4 B) La regione *R* è un quadrato con lato di lunghezza 2 C) La regione *R* ha forma triangolare D) La regione *R* ha un perimetro di lunghezza pari a 12 E) La regione *R* ha la forma di un semidisco

La regione è il rettangolo in figura, 

, la cui area misura 2 · 4 = 8, e il cui perimetro misura 12, ossia risposta D

13. (Veterinaria 2002) L'equazione $ax + 3y = 0$, con *a* numero reale A) rappresenta una retta paralle-

la all'asse delle y se $a \neq 0$ B) rappresenta una retta passante per l'origine solo se $a \neq 0$ C) rappresenta una retta che forma con l'asse delle x un angolo ottuso per ogni valore di a D) rappresenta una retta che ha come coefficiente angolare a E) rappresenta una retta passante per l'origine per ogni valore di a

Risposta corretta E.

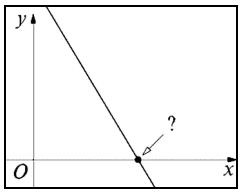
14. (Odontoiatria 2005) Data l'equazione $mx - y - 2m + 1 = 0$, con m parametro reale. Quale fra le seguenti proposizioni è corretta? Al variare di m l'equazione A) non rappresenta alcuna retta passante per l'origine B) non rappresenta alcuna retta orizzontale C) individua tutte le rette del piano passanti per (2; 1) D) individua tutte le rette del piano passanti per (2; 1) eccetto una E) individua tutte le rette del piano passanti per (2; 1) eccetto due

Risposta corretta D, infatti si scrive $y - 1 + m(2 - x) = 0$, che è un fascio di rette di centro (2; 1), ma ovviamente non possiamo trovare la sua retta $x = 2$ per nessun valore reale di m.

15. (Medicina 2005) Determinare i valori del parametro reale a (se esistono) per cui le rette seguenti risultano perpendicolari: $a^2x + (a - 4) \cdot x + a - 2 = 0$; $2x - 3y + 9a = 0$.

A) 0 B) 1 C) $-3 < a < 2$ D) $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$ E) nessun valore di a

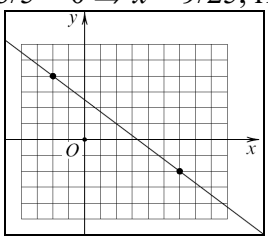
Deve essere $a^2 \cdot 2 - (a - 4) \cdot 3 = 0 \Rightarrow 2a^2 - 3a + 12 = 0$ e poiché il suo discriminante è negativo, la risposta corretta è la E

16. (Architettura 2007) Nella figura 

è rappresentata la retta di equazione $y = -5/3x + 3/5$. Il punto di intersezione con l'asse delle ascisse ha coordinata x pari a:

A) 9/25 B) 2/5 C) 5/3 D) 3 E) 3/25

Poniamo $y = 0$, ottenendo $-5/3x + 3/5 = 0 \Rightarrow x = 9/25$, risposta A

17. (Architettura 2008) Nel disegno 

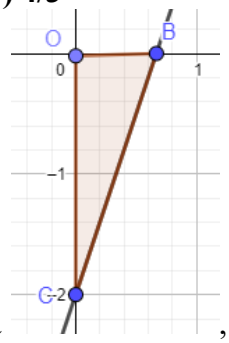
è rappresentato un piano cartesiano dove ogni quadretto ha lato unitario. Una retta passa per i due punti a coordinate intere indicati con un pallino nero. Il coefficiente angolare m della retta scritta nella forma $y = mx + q$ è:

A) –6/7 B) –4/5 C) –3/4 D) 3/5 E) non determinabile dal disegno

Il coefficiente angolare lo troviamo mediante $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-(-2)}{-2-6} = \frac{6}{-8} = -\frac{3}{4}$, risposta C

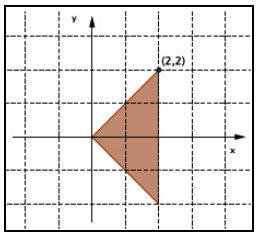
18. (Facoltà scientifiche, Roma La Sapienza 2008) Qual è l'area del triangolo individuato nel piano cartesiano dall'asse delle x, dall'asse delle y e dalla retta di equazione $y = 3x - 2$?

A) 2/3 B) 3/4 C) 3/2 D) 4/3

Il triangolo è mostrato in figura 

, in cui l'ascissa di B è ovviamente 2/3, quindi l'area misura $\frac{1}{2} \cdot 2/3 \cdot 2 = 2/3$, risposta A

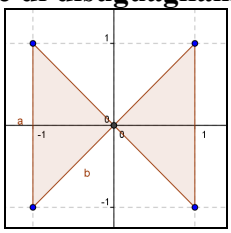
19. (Facoltà scientifiche, Roma La Sapienza 2008) Una sola delle seguenti condizioni è vera per ogni

punto (x;y) del triangolo tratteggiato in figura. 

Quale?

A) $x \le 1$ B) $y \ge 0$ C) $y \ge x$ D) $y \ge -x$

Risposta D, infatti la seconda bisettrice, di equazione $y = -x$ contiene il lato del triangolo posto nel IV quadrante.

20. (Architettura 2009) Determinare l'insieme di disuguaglianze che descrive esattamente la regione del piano cartesiano indicata nella figura 

A) $|y| \le x, x \le 1$ B) $y \le x, x \le 1$ C) $|y| \le |x|, |x| \le 1$ D) $y \le |x|, |x| \le 1$ E) $y \le x, |x| \le 1$

Risposta C, infatti le due bisettrici del piano contengono i lati "obliqui" della figura, e chiaramente tutte le ascisse sono comprese tra –1 e 1

21. (Economia Università di Trento) Quale fra le seguenti equazioni rappresenta una retta parallela alla bisettrice del secondo e quarto quadrante e passante per il punto $P \equiv (-2; 11)$?

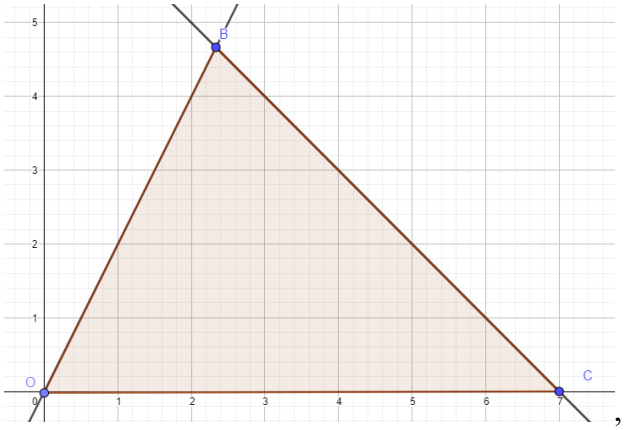
A) $y = -x + 13$ B) $y = x + 9$ C) $y = x + 13$ D) $y = -x + 9$

Il coefficiente angolare deve essere –1, possibili solo A e D, ma A non contiene P

22. (Ingegneria 2009) In un piano cartesiano, quale delle seguenti rette è parallela alla retta passante per i punti di coordinate (1; 0) e (0; 1) A) $2x + 3y = 0$ B) $x = y - 1$ C) $x = 2$ D) $x + y = 3$ E) $y = 1$

La retta ha equazione $x + y = 1$, quindi la risposta corretta è D

23. (Ingegneria 2009) In un piano cartesiano, quale dei seguenti punti è interno al triangolo racchiuso tra le tre rette $y = 0$, $y = 2x$ e $y = -x + 7$? A) (3; 5) B) (4; 4) C) (1; –3) D) (3; 3) E) (–3; 2)

Il triangolo è mostrato in figura, 

, l'unico fra quelli proposti a esso interno è D

24. (Ingegneria 2009) In un piano cartesiano, consideriamo le rette di equazione $y = kx + 2k + 1$, dove k è un parametro reale. Qual delle seguenti affermazioni è vera? A) Le rette sono a due a due incidenti, ma non esiste un punto comune a tutte B) per $k = 0$ non si ottiene l'equazione di una retta C) tutte le rette passano per (1; –2); D) tutte le rette passano per (–2; 1) E) Le rette sono tutte fra loro parallele

Risposta corretta D, infatti abbiamo: $1 = (-2)k + 2k + 1 \Rightarrow 1 = 1$