4. Geometria delle coniche

4.1. Le sezioni coniche

Richiamiamo le conoscenze

Razionalizzazione di binomi quadratici

Razionalizzare i denominatori delle seguenti espressioni.

1. **a)** $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ **; b)** $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ **; c)** $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}$ **; d)** $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ **; e)** $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}+2}$

a) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$; b) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}$;

c) $\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-\sqrt{7}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{7}\right)}=\frac{3-\sqrt{21}}{3-7}=\frac{\sqrt{21}-3}{4}$; d) $\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}=\frac{2+\sqrt{2}}{2-1}=2+\sqrt{2}$;

e) $\frac{\sqrt{5}\left(\sqrt{3}-2\right)}{\left(\sqrt{3}+2\right)\left(\sqrt{3}-2\right)}=\frac{\sqrt{15}-2\sqrt{5}}{3-4}=2\sqrt{5}-\sqrt{15}$

2. **a)** $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$ **; b)** $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ **; c)** $\frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+3}$ **; d)** $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}+1}$ **; e)** $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

a) $\frac{2\left(\sqrt{5}+1\right)}{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}=\frac{2\left(\sqrt{5}+1\right)}{5-1}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$; b) $\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}=2-2\sqrt{2}+1=3-2\sqrt{2}$;

c) $\frac{\left(3-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-3\right)}{\left(\sqrt{2}+3\right)\left(\sqrt{2}-3\right)}=\frac{3\sqrt{2}-9-2+3\sqrt{2}}{2-9}=\frac{11-6\sqrt{2}}{7}$; d) $\frac{\sqrt{7}\left(\sqrt{7}-1\right)}{\left(\sqrt{7}+1\right)\left(\sqrt{7}-1\right)}=\frac{7-\sqrt{7}}{7-1}=\frac{7-\sqrt{7}}{6}$;

e) $\frac{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}=\frac{8+2\sqrt{15}}{2}=4+\sqrt{15}$

3. **a)** $\frac{\sqrt{11}-\sqrt{2}}{\sqrt{11}+\sqrt{2}}$ **; b)** $\frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{5}+1}$ **; c)** $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{12}}{\sqrt{8}-\sqrt{2}}$ **; d)** $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ **; e)** $\frac{\sqrt{15}+\sqrt{18}}{\sqrt{40}+\sqrt{24}}$

a) $\frac{\left(\sqrt{11}-\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{11}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{11}-\sqrt{2}\right)}=\frac{11-2\sqrt{22}+2}{11-2}=\frac{13-2\sqrt{22}}{9}$;

b) $\frac{\left(\sqrt{7}-1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)}{\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)}=\frac{\sqrt{35}-\sqrt{7}-\sqrt{5}+1}{5-1}=\frac{\sqrt{35}-\sqrt{7}-\sqrt{5}+1}{4}$;

c) $\frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{12}\right)\left(\sqrt{8}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{8}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{8}+\sqrt{2}\right)}=\frac{4\sqrt{3}+2\sqrt{3}+4\sqrt{6}+2\sqrt{6}}{6}=\frac{6\sqrt{3}+6\sqrt{6}}{6}=\sqrt{3}+\sqrt{6}$;

d) $\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}=\frac{\sqrt{10}+2-\sqrt{15}-\sqrt{6}}{5-2}=\frac{\sqrt{10}+2-\sqrt{15}-\sqrt{6}}{3}$;

e) $\dfrac{\sqrt{15}+3\sqrt{2}}{2\sqrt{10}+2\sqrt{6}}=\dfrac{\left(\sqrt{15}+3\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)}{2\left(\sqrt{10}+\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)}=\dfrac{5\sqrt{6}-3\sqrt{10}+6\sqrt{5}-6\sqrt{3}}{2(10-6)}=\dfrac{5\sqrt{6}-3\sqrt{10}+6\sqrt{5}-6\sqrt{3}}{8}=$

I numeri complessi

Operazioni aritmetiche con i numeri complessi

Semplificare le seguenti espressioni.

1. **a) $3 - 2i + i \cdot (4 - 5i)$; b) $1 - i \cdot (4 - i) + 2 \cdot (3 - 6i)$; c) $(i - 1)/3 - i/2 + 7/4 + i^2$**
a) $3 - 2i + 4i - 5i^2 = 3 + 2i + 5 = 8 + 2i$; b) $1 - 4i + i^2 + 6 - 12i = 7 - 16i - 1 = 6 - 16i$;
c) $i/3 - 1/3 - i/2 + 7/4 - 1 = 5/12 - 1/6i$

2. **a) $(i - 5) \cdot (2 - 7i) - 5i \cdot (3 - i)$; b) $5/3i + (7i - 11)/8 - i/12$; c) $(1 - i)^3$**
a) $2i - 10 - 7i^2 + 35i - 15i + 5i^2 = 22i - 10 + 7 - 5 = -8 + 22i$; b) $5/3i + 7/8i - 11/8 - i/12 = -11/8 + 59/24i$; c) $1 - i^3 - 3i + 3i^2 = 1 - i - 3i - 3 = -2 - 2i$

3. **a) $(i - 8)/3 + 4/5i - (3 - 4i)/2$; b) $[(2i - 5) \cdot (2i + 5)]^2$; c) $(1 - 2i + i^2)^2$**
a) $i/3 - 8/3 + 4/5i - 3/2 + 2i = -25/6 + 47/15i$; b) $(4i^2 - 25)^2 = (-4 - 25)^2 = (-29)^2 = 841$
c) $(1 - 2i - 1)^2 = (-2i)^2 = 4i^2 = -4$

4. **a) $\sqrt{2}i-1+\left(\sqrt{2}-i\right)\cdot\left(i-\sqrt{2}\right)$; b) $(1 - 9i) \cdot 3 - i \cdot (5i + 1)$; c) $(5i - 1)^2$**
a) $\sqrt{2}i-1-\left(\sqrt{2}-i\right)^2=\sqrt{2}i-1-2+2\sqrt{2}i-i^2=3\sqrt{2}i-3+1=3\sqrt{2}i-2$;
b) $3 - 27i - 5i^2 - i = 3 - 28i + 5 = 8 - 28i$; $25i^2 + 1 - 10i = -25 + 1 - 10i = -24 - 10i$

5. **a) $7i - 5 - 6i \cdot (7i + 2) - i \cdot (i - 6)$; b) $4i - 3 + (7i - 8) \cdot (2i + 3)$**
a) $7i - 5 - 42i^2 - 12i - i^2 + 6i = i - 5 + 43 = 38 + i$;
b) $4i - 3 + 14i^2 + 21i - 16i - 24 = 9i - 27 - 14 = -41 + 9i$

6. **a) $(2 - 3i) \cdot (3i + 2) - 4i + 1$; b) $(2i - 7) \cdot (11 - i) + (i - 11) \cdot (7i + 2)$**
a) $6i + 4 - 9i^2 - 6i - 4i + 1 = 5 + 9 - 4i = 14 - 4i$
b) $22i - 2i^2 - 77 + 7i + 7i^2 + 2i - 77i - 22 = -46i - 99 - 5 = -104 - 46i$

7. **a) $1 - (5 + i) \cdot (4i - 7) + 3i$; b) $\dfrac{\sqrt{2}-3i}{8}-\dfrac{i-5}{\sqrt{2}+1}$**
a) $1 - 20i + 35 - 4i^2 + 7i + 3i = 36 - 10i + 4 = 40 - 10i$;
b) $\dfrac{\sqrt{2}-3i}{8}-\dfrac{(i-5)\left(\sqrt{2}-1\right)}{2-1}=\dfrac{\sqrt{2}-3i-8\sqrt{2}i+8i+40\sqrt{2}-40}{8}=\dfrac{41\cdot\sqrt{2}-40}{8}+\dfrac{5-8\cdot\sqrt{2}}{8}i$

8. **a) $(2 - i) \cdot (3 + i) \cdot (i - 4)$; b) $(4 - i) \cdot (i + 4) \cdot (2i + 1)$; c) $i^{(2)^{i^4}}$; d) $(2 - i + 3i^2)^3$**
a) $(6 + 2i - 3i - i^2) \cdot (i - 4) = (7 - i) \cdot (i - 4) = 7i - 28 - i^2 + 4i = -27 + 11i$
b) $(16 - i^2) \cdot (2i + 1) = 17 \cdot (2i + 1) = 17 + 34i$; c) $i^{(2)^1} = i^2 = -1$;
d) $(2 - i - 3)^3 = (-1 - i)^3 = -1 - 3i^2 - 3i - i^3 = -1 + 3 - 3i + i = 2 - 2i$

9. **a) $(7i - 1) \cdot (5 - 6i) \cdot (3i + 7)$; b) $(i/3 - 2)^2 - (5i/2 + 1/2)$; c) $(1 - i)^3 - (1 + i)^3$**
a) $(35i - 42i^2 - 5 + 6i) \cdot (3i + 7) = (41i + 37) \cdot (3i + 7) = -123 + 287i + 111i + 259 = 136 + 398i$
b) $-1/9 - 4/3i + 4 - 5i/2 - 1/2 = (-2 + 72 - 9)/18 - (8 - 15)i/6 = 61/18 - 23i/6$;
c) $(1 - i)^3 - (1 + i)^3 = 1 - 3i - 3 + i - 1 - 3i + 3 + i = -4i$

10. **a) $(i/2 - 1) \cdot (2i/3 + 1) \cdot (i/4 + 1)$; b) $(i/2 - 4) \cdot (5 - i/3) \cdot (3/4 - i)$**
a) $(-1/3 + i/2 - 2i/3 - 1) \cdot (i/4 + 1) = (-4/3 - i/6) \cdot (i/4 + 1) = -i/3 - 4/3 + 1/24 - i/6 = -31/24 - i/2$;
b) $(5i/2 + 1/6 - 20 + 4i/3) \cdot (3/4 - i) = (23i/6 - 119/6) \cdot (3/4 - i) = 23i/8 + 23/6 - 119/8 + 119i/6 = -265/24 + 545i/24$

11. **a) $(a + bi) \cdot (b - ai) \cdot (a - bi) \cdot (b + ai)$; b) $(i/4 - 5/4i - 2/3i - 5/3)^2$**
a) $(a + bi) \cdot (a - bi) \cdot (b - ai) \cdot (b + ai) = (a^2 + b^2) \cdot (b^2 + a^2) = (a^2 + b^2)^2$
b) $(i/4 - 5/4i - 2/3i - 5/3)^2 = (-5i/3 - 5/3)^2 = 5/3\ (-i - 1)^2 = 25/9\ (-1 + 2i + 1) = 50i/9$

12. **a) $(i - 2i^3 + i^4)^2$; b) $(4/5i - 3/5)^2$; c) $(3/2 - i/2)^2 + (i/2 + 3/2)^2$; d) $(3 - i)^2 - (i + 3)^2$**
a) $(i + 2i - 1)^2 = (3i - 1)^2 = -9 - 6i + 1 = -8 + 6i$

b) $-16/25 - 24i/25 + 9/25 = -7/25 - 24/25i$
c) $9/4 - 3i/2 - 1/4 - 1/4 + 3i/2 + 9/4 = 4$
d) $9 - 6i - 1 + 1 - 6i - 9 = -12i$

13. **a) $i/4 + i/2 \cdot (1/2 - i) + (2/3 + i) \cdot (-3i/2 + 1)$; b) $(2i/3 - 4)^2 - (2/3 - 4i)^2$**
a) $i/4 + i/4 + 1/2 - i + 2/3 + 3/2 + i = 8/3 + i/2$; b) $-4/9 - 8i/3 + 16 - 4/9 + 16 + 8i/3 = 280/9$

14. **a) $(-1/3 + i) \cdot (i/3 - 1) + (2/3 - 2i) \cdot (1/2 - 3i) - (1/2 + i)^2$; b) $(5-i)^{i^{48}}$**
a) $-i/9 + 1/3 - 1/3 - i + 1/3 - 2i - i - 6 - ¼ + 1 - i = -59/12 - 46i/9$
b) $(5 - i)^1 = 5 - i$

15. **a) $(3 - 2i)^2 \cdot (2 + 3i)^2 - (1 - 3i) \cdot (1 + i)^3$; b) $(5/2 - 3i/2 + i/6) \cdot (5/2 + 3i/2 - i/6)$**
a) $(9 - 12i - 4) \cdot (4 + 12i - 9) - (1 - 3i) \cdot (1 + 3i - 3 - i) = (5 - 12i) \cdot (13 + 12i) - (1 - 3i) \cdot (2i - 2) = 65 + 60i - 156i + 144 - 2 + 2 - 6 - 6i = 115 + 112i$
b) $(5/2)^2 - (3i/2 - i/6)^2 = 25/4 - (4i/3)^2 = 25/4 + 16/9 = 289/36$

16. **a) $i^2 - i^3 + i^4 - i^5 + i^6$; b) $i - 2i^2 + 3i^3 + (4i)^4$; c) $(1-3i)^{i^8}$; d) $(1 - i)^{(1-i)(1+i)}$**
a) $-1 + i + 1 - i - 1 = -1$; b) $i + 2 - 3i + 256 = 258 - 2i$; c) $(1 - 3i)^1 = 1 - 3i$; d) $(1 - i)^{(1+1)} = (1 - i)^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$

17. **a) $i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 + 5i^5$; b) $\frac{i}{2} - \frac{i^2}{3} + \frac{i^5}{4} - \frac{i^{12}}{6}$; c) $(4 - i)^{(1-i)(1+i)}$**
a) $i - 2 - 3i + 4 + 5i = 2 + 3i$; b) $\frac{i}{2} - \frac{-1}{3} + \frac{i}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6} + \frac{3}{4}i$; c) $(4 - i)^2 = 16 - 8i - 1 = 15 - 8i$

18. **a) $(i - 2i^3)^2 + (i^8 + 4i^{15})^2$; b) $(i - i^3 + i^{17} - i^{77})^2 + (i^2 + i^4 - i^{50} - i^{72})^2$**
a) $(i + 2i)^2 + (1 - 4i)^2 = -9 + 1 - 8i - 16 = -24 - 8i$; b) $(i + i + i - i)^2 + (-1 + 1 + 1 - 1)^2 = (2i)^2 = -4$

19. **a) $(4i + i^{13} + 2i^{171} + 3i^{49})^3 - (i^{42} - 2i^{54} + 3i^{150} + i^{160})^3$; b) $i^{87} - 5i^{92} + 6i^{37} - 8i^{112}$**
a) $(4i + i - 2i + 3i)^3 - (-1 + 2 - 3 + 1)^3 = (6i)^3 - (-1)^3 = -216i + 1$ b) $-i - 5 + 6i - 8 = -13 + 5i$

20. **a) $2001i^{2002} - 2002i^{2001}$; b) $2004i^{2005} - 2005i^{2006} + 2006i^{2008} - 2007i^{2007}$**
a) $-2001 - 2002i$; b) $2004i + 2005 + 2006 + 2007i = 4011 + 4011i$

21. **a) $Im(Re(Im(Re(a + ib)))$; b) $Re\left(Im\left(\overline{a-bi}\right)\right)$; c) $Re(5 - 7i) - Im(4i - 2)$; d) $(2i - 3)/(5i)$**
a) $Im(Re(Im(a + bi))) = Im(Re(b)) = Im(b) = 0$; b) $Re\left(Im\left(a+bi\right)\right) = Re\left(b\right) = b$;
c) $5 - 4 = 1$; d) $\frac{(2i-3)i}{5i^2} = \frac{-2-3i}{-5} = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}i$

22. **a) $Re\left(a-bi\right) + Im\left(Re\left(a-bi\right)\right) + Im\left(\overline{a+bi}\right)$; b) $\overline{a+ib} - \left(a+ib\right)$; c) $\frac{2-7i}{4-i}$**
a) $a + Im\left(a\right) + Im\left(a-bi\right) = a + 0 - b = a - b$; b) $a - bi - a - bi = -2bi$;
c) $\frac{(2-7i)(4+i)}{(4-i)(4+i)} = \frac{8+2i-28i+7}{16+1} = \frac{15}{17} - \frac{26}{17}i$

23. **a) $Re(Im(a + bi)) - Im(Re(a - bi))$; b) $\left|\sqrt{3}+2i\right|$; c) $|3 - 7i|$; d) $\left|\sqrt{2}-i\right|$; e) $\frac{5i+13}{12-i}$**
a) $Re(b)) - Im(a) = b$; b) $\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{3+4} = \sqrt{7}$; c) $\sqrt{3^2+7^2} = \sqrt{58}$; d) $\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$;
e) $\frac{(5i+13)(12+i)}{(12-i)(12+i)} = \frac{60i-5+156+13i}{144+1} = \frac{151}{145} + \frac{73}{145}i$

24. **a) $\left|i-\sqrt{2}\right|$; b) $\left|2\cdot\sqrt{2}-\sqrt{3}i\right|$; c) $|1 + 8i|$; d) $\frac{8i+1}{i-8}$; e) $\frac{11i-5}{2i+3}$; f) $\frac{i}{2i-1}$**
a) $\sqrt{1+2} = \sqrt{3}$; b) $\sqrt{8+3} = \sqrt{11}$; c) $\sqrt{1+64} = \sqrt{65}$; d) $\frac{(8i+1)(i+8)}{(i-8)(i+8)} = \frac{\cancel{-8} + 64i + i \cancel{+8}}{-1-64} = \frac{65i}{-65} = -i$;
e) $\frac{(11i-5)(2i-3)}{(2i+3)(2i-3)} = \frac{-22-33i-10i+15}{-4-9} = \frac{7}{13} + \frac{43}{13}i$; f) $\frac{i(2i+1)}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{-2+i}{-4-1} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$

25. **a)** $\frac{21-i}{5i}$ **; b)** $\frac{\sqrt{2}-i}{1+\sqrt{2}i}$ **; c)** $\frac{\sqrt{3}i}{i-\sqrt{3}}$ **; d)** $\frac{1}{i-\frac{1}{i}}$ **; e)** $\frac{5i+6}{3i}$ **; f)** $\frac{2i+8}{8-2i}$

a) $\frac{(21-i)i}{5i^2}=\frac{21i+1}{-5}=-\frac{1}{5}-\frac{21}{5}i$; b) $\frac{\left(\sqrt{2}-i\right)\left(1-\sqrt{2}i\right)}{\left(1+\sqrt{2}i\right)\left(1-\sqrt{2}i\right)}=\frac{\cancel{\sqrt{2}}-2i-i-\cancel{\sqrt{2}}}{1+2}=-i$;

c) $\frac{\sqrt{3}i\left(i+\sqrt{3}\right)}{\left(i-\sqrt{3}\right)\left(i+\sqrt{3}\right)}=\frac{-\sqrt{3}+3i}{-1-3}=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{3}{4}i$; d) $\frac{1}{\frac{-1-1}{i}}=\frac{i}{-2}=-\frac{i}{2}$; e) $\frac{(5i+6)i}{3i^2}=\frac{-5+6i}{-3}=\frac{5}{3}-2i$;

f) $\frac{(2i+8)(8+2i)}{(8-2i)(8+2i)}=\frac{16i-4+64+16i}{64+4}=\frac{60}{68}+\frac{32}{68}i=\frac{15}{17}+\frac{8}{17}i$

26. **a)** $\frac{8i-9}{8+9i}-\frac{9i-8}{9+8i}$ **; b)** $Re\left(\frac{4+i}{5-i}\right)+Im\left(\frac{4-i}{5+i}\right)$ **; c)** $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2-\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2$ **; d)** $\frac{i\cdot(2-3i)}{3+2i}$

a) $\frac{(8i-9)(8-9i)}{(8+9i)(8-9i)}-\frac{(9i-8)(9-8i)}{(9+8i)(9-8i)}=\frac{\cancel{64i}\cancel{+72-72}+\cancel{81i}}{64+81}-\frac{\cancel{81i}\cancel{+72-72}+\cancel{64i}}{81+64}=0$;

b) $Re\left[\frac{(4+i)(5+i)}{(5-i)(5+i)}\right]+Im\left[\frac{(4-i)(5-i)}{(5+i)(5-i)}\right]=Re\left[\frac{20+4i+5i-1}{25+1}\right]+Im\left[\frac{20-4i-5i-1}{25+1}\right]=\frac{19}{26}-\frac{9}{26}=\frac{10}{26}=\frac{5}{13}$

c) $\left(\frac{\cancel{1}-2i-\cancel{1}}{1+1}\right)^2-\left(\frac{\cancel{1}+2i-\cancel{1}}{1+1}\right)^2=(-i)^2-i^2=-1+1=0$; d) $\frac{(2i+3)(3-2i)}{9+4}=\frac{6i+4+9-6i}{13}=1$

27. **a)** $\frac{\sqrt{3}+i}{i-\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{3}+i}$ **; b)** $Re\left(\frac{\sqrt{2}+3i}{3+\sqrt{2}i}\right)-Im\left(\frac{3-\sqrt{2}i}{\sqrt{2}-3i}\right)$

a) $\frac{\left(\sqrt{3}+i\right)\left(i+\sqrt{2}\right)}{-1-2}-\frac{\left(\sqrt{2}+i\right)\left(\sqrt{3}-i\right)}{3+1}=\frac{\sqrt{3}i+\sqrt{6}-1+\sqrt{2}i}{-3}-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}i+\sqrt{3}i+1}{4}=$
$=\frac{\left(-4\sqrt{3}-4\sqrt{2}+3\sqrt{2}-3\sqrt{3}\right)i-4\sqrt{6}+4-3\sqrt{6}-3}{12}=\frac{1-7\sqrt{6}}{12}-\frac{\left(\sqrt{2}+7\sqrt{3}\right)i}{12}$;

b) $Re\left[\frac{\left(\sqrt{2}+3i\right)\left(3-\sqrt{2}i\right)}{\left(3+\sqrt{2}i\right)\left(3-\sqrt{2}i\right)}\right]-Im\left[\frac{\left(3-\sqrt{2}i\right)\left(\sqrt{2}+3i\right)}{\left(\sqrt{2}-3i\right)\left(\sqrt{2}+3i\right)}\right]=\frac{3\sqrt{2}+3\sqrt{2}}{9+2}-\frac{9-2}{2+9}=\frac{6\sqrt{2}-7}{11}$

28. **a)** $\frac{6-i}{2i}+\frac{i}{6-i}-\frac{3i-2}{4i-3}$ **; b)** $\overline{\left(\frac{7-2i}{11+13i}\right)}-\frac{7-2i}{11+13i}$ **; c)** $\frac{1-i}{(1+i)^2}$

a) $\frac{6i+1}{-2}+\frac{6i-1}{36+1}-\frac{-12+9i-8i-6}{-16-9}=\frac{6i+1}{-2}+\frac{6i-1}{37}+\frac{i-18}{25}=\frac{-5550i-925+300i-50+74i-1332}{1850}=-\frac{2307}{1850}-\frac{2588}{925}i$;

b) $\overline{\left(\frac{77-91i-22i-26}{121+169}\right)}-\frac{51-113i}{121+169}=\frac{\cancel{51}+113i-\cancel{51}+113i}{290}=\frac{113}{145}i$; c) $\frac{1-i}{\cancel{1}+2i-\cancel{1}}=\frac{i+1}{-2}=-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}$

29. **a)** $\frac{(1+5i)\cdot(2-3i)}{7-i}$ **; b)** $\frac{7-6i}{2i+3}\cdot\frac{i}{4i-5}$ **; c)** $\frac{i+i^2+i^3+i^4+i^5}{1+i}$

a) $\frac{(2-3i+10i+15)\cdot(7+i)}{49+1}=\frac{(7i+17)\cdot(7+i)}{50}=\frac{49i-7+119+17i}{50}=\frac{56}{25}+\frac{33}{25}i$;

b) $\frac{14i-21+12+18i}{-4-9}\cdot\frac{-4+5i}{-16-25}=\frac{9-32i}{13}\cdot\frac{4-5i}{41}=\frac{36-45i-128i-160}{533}=-\frac{124}{533}-\frac{173}{533}i$;

c) $\frac{\cancel{i}\cancel{-1}\cancel{-i}\cancel{+1}+i}{1+i}=\frac{i+1}{1+1}=\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$

30. **a)** $\dfrac{i^5-4}{3i^7+1}-\dfrac{5i+2}{3i-5}$; **b)** $\left(\dfrac{2-i}{2+i}\right)^2+\left(\dfrac{2+i}{2-i}\right)^2$; **c)** $Re\left(\dfrac{2-i}{11+6i}\right)-Im\left(\dfrac{8i}{3-i}\right)$

a) $\dfrac{i-4}{-3i+1}-\dfrac{-15+25i+6i+10}{-9-25}=\dfrac{i-3-4-12i}{1+9}+\dfrac{-5+31i}{34}=\dfrac{-238-50}{340}+\dfrac{-374+310}{340}i=-\dfrac{72}{85}-\dfrac{16}{85}i$;

b) $\left(\dfrac{4-4i-1}{4+1}\right)^2+\left(\dfrac{4+4i-1}{4+1}\right)^2=\dfrac{(3-4i)^2+(3+4i)^2}{25}=\dfrac{9\cancel{-24i}-16+9+\cancel{24i}-16}{25}=-\dfrac{14}{25}$;

c) $\dfrac{22-6}{121+36}-\dfrac{24}{9+1}=\dfrac{16}{157}-\dfrac{\cancel{24}^{12}}{\cancel{10}^{5}}=-\dfrac{1804}{785}$

Semplificare le seguenti operazioni fra matrici

31. **a)** $\begin{Vmatrix}1 & i\\ -1 & -i\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}i & 1\\ 0 & -i\end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix}i & -1\\ 1 & 0\end{Vmatrix}^2$; **b)** $\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & i\\ 0 & 1 & 0 & i & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & i & 0 & 1 & 0\\ i & 0 & 0 & 0 & 1\end{Vmatrix}^2$

a) $\begin{Vmatrix}i+0 & 1-i^2\\ -i-0 & -1+i^2\end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix}i^2-1 & -i-0\\ i-0 & 1+0\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}i & 2\\ -i & -2\end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix}-2 & -i\\ i & 1\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}-2+i & 2-i\\ 0 & -3\end{Vmatrix}$;

b) $\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & i\\ 0 & 1 & 0 & i & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & i & 0 & 1 & 0\\ i & 0 & 0 & 0 & 1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & i\\ 0 & 1 & 0 & i & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & i & 0 & 1 & 0\\ i & 0 & 0 & 0 & 1\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}1+i^2 & 0 & 0 & 0 & i+i\\ 0 & 1+i^2 & 0 & i+i & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & i+i & 0 & 1+i^2 & 0\\ i+i & 0 & 0 & 0 & 1+i^2\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 2i\\ 0 & 0 & 0 & 2i & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2i & 0 & 0 & 0\\ 2i & 0 & 0 & 0 & 0\end{Vmatrix}$

32. **a)** $\left(\begin{Vmatrix}1 & -1\\ 0 & i\\ 2i & -4i\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}1 & -2 & i\\ 3 & i & 1\end{Vmatrix}\right)^2$; **b)** $\begin{Vmatrix}1 & 0 & i\\ 0 & -i & 0\\ 0 & 0 & -1\end{Vmatrix}^{15}$

$$\begin{Vmatrix}1-3 & -2-i & i-1\\ 0+3i & 0+i^2 & 0+i\\ 2i-12i & -4i-4i^2 & 2i^2-4i\end{Vmatrix}^2=\begin{Vmatrix}-2 & -2-i & i-1\\ 3i & -1 & i\\ -10i & -4i+4 & -2-4i\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}-2 & -2-i & i-1\\ 3i & -1 & i\\ -10i & -4i+4 & -2-4i\end{Vmatrix}=$$

a) $=\begin{Vmatrix}4-6i+3+10+10i & 4+2i+2+i+4+4i+4i-4 & -2i+2-2i+1-2i+2+4+4i\\ -6i-3i+10 & -6i+3+1+4+4i & -3-3i-i-2i+4\\ 20i+12+12i+20i-40 & 20i+4i-4+8i-8-16-16i & 10+10i+4+4i+4+8i+8i-16\end{Vmatrix}=$;

$$=\begin{Vmatrix}17+4i & 6+11i & 9-2i\\ 10-9i & 8-2i & 1-6i\\ -28+52i & -38+16i & 2+30i\end{Vmatrix}$$

b)
$$\begin{Vmatrix}1&0&i\\0&-i&0\\0&0&-1\end{Vmatrix}^2=\begin{Vmatrix}1&0&i\\0&-i&0\\0&0&-1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}1&0&i\\0&-i&0\\0&0&-1\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}1&0&i-i\\0&i^2&0\\0&0&1\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{Vmatrix};$$
$$\begin{Vmatrix}1&0&i\\0&-i&0\\0&0&-1\end{Vmatrix}^4=\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{Vmatrix};$$
$$\begin{Vmatrix}1&0&i\\0&-i&0\\0&0&-1\end{Vmatrix}^8=\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{Vmatrix}^2=\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{Vmatrix};\begin{Vmatrix}1&0&i\\0&-i&0\\0&0&-1\end{Vmatrix}^{14}=\begin{Vmatrix}1&0&i\\0&-i&0\\0&0&-1\end{Vmatrix}^8\cdot\begin{Vmatrix}1&0&i\\0&-i&0\\0&0&-1\end{Vmatrix}^6=\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{Vmatrix};$$
$$\begin{Vmatrix}1&0&i\\0&-i&0\\0&0&-1\end{Vmatrix}^{15}=\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}1&0&i\\0&-i&0\\0&0&-1\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}1&0&i\\0&i&0\\0&0&-1\end{Vmatrix}$$

33. **a)** $(1-i)\cdot\begin{Vmatrix}1&0&i\\0&i&0\\i&0&1\end{Vmatrix}+(1+i)\cdot\begin{Vmatrix}i&1+i&0\\1-i&1&-1\\0&i&-1\end{Vmatrix}$**; b)** $\begin{Vmatrix}i&0&0\\0&2i&0\\0&0&-i\end{Vmatrix}^{30}$

a)
$$\begin{Vmatrix}1-i&0&i+1\\0&i+1&0\\i+1&0&1-i\end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix}i-1&2i&0\\2&1+i&-1-i\\0&i-1&-1-i\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}0&2i&1+i\\2&2+2i&-1-i\\1+i&-1+i&-2i\end{Vmatrix};$$

b)
$$\begin{Vmatrix}i&0&0\\0&2i&0\\0&0&-i\end{Vmatrix}^2=\begin{Vmatrix}i&0&0\\0&2i&0\\0&0&-i\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}i&0&0\\0&2i&0\\0&0&-i\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}-1&0&0\\0&-2^2&0\\0&0&-1\end{Vmatrix};$$
$$\begin{Vmatrix}i&0&0\\0&2i&0\\0&0&-i\end{Vmatrix}^4=\begin{Vmatrix}-1&0&0\\0&-2^2&0\\0&0&-1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}-1&0&0\\0&-2^2&0\\0&0&-1\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&2^4&0\\0&0&1\end{Vmatrix};$$
$$\begin{Vmatrix}i&0&0\\0&2i&0\\0&0&-i\end{Vmatrix}^6=\begin{Vmatrix}-1&0&0\\0&-2^2&0\\0&0&-1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&2^4&0\\0&0&1\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}-1&0&0\\0&-2^6&0\\0&0&-1\end{Vmatrix};$$
$$\begin{Vmatrix}i&0&0\\0&2i&0\\0&0&-i\end{Vmatrix}^7=\begin{Vmatrix}-1&0&0\\0&-2^6&0\\0&0&-1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}i&0&0\\0&2i&0\\0&0&-i\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}-i&0&0\\0&-2^7i&0\\0&0&i\end{Vmatrix}$$
$$\begin{Vmatrix}i&0&0\\0&2i&0\\0&0&-i\end{Vmatrix}^8=\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&2^4&0\\0&0&1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&4^4&0\\0&0&1\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&2^8&0\\0&0&1\end{Vmatrix};$$
$$\begin{Vmatrix}i&0&0\\0&2i&0\\0&0&-i\end{Vmatrix}^{14}=\begin{Vmatrix}-i&0&0\\0&-2^7i&0\\0&0&i\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}-i&0&0\\0&-2^7i&0\\0&0&i\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}-1&0&0\\0&-2^{14}&0\\0&0&-1\end{Vmatrix};$$
$$\begin{Vmatrix}i&0&0\\0&2i&0\\0&0&-i\end{Vmatrix}^{16}=\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&2^8&0\\0&0&1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&2^8&0\\0&0&1\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&2^{16}&0\\0&0&1\end{Vmatrix};$$
$$\begin{Vmatrix}i&0&0\\0&2i&0\\0&0&-i\end{Vmatrix}^{30}=\begin{Vmatrix}-1&0&0\\0&-2^{14}&0\\0&0&-1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&2^{16}&0\\0&0&1\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}-1&0&0\\0&2^{30}&0\\0&0&-1\end{Vmatrix}$$

34. **a)** $\begin{Vmatrix} 1 & -i & i & 1 \\ i & 1 & -1 & i \\ -i & i & -1 & 1 \\ 1 & -1 & i & -i \end{Vmatrix}^2$ **; b)** $\begin{Vmatrix} i-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+i \\ 0 & i & 0 \end{Vmatrix}^6$

a) $\begin{Vmatrix} 1 & -i & i & 1 \\ i & 1 & -1 & i \\ -i & i & -1 & 1 \\ 1 & -1 & i & -i \end{Vmatrix}^2$; b) $\begin{Vmatrix} i-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+i \\ 0 & i & 0 \end{Vmatrix}^6$ $\left[\text{a)} \begin{Vmatrix} 4 & -2-2i & 2i & 2 \\ 4i & 2-2i & -2 & 2i \\ 0 & -2 & 2 & -2-2i \\ 2-2i & -2 & 2 & 0 \end{Vmatrix} ; \begin{Vmatrix} 8i & 0 & 0 \\ 0 & 2+2i & 0 \\ 0 & 0 & 2+2i \end{Vmatrix} \right]$

35. $(1-i)^2 \cdot \begin{Vmatrix} 1+i & 0 & 1-i \\ i & 0 & -i \\ 0 & 2i & 0 \end{Vmatrix} - (2-i)^2 \cdot \begin{Vmatrix} 2i & -1 & 3i \\ 0 & i & 0 \\ -i & 1 & -3i \end{Vmatrix}$

$(1-i)^2 \cdot \begin{Vmatrix} 1+i & 0 & 1-i \\ i & 0 & -i \\ 0 & 2i & 0 \end{Vmatrix} - (2-i)^2 \cdot \begin{Vmatrix} 2i & -1 & 3i \\ 0 & i & 0 \\ -i & 1 & -3i \end{Vmatrix} \left[\begin{Vmatrix} -6-8i & 3-4i & -14-11i \\ 2 & -4-3i & -2 \\ 4+3i & 1+4i & 12+9i \end{Vmatrix} \right]$

36. **a)** $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & i & -i & 0 \\ i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -i \end{Vmatrix}^9$ **; b)** $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & i & i \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{Vmatrix}^6$

a)

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & i & -i & 0 \\ i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -i \end{Vmatrix}^2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & i & -i & 0 \\ i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -i \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & i & -i & 0 \\ i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -i \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1+i \\ 1 & -1 & 1-i & 0 \\ 2i & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & i & -1 \end{Vmatrix}$$

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & i & -i & 0 \\ i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -i \end{Vmatrix}^3 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & i & -i & 0 \\ i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -i \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1+i \\ 1 & -1 & 1-i & 0 \\ 2i & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & i & -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & -i & i \\ 2+i & -i & 1 & -1 \\ 3i & i & 1 & -1-2i \\ -1 & 1 & i & i \end{Vmatrix}$$

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & i & -i & 0 \\ i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -i \end{Vmatrix}^6 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & -i & i \\ 2+i & -i & 1 & -1 \\ 3i & i & 1 & -1-2i \\ -1 & 1 & i & i \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 1 & -i & i \\ 2+i & -i & 1 & -1 \\ 3i & i & 1 & -1-2i \\ -1 & 1 & i & i \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 6 & 2 & -2i & -4+2i \\ 4+2i & 2i & 2-4i & -2 \\ 10i & 2i & 6 & -2-4i \\ -2 & -2 & 2i & -2i \end{Vmatrix}$$

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & i & -i & 0 \\ i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -i \end{Vmatrix}^9 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & -i & i \\ 2+i & -i & 1 & -1 \\ 3i & i & 1 & -1-2i \\ -1 & 1 & i & i \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 6 & 2 & -2i & -4+2i \\ 4+2i & 2i & 2-4i & -2 \\ 10i & 2i & 6 & -2-4i \\ -2 & -2 & 2i & -2i \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 20 & 4 & -12i & -8+4i \\ 16+12i & 8+4i & 4-8i & -12 \\ 36i & 12i & 20 & -12-16i \\ -12 & -4 & 4i & 8-4i \end{Vmatrix};$$

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & i & i \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{Vmatrix}^2 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & i & i \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & i & i \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & i & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-i \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$$

b) $$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & i & i \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{Vmatrix}^4 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & i & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-i \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 0 & i & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-i \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1+i \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & i & i \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{Vmatrix}^6 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & i & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-i \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1+i \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-i \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$$

37. $$i \cdot \begin{Vmatrix} 1 & i & -1 \\ -i & 0 & 1 \\ -1 & i & 1 \end{Vmatrix} - 2 \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & i & -1 \\ i & -i & 1 \end{Vmatrix}^2$$

$$\begin{Vmatrix} i & -1 & -i \\ 1 & 0 & i \\ -i & -1 & i \end{Vmatrix} - 2 \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & i & -1 \\ i & -i & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & i & -1 \\ i & -i & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} i & -1 & -i \\ 1 & 0 & i \\ -i & -1 & i \end{Vmatrix} - 2 \cdot \begin{Vmatrix} 4 & 2+i & -1 \\ -i & -1+i & -1-i \\ 3i & 1 & 1+i \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} i & -1 & -i \\ 1 & 0 & i \\ -i & -1 & i \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 8 & 4+2i & -2 \\ -2i & -2+2i & -2-2i \\ 6i & 2 & 2+2i \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -8+i & -5-2i & 2-i \\ 1+2i & 2-2i & 2+3i \\ -7i & -3 & -2-i \end{Vmatrix}$$

Calcolare i seguenti determinanti

38. **a)** $\begin{vmatrix} i & 1+i \\ 2i & 3 \end{vmatrix}$; **b)** $\begin{vmatrix} -3 & i+2 \\ i-2 & 4 \end{vmatrix}$; **c)** $\begin{vmatrix} \frac{1+i}{2} & 1-2i \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$; **d)** $\begin{vmatrix} \frac{1}{1-i} & 2 \\ i & 1 \end{vmatrix}$; **e)** $\begin{vmatrix} \frac{1-i}{1+i} & 3 \\ 4 & \frac{1+i}{1-i} \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} i & 1+i \\ 2i & 3 \end{vmatrix} = 3i - 2i + 2 = 2 + i$; b) $\begin{vmatrix} -3 & i+2 \\ i-2 & 4 \end{vmatrix} = -12 - (-1-4) = -7$;

c) $\begin{vmatrix} \frac{1+i}{2} & 1-2i \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1+i}{2} + 2 - 4i = \frac{5}{2} - \frac{7}{2}i$; d) $\begin{vmatrix} \frac{1}{1-i} & 2 \\ i & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{1-i} - 2i = \frac{1+i}{2} - 2i = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$;

e) $\begin{vmatrix} \frac{1-i}{1+i} & 3 \\ 4 & \frac{1+i}{1-i} \end{vmatrix} = 1 - 12 = -11$

39. **a)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3i & \frac{3}{i} \end{vmatrix}$; **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; **c)** $\begin{vmatrix} i & 0 & 1 \\ 1 & 1 & i \\ i & 0 & 1 \end{vmatrix}$; **d)** $\begin{vmatrix} 1 & i & -i \\ i & 1 & -i \\ i & -i & 1 \end{vmatrix}$; **e)** $\begin{vmatrix} 1+i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1-i \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3i & \frac{3}{i} \end{vmatrix} = \frac{3}{i} - 6i = -3i - 6i = -9i$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & i \\ 1 & 1 \end{matrix} = i + 0 + 0 - (-1 + 0 + 0) = 1 + i$;

c) $\begin{vmatrix} i & 0 & 1 \\ 1 & 1 & i \\ i & 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} i & 0 \\ 1 & 1 \\ i & 0 \end{matrix} = i+0+0-(i+0+0)=0$; d) $\begin{vmatrix} 1 & i & -i \\ i & 1 & -i \\ i & -i & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & i \\ i & 1 \\ i & -i \end{matrix} = 1+\cancel{i-i}-(\cancel{1-1}-1)=2$;

e) $\begin{vmatrix} 1+i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1-i \end{vmatrix}\begin{matrix} 1+i & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{matrix} = 1+1+0+0-(0+0+0)=2$

40. **a)** $\begin{vmatrix} 1-i & 1+i & 1 \\ 1+2i & 1 & 1-2i \\ 1-3i & 1+3i & 1 \end{vmatrix}$; **b)** $\begin{vmatrix} i & -2 & 2i \\ 3 & i & 0 \\ 0 & 0 & 2-i \end{vmatrix}$; **c)** $\begin{vmatrix} \frac{1-i}{1+i} & i & -2 \\ 0 & 0 & -i \\ 3i & \frac{i}{2} & \frac{1}{1-i} \end{vmatrix}$; **d)** $\begin{vmatrix} 1/i & 1 & -i \\ 0 & 0 & -1 \\ i & i^2 & 1 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1-i & 1+i & 1 \\ 1+2i & 1 & 1-2i \\ 1-3i & 1+3i & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1-i & 1+i \\ 1+2i & 1 \\ 1-3i & 1+3i \end{matrix} = 1-i+(3-i)\cdot(1-3i)-5+5i-\left[\cancel{1-3i}+(-1-3i)\cdot(1+3i)\cancel{-1+3i}\right]=$;

$$=-4+4i-10i+(1+6i-9)=-12$$

b) $\begin{vmatrix} i & -2 & 2i \\ 3 & i & 0 \\ 0 & 0 & 2-i \end{vmatrix}\begin{matrix} i & -2 \\ 3 & i \\ 0 & 0 \end{matrix} = -2+i+0+0-(0+0-12+6i)=10-5i$;

c) $\begin{vmatrix} \frac{1-i}{1+i} & i & -2 \\ 0 & 0 & -i \\ 3i & \frac{i}{2} & \frac{1}{1-i} \end{vmatrix}\begin{matrix} \frac{1-i}{1+i} & i \\ 0 & 0 \\ 3i & \frac{i}{2} \end{matrix} = 0+3i+0-\left(0+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-2i-1}{2}+0\right)=3i+\frac{i}{2}=\frac{7}{2}i$;

d) $\begin{vmatrix} 1/i & 1 & -i \\ 0 & 0 & -1 \\ i & -1 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1/i & 1 \\ 0 & 0 \\ i & -1 \end{matrix} = 0-i+0-(0+1/i+0)=-i+i=0$

41. **a)** $\begin{vmatrix} i/2 & 2/i & i \\ 1 & 2 & 3 \\ -i & i & 0 \end{vmatrix}$; **b)** $\begin{vmatrix} 3i & 1+5i & 5i \\ 2-i & 2+i & 0 \\ -3+2i & 2+3i & 1 \end{vmatrix}$; **c)** $\begin{vmatrix} 1 & i & -i \\ 1 & i^2 & i^2 \\ 1 & i^3 & -i^3 \end{vmatrix}$; **d)** $\begin{vmatrix} \frac{1-2i}{i} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{i}{1-2i} & i \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} i/2 & 2/i & i \\ 1 & 2 & 3 \\ -i & i & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} i/2 & 2/i \\ 1 & 2 \\ -i & i \end{matrix} = 0-6-1-\left(2-\frac{3}{2}+0\right)=-\frac{15}{2}$;

b) $\begin{vmatrix} 3i & 1+5i & 5i \\ 2-i & 2+i & 0 \\ -3+2i & 2+3i & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3i & 1+5i \\ 2-i & 2+i \\ -3+2i & 2+3i \end{matrix} = 6i-3+0+5i(7+4i)-\left[5i(-8+i)+0+7+9i\right]=$;

$$=-23+41i-(2-31i)=-25+72i$$

c) $\begin{vmatrix} 1 & i & -i \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -i & i \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & i \\ 1 & -1 \\ 1 & -i \end{matrix} = -i-i-1-(i+i-1)=-4i$;

d) $\begin{vmatrix} -2-i & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-2+i}{5} & i \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2-i & 1 \\ 0 & \frac{-2+i}{5} \\ 1 & -1 \end{matrix} = 0+i+0-(0+2i-1+0)=1-i$

Semplificare le seguenti espressioni

42. **a) $|2-7i|\cdot|5+3i|$; b) $|5+3i|^2\cdot|4i-9|$; c)** $\frac{4-5i}{|4-5i|}$

a) $\sqrt{4+49}\cdot\sqrt{25+9}=\sqrt{53\cdot 34}=\sqrt{1802}$ |; b) $(25+9)\cdot\sqrt{16+81}=34\cdot\sqrt{97}$;

c) $\frac{4-5i}{\sqrt{16+25}}=\frac{4}{\sqrt{41}}-\frac{5}{\sqrt{41}}i$

43. **a)** $\frac{|5+7i|}{2i-3}-\frac{6-i}{|7i|}$**; b)** $\overline{\frac{Re(8-i)}{\overline{5-7i}}+\left|\frac{i}{i-2}\right|}$

a) $\frac{\sqrt{25+49}(2i+3)}{-4-9}-\frac{6-i}{7}=-\frac{21\sqrt{74}+78}{91}-\frac{14\sqrt{74}-13}{91}i$;

b) $\overline{\frac{8}{5+7i}+\left|\frac{-1-2i}{-1-4}\right|}=\overline{\frac{40-56i}{25+49}+\sqrt{\frac{1}{25}+\frac{4}{25}}}=\overline{\frac{\cancel{40}^{20}-\cancel{56}^{28}i}{\cancel{74}^{37}}+\frac{\sqrt{5}}{5}}=\frac{100+37\sqrt{5}}{185}+\frac{28}{37}i$

44. **a)** $\frac{|12-i|}{3-4i}+\frac{13-5i}{|2i-7|}$**; b)** $\frac{\|z\|}{\overline{z}}$**; c)** $|z|+|\overline{z}|, z\in\mathbb{C}$

a) $\frac{\sqrt{144+1}}{3-4i}+\frac{13-5i}{\sqrt{4+49}}=\frac{3\sqrt{145}+4\sqrt{145}i}{25}+\frac{13-5i}{\sqrt{53}}=\frac{159\sqrt{145}+325\sqrt{53}}{1325}+\frac{212\sqrt{145}-125\sqrt{53}}{1325}i$;

b) $z=a+bi\Rightarrow\frac{a^2+b^2}{a-bi}=\frac{(a^2+b^2)(a+bi)}{a^2+b^2}=a+bi=z$; c) $|\overline{z}|=|z|\Rightarrow|z|+|z|=2|z|$

a) $\frac{Re(3+2i)}{\overline{5-9i}}+Im\left(\frac{|2+3i|}{2i-1}\right)$**; b)** $Im\left(\frac{i}{\overline{Re(4-i)-Im(2+4i)}}\right)$

a) $\frac{3}{5+9i}+Im\left(\frac{\sqrt{13}(2i+1)}{4+1}\right)=\frac{15-27i}{25+81}-\frac{2\sqrt{13}}{5}=\frac{75-212\sqrt{13}}{530}-\frac{27}{106}i$; b) $Im\left(\frac{i}{\overline{4-4}}\right)=?$

45. **a)** $Re\left(\frac{a+bi}{b+ai}\right)-Im\left(\frac{a-bi}{b-ai}\right)$**; b)** $Re\left(\frac{a+bi}{a-bi}\right)+Im\left(\frac{b-ai}{b+ai}\right)$

a) $Re\left(\frac{(a+bi)(b-ai)}{b^2+a^2}\right)-Im\left(\frac{(a-bi)(b+ai)}{b^2+a^2}\right)=\frac{ab+ab}{a^2+b^2}-\frac{-b^2+a^2}{a^2+b^2}=-\frac{a^2-2ab-b^2}{a^2+b^2}$;

b) $Re\left(\frac{(a-bi)(b-ai)}{a^2+b^2}\right)-Im\left(\frac{(a+bi)(b+ai)}{a^2+b^2}\right)=\frac{ab-ab}{a^2+b^2}-\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=-1$

46. **a)** $Re\left(\frac{a+bi}{a-bi}\right)+Im\left(\frac{b-ai}{b+ai}\right)$**; b)** $\overline{z+w}-\overline{z}-\overline{w}, z,w\in\mathbb{C}$**; c) $(1+i)^{20}-(1-i)^{20}$**

a) $Re\left(\frac{(a+bi)^2}{a^2+b^2}\right)-Im\left(\frac{(b-ai)^2}{a^2+b^2}\right)=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}-\frac{-2ab}{a^2+b^2}=\frac{a^2+2ab-b^2}{a^2+b^2}$;

b) $z=a+bi, w=c+di\Rightarrow\overline{z+w}-\overline{z}-\overline{w}=\cancel{(a+c)}-\cancel{(b+d)}i\cancel{-a}+\cancel{bi}\cancel{-c}+\cancel{di}=0$;

c) $(1+i)^{20}-(1-i)^{20}$ sviluppando troviamo le successive potenze con dei coefficienti da calcolare con l triangolo di Tartaglia, ma non è necessario farlo perché tutti i termini sono a due a due opposti, avremo infatti, indicando con lettere i coefficienti e ricordando che coefficienti che occupano posizioni

simmetriche sono uguali: $1 + ai + bi^2 + ci^3 + \ldots + bi^{17} + ci^{16} + ai^{19} + i^{20} - (1 - ai + bi^2 - ci^3 + \ldots - bi^{17} + ci^{16} - ai^{19} + i^{20})$ pertanto spariscono tutti i termini di esponente pari e si raddoppiano i dispari: $2ai + 2ci^3 + \ldots + 2ci^{17} + 2ai^{19} = 2ai - 2ci + \ldots + 2ci - 2ai = 0$

47. **a)** $i^{4n} + i^{4n+1} + i^{4n+2} + i^{4n+3}$, $n \in \mathbb{N}$; **b)** $i^{4n} - i^{4n+1} - i^{4n+2} + i^{4n+3}$, $n \in \mathbb{N}$

a) $1 + i + i^2 + i^3 = 1 + i - 1 - i = 0$; b) $1 - i + 1 - i = 2 - 2i$

48. **a)** $\dfrac{1}{\left(\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^2 - \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}}$; **b)** $\dfrac{a+bi}{a-bi}$; **c)** $\dfrac{a+bi}{a-bi} + \dfrac{a-bi}{a+bi}$

a) $\dfrac{1}{\dfrac{1-3-2\sqrt{3}i}{4} - \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}} = \dfrac{1}{\dfrac{1-3-\cancel{2\sqrt{3}i}-2+\cancel{2\sqrt{3}i}}{4}} = \dfrac{4}{-4} = -1$;

b) $\dfrac{a+bi}{a-bi} = \dfrac{a^2-b^2+2abi}{a^2+b^2} = \dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2} + \dfrac{2ab}{a^2+b^2}i$; c) $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2} + \cancel{\dfrac{2ab}{a^2+b^2}}i + \dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2} - \cancel{\dfrac{2ab}{a^2+b^2}}i = 2\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$

49. **a)** $\left(\dfrac{a+bi}{a-bi}\right)^2 - \left(\dfrac{a-bi}{a+bi}\right)^2$; **b)** $\left(\dfrac{a+bi}{a-bi}\right)^2 + \left(\dfrac{a-bi}{a+bi}\right)^2$

a)
$$\frac{(a+bi)^4-(a-bi)^4}{(a^2+b^2)^2} = \frac{\left[(a+bi)^2-(a-bi)^2\right]\cdot\left[(a+bi)^2+(a-bi)^2\right]}{(a^2+b^2)^2} =$$
$$= \frac{\left[\cancel{a^2-b^2}+2abi\cancel{-a^2+b^2}+2abi\right]\cdot\left[a^2-b^2\cancel{+2abi}+a^2-b^2\cancel{-2abi}\right]}{(a^2+b^2)^2} = \frac{8ab(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^2}i;$$

b)
$$\frac{(a+bi)^4+(a-bi)^4}{(a^2+b^2)^2} = \frac{a^4+\cancel{4a^3bi}+6a^2b^2i^2+\cancel{4ab^3i^3}+b^4i^4+a^4-\cancel{4a^3bi}+6a^2b^2i^2-\cancel{4ab^3i^3}+b^4i^4}{(a^2+b^2)^2} =$$
$$= \frac{2a^4-12a^2b^2+2b^4}{(a^2+b^2)^2}$$

50. **a)** $\dfrac{b+ai}{-a+bi} + \dfrac{a+bi}{-b+ai}$; **b)** $\dfrac{(b+ai)^2}{-b+ai}$; **c)** $\dfrac{|a-bi|}{a+bi}$

a) $\dfrac{(b+ai)(a+bi)}{-a^2-b^2} + \dfrac{(a+bi)(b+ai)}{-a^2-b^2} = \dfrac{\cancel{ab}+b^2i-a^2i\cancel{-ab}+\cancel{ab}+a^2i+b^2i\cancel{-ab}}{-a^2-b^2} = -2i$;

b) $\dfrac{(b+ai)^3}{-a^2-b^2} = \dfrac{b^3+3ab^2i-3a^2b-a^3i}{-a^2-b^2} = \dfrac{3a^2b-b^3}{a^2+b^2} + \dfrac{a^3-3ab^2}{a^2+b^2}i$;

c) $\dfrac{a\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2} - \dfrac{b\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}i = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} - \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}i$

51. **Esprimere la parte reale di un numero complesso mediante z e $\bar{z}$.**

Si ha: $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi \Rightarrow z + \bar{z} = 2a \Rightarrow a = Re(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$

52. **Esprimere la parte immaginaria di un numero complesso mediante z e $\bar{z}$.**

$z - \bar{z} = 2bi \Rightarrow b = Im(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$

53. **Provare che si ha: $|z| \cdot |w| = |z \cdot w|$, $\forall\, z, w \in \mathbb{C}$.**

$z=a+bi, w=c+di \Rightarrow |a+bi|\cdot|c+di|=\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}; |(a+bi)\cdot(c+di)|=|(ac-bd)+(ad+bc)i|=$

$=\sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2}=\sqrt{a^2c^2\cancel{-2abcd}+b^2d^2+a^2d^2+\cancel{2abcd}+b^2c^2}=\sqrt{a^2(c^2+d^2)+b^2(c^2+d^2)}=$

$=\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$

54. Provare la validità della seguente uguaglianza: $\|z+w\|=\|z\|+2\cdot Re(z\cdot\overline{w})+\|w\|, \forall z,w\in\mathbb{C}$**.**

$\|(a+c)+(b+d)i\|=(a+c)^2+(b+d)^2; a^2+b^2+2\cdot Re[(a+bi)(c-di)]+c^2+d^2=$

$=a^2+b^2+2\cdot(ac+bd)+c^2+d^2=(a+c)^2+(b+d)^2$

55. Provare la validità della seguente uguaglianza: $\|z-w\|=\|z\|-2\cdot Re(z\cdot\overline{w})+\|w\|, \forall z,w\in\mathbb{C}$**.**

$\|(a-c)-(b-d)i\|=(a-c)^2+(b-d)^2=a^2+b^2-2\cdot(ac+bd)+c^2+d^2$

56. Provare la validità della seguente uguaglianza: $\|z+w\|+\|z-w\|=2\cdot(\|z\|+\|w\|), \forall z,w\in\mathbb{C}$**.**

$\left[(a+c)^2+(b+d)^2\right]+\left[(a-c)^2+(b-d)^2\right]=2(a^2+b^2+c^2+d^2)=2\left[(a^2+b^2)+(c^2+d^2)\right]$

57. Quanti e quali sono i distinti valori che assume l'espressione $i^n + i^{-n}$, al variare di n nell'insieme dei numeri naturali?

$i^n + i^{-n} = i^n + 1/i^n$. Si ha: $i^{4k} + 1/i^{4k} = 1 + 1 = 2$; $i^{4k+1} + 1/i^{4k+1} = i + 1/i = i - i = 0$; $i^{4k+2} + 1/i^{4k+2} = -1 - 1 = -2$; $i^{4k+3} + 1/i^{4k+3} = -i - 1/i = -i + i = 0$. Quindi solo 3 valori diversi.

Trovare i valori dei parametri reali h e k, se esistono, per cui le seguenti uguaglianze sono identità

58. a) $h + k - 1 + (3k - h + 2)i = \dfrac{1-i}{3-4i}$; b) $h - k + (k - 2h + 1)i = 5 + 2i$

a) $h + k - 1 + (3k - h + 2)i = \dfrac{7+i}{25} \Rightarrow \begin{cases} h+k-1=7/25 \\ 3k-h+2=1/25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h=29/20 \\ k=-17/100 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} h-k=5 \\ k-2h+1=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h=-6 \\ k=-11 \end{cases}$

59. a) $3h - 1 + (2k - 3)i = 1 + i$; b) $\dfrac{h-ki}{1+i}=4-i$; c) $\dfrac{ki}{2}=\dfrac{h}{3-i}$

a) $\begin{cases} 3h-1=1 \\ 2k-3=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h=2/3 \\ k=2 \end{cases}$; b) $\dfrac{(h-k)+(-h-k)i}{2}=4-i \Rightarrow \begin{cases} h-k=8 \\ -h-k=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h=5 \\ k=-3 \end{cases}$;

c) $\dfrac{ki}{2}=\dfrac{3h+hi}{10} \Rightarrow \begin{cases} 3h=0 \\ 5k-2h=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h=0 \\ k=0 \end{cases}$

Trovare, se esistono numeri reali x per i quali le seguenti espressioni rappresentano rispettivamente numeri reali o numeri immaginari puri

60. a) $\dfrac{xi}{1+i}$; b) $\dfrac{x-3+xi}{x-i}$; c) $\dfrac{(2-xi)^2}{3x+2i}$; d) $\dfrac{3+x+xi}{3+x-i}$; e) $\dfrac{5x-i}{2+xi}$

a) $\dfrac{-x}{2}+\dfrac{x}{2}i; Im\left(\dfrac{-x}{2}+\dfrac{x}{2}i\right)=0 \Rightarrow x=0; Re\left(\dfrac{-x}{2}+\dfrac{x}{2}i\right)=0 \Rightarrow x=0, N.A.$, il valore nel secondo caso non è accettabile perché si ottiene 0 che non è un numero immaginario puro;

b) $\dfrac{x-3+xi}{x-i}=\dfrac{x^2-4x}{x^2+1}+\dfrac{x^2+x-3}{x^2+1} \Rightarrow Im(z)=0 \Rightarrow x^2+x-3=0 \Rightarrow x=-\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$;

$Re(z)=0 \Rightarrow x^2-4x=0 \Rightarrow x=0 \vee x=4$;

c) $\dfrac{(2-xi)^2}{3x+2i}=\dfrac{(4-x^2-4xi)(3x-2i)}{9x^2+4}=\dfrac{x(4-3x^2)}{9x^2+4}-\dfrac{2(5x^2+4)}{9x^2+4}i \Rightarrow Im(z)=0 \Rightarrow 5x^2+4=0 \Rightarrow \varnothing$;

$Re(z)=0 \Rightarrow x=0 \vee x=\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$;

d) $\dfrac{(3+x+xi)(3+x+i)}{(3+x)^2+1}=\dfrac{x^2+5x+9}{x^2+6x+10}+\dfrac{x^2+4x+3}{x^2+6x+10}i \Rightarrow Im(z)=0 \Rightarrow x^2+4x+3=0 \Rightarrow x=-3 \vee x=-1;$;

$Re(z)=0 \Rightarrow x^2+5x+9=0 \Rightarrow \varnothing$

e) $\dfrac{(5x-i)(2-xi)}{4+x^2}=\dfrac{9x}{4+x^2}+\dfrac{5x^2+2}{4+x^2}i \Rightarrow Im(z)=0 \Rightarrow x=0; Re(z)=0 \Rightarrow \varnothing$

61. Per quali numeri complessi z la somma $z+\dfrac{1}{z}$ è un numero reale?

$z+\dfrac{1}{z}=\dfrac{z^2+1}{z} \Rightarrow \dfrac{(a+bi)^2+1}{a+bi}=\dfrac{(a^2-b^2+1+2abi)(a-bi)}{a^2+b^2}=\dfrac{a^2+b^2+1}{a^2+b^2}+\dfrac{b(a^2+b^2-1)}{a^2+b^2}i$, quindi deve essere $a^2+b^2=1$, ossia i numeri a norma unitaria

Determinare quali fra le seguenti coniche sono spezzate; per quelle che lo sono determinare le rette in cui si spezzano. Determinare infine il tipo di ognuna delle coniche

1. $4x^2-4xy+y^2+4x-2y+1=0$

$(2x-y+1)^2=0$; Parabola reale spezzata nella retta $2x-y+1=0$

2. $12x^2-7xy+y^2+13x-4y+2=0$

$\Delta=49-48>0$:Iperbole; $\begin{vmatrix} 12 & -7/2 & 13/2 \\ -7/2 & 1 & -2 \\ 13/2 & -2 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 12 & -7/2 \\ -7/2 & 1 \\ 13/2 & -2 \end{matrix}=\dfrac{1}{4}\neq 0$, non degenere

3. $6x^2+7xy-5y^2+3x+5y+1=0$

$\Delta=49+120>0$:Iperbole $\begin{vmatrix} 6 & 7/2 & 3/2 \\ 7/2 & -5 & 5/2 \\ 3/2 & 5/2 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 6 & 7/2 \\ 7/2 & -5 \\ 3/2 & 5/2 \end{matrix}=-\dfrac{169}{4}\neq 0$ non degenere

4. $x^2-2xy+y^2-1=0$

$(x-y)^2-1=0 \Rightarrow (x-y+1)(x-y-1)$ Parabola reale spezzata in $x-y+1=0$ e $x-y-1=0$

5. $x^2-4xy+4y^2-x+2y-12=0$

$(x-2y)^2-(x-2y)-12=0$; si ha: $z^2-z-12=0 \Rightarrow (z-4)(z-3)$, quindi: $(x-2y-4)(x-2y+3)=0$; Parabola reale spezzata in $x-2y+3=0$ e $x-2y-4=0$

6. $20x^2+xy-y^2+23x+8y-7=0$

$\Delta=1+80>0$: Iperbole $\begin{vmatrix} 20 & 1/2 & 23/2 \\ 1/2 & -1 & 4 \\ 23/2 & 4 & -7 \end{vmatrix}\begin{matrix} 20 & 1/2 \\ 1/2 & -1 \\ 23/2 & 4 \end{matrix}=0$ spezzata; $20x^2+(23+y)x-y^2+8y-7=0$

$$x=\frac{-23-y\pm\sqrt{529+46y+y^2+80y^2-640y+560}}{40}=\frac{-23-y\pm\sqrt{81y^2-594y+1089}}{40}=$$

$$\Rightarrow \quad =\frac{-23-y\pm\sqrt{(9y-33)^2}}{40}=\prec \begin{matrix} \dfrac{-23-y+9y-33}{40}=\dfrac{8y-56}{40}=\dfrac{y-7}{5} \\ \dfrac{-23-y-9y+33}{40}=\dfrac{10-10y}{40}=\dfrac{1-y}{4} \end{matrix}$$

nelle rette $4x+y-1=0$ e $5x-y+7=0$

7. $4x^2+y^2+2=0$

$\Delta=1-8<0$: Ellisse immaginaria (somma di addendi non negativi) non degenere, è di fatto un'ellisse canonica

8. $10x^2-29xy+10y^2+17x-11y+3=0$

$\Delta=841-400>0$: Iperbole $\begin{vmatrix} 10 & -29/2 & 17/2 \\ -29/2 & 10 & -11/2 \\ 17/2 & -11/2 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} 10 & -29/2 \\ -29/2 & 10 \\ 17/2 & -11/2 \end{matrix}=0$, spezzata, $10x^2-(29y-17)x+10y^2-11y+3=0 \Rightarrow$

$$x=\frac{29y-17\pm\sqrt{841y^2-986y+289-400y^2+440y-120}}{20}=\frac{29y-17\pm\sqrt{441y^2-586y+169}}{20}=$$

$$=\frac{29y-17\pm\sqrt{(21y-13)^2}}{20}=\begin{cases}\dfrac{29y-17+21y-13}{20}=\dfrac{50y-30}{20}=\dfrac{5y-3}{2}\\[2ex] \dfrac{29y-17-21y+13}{20}=\dfrac{8y-4}{20}=\dfrac{2y-1}{5}\end{cases}$$ nelle

rette $5x-2y+1=0$ e $2x-5y+3=0$]

9. $\mathbf{13x^2+10xy+2y^2-8x-4y-16=0}$

$\Delta=100-104<0$: Ellisse reale $\begin{vmatrix}13&5&-4\\5&2&-2\\-4&-2&-16\end{vmatrix}\begin{vmatrix}13&5\\5&2\\-4&-2\end{vmatrix}=-20\neq 0$ non degenere

10. $\mathbf{4x^2-12xy+9y^2-8x+6y+1=0}$

$(2x-3y)^2-8x+6y+1=0$, $\begin{vmatrix}4&5&-4\\5&2&-2\\-4&-2&-16\end{vmatrix}\begin{vmatrix}13&5\\5&2\\-4&-2\end{vmatrix}=-20\neq 0$ [Parabola reale non degenere]

11. $\mathbf{16x^2+8xy+y^2-9=0}$

$(4x+y)^2-9=0\Rightarrow(4x+y-3)(4x+y+3)$; Parabola spezzata in $4x+y-3=0$ e $4x+y+3=0$

12. $\mathbf{20x^2-13xy+2y^2+31x-10y+12=0}$

$\Delta=169-160>0$: Iperbole $\begin{vmatrix}20&-13/2&31/2\\-13/2&2&-5\\31/2&-5&12\end{vmatrix}\begin{vmatrix}20&-13/2\\-13/2&2\\31/2&-5\end{vmatrix}=0$, spezzata,

$20x^2-(13y-31)x+2y^2-10y+12=0\Rightarrow$

$$x=\frac{13y-31\pm\sqrt{169y^2-806y+961-160y^2+800y-960}}{40}=\frac{13y-31\pm\sqrt{(3y-1)^2}}{40}=\begin{cases}\dfrac{2y-4}{5}\\[2ex]\dfrac{y-3}{4}\end{cases}$$

nelle rette $4x-y+3=0$ e $5x-2y+4=0$]

Determinare le rette in cui si spezzano le ellissi immaginarie seguenti

13. $\mathbf{16x^2+y^2-6y+9=0}$

$16x^2+(y-3)^2=0\Rightarrow 4x+i\cdot(y-3)=0$ e $4x-i\cdot(y-3)=0$

14. $\mathbf{5x^2+y^2-2xy+2x-2y+1=0}$

$5x^2-2(y-1)x+y^2-2y+1=0\Rightarrow\Delta/4=(y-1)^2-5y^2+10y-5=y^2-2y+1-5y^2+10y-5=-4y^2+8y-4=-(2y-2)^2\Rightarrow x=(y-1\pm(2y-2)i)/5\Rightarrow 5x-(1-2i)\,y+1-2i=0;\ 5x-(1+2i)\,y+1+2i=0$

15. $\mathbf{9x^2+y^2+6x+1=0}$

$(3x+1)^2+y^2=0\Rightarrow 3x-iy+1=0$ e $3x+iy+1=0$

Determinare l'eventuale punto comune alla retta complessa seguente e alla sua coniugata

16. **a)** $\mathbf{(1-i)x+y-i=0}$; **b)** $\mathbf{2x+3y-1-2i=0}$; **c)** $\mathbf{(1+2i)x-2iy-1+i=0}$

a) $\begin{cases}(1-i)x+y-i=0\\(1+i)x+y+i=0\end{cases}\Rightarrow(I+II)\begin{cases}(1-i)x+y-i=0\\2x+2y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(\cancel{1}-i)x\cancel{-x}-i=0\\y=-x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}$;

b) $\begin{cases}2x+3y-1-2i=0\\2x+3y+1+2i=0\end{cases}\Rightarrow(I-II)\begin{cases}2x+3y-1-2i=0\\-2-4i=0\end{cases}\Rightarrow\varnothing$;

c) $\begin{cases}(1+2i)x-2iy-1+i=0\\(1-2i)x+2iy-1-i=0\end{cases}\Rightarrow(I+II)\begin{cases}(1+2i)x-2iy-1+i=0\\2x-2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cancel{1}+2i-2iy\cancel{-1}+i=0\\x=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=3/2\end{cases}$

17. **a)** $\mathbf{(2-i)x-(2-3i)y-2i=0}$; **b)** $\mathbf{3x+iy-2=0}$; **c)** $\mathbf{(-2+i)x+2(1-i)y-1+i=0}$

a) $\begin{cases}(2-i)x-(2-3i)y-2i=0\\(2+i)x-(2+3i)y+2i=0\end{cases}\Rightarrow(I+II)\begin{cases}(2-i)x-(2-3i)y-2i=0\\4x-4y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(\cancel{2}-i)x-(\cancel{2}-3i)x-2i=0\\y=x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$

b) $\begin{cases}3x+iy-2=0\\3x-iy-2=0\end{cases}\Rightarrow(I+II)\begin{cases}3x+iy-2=0\\6x-4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2+iy-2=0\\x=2/3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2/3\\y=0\end{cases}$;

c) $\begin{cases}(-2+i)x+2(1-i)y-1+i=0\\(-2-i)x+2(1+i)y-1-i=0\end{cases}\Rightarrow(I+II)\begin{cases}(-2+i)x+2(1-i)y-1+i=0\\-4x+4y-2=0\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases}(\cancel{-2}+i)x+2(\cancel{1}-i)x+\cancel{1-i-1+i}=0\\y=x+1/2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=1/2\end{cases}$

Giustificare le risposte ai seguenti quesiti

18. Se una conica è spezzata in due rette coincidenti di che tipo è?

Parabola, perché $(ax + by + c)^2 = 0$ ha $\Delta = 0$

19. Se una conica è spezzata in due rette distinte di che tipo è?

Parabola se le rette sono parallele, $(ax + by + c)(ax + by + d) = 0 \Rightarrow (ax + by)^2 + (ax + by)(c + d) \Rightarrow \Delta = 0$; o iperbole se non lo sono $(ax + by + c)(mx + ny + d) = 0 \Rightarrow amx^2 + (an + bm)xy + bny^2 + (ad + cm)x + (bd + cn)y + cd \Rightarrow \Delta = (an + bm)^2 - 4abmn = (an - bm)^2 > 0$.

20. Se una conica è spezzata in due rette immaginarie e coniugate di che tipo è?

Sempre ellisse: $[(a + ib)x + (c + id)y + e + if]\,[(a - ib)x + (c - id)y + e - if] = 0 \Rightarrow (a^2 + b^2)x^2 + (ac + bd)xy + (c^2 + d^2)y^2 + 2(ae + bf)x + 2(ce + df)y + e^2 + f^2 = 0 \Rightarrow \Delta = (ac + bd)^2 - 4(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = 2abcd - a^2(3c^2 + 4d^2) - b^2(4c^2 + 3d^2) < 0$.

Determinare le equazioni delle coniche passanti per i punti indicati

21. (–1; 2), (1; 1), (0; 2), (0; –1), (–2; 0)

$$\begin{cases}a-2b+4c-d+2e+f=0\\a+b+c+d+e+f=0\\4c+2e+f=0\\c-e+f=0\\4a-2d+f=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-f/2\\b=0\\c=-f/2\\d=-f/2\\e=f/2\end{cases}\Rightarrow(f=-2)\begin{cases}a=1\\b=0\\c=1\\d=1\\e=-1\end{cases}\Rightarrow x^2+y^2+x-y-2=0$$

22. (–1; 2), (2; 2), (0; 3), (0; 0), (–2; 0)

$$\begin{cases}a-2b+4c-d+2e+f=0\\4a+4b+4c+2d+2e+f=0\\9c+3e+f=0\\f=0\\4a-2d+f=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-e/3\\b=e/2\\c=-e/3\\d=-2e/3\\f=0\end{cases}\Rightarrow(e=-6)\begin{cases}a=2\\b=-3\\c=2\\d=4\\f=0\end{cases}\Rightarrow 2x^2-3xy+2y^2+4x-6y=0$$

23. (–3; 2), (3; 1), (0; 3), (0; 0), (–1; 1)

$$\begin{cases}9a-6b+4c-3d+2e+f=0\\9a+3b+c+3d+e+f=0\\9c+3e+f=0\\f=0\\a-b+c-d+e+f=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-2e/9\\b=-8e/9\\c=-e/3\\d=4e/3\\f=0\end{cases}\Rightarrow(e=-9)\begin{cases}a=2\\b=8\\c=3\\d=-12\\f=0\end{cases}\Rightarrow 2x^2+8xy+3y^2-12x-9y=0\ [$$

24. (–3; 1), (2; 3), (–1; 3), (–1; 4), (1; 1)

$$\begin{cases}9a-3b+c-3d+e+f=0\\4a+6b+9c+2d+3e+f=0\\a-3b+9c-d+3e+f=0\\a-4b+16c-d+4e+f=0\\a+b+c+d+e+f=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-2f/11\\b=3f/11\\c=4f/33\\d=-7f/11\\e=-19f/33\end{cases}\Rightarrow(f=-33)\begin{cases}a=6\\b=-9\\c=-4\\d=21\\e=19\end{cases}\Rightarrow 6x^2-9xy-4y^2+21x+19y-33=0$$

25. **(0; 0), (3; 3), (0; 2), (1; 2), (1; 1)**

$$\begin{cases} f=0 \\ 9a+9b+9c+3d+3e+f=0 \\ 4c+2e+f=0 \\ a+2b+4c+d+2e+f=0 \\ a+b+c+d+e+f=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=e/2 \\ c=-e/2 \\ d=-e \\ f=0 \end{cases} \Rightarrow (e=2) \begin{cases} a=0 \\ b=1 \\ c=-1 \\ d=-2 \\ f=0 \end{cases} \Rightarrow xy-y^2-2x+2y=0$$

Posizioni reciproche di retta e conica e di due coniche

Determinare le reciproche posizioni fra retta e conica

1. **a) $y = x^2 - 2x + 1$; $x - y + 1 = 0$; b) $x = -y^2 + 3y$; $3x - 2y - 4 = 0$**

a) $\begin{cases} y=x^2-2x+1 \\ x-y+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1=x^2-2x+1 \\ y=x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-3x=0 \\ y=x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \vee x=3 \\ y=1 \vee y=4 \end{cases}$: Secanti in (0; 1) e (3; 4);

b) $\begin{cases} x=-y^2+3y \\ 3x-2y-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2y+4}{3}=-y^2+3y \\ x=\dfrac{2y+4}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y^2-7y+4=0 \\ x=\dfrac{2y+4}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2y+4}{3} \\ y=\dfrac{7\pm\sqrt{49-48}}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \vee x=\dfrac{20}{9} \\ y=1 \vee y=\dfrac{4}{3} \end{cases}$:

Secanti in $A \equiv (2; 1)$; $B \equiv (20/9; 4/3)$

2. **$x^2 + y^2 - x - 2y - 3 = 0$; $x + 5y - 1 = 0$**

$$\begin{cases} x^2+y^2-x-2y-3=0 \\ x+5y-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-5y)^2+y^2-1+5y-2y-3=0 \\ x=1-5y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 26y^2-7y-3=0 \\ x=1-5y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1-5y \\ y=\dfrac{7\pm\sqrt{49+312}}{52} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{28}{13} \vee x=-\dfrac{3}{2} \\ y=-\dfrac{3}{13} \vee y=\dfrac{1}{2} \end{cases} :$$

Secanti in (–3/2; 1/2); (28/13; – 3/13)

3. **$3x^2 + 3y^2 - y - 1 = 0$; $3x + 2y = 0$**

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2-y-1=0 \\ 3x+2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y^2/3+3y^2-y-1=0 \\ x=-2y/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13y^2-3y-3=0 \\ x=-2y/3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{3\pm\sqrt{9+156}}{26} \\ x=-\dfrac{2}{3}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{3+\sqrt{165}}{39} \vee x=\dfrac{-3+\sqrt{165}}{39} \\ y=\dfrac{3-\sqrt{165}}{26} \vee y=\dfrac{3+\sqrt{165}}{26} \end{cases}$$

Secanti in $A \equiv \left(-\dfrac{3+\sqrt{165}}{39}; \dfrac{3-\sqrt{165}}{26}\right)$ e $B \equiv \left(\dfrac{-3+\sqrt{165}}{39}; \dfrac{3+\sqrt{165}}{26}\right)$

4. **a) $3x^2 + 2y^2 - 1 = 0$; $x + y - 3 = 0$; b) $y^2 - 2x^2 - 4 = 0$; $4x - 3y + 2 = 0$**

a) $\begin{cases} 3x^2+2y^2-1=0 \\ x+y-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(3-y)^2+2y^2-1=0 \\ x=3-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5y^2-18y+26=0 \\ x=3-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta/4=81-130<0 \\ x=3-y \end{cases}$: Esterne;

b) $\begin{cases} y^2-2x^2-4=0 \\ 4x-3y+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2-\left(\dfrac{3y-2}{4}\right)^2-4=0 \\ x=\dfrac{3y-2}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2-12y+36=0 \\ x=\dfrac{3y-2}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=6 \end{cases}$: Tangenti in $A \equiv (4; 6)$

5. **$x^2 + 4y^2 - 2 = 0$; $3x + 5y + 4 = 0$**

$$\begin{cases} x^2+4y^2-2=0 \\ 3x+5y+4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{-5y-4}{3}\right)^2+4y^2-2=0 \\ x=\dfrac{-5y-4}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 61y^2+40y-2=0 \\ x=\dfrac{-5y-4}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-48\pm5\sqrt{58}}{61} \\ y=\dfrac{-20\mp3\sqrt{58}}{61} \end{cases} : \text{Secanti}$$

6. $\boldsymbol{x^2 - y^2 - 5 = 0;\ 2x - y + 7 = 0}$

$$\begin{cases} x^2-y^2-5=0 \\ 2x-y+7=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-(2x+7)^2-5=0 \\ y=2x+7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2+28x+54=0 \\ y=2x+7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-14\pm\sqrt{34}}{3} \\ y=\dfrac{-7\pm2\sqrt{34}}{3} \end{cases} : \text{Secanti}$$

7. **a)** $\boldsymbol{xy = 1;\ x - 3y + 2 = 0;}$ **b)** $\boldsymbol{3xy = -4;\ x - 7y + 2 = 0}$

a) $\begin{cases} xy=1 \\ x-3y+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y^2-2y-1=0 \\ x=3y-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \vee x=1 \\ y=-\dfrac{1}{3} \vee y=1 \end{cases}$ Secanti in $A \equiv (1;\ 1)$; $B \equiv (-3;\ -1/3)$;

b) $\begin{cases} 3xy=-4 \\ x-7y+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 21y^2-6y+4=0 \\ x=7y-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta/4=9-84<0 \\ x=7y-2 \end{cases}$: Esterne

Determinare le equazioni delle tangenti alle date coniche nei punti di seguito indicati

8. $\boldsymbol{2x^2 + 2y^2 - 3x - 14y + 15 = 0}$**, nei suoi punti di ascissa –1**

Determiniamo le ordinate: $2y^2 - 14y + 20 = 0 \Rightarrow y = 2 \vee y = 5$.

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-3x-14y+15=0 \\ y-2=m(x+1) \end{cases} \vee \begin{cases} 2x^2+2y^2-3x-14y+15=0 \\ y-5=m(x+1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(m^2+1)x^2+(4m^2-6m-3)x+2m^2-6m-5=0 \\ y-2=m(x+1) \end{cases} \vee \begin{cases} 2(m^2+1)x^2+(4m^2+6m-3)x+2m^2+6m-5=0 \\ y-5=m(x+1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta=0 \Rightarrow 36m^2+84m+49=0 \vee 36m^2-84m+49=0 \Rightarrow m=\pm\frac{7}{6}$$

$7x + 6y - 5 = 0 \vee 7x - 6y + 37 = 0$

9. $\boldsymbol{2x^2 + 2y^2 - 9x - 55y + 57 = 0}$**, nei suoi punti di ordinata 1**

Determiniamo le ascisse: $2x^2 - 9x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1/2 \vee x = 4 \Rightarrow$

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-9x-55y+57=0 \\ y-1=m(x-1/2) \end{cases} \vee \begin{cases} 2x^2+2y^2-9x-55y+57=0 \\ y-1=m(x-4) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4(1+m^2)x^2-2(2m^2+51m+9)x+m^2+51m+8=0 \\ y-1=m(x-1/2) \end{cases} \vee \begin{cases} 2(1+m^2)x^2-(16m^2+51m+9)x+32m^2+204m+4=0 \\ y-1=m(x-4) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta=0 \Rightarrow 2601m^2+714m+49=0 \vee 2601m^2-714m+49=0 \Rightarrow m=\pm\frac{7}{51}$$

$7x - 51y + 23 = 0,\ 14x + 102y - 109 = 0$

10. $\boldsymbol{y = -15x^2 - 17x + 4}$**, nei suoi punti di ordinata 0**

Determiniamo le ascisse: $x = -4/3 \vee x = 1/5 \Rightarrow$

$$\begin{cases} y=-15x^2-17x+4 \\ y=m(x+4/3) \end{cases} \vee \begin{cases} y=-15x^2-17x+4 \\ y=m(x-1/5) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 45x^2+3(m+17)x+4m-12=0 \\ y=m(x+4/3) \end{cases} \vee \begin{cases} 75x^2+5(m+17)x-m-20=0 \\ y=m(x-1/5) \end{cases} \Rightarrow 69x - 3y + 92 = 0 \vee 115x + 5y - 23 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta=0 \Rightarrow m^2-46m+529=0 \vee m^2+46m+529=0 \Rightarrow m=\pm23$$

11. $\boldsymbol{x = 28y^2 + y}$**, nei suoi punti di ascissa 2**

Determiniamo le ordinate: $28y^2 + y - 2 = 0 \Rightarrow y = -2/7 \vee y = 1/4 \Rightarrow$

$$\begin{cases} x = 28y^2 + y \\ y + 2/7 = m(x-2) \end{cases} \vee \begin{cases} x = 28y^2 + y \\ y - 1/4 = m(x-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{(7m+1)(8m+1)}{28m^2} \vee x = 2 \\ y = \dfrac{7m+1}{28m} \vee y = -\dfrac{2}{7} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \dfrac{(7m-1)(8m-1)}{28m^2} \vee x = 2 \\ y = \dfrac{1-8m}{28m} \vee y = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(7m-1)(8m-1)}{28m^2} = 2 \Rightarrow m = \frac{1}{15} \vee \frac{(7m+1)(8m+1)}{28m^2} = 2 \Rightarrow m = -\frac{1}{15}$$

$7x + 105y + 16 = 0$ e $4x - 60y + 7 = 0$

12. $2x^2 + 5y^2 - 7 = 0$, nei suoi punti di ordinata 1

Determiniamo le ascisse: $2x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow$

$$\begin{cases} 2x^2 + 5y^2 - 1 = 0 \\ y - 1 = m(x-1) \end{cases} \vee \begin{cases} 2x^2 + 5y^2 - 1 = 0 \\ y - 1 = m(x+1) \end{cases} \Rightarrow \frac{5m^2 - 10m - 2}{5m^2 + 2} = 1 \vee \frac{5m^2 + 10m - 2}{5m^2 + 2} = 1 \Rightarrow m = \pm\frac{2}{5}$$

$\Rightarrow 2x + 5y - 7 = 0,\ 2x - 5y + 7 = 0$

13. $x^2 + 5y^2 - 24 = 0$, nei suoi punti di ascissa –2

Determiniamo le ordinate: $5y^2 = 20 \Rightarrow y = \pm 2 \Rightarrow$ con ragionamenti simili ai casi precedenti troviamo le tangenti: $x + 5y + 12 = 0,\ x - 5y + 12 = 0$

14. $x^2 - 2y^2 + 2 = 0$, nei suoi punti di ordinata –3

Determiniamo le ascisse: $x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4 \Rightarrow 2x + 3y + 1 = 0,\ 2x - 3y - 1 = 0$

15. $-2x^2 + 3y^2 - 10 = 0$, nei suoi punti di ascissa –1

Determiniamo le ordinate: $3y^2 = 12 \Rightarrow y = \pm 2 \Rightarrow x - 3y - 5 = 0,\ x + 3y - 5 = 0$

16. $xy = 2$, nel suo punto di ascissa $\sqrt{2}$

Determiniamo l'ordinata: $y = \sqrt{2} \Rightarrow x + y - 2 \cdot \sqrt{2} = 0$

17. $2xy = -1$, nel suo punto di ordinata $\sqrt{3}$

Determiniamo l'ascissa: $x = \dfrac{-1}{2\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow 6x - y + 2\sqrt{3} = 0$

Determinare le equazioni delle tangenti alle coniche indicate che risultano parallele o perpendicolari alle rette indicate

Mettiamo a sistema la conica con il fascio di rette parallele o perpendicolari e imponiamo la tangenza.

18. $y = x^2 + x - 2$, parallele a $2x - y + 1 = 0$

$$\begin{cases} y = x^2 + x - 2 \\ 2x - y + h = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x - h - 2 = 0 \\ y = 2x + h \end{cases} \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow 1 + 4h + 8 = 0 \Rightarrow h = -\frac{9}{4} \Rightarrow 8x - 4y - 9 = 0$$

19. $x = y^2 - 2y + 4$, perpendicolari a $x + 3y = 0$

$$\begin{cases} x = y^2 - 2y + 4 \\ 3x - y + h = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3x+h)^2 - 2(3x+h) - x + 4 = 0 \\ y = 3x + h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x^2 + (6h-7)x + h^2 - 2h + 4 = 0 \\ y = 3x + h \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow \cancel{36h^2} - 84h + 49 - \cancel{36h^2} + 72h - 144 = 0 \Rightarrow 12h = -95 \Rightarrow h = -\frac{95}{12}$$

$36x - 12y - 95 = 0$

20. $4x^2 + 4y^2 + y - 2 = 0$, parallele a $2x - 5y = 0$

$$\begin{cases} 4x^2 + 4y^2 + y - 2 = 0 \\ 2x - 5y + h = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\left(\dfrac{5y-h}{2}\right)^2 + 4y^2 + y - 2 = 0 \\ x = \dfrac{5y-h}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 29y^2 - (10h-1)y + h^2 - 2 = 0 \\ x = \dfrac{5y-h}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow (10h-1)^2 - 116h^2 + 232 = 0 \Rightarrow 16h^2 + 20h - 233 = 0 \Rightarrow h = \frac{-5 \pm \sqrt{957}}{8}$$

quindi le tangenti sono: $16x - 40y + \sqrt{957} - 5 = 0,\ 16x - 40y - \sqrt{957} - 5 = 0$

21. $x^2 + y^2 + 3x - 5 = 0$, perpendicolari a $x + 3y = 0$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 3x - 5 = 0 \\ 3x - y + h = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x^2 + (6h+3)x + h^2 - 5 = 0 \\ y = 3x + h \end{cases} \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow 4h^2 - 36h - 209 = 0 \Rightarrow h = \frac{9 \pm \sqrt{290}}{2}$$

$\Rightarrow 6x-2y+9+\sqrt{290}=0,\ 6x-2y+9-\sqrt{290}=0$

22. **$3x^2 + 2y^2 - 1 = 0$, parallele a $3x + y = 0$**

$$\begin{cases} 3x^2+2y^2-1=0 \\ 3x+y+h=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 21x^2+12hx+2h^2-1=0 \\ y=-3x-h \end{cases} \Rightarrow \Delta=0 \Rightarrow 7-2h^2=0 \Rightarrow h=\pm\sqrt{\frac{7}{2}} \Rightarrow$$

$6x+2y-\sqrt{14}=0,\ 6x+2y+\sqrt{14}=0$

23. **$5x^2 + y^2 - 2 = 0$, perpendicolari a $x + 4y = 0$**

$$\begin{cases} 5x^2+y^2-2=0 \\ 4x-y+h=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 21x^2+8hx+h^2-2=0 \\ y=4x+h \end{cases} \Rightarrow \Delta=0 \Rightarrow 42-5h^2=0 \Rightarrow h=\pm\sqrt{\frac{42}{5}}$$

$\Rightarrow 20x-5y+\sqrt{210}=0,\ 20x-5y-\sqrt{210}=0$

24. **$x^2 - y^2 - 3 = 0$, parallele a $x + 7y = 0$**

$$\begin{cases} x^2-y^2-3=0 \\ x+7y+h=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 48y^2+14hy+h^2-3=0 \\ x=-7y-h \end{cases} \Rightarrow \Delta=0 \Rightarrow 144+h^2=0 \Rightarrow \varnothing \Rightarrow \text{Non ne esistono}$$

25. **$-7x^2 + y^2 - 3 = 0$, perpendicolari a $x - 2y = 0$**

$$\begin{cases} 7x^2-y^2+3=0 \\ 2x+y+h=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2-4xx-h^2+3=0 \\ y=-2x-h \end{cases} \Rightarrow \Delta=0 \Rightarrow 7h^2-9=0 \Rightarrow h=\pm\sqrt{\frac{9}{7}}$$

$\Rightarrow 14x+7y+3\cdot\sqrt{7}=0,\ 14x+7y-3\cdot\sqrt{7}=0$

26. **$xy - 3 = 0$, parallele a $2x + 7y = 0$**

$$\begin{cases} xy=3 \\ 2x+7y+h=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7y^2+hy+6=0 \\ x=\dfrac{-7y-h}{2} \end{cases} \Rightarrow \Delta=0 \Rightarrow h^2-168=0 \Rightarrow h=\pm 2\sqrt{42} \Rightarrow$$

$2x+7y+2\cdot\sqrt{42}=0,\ 2x+7y-2\cdot\sqrt{42}=0$

27. **$5xy + 4 = 0$, perpendicolari a $7x - y = 0$**

$$\begin{cases} 5xy+4=0 \\ x+7y+h=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 35y^2+5hy-4=0 \\ x=-7y-h \end{cases} \Rightarrow \Delta=0 \Rightarrow 25h^2+560=0 \Rightarrow \varnothing \Rightarrow \text{Non ne esistono}$$

Determinare le equazioni della tangente alle coniche seguenti in un loro punto $P \equiv (x_P; y_P)$.

28. **a) $y = ax^2 + bx + c$; b) $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$**

a) Avremo: $(2a\cdot x_P + 0\cdot y_P + b)\cdot x + (0\cdot x_P + 2\cdot 0\cdot y_P - 1)\cdot y + b\cdot x_P + (-1)\cdot y_P + 2c = 0 \Rightarrow y - (2ax_P + b)x + bx_P + 2c - y_P = 0$; b) $(2/a^2\cdot x_P + 0\cdot y_P + 0)\cdot x + (0\cdot x_P + 2/b^2\cdot y_P + 0)\cdot y + 0\cdot x_P + 0\cdot y_P - 2 = 0 \Rightarrow b^2x_Px + a^2y_Py - a^2b^2 = 0$

29. **a) $x = ay^2 + by + c$; b) $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$**

a) $(2\cdot 0\cdot x_P + 0\cdot y_P - 1)\cdot x + (0\cdot x_P + 2\cdot a\cdot y_P + b)\cdot y - x_P + b\cdot y_P + 2c = 0 \Rightarrow x-(2ay_P + b)x - by_P - 2c + x_P = 0$;
b) $(2/a^2\cdot x_P + 0\cdot y_P + 0)\cdot x + (0\cdot x_P - 2/b^2\cdot y_P + 0)\cdot y + 0\cdot x_P + 0\cdot y_P - 2 = 0 \Rightarrow b^2x_Px - a^2y_Py - a^2b^2 = 0$

30. **a) $x^2 - y^2 = a^2$; b) $xy = k$; c) $y^2/a^2 - x^2/b^2 = 1$**

a) $(2\cdot x_P + 0\cdot y_P + 0)\cdot x + (0\cdot x_P - 2\cdot y_P + 0)\cdot y + 0\cdot x_P + 0\cdot y_P + 2a^2 = 0 \Rightarrow x_Px - y_Py - a^2 = 0$;
b) $(2\cdot 0\cdot x_P + 1\cdot y_P + 0)\cdot x + (1\cdot x_P + 2\cdot 0\cdot y_P + 0)\cdot y + 0\cdot x_P + 0\cdot y_P + 2k = 0 \Rightarrow y_Px + x_Px - 2k = 0$;
c) $(2/b^2\cdot x_P + 0\cdot y_P + 0)\cdot x + (0\cdot x_P - 2/a^2\cdot y_P + 0)\cdot y + 0\cdot x_P + 0\cdot y_P - 2 = 0 \Rightarrow a^2x_Px - b^2y_Py + a^2b^2 = 0$]

31. **Applicare le formule stabilite dal Teorema 10 per verificare i risultati degli esercizi dal n. 8 al n. 17**

Usiamo il teorema 10: $(2a\cdot x_P + b\cdot y_P + d)\cdot x + (b\cdot x_P + 2c\cdot y_P + e)\cdot y + d\cdot x_P + e\cdot y_P + 2f = 0$
8. Determiniamo le ordinate: $2y^2 - 14y + 20 = 0 \Rightarrow y = 2 \vee y = 5$. $(-4 + 0 - 3)x + (0 + 8 - 14)y + 3 - 28 + 30 = 0 \Rightarrow 7x + 6y - 5 = 0$ e $(-4 + 0 - 3)x + (0 + 20 - 14)y + 3 - 70 + 30 = 0 \Rightarrow 7x + 6y - 5 = 0,\ 7x - 6y + 37 = 0$; **9.** Determiniamo le ascisse: $2x^2 - 9x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1/2 \vee x = 4 \Rightarrow 7x - 51y + 23 = 0,\ 14x + 102y - 109 < 0$; **10** Determiniamo le ascisse: $x = -4/3 \vee x = 1/5 \Rightarrow 69x - 3y + 92 = 0 \vee 115x + 5y - 23 = 0$; **11**. Determiniamo le ordinate: $28y^2 + y - 2 = 0 \Rightarrow y = -2/7 \vee y = 1/4 \Rightarrow 7x + 105y + 16 = 0$ e $4x - 60y + 7 = 0$; **12**. Determiniamo le ascisse: $2x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow 2x + 5y - 7 = 0,\ 2x - 5y + 7 = 0$ **13**. Determiniamo le ordinate: $5y^2 = 20 \Rightarrow y = \pm 2 \Rightarrow x + 5y + 12 = 0,\ x - 5y + 12 = 0$; **14**. Determiniamo le ascisse: $x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4 \Rightarrow 2x + 3y + 1 = 0,\ 2x - 3y - 1 = 0$; **15**. Determiniamo le ordinate:

$3y^2 = 12 \Rightarrow y = \pm 2 \Rightarrow x - 3y - 5 = 0,\ x + 3y - 5 = 0$; **16**. Determiniamo l'ordinata: $y = \sqrt{2} \Rightarrow x + y - 2\cdot\sqrt{2} = 0$; **17**. Determiniamo l'ascissa: $x = \frac{-1}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow 6x - y + 2\sqrt{3} = 0$

Determinare le eventuali intersezioni fra le seguenti coniche

32. a) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0,\ x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 = 0$; b) $x^2 - y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 5$

a) Basta risolvere il sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 = 0 \end{cases}$ per risolverlo sottraiamo termine a termine: ottenendo $8x + 8 = 0$ A questo punto risolviamo il nuovo sistema formato da una delle due equazioni iniziali e da questa più semplice: $\begin{cases} x + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 = 0 \end{cases}$ si trova subito $x = -1$ dalla prima e sostituendo nella seconda $y = 2$.

b) Come in precedenza per sottrazione: si ottiene $4 - 2y^2 = 0$, da cui $y = \pm\sqrt{2}$, sostituendo nella prima o nella seconda troviamo: $x = \pm\sqrt{3}$

33. a) $xy = -3,\ x^2 - y^2 = 4$; b) $x^2 + y^2 = 7,\ x^2/4 + y^2/2 = 1$

a) $\begin{cases} xy = -3 \\ x^2 - y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3/y \\ 9/y^2 - y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3/y \\ y^4 + 4y^2 - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3/y \\ y^2 = -2 \pm \sqrt{13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2 + \sqrt{13}} \\ y = \pm\sqrt{-2 + \sqrt{13}} \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 7 \\ x^2/4 + y^2/2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 7 - y^2 \\ 7 - y^2 + 2y^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 7 - y^2 \\ y^2 = -3 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$

34. $x^2/7 + y^2/5 = 1,\ x^2/3 - y^2/5 = 1$

$\begin{cases} \frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{5} = 1 \\ \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1 \end{cases} \Rightarrow (I + II) \begin{cases} \frac{\cancel{10}^{\,5}x^2}{21} = \cancel{2} \\ y^2 = \frac{5x^2 - 15}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{21}{5} \\ y^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{\frac{21}{5}} \\ y = \pm\sqrt{2} \end{cases}$, sono 4 punti, scegliendo il segno + per le ascisse e gli altri per l'ordinata sono 2 e gli altri due con l'ascissa negativa.

35. a) $x^2/3 + y^2/11 = 1,\ x^2/3 + y^2/10 = 1$; b) $xy = k,\ xy = h,\ h > 0\ k > 0$

a) $\begin{cases} \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{11} = 1 \\ \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{10} = 1 \end{cases} \Rightarrow (II - I) \begin{cases} \frac{y^2}{110} = 0 \\ x^2 = \frac{30 - 3y^2}{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 3 \\ y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{3} \\ y = 0 \end{cases}$;

b) Uguagliando i secondi membri, dato che i primi sono uguali, avremo $k = h$ che ovviamente è una contraddizione

36. a) $x^2/8 - y^2/5 = 1,\ y^2/5 - x^2/12 = 1$ b) $x^2/7 + y^2/4 = 1,\ x^2/7 - y^2/3 = 1$

a) $\begin{cases} \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{5} = 1 \\ \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{5} = -1 \end{cases} \Rightarrow (I - II) \begin{cases} \frac{x^2}{24} = 2 \\ y^2 = \frac{5x^2 + 60}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 48 \\ y^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 4\sqrt{3} \\ y = \pm 5 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} \frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ \frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases} \Rightarrow (I - II) \begin{cases} \frac{7y^2}{12} = 0 \\ x^2 = \frac{7y^2 + 21}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 7 \\ y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{7}0 \\ y = 0 \end{cases}$

37. a) $x^2 - y^2/4 = 1,\ x^2/8 + y^2/11 = 1$; b) $xy = 1/2,\ x^2 + y^2 = 2$

a) $\begin{cases} x^2 - \dfrac{y^2}{4} = 1 \\ \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{11} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{y^2+4}{4} \\ \dfrac{y^2+4}{32} + \dfrac{y^2}{11} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{y^2+4}{4} \\ y^2 = \dfrac{308}{42} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{120}{43} \\ y^2 = \dfrac{308}{42} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{\dfrac{120}{43}} \\ y = \pm\sqrt{\dfrac{308}{42}} \end{cases}$;

b) $\begin{cases} xy = \dfrac{1}{2} \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = \dfrac{1}{2} \\ (x+y)^2 - 2xy = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = \dfrac{1}{2} \\ (x+y)^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = \dfrac{1}{2} \\ x+y = \pm\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow$

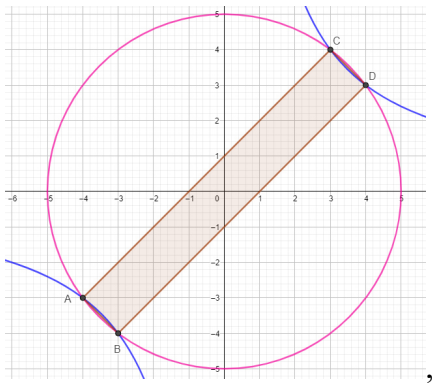
$\Rightarrow z^2 \pm \sqrt{3}z + 1/2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2} \\ y = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}}{2} \\ y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Dopo avere individuato il tipo di poligono intersezione fra le seguenti coniche, determinarne il perimetro

38. a) $xy = 12$, $x^2 + y^2 = 25$); b) $x^2/3 - y^2/2 = 1$, $y^2 + x^2 = 5$

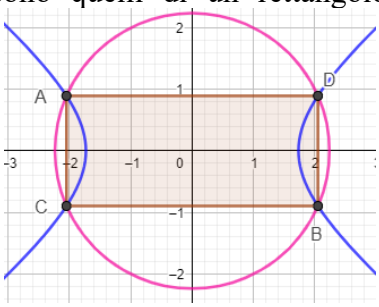
a) Dalla risoluzione del 27b: $\begin{cases} xy = 12 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 12 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow\Rightarrow z^2 \pm z + 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \pm 4 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \pm 4 \\ y = \pm 3 \end{cases}$,

quindi abbiamo un rettangolo di lati che misurano $\sqrt{(4-3)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{2}$ e



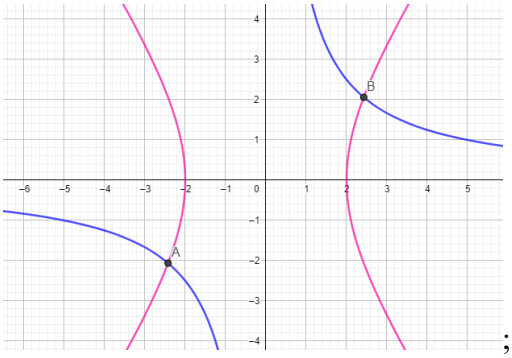
$\sqrt{(4+3)^2 + (3+4)^2} = 7\sqrt{2}$ vertici , pertanto il perimetro misura $16\sqrt{2}$;

b) Il procedimento algebrico è simile ai precedenti, e i vertici sono quelli di un rettangolo:



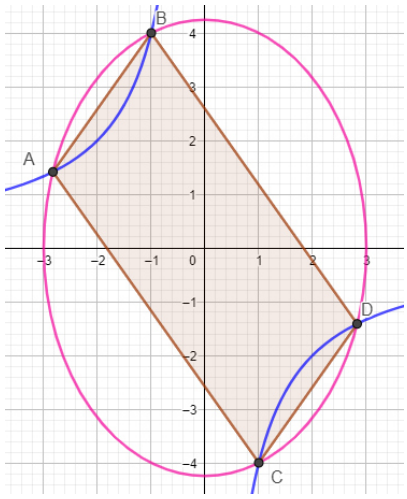
$A_{1,2} \equiv \left(\pm\dfrac{\sqrt{105}}{5}; \pm\dfrac{2\sqrt{5}}{5} \right)$, $A_{3,4} \equiv \left(\pm\dfrac{\sqrt{105}}{5}; \mp\dfrac{2\sqrt{5}}{5} \right)$. Mostriamo la figura: I lati misurano: $2\dfrac{\sqrt{105}}{5}, \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$, quindi il perimetro: $\dfrac{4\sqrt{105} + 8\sqrt{5}}{5}$

39. a) $xy = 5$, $x^2/4 - y^2/9 = 1$ b) $xy = -4$, $x^2/9 + y^2/18 = 1$

a) Nessun poligono 

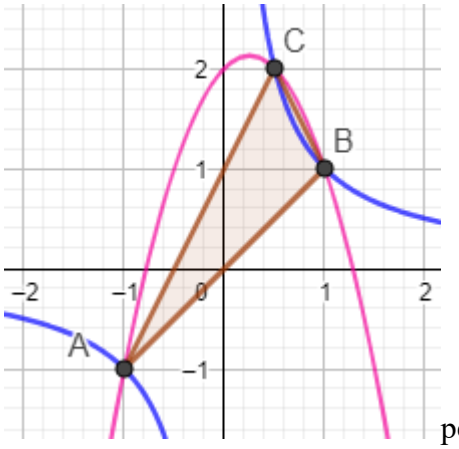
;

b) Parallelogramma di vertici, $\left(\pm 2\sqrt{2};\mp\sqrt{2}\right),\left(\pm 1;\mp 4\right)$ e quindi perimetro:



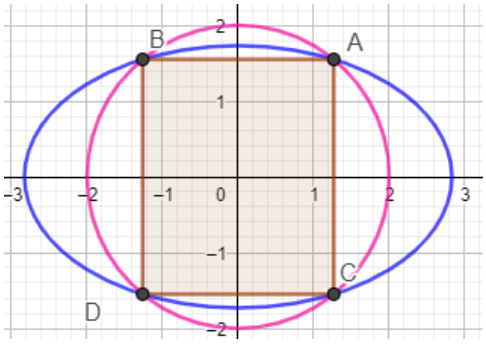
$$2\cdot\sqrt{\left(-2\sqrt{2}+1\right)^2+\left(\sqrt{2}-4\right)^2}+2\cdot\sqrt{\left(-1-2\sqrt{2}\right)^2+\left(4+\sqrt{2}\right)^2}=8\sqrt{6}$$

40. a) $xy = 1$, $y = -2x^2 + x + 2$; b) $x^2/8 + y^2/3 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$



a) Triangolo di vertici (–1; –1), (1; 1) (1/2; 2) perimetro:

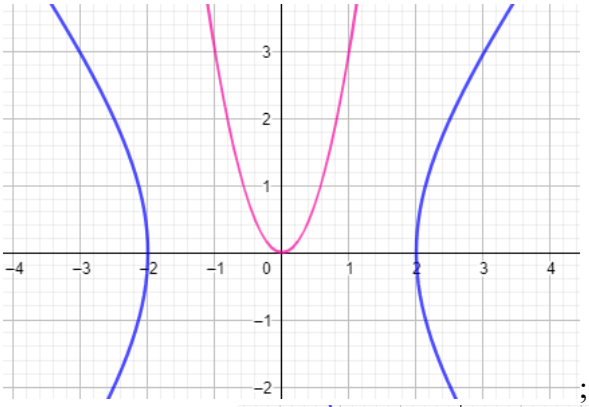
$$\sqrt{4+4}+\sqrt{\frac{1}{4}+1}+\sqrt{\frac{9}{4}+9}=2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}+\sqrt{\frac{45}{4}}=2\sqrt{2}+\frac{\sqrt{5}+3\sqrt{5}}{2}=2\sqrt{2}+2\sqrt{5};$$

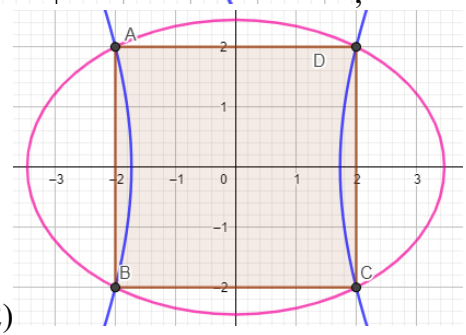


b) Rettangolo di vertici $\left(\pm\frac{2\sqrt{10}}{5};\pm\frac{2\sqrt{15}}{5}\right),\left(\pm\frac{2\sqrt{10}}{5};\mp\frac{2\sqrt{15}}{5}\right)$

perimetro: $2\frac{4\sqrt{10}}{5}+2\frac{4\sqrt{15}}{5}=\frac{8}{5}\left(\sqrt{10}+\sqrt{15}\right)$

41. a) $x^2/4 - y^2/7 = 1$, $y = 3x^2$; b) $x^2/12 + y^2/6 = 1$, $x^2/3 - y^2/12 = 1$

a) Nessun poligono  ;

b) Quadrato, di vertici (2; ±2) (–2; ±2) 

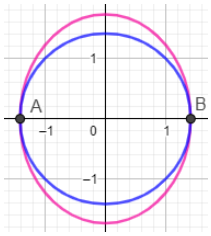
e perimetro 16

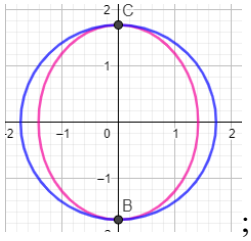
42. Rappresentiamo i grafici $y = ax^2 + bx + c$ e $y = a \cdot (-x)^2 + b \cdot (-x) + c$, in uno stesso riferimento cartesiano ortogonale. Se tutti i coefficienti sono non nulli, in quanti e quali punti si incontrano i due grafici?

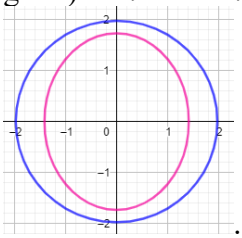
Abbiamo $ax^2 + bx + c = a \cdot (-x)^2 + b \cdot (-x) + c \Rightarrow 2bx = 0$; $y = c$, quindi 1 punto di coordinate $(0; c)$

Studiare, al variare del parametro reale non nullo h, le reciproche posizioni delle coniche di equazioni seguenti

43. $x^2 + y^2 = h$, $x^2/2 + y^2/3 = 1$, $h > 0$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = h \\ \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{3} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = h - y^2 \\ 3\left(h - y^2\right) + 2y^2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = h - y^2 \\ y^2 = 3h - 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 6 - 2h \\ y^2 = 3h - 6 \end{cases},$$ quindi vi sono quattro soluzioni distinte (coniche secanti) se $\begin{cases} h > 0 \\ 6 - 2h > 0 \\ 3h - 6 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h > 0 \\ h < 3 \\ h > 2 \end{cases} \Rightarrow 2 < h < 3$, due soluzioni coincidenti (coniche tangenti) se $h = 2 \vee h = 3$ 



; infine coniche esterne se $0 < h < 2 \vee h > 3$  .

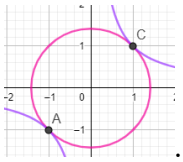
44. $x^2 + y^2 = 2$, $y^2 - x^2/h = 1$, $h > 0$

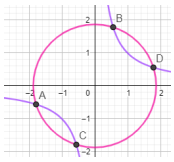
$$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ y^2-\dfrac{x^2}{h}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+\dfrac{x^2+h}{h}=2 \\ y^2=\dfrac{x^2+h}{h} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1+h)x^2=h \\ y^2=\dfrac{x^2+h}{h} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=\dfrac{h}{1+h} \\ y^2=\dfrac{x^2+h}{h} \end{cases}$$

, dato che $h > 0$, vi sono sempre 4 soluzioni reali, quindi sempre coniche secanti in 4 punti

45. a) $xy = h$, $x^2/4 - y^2/9 = 1$, $h \neq 0$; b) $xy = 1$, $x^2 + y^2 = h$, $h > 0$

a) $\begin{cases} xy=h \\ \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{h}{x} \\ \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{h^2}{9x^2}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{h}{x} \\ 9x^4-36x^2-4h^2=0 \end{cases}$. Dato che $\Delta/4 = 324 + 36h^2 > 0$, l'equazione ha sempre 2 soluzioni: $\begin{cases} y=\dfrac{h}{x} \\ x^2=\dfrac{18\pm\sqrt{324+36h^2}}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{h}{x} \\ x=\pm\sqrt{\dfrac{18+\sqrt{324+36h^2}}{9}} \end{cases}$, escluso ovviamente $h = 0$ per cui la prima conica degenera.

b) $\begin{cases} xy=1 \\ x^2+y^2=h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1/y \\ 1/y^2+y^2=h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1/y \\ y^4-hy^2+1=0 \end{cases}$. Dato che $\Delta = h^2 - 4$, l'equazione ha soluzioni per $h \geq 2$. In particolare per $h = 2$: $\begin{cases} x=1/y \\ y^4-2y^2+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1/y \\ (y^2-1)^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\pm1 \\ y=\pm1 \end{cases}$, perciò coniche tangenti esternamente in 2 punti: 

. Se invece $h > 2$ vi sono 4 soluzioni: 

46. a) $xy = h$, $x^2 + y^2 = 1$, $h \neq 0$; b) $xy = -1$, $x^2 + y^2 = h$, $h > 0$

a) $\begin{cases} xy=h \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=h/y \\ h^2/y^2+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=h/y \\ y^4-y^2+h^2=0 \end{cases}$. Dato che $\Delta = 1 - 4h^2$, l'equazione ha soluzioni per $-½ \leq h \leq ½$. In particolare per $h = \pm ½$: $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2y} \\ y^4-y^2+1/4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2y} \\ (y^2-1/2)^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$, perciò coniche tangenti esternamente in 2 punti:. Se invece $-½ < h < ½$ vi sono 4 soluzioni

b) $\begin{cases} xy=-1 \\ x^2+y^2=h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1/y \\ 1/y^2+y^2=h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1/y \\ y^4-hy^2+1=0 \end{cases}$. Dato che $\Delta = h^2 - 4$, l'equazione ha soluzioni per $h \geq 2$. In pratica è come la 45b.

47. a) $xy = h$, $x^2/5 + y^2/6 = 1$, $h \neq 0$; b) $xy = h$, $y^2/4 - x^2/9 = 1$, $h \neq 0$

a) $\begin{cases} xy=h \\ 6x^2+5y^2-30=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=h/y \\ 6h^2/y^2+5y^2-30=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=h/y \\ 5y^4-30y^2+6h^2=0 \end{cases}$. Dato che $\Delta/4 = 225 - 30h^2$, l'equazione ha 4 soluzioni per $-\dfrac{\sqrt{30}}{2} < h < \dfrac{\sqrt{30}}{2}$, ne ha due per $h = \pm\dfrac{\sqrt{30}}{2}$, viceversa non ne ha.

b) $\begin{cases} xy=h \\ 9y^2-4x^2-36=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=h/y \\ 9y^2-4h^2/y^2-36=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=h/y \\ 9y^4-36y^2-4h^2=0 \end{cases}$, stavolta il $\Delta/4 = 324 + 36h^2$ è sempre positivo, quindi vi sono sempre soluzioni reali, ma in numero di 2:

$$\begin{cases} x = h/y \\ y = \pm\sqrt{\dfrac{15+\sqrt{324+36h^2}}{9}} \end{cases}$$

48. **b) $xy = -3$, $x^2/h + y^2 = 1$, $h > 0$; b) $xy = 1$, $x^2 + y^2/h = 1$, $h > 0$**

a) $\begin{cases} xy = -3 \\ x^2 + hy^2 - h = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3/y \\ 9/y^2 + hy^2 - h = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3/y \\ hy^4 - hy^2 + 9 = 0 \end{cases}$, stavolta il $\Delta = h^2 - 36h$ è positivo, per $h > 36$, in questo caso vi sono 4 soluzioni reali; se $h = 36$, sono 2 e per $0 < h < 36$ nessuna.

b) $\begin{cases} xy = 1 \\ hx^2 + y^2 - h = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1/y \\ h/y^2 + y^2 - h = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1/y \\ y^4 - hy^2 + h = 0 \end{cases}$, stavolta il $\Delta = h^2 - 4h$ è positivo, per $h > 4$, in questo caso vi sono 4 soluzioni reali; se $h = 4$, sono 2 e per $0 < h < 4$ nessuna.

49. **a) $xy = 2$, $y^2/5 - x^2/h = 1$, $h > 0$; a) $xy = -2$, $x^2 - y^2/h = 1$, $h > 0$;**

a) $\begin{cases} xy = 2 \\ hy^2 - 5x^2 - 5h = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2/y \\ hy^2 - 20/y^2 - 5h = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2/y \\ hy^4 - 5hy^2 - 20 = 0 \end{cases}$. Dato che $\Delta = 25h^2 + 20h$, l'equazione ha 2 soluzioni per $h > 0$. $\begin{cases} x = 2/y \\ y = \pm\sqrt{\dfrac{5h+\sqrt{25h^2+20h}}{2h}} \end{cases}$

b) $\begin{cases} xy = -2 \\ hx^2 - y^2 - h = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2/y \\ 4h/y^2 - y^2 - h = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2/y \\ y^4 + hy^2 - 4h = 0 \end{cases}$. Dato che $\Delta = h^2 + 16h$, l'equazione ha sempre 2 soluzioni: $\begin{cases} x = -2/y \\ y = \pm\sqrt{\dfrac{-h+\sqrt{h^2+16h}}{2}} \end{cases}$.

50. **a) $xy = h$, $y = x^2$, $h \neq 0$; b) $x^2 + y^2 = h$, $x^2 - y^2 = 1$, $h > 0$**

a) $\begin{cases} xy = h \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 = h \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{h} \\ y = \sqrt[3]{h^2} \end{cases}$. Sempre una intersezione.

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = h \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} I+II \\ I-II \end{pmatrix} \begin{cases} 2x^2 = h+1 \\ 2y^2 = h-1 \end{cases}$, si hanno soluzioni se si ha $\begin{cases} h+1 \geq 0 \\ h-1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h \geq -1 \\ h \geq 1 \end{cases} \Rightarrow h \geq 1$,

Quindi se $0 < h < 1$ nessuna soluzione, se $h = 1$: 2 soluzioni, se $h > 1$: 4 soluzioni.

51. **a) $x^2 + y^2 = h$, $x^2 - y^2/9 = 1$, $h > 0$; b) $y = hx^2$, $y^2/4 - x^2/3 = 1$, $h \neq 0$**

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = h \\ x^2 - y^2/9 = 1 \end{cases} \Rightarrow (I-II) \begin{cases} 10y^2/9 = h-1 \\ x^2 = h - y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 9(h-1)/10 \\ x^2 = (h+9)/10 \end{cases}$, si hanno soluzioni se si ha $\begin{cases} h-1 \geq 0 \\ h+9 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h \geq 1 \\ h \geq -9 \end{cases} \Rightarrow h \geq 1$, Quindi se $0 < h < 1$ nessuna soluzione, se $h = 1$: 2 soluzioni, se $h > 1$: 4 soluzioni.

b) $\begin{cases} y^2/4 - x^2/3 = 1 \\ y = hx^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{3y^2-12}{4} \\ y = \dfrac{3hy^2-12h}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{3y^2-12}{4} \\ 3hy^2 - 4y - 12h = 0 \end{cases}$, Si ha: $\Delta/4 = 4 + 36h^2$ sempre positivo, quindi sono sempre secanti in 2 punti

52. **a) $x^2 + y^2 = h$, $y^2/4 - x^2/9 = 1$, $h > 0$ b) $x^2 + y^2 = 3$, $x^2 - y^2/h = 1$, $h > 0$**

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = h \\ y^2/4 - x^2/9 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = h - y^2 \\ 9y^2 - 4(h-y^2) - 36 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 9(h-4)/13 \\ y^2 = 4(9+h)/13 \end{cases}$, si hanno soluzioni se si ha $\begin{cases} h-4 \geq 0 \\ 9+h \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h \geq 4 \\ h \geq -9 \end{cases} \Rightarrow h \geq 4$, Quindi se $0 < h < 4$ nessuna soluzione, se $h = 4$: 2 soluzioni, se $h >$

4: 4 soluzioni.

b) $\begin{cases} x^2+y^2=3 \\ x^2-y^2/h=1 \end{cases} \Rightarrow (I-II)\begin{cases} \left(1+\frac{1}{h}\right)y^2=2 \\ x^2=3-y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=\frac{h+2}{h+1} \\ y^2=\frac{2h}{h+1} \end{cases}$, dato che $h > 0$, vi sono sempre 4 punti in comune.

53. a) $x^2 + y^2 = 5$, $x^2/h + y^2 = 1$, $h > 0$; b) $x^2 + y^2 = h$, $y - x^2 = 0$, $h > 0$

a) $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ \frac{x^2}{h}+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow (I-II)\begin{cases} \left(1-\frac{1}{h}\right)x^2=4 \\ y^2=5-x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=\frac{4h}{h-1} \\ y^2=\frac{h-5}{h-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h-1>0 \\ \frac{h-5}{h-1}\geq 0 \end{cases} \Rightarrow h\geq 5$, non vi sono soluzioni per $0 < h < 5$; 2 soluzioni (coniche tangenti) per $h = 5$; Secanti in 4 punti per $h > 5$;

b) $\begin{cases} x^2+y^2=h \\ x^2-y=0 \end{cases} \Rightarrow (I-II)\begin{cases} y^2+y-h=0 \\ y=x^2 \end{cases} \Rightarrow \Delta=1+4h>0$, quindi sempre secanti in 2 punti

54. a) $y = hx^2$, $x^2 + y^2 = 1$, $h \neq 0$; b) $y = hx^2$, $x^2/4 - y^2/4 = 1$, $h \neq 0$

a) $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=hx^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h^2x^4+x^2-1=0 \\ y=hx^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=\frac{-1+\sqrt{1+4h^2}}{2h^2} \\ y=\frac{-1+\sqrt{1+4h^2}}{2h} \end{cases}$, quindi sempre secanti in 2 punti

b) $\begin{cases} \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1 \\ y=hx^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h^2x^4-x^2+4=0 \\ y=hx^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=\frac{-1+\sqrt{1-16h^2}}{2h^2} \\ y=\frac{-1+\sqrt{1-16h^2}}{2h} \end{cases}$, vi sono 2 soluzioni distinte se $1 - 16h^2 > 0 \Rightarrow -¼ < h < ¼$; 2 coincidenti se $h = \pm ¼$, nessuna negli altri casi

55. a) $y = hx^2$, $y^2 - x^2/h = 1$, $h \neq 0$; b) $y = hx^2$, $x^2 + y^2/h = 1$, $h > 0$

a) $\begin{cases} y^2-\frac{x^2}{h}=1 \\ y=hx^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h^3x^4-x^2-h=0 \\ y=hx^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=\frac{-1+\sqrt{1+4h^4}}{2h^3} \\ y=\frac{-1+\sqrt{1+4h^4}}{2h^2} \end{cases}$ sempre secanti in 2 punti. Osserviamo che per $h > 0$ il secondo fascio è di iperboli, mentre per h < 0 è di ellissi.

b) $\begin{cases} x^2+\frac{y^2}{h}=1 \\ y=hx^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} hx^4+x^2-1=0 \\ y=hx^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=\frac{-1+\sqrt{1+4h}}{2h} \\ y=\frac{-1+\sqrt{1+4h}}{2} \end{cases}$ Secanti in 2 punti

Fasci di coniche

***Studiare i seguenti fasci di coniche. Nelle risposte:* [*Iperboli; Coniche spezzate; Punti base*]**

1. $hx^2 - xy + y^2 + x - y = 0$

$\Delta = 1 + 4h$, quindi se $h < ¼$ iperboli, parabole per $h = ¼$ ed ellissi per $h > ¼$;
$hx^2 - (y - 1)x + y^2 - y = 0 \Rightarrow \Delta = (y - 1)^2 - 4hy^2 + 4hy = (y - 1)^2 - 4hy(y - 1) = (y - 1)(y - 1 - 4hy)$.
Questo rappresenta un quadrato perfetto solo se $h = 0$. In questo caso abbiamo: $-xy + y^2 + x - y = 0 \Rightarrow y(y - x) - (y - x) = 0 \Rightarrow (x - y) = 0 \vee (1 - y) = 0$. Dobbiamo considerare anche la conica che non troviamo per alcun valore di h, che è anch'essa spezzata ed è $x^2 = 0$.

$$\begin{cases}(x-y)(1-y)=0\\ x^2-xy+y^2+x-y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=y\\ \cancel{y^2-y^2}+y^2+\cancel{y-y}=0\end{cases}\vee\begin{cases}y=1\\ x^2\cancel{-x+1+x-1}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}\vee\begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}$$

2. $\mathbf{4x^2 + (3h + 4) \cdot xy + y^2 + (6h - 4) \cdot x - (2 + h) \cdot y - 2h + 1 = 0}$

Determiniamo il discriminante per stabilire il tipo di coniche :

$\Delta = (3h + 4)^2 - 16 = 9h^2 + 24h$. Poniamo uguale a zero e risolviamo: $h = 0 \vee h = -8/3$ per questi valori ci sono parabole. Quando il discriminante è positivo, ossia per valori esterni, $h < -8/3 \vee h > 0$, ci sono iperboli; infine per valori interni, $-8/3 < h < 0$, ellissi.

Adesso vediamo se ci sono coniche spezzate, calcoliamo il determinante: $\begin{bmatrix}4 & \frac{3\cdot h+4}{2} & \frac{6\cdot h-4}{2}\\ \frac{3\cdot h+4}{2} & 1 & \frac{-(2+h)}{2}\\ \frac{6\cdot h-4}{2} & \frac{-(2+h)}{2} & -2\cdot h+1\end{bmatrix}$, che si risolve al solito, ottenendo: $-49/4h^2 = 0$, la cui unica soluzione è ovviamente $h = 0$. Quindi l'unica conica spezzata è una parabola, ossia: $4x^2 + 4xy + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$, che si scompone nelle due rette coincidenti: $(2x + y - 1)^2 = 0$. Inoltre abbiamo anche $h(3xy + 6x - y - 2) = 0 \Rightarrow (3x - 1) \cdot (2 + y) = 0$.

Infine per i punti base basta mettere a sistema due coniche del fascio, conviene le più semplice, ossia quella spezzata che abbiamo trovato e quella a cui manca il termine xy, ossia quella per $h = -4/3$:

$$\begin{cases}2x+y-1=0\\ 4x^2+y^2-12x-\frac{2}{3}y+\frac{11}{3}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1/3\\ y=1/3\end{cases}\vee\begin{cases}x=3/2\\ y=-2\end{cases}.$$

3. $\mathbf{(1 - h) \cdot x^2 - (1 + h) \cdot y^2 + x - y + 1 = 0}$

$(1 - h) \cdot x^2 - (1 + h) \cdot y^2 + x - y + 1 = 0$

$\Delta = 4(1 - h)(1 + h)$. Parabole per $h = \pm 1$, iperboli per $-1 < h < 1$, ellissi altrimenti.

$\begin{vmatrix}1-h & 0 & 1/2\\ 0 & -1-h & -1/2\\ 1/2 & -1/2 & 1\end{vmatrix}=\frac{2h^2+h-2}{2}$, che si annulla per $h=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$. Inoltre abbiamo: $x^2 + y^2 = 0$ che si spezza nelle rette complesse e coniugate $(x \pm yi) = 0$

A questo punto è evidente che non ci sono punti base, dato che l'ultima conica spezzata non ha punti reali.

4. $\mathbf{x^2 - (1 + h) \cdot xy + y^2 + (1 - 2h) \cdot x - 2 = 0}$

$\Delta = (1 + h)^2 - 4 = (h - 1)(h + 3)$, iperboli per $h < -3 \vee h > 1$ e di conseguenza gli altri tipi.

$\begin{vmatrix}1 & (-1-h)/2 & (1-2h)/2\\ (-1-h)/2 & 1 & 0\\ (1-2h)/2 & 0 & -2\end{vmatrix}=\frac{-2h^2+8h-7}{4}$, che si annulla per $h=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$ e inoltre $xy + 2x = 0 \Rightarrow x(y + 2) = 0$. Punti base:

$$\begin{cases}x=0\\ x^2+y^2+3x-2=0\end{cases}\vee\begin{cases}y=-2\\ x^2+y^2+3x-2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y^2-2=0\end{cases}\vee\begin{cases}y=-2\\ x^2+3x+2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=\pm\sqrt{2}\end{cases}\vee\begin{cases}x=-1\vee x=-2\\ y=-2\end{cases}$$

5. $\mathbf{hx^2 + xy - (2 + h) \cdot y^2 + 2x - 1 = 0}$

$\Delta = 4h^2 + 8h + 1$, che si annulla per $h=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$, per cui si hanno parabole, all'esterno dell'intervallo vi sono iperboli, all'interno ellissi. $\begin{vmatrix}h & 1/2 & 1\\ 1/2 & -2-h & 0\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}=\frac{4h^2+12h+9}{4}=\left(\frac{2h+3}{2}\right)^2$, vi è perciò una sola conica spezzata, per $h = -3/2$, che si spezza in due rette immaginarie e coniugate: $\left(3x-\left(1+\sqrt{2}i\right)y-2-\sqrt{2}i\right)\cdot\left(3x-\left(1-\sqrt{2}i\right)y-2+\sqrt{2}i\right)=0$, Inoltre si ha: $x^2 - y^2 = 0$. Vi è un solo punto fisso: l'unico reale della conica immaginaria spezzata:

$$\begin{cases}3x^2-2xy+y^2-4x+2=0\\ x^2=y^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4x^2\mp 2x^2-4x+2=0\\ y=\pm x\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x^2-2x+1=0\\ y=x\end{cases}\vee\begin{cases}3x^2-2x+1=0\\ y=-x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}\vee\begin{cases}x=\dfrac{1\pm\sqrt{2}i}{3}\\ y=\dfrac{-1\mp\sqrt{2}i}{3}\end{cases}$$

6. $\boldsymbol{x^2-2hxy+2y^2+(1+3h)\cdot x-2y+1=0}$

$\Delta=4h^2-8$. Abbiamo iperboli per $h<-\sqrt{2}\vee h>\sqrt{2}$, di conseguenza gli altri tipi.

$$\begin{vmatrix}1 & -h & (1+3h)/2\\ -h & 2 & -1\\ (1+3h & (1+3h)/2 & 1\end{vmatrix}=\frac{-5h^2-4h+1}{2}=\frac{(1-5h)(h+1)}{2}$$

, perciò coniche spezzate per $h=-1\vee h=1/5$, che sono entrambe complesse: $5x-(1\pm 7i)y-(4\pm 3i)=0$ e $x+(1\pm i)y-1=0$; inoltre abbiamo $2xy+3x=0\Rightarrow x(2y-3)=0$. Determiniamo i punti base:

$$\begin{cases}x^2+2xy+2y^2-2x-2y+1=0\\ x=0\end{cases}\vee\begin{cases}x^2+2xy+2y^2-2x-2y+1=0\\ y=3/2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2y^2-2y+1=0\\ x=0\end{cases}\vee$$

$$\vee\begin{cases}2x^2-10x+17=0\\ y=3/2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=\dfrac{1\pm i}{2}\end{cases}\vee\begin{cases}x=\dfrac{-1\pm 3i}{2}\\ y=3/2\end{cases}$$

7. $\boldsymbol{(1-2h)\cdot x^2-(3+h)\cdot y^2+h=0}$

$\Delta=4(h+3)(1-2h)$. Abbiamo iperboli per $-3<h<½$, di conseguenza gli altri tipi.

$$\begin{vmatrix}1-2h & 0 & 0\\ 0 & -3-h & 0\\ 0 & 0 & h\end{vmatrix}=h(h+3)(2h-1)$$

, perciò coniche spezzate per $h=0\vee h=-3\vee h=½$: $x^2-3y^2=0$, $7x^2-3=0$, $7y^2-1=0$ e $2x^2+y^2=0$. Determiniamo i punti base:

$$\begin{cases}7x^2=3\\ 7y^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\pm\sqrt{\dfrac{7}{3}}\\ y=\pm\sqrt{\dfrac{1}{7}}\end{cases}$$

8. $\boldsymbol{(1+2h)\cdot x^2-hxy+(2-h)\cdot y^2+y=0}$

$\Delta=9h^2-12h-8$. Abbiamo iperboli per $h<\dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}\vee h>\dfrac{2+2\sqrt{3}}{3}$, di conseguenza gli altri tipi.

$$\begin{vmatrix}1+2h & -h/2 & 0\\ -h/2 & 2-h & 1/2\\ 0 & 1/2 & 0\end{vmatrix}=-\frac{2h+1}{4}$$

, perciò coniche spezzate per $h=-1/2$: $y(x+5y+2)=0$ e $2x^2-xy-y^2=0\Rightarrow(x-y)(2x+y)=0$. Determiniamo i punti base:

$$\begin{cases}y(x+5y+2)=0\\ x=y\end{cases}\vee\begin{cases}y(x+5y+2)=0\\ y=-2x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}\vee\begin{cases}x=-\dfrac{1}{3}\\ y=-\dfrac{1}{3}\end{cases}\vee\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}\vee\begin{cases}x=\dfrac{2}{9}\\ y=-\dfrac{4}{9}\end{cases}$$

9. $\boldsymbol{(h+1)\cdot x^2-(h+1)\cdot y^2+2y-1=0}$

$\Delta=4(h+1)^2$. Abbiamo sempre iperboli tranne per $h=-1$, per cui si ha parabola.

$$\begin{vmatrix}h+1 & 0 & 0\\ 0 & -h-1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=h(h+1)$$

, perciò coniche spezzate per $h=0,-1$: $(x+y-1)(x-y+1)=0$, non

per $h = -1$ perché la conica degenera in una retta. E inoltre $(x + y)(x - y) = 0$. Determiniamo i punti base:

$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ x^2=y^2 \end{cases} \vee \begin{cases} x+y+1=0 \\ x^2=y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\pm\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

10. $\boldsymbol{x^2 - xy + y^2 + (h + 2) \cdot x - (1 - h) \cdot y + h = 0}$

$\Delta = -3$. Abbiamo solo ellissi. $\begin{vmatrix} 1 & -1/2 & (h-1)/2 \\ -1/2 & 1 & (h+2)/2 \\ (h-1)/2 & (h+2)/2 & h \end{vmatrix} = -3\dfrac{h^2+1}{4}$: nessuna conica spezzata.

Determiniamo i punti base:

$$\begin{cases} x^2-xy+y^2+3x+1=0 \\ x^2-xy+y^2-3y-2=0 \end{cases} \Rightarrow (I-II) \begin{cases} 3x+3y+3=0 \\ x^2-xy+y^2-3y-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3}}{3} \\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Scrivere l'equazione del fascio di coniche aventi come generatrici le coniche spezzate nelle rette date, quindi studiarlo al variare del parametro

11. L'asse *x* contato due volte; l'asse *y* contato due volte.

$x^2 + h \cdot y^2 = 0$; $\Delta = -4h$. Abbiamo iperboli per $h < 0$. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, perciò tutte coniche spezzate. Determiniamo i punti base: $\begin{cases} x^2=y^2 \\ x^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

12. L'asse *x* contato due volte; la prima bisettrice contata due volte.

$(x - y)^2 + hx^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2xy + (h + 1) \cdot y^2 = 0$; $\Delta = -4h$. Abbiamo iperboli per $h < 0$. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & h+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, perciò tutte coniche spezzate. E inoltre $(x + y)(x - y) = 0$. Determiniamo i punti base:

$$\begin{cases} x=0 \\ x=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

13. La retta per $A \equiv (1; 2)$ e $B \equiv (-1; 2)$ contata due volte; La retta per $C \equiv (2; 1)$ e $D \equiv (-2; 1)$, contata due volte.

$(y - 2)^2 + h(y - 1)^2 = 0 \Rightarrow (1 + h) \cdot y^2 - 2 \cdot (2 + h) \cdot y + 4 + h = 0$; Sono tutte parabole. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+h & -2-h \\ 0 & -2-h & 4+h \end{vmatrix} = 0$, perciò tutte coniche spezzate. Ovviamente non ci sono punti base.

14. La retta per $A \equiv (2; 3)$ e $B \equiv (-4; 1)$ contata due volte; Le rette per $C \equiv (1; -3)$ e $D \equiv (-2; 0)$ e per $E \equiv (0; 1)$ e $F \equiv (3; -1)$.

$(x - 3y + 7)^2 + h(x + y + 2)(2x + 3y - 3) = 0 \Rightarrow (2h + 1) \cdot x^2 + (5h - 6) \cdot xy + (3h + 3) \cdot y^2 + (h + 14) \cdot x + (3h - 42) \cdot y - 6h + 49 = 0$; $\Delta = h^2 - 144h$. Abbiamo iperboli per $h < 0 \vee h > 144$. Il determinante vale $-529/4h^2$, la conica spezzata per $h = 0$ è $(x - 3y + 7)^2 = 0$. I punti base sono le intersezioni delle coniche generatrici:

$$\begin{cases} x-3y+7=0 \\ x+y+2=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x-3y+7=0 \\ 2x+3y-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3y-7 \\ y=5/4 \end{cases} \vee \begin{cases} x=3y-7 \\ y=17/9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-13/4 \\ y=5/4 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-4/3 \\ y=17/9 \end{cases}$$

15. Le rette parallele all'asse x passanti per $A \equiv (2; 1)$ e per $B \equiv (-3; 2)$; Le rette parallele all'asse y passanti per $C \equiv (3; 2)$ e per $D \equiv (4; -1)$.

$(y-1)(y-2) + h(x-3)(x-4) = 0 \Rightarrow hx^2 + y^2 - 7hx - 3y + 12h + 2 = 0$; $\Delta = -4h$. Abbiamo iperboli per $h > 0$. Il determinante si annulla per $h = 0, -1$. Per $h = 0$ si ottiene la prima conica generatrice, per $h = -1$: $(x - y - 2)(x + y - 5) = 0$. I punti base sono ovviamente le intersezioni delle generatrici: (3; 1), (4; 1), (3; 2) e (4; 2)

16. Le rette passanti per $A \equiv (2; 1)$ di coefficienti angolari 1/2 e 3/4; Le rette per $B \equiv (0; 1)$ e coefficiente angolare 3/5 e la sua perpendicolare in A.

$(x-2y)(3x-4y-2) + h(3x-5y+5)(5x+3y-13) = 0 \Rightarrow 3(5h-1)x^2 + 2(5-8h)xy - (15h+8)y^2 + 2(1-7h)\cdot x + 4(20h-1)y - 65h = 0$; $\Delta = 4(289h^2 - 5h + 1)$, sempre positivo, quindi sono tutte iperboli. Il determinante si annulla per $h = 0$, per cui otteniamo la prima conica generatrice. I punti base sono quelli comuni alle generatrici:

$$\begin{cases} x-2y=0 \\ 3x-5y+5=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x-2y=0 \\ 5x+3y-13=0 \end{cases} \begin{cases} 3x-4y-2=0 \\ 3x-5y+5=0 \end{cases} \vee \begin{cases} 3x-4y-2=0 \\ 5x+3y-13=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-10 \\ y=-5 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=10 \\ y=7 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

17. La retta passante per $A \equiv (3; 0)$ di coefficiente angolare –2/3 contata due volte; la retta per $B \equiv (-2; 4)$ e coefficiente angolare –3/4 contata due volte.

$[(64 + 81h)\cdot x^2 + 24\cdot(9h+8)\cdot xy + 144\cdot(h+1)\cdot y^2 - 12\cdot(45h+32)\cdot x - 144\cdot(5h+4)\cdot y + 36\cdot(25h+16) = 0$; $\Delta = 1 - 576h$. Abbiamo iperboli per $h < 0$. Il determinante è nullo, quindi tutte coniche spezzate. Vi è un solo punti base, l'intersezione delle generatrici: $\begin{cases} 2x+3y-6=0 \\ 3x+4y-10=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=-2 \end{cases}$

18. Le rette del fascio di centro $C_1 \equiv (0; 1)$ che formano un triangolo di area 1 con gli assi coordinati; del fascio di centro $C_2 \equiv (0; -2)$ che formano un triangolo di area 2 con gli assi coordinati.

Le rette del fascio di centro C_1 sono $y = mx + 1$ e incontrano gli assi nei punti (0; 1) e $\left(-\frac{1}{m};0\right)$, quindi deve essere $\frac{1}{2}\left|-\frac{1}{m}\right|\cdot 1 = 1 \Rightarrow \left|-\frac{1}{m}\right| = 2 \Rightarrow m = \pm\frac{1}{2}$, perciò la prima conica ha equazione $(x - 2y + 2)(x + 2y - 2) = 0$. Il secondo fascio ha equazione $y = mx - 2$, incontra gli assi nei punti (0; –2), $\left(\frac{2}{m};0\right)$, quindi deve essere $\frac{1}{2}\left|\frac{2}{m}\right|\cdot 2 = 2 \Rightarrow \left|\frac{2}{m}\right| = 2 \Rightarrow m = \pm 1$, perciò la seconda conica ha equazione $(x - y - 2)(x + y + 2) = 0$. Il fascio di coniche ha equazione: $(h+1)\cdot x^2 - (h+4)\cdot y^2 + 4\cdot(2-h)y - 4h - 4 = 0$; $\Delta = 4(h+1)(h+4)$. Abbiamo iperboli per $h < -4 \vee h > -1$. Il determinante si annulla per $h = 0$ e –1, Per $h = 0$ troviamo la prima generatrice, per $h = -1$: $y(4 - y) = 0$. I punti base:

$$\begin{cases} x-2y+2=0 \\ x+2y-2=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x-2y+2=0 \\ x-y-2=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x-2y+2=0 \\ x+y+2=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x+2y-2=0 \\ x-y-2=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x+2y-2=0 \\ x+y+2=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x-y-2=0 \\ x+y+2=0 \end{cases} \Rightarrow$$

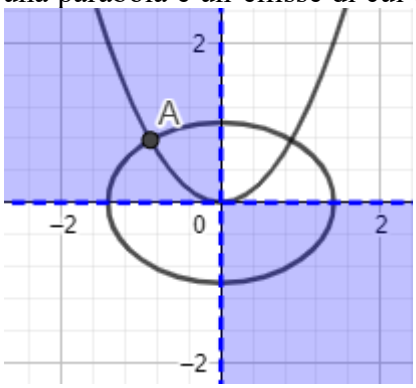
$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=6 \\ y=4 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-6 \\ y=4 \end{cases} \vee \begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases}$$

$h \neq -1/4$; $(\pm 3/2 ; -1/2)$]

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. (Accademia navale) Senza fare calcoli dire quanti sono i punti del piano cartesiano le cui coordinate verificano tutte e tre le seguenti condizioni: $\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ x^2 + 2y^2 - 2 = 0 \\ xy < 0 \end{cases}$.

Uno solo perché abbiamo una parabola e un'ellisse di cui dobbiamo considerare le intersezioni nel secondo e quarto quadrante:



2. **(Ingegneria 1999) Fissato nel piano un sistema di assi cartesiani ortogonali *Oxy*, il luogo dei punti le cui coordinate (*x*,*y*) soddisfano l'equazione $x \cdot (2x + y - 1) = 0$ è**
A) una parabola B) una retta o un punto C) una retta
D) una coppia di rette E) una circonferenza
Risposta D, è una conica spezzata.

3. **(Ingegneria 2000) Fissato nel piano un sistema di assi cartesiani ortogonali *Oxy*, il luogo dei punti le cui coordinate (*x*; *y*) soddisfano l'equazione $|x^2 - y^2| = 1$ è costituito da**
A) una circonferenza B) un'iperbole C) una coppia di iperboli
D) una coppia di rette E) una coppia di circonferenze
Risposta C dato che il valore assoluto equivale a due equazioni di due iperboli equilatere e canoniche