# 1. Le basi del ragionamento

## 1.2 Insiemi numerici fondamentali

**Prerequisiti**
- Nozioni elementari di aritmetica
- Nozioni elementari di geometria
- Enunciato logico
- Nozione di raggruppamento di oggetti in base a una loro caratteristica o prerogativa

**Obiettivi**
- Riconoscere l'opportunità di raggruppare sotto un unico nome oggetti che hanno qualcosa che li accomuna

**Contenuti**
- Concetto di insieme
- L'insieme dei numeri naturali
- L'insieme dei numeri interi relativi
- Divisibilità e fattorizzazione nell'insieme dei numeri interi
- L'insieme dei numeri razionali relativi
- Operazioni con le frazioni

**Parole Chiave**
Appartiene – Divisibile – Divisore – Insieme vuoto – Massimo comune divisore –
Minimo comune multiplo – Multiplo – Numero primo – Proprietà caratteristica

**Simbologia**

| | |
|---|---|
| $\in$ | Indica l'appartenenza di un elemento a un insieme |
| $\notin$ | Indica la non appartenenza di un elemento a un insieme |
| $\{\ \}$ | Racchiude gli elementi di un insieme separati da virgole |
| $\varnothing$ | Indica l'insieme vuoto, ossia un insieme senza elementi |
| $\mathbb{N}$ | Indica l'insieme dei numeri naturali $\{1; 2; 3; \ldots\}$ |
| $\mathbb{Z}$ | Indica l'insieme dei numeri interi relativi $\{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots\}$ |
| $\mathbb{Q}$ | Indica l'insieme dei numeri razionali relativi, cioè di tutte le frazioni di numeri interi |
| % | Indica la percentuale |
| *MCD* | Indica il massimo comune divisore di due o più numeri interi |
| *mcm* | Indica il minimo comune multiplo di due o più numeri interi |

## Concetto di insieme

Nel linguaggio quotidiano si usano spesso dei vocaboli che hanno lo scopo di riferirsi a intere classi di oggetti o di persone. Parliamo così di studenti, cittadini, siciliani, maschi, calciatori, mele, alberi e così via. Questi sono nomi collettivi, ossia si riferiscono non a un solo elemento ma a in generali a più di uno, che però sono accomunati da qualcosa. Ciò ha ovvi vantaggi. Per esempio dicendo che non si può conseguire la patente automobilistica se non si sono compiuti i 18 anni, evitiamo di dovere precisare che essa si applica anche per Federico e Michela, per esempio, che hanno 15 e 17 anni, dato che è valida per tutti quelli che hanno meno di 18 anni. Addirittura per semplificare ulteriormente chiamiamo *maggiorenni* tutti coloro che hanno 18 anni o più, e poi enunciamo la regola nel seguente modo più sintetico: *Per conseguire la patente automobilistica è necessario essere maggiorenni*. Come si vede abbiamo effettuato due operazioni. Intanto abbiamo stabilito una proprietà coerente e certa, *avere almeno* 18 *anni*, quindi abbiamo assegnato un nome a tutti coloro che verificano questa proprietà. Per potere ripetere questa procedura in altri casi dobbiamo avere a che fare con proprietà che devono essere enunciati logici, cioè proposizioni coerenti a cui si può assegnare un valore di verità.

**Definizione 1**

Diciamo **insieme** la totalità degli elementi che verificano una proprietà logica.

**Notazione 1**

Un insieme si indica con una lettera latina maiuscola seguita da una coppia di parentesi graffe, al cui interno sono elencati tutti i suoi elementi o la proprietà che essi verificano.

**Notazione 2**

Per indicare che un elemento $a$ fa parte di un insieme $A$ scriviamo $a \in A$, per indicare che non vi appartiene $a \notin A$.

**Esempio 1**

- Possiamo parlare dell'insieme $A$ = {i numeri interi che hanno fra le loro cifre il 7} che contiene per esempio i numeri 74, 107 e 2377401 ma non contiene il numero 21 né il numero 1,7.
- Non possiamo parlare dell'insieme dei numeri belli, perché questa proprietà non è logica, dato che è un'opinione personale, supposto che qualcuno possa considerare bello un numero.
- Possiamo parlare dell'insieme $B$ = {Aldo, Andrea, Bice, Carlo} delle 4 persone di cui abbiamo indicato i nomi.
- L'insieme dei premi Nobel italiani della fisica fino al 2015 lo possiamo indicare per esempio con $C$ = {Guglielmo Marconi, Enrico Fermi, Emilio Segrè, Carlo Rubbia, Riccardo Giacconi}.
- Può sembrare strano ma possiamo anche parlare dei numeri pari non divisibili per 2. Infatti la proprietà è un enunciato logico, anche se non è verificata da alcun numero. Analogamente non vi sono elementi nell'insieme degli esseri umani più alti di 3 metri.

In vista di quello detto alla fine dell'esempio possiamo porre la seguente definizione.

**Definizione 2**

Un insieme la cui proprietà non è verificata da alcun elemento si chiama **insieme vuoto**.

**Notazione 3**

L'insieme vuoto si indica con $\varnothing$ oppure con {}.

**Esempio 2**

Considerando l'insieme $C$ dei premi Nobel italiani della fisica fino al 2015, possiamo scrivere Guglielmo Marconi $\in C$ e Albert Einstein $\notin C$.

Una delle prime cose che si impara da bambini è il contare, cioè associare dei nomi a delle quantità. Ciò non è semplice come potrebbe pensarsi, poiché il riconoscere che due mele e due gatti hanno in comune il fatto

che le mele sono *tante quante* i gatti, non è facile come potrebbe sembrare. È probabile che siano passate migliaia di anni prima che l'essere umano primitivo si sia reso conto di ciò e abbia così cominciato a contare. Si capisce però che la questione era molto importante, poiché per esempio il pastore doveva essere in grado di capire se le pecore che erano uscite a pascolare erano tante quante quelle che erano ritornate.
Visto che il contare è considerato quindi una necessità, che oramai è insita in ciascuno di noi, che probabilmente abbiamo ereditata dai nostri antichi progenitori, chiameremo **numeri naturali** quelli che servono appunto a contare e che indichiamo con i simboli 1, 2, 3, 4, ... e che chiamiamo *uno*, *due*, *tre*, *quattro* e così via. Non abbiamo considerato lo 0 un numero naturale, dato che in genere non si ha la necessità di contare il nulla. Comunque alcuni considerano anche lo 0 come numero naturale, senza che ciò rappresenti un grave problema.

**Notazione 4**

Indichiamo l'*insieme dei numeri naturali* con $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \ldots\}$.

Come si vede non abbiamo scritto tutti i numeri naturali, poiché sono infiniti, ma abbiamo usato dei puntini di sospensione come si fa nella grammatica italiana quando si deve indicare che una frase rimane in sospeso. Nel nostro caso significa appunto che gli elementi dell'insieme non hanno fine e che proseguono utilizzando la stessa regola che ha portato alla costruzione degli elementi precedenti. Abbiamo separato i numeri con un punto e virgola e non con la virgola, per evitare incomprensioni, perché quando considereremo i numeri decimali indicheremo i singoli numeri con la virgola.
Non sempre è facile capire quale regola applicare per generare gli elementi di un insieme infinito o comunque con molti elementi.

**Esempio 3**

- L'insieme $A$ dei numeri interi di 5 cifre contiene tutti i numeri da 10000 a 99999, che sono ben 90000, invece che scriverli tutti possiamo scriverne solo alcuni, i primi due, tre e gli ultimi due o tre, separando i gruppi con dei puntini di sospensione e facendo capire qual è la regola che verificano tutti. Cioè $A = \{10000; 10001; 10002; \ldots; 99998; 99999\}$.
- Ovviamente se scrivessi $B = \{2; 4; 6; \ldots; 24; 26\}$ lo leggerei come l'insieme dei numeri pari compresi tra 2 e 26. Quindi se per caso ciò non fosse vero, nel senso che per esempio a $B$ non appartiene 14 o appartiene 17 dovrei scrivere tutti i suoi elementi, oppure dovrei dire la proprietà che essi verificano.
- Nel caso dell'insieme dei numeri interi relativi i puntini di sospensione li dobbiamo mettere anche all'inizio: $\{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$
- L'insieme $\{3; 5; 7; \ldots; 31\}$, si riferisce ai numeri dispari da 3 a 31 o ai numeri primi da 3 a 31? Nel primo caso l'insieme completo sarebbe $\{3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19; 21; 23; 25; 27; 29; 31\}$, nel secondo $\{3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31\}$. Quindi nel primo caso potremmo scrivere $\{3; 5; 7; 9; \ldots; 31\}$e nel secondo $\{3; 5; 7; 11; \ldots; 31\}$

**L'angolo storico**

Il termine *insieme vuoto* si trova per la prima volta in matematica in un articolo del 1906 di *W.H.* Young e *G.C.* Young. Il simbolo è invece dovuto ufficialmente a uno dei maggiori matematici del XX secolo: André Weil, il quale dice che gli fu suggerito da una lettera dell'alfabeto norvegese.

# Verifiche

## Lavoriamo insieme

*Esiste l'insieme dei numeri simpatici compresi tra* 123 *e* 340?

No, perché la proprietà che lo definisce non è una proposizione logica. Se però definiamo *simpatici* quei numeri interi che hanno la proprietà di avere almeno una cifra uguale a 2, allora possiamo dire che l'insieme cercato è {123; 124; …; 129; 132; 142; 152; …; 192; 200; 201; …; 299; 302; 312; 320; 321; …; 329; 332} Come si vede abbiamo usato più volte i puntini di sospensione perché gli elementi sono parecchi e quindi abbiamo cercato di scrivere solo quelli sufficienti a farci capire come si trovano gli altri che non abbiamo riportato.

***Rappresentare mediante elenco gli insiemi i cui elementi sono quelli di seguito descritti***

***Livello* 1**

1. I numeri interi positivi minori di 41 [{1; 2; …; 40}]
2. I numeri interi che hanno la prima cifra uguale a 0 [{0}]
3. I numeri interi compresi tra 15 e 32 che hanno solo cifre dispari [{17; 19; 31}]
4. I numeri interi pari che hanno la cifra delle unità uguale a 3 [∅]
5. Le città italiane con più di un milione di abitanti [{Roma, Napoli, Milano, Torino}]
6. I vulcani italiani attivi;I fiumi italiani più lunghi di 1000 Km [{Etna, Stromboli, Vulcano}; ∅]
7. Gli italiani che hanno vinto più di un Oscar, come regista, fino al 2015 [{De Sica, Fellini}]
8. I premi Nobel italiani per la chimica, fino al 2015 [{Natta}]
9. I numeri naturali di 4 cifre che contengono la sequenza 111 [{1110; 1112; …; 1119; 2111; 3111; …;9111}]
10. I numeri naturali di due cifre fra di loro uguali [{11; 22; 33; …; 99}]
11. I numeri naturali di 2 cifre entrambe dispari [{11; 13; …; 19; 31; 33; …; 39; …; 91; 93; …; 99}]
12. I numeri naturali di due cifre la cui somma è 6 [{15; 24; 33; 42; 51; 60}]
13. I possibili punteggi ottenibili lanciando due dadi regolari a forma di cubo [{2; 3; 4; …; 12}]
14. I numeri naturali di due cifre, una pari e l'altra dispari (si consideri 0 una cifra pari) [{10; 12; …; 18; 21; 23; …; 29; …; 90; 92; …; 98}]

***Livello* 2**

15. I numeri naturali compresi tra 125 e 278 in cui la somma delle cifre è 3 o 4 [{130; 201; 202; 210; 211; 220}]
16. I numeri naturali compresi tra 514 e 758, in cui la somma delle cifre è 4 oppure 7 [{520; 601; 610; 700}]
17. I numeri naturali compresi tra 1012 e 1057, in cui la somma delle cifre è minore di 3 o maggiore di 8 [{1017; 1018; 1019; 1026; 1027; 1028; 1029; 1035; 1036; 1037; 1038; 1039; 1044; 1045; 1046; 1047; 1048; 1049; 1053; 1054; 1055; 1056; 1057}]
18. I numeri naturali compresi tra 245 e 301, in cui il prodotto delle cifre è 4 [∅]
19. I numeri naturali compresi tra 512 e 687, in cui il prodotto delle cifre è compreso tra 5 e 9 [{611}]
20. I numeri naturali compresi tra 247 e 369, le cui cifre hanno somma maggiore di 5 e prodotto minore di 8 [{250; 260; 270; 280; 290; 303; 304; 305; 306; 307; 308; 309; 312; 321; 330; 340; 350; 360}]
21. I numeri naturali compresi tra 247 e 369, le cui cifre hanno somma minore di 5 e prodotto maggiore di 8 [∅]

***Livello* 3**

22. I numeri naturali compresi tra 123 e 234, in cui la somma delle cifre è compresa tra 7 e 9 o (vel) il prodotto è compreso tra 8 e 12 [{124; 125; 126; 133; 134; 135; 142; 143; 144; 151; 152; 153; 160; 161; 162; 170; 171; 180; 181; 191; 205; 206; 207; 214; 215; 216; 222; 223; 224; 225; 232; 233; 234}]
23. I numeri naturali compresi tra 123 e 234, in cui la somma delle cifre è compresa tra 7 e 9 o (aut) il prodotto è compreso tra 8 e 12 [{135; 144; 151; 153; 160; 161; 170; 171; 180; 181; 191; 205; 206; 207; 222; 224; 225; 233; 234}]
24. I numeri naturali compresi tra 123 e 234, in cui la somma delle cifre è compresa tra 7 e 9 e il prodotto è compreso tra 8 e 12 [{124; 125; 126; 133; 134; 142; 143; 152; 162; 214; 215; 216; 223; 232}]

## Lavoriamo insieme

*Ha elementi l'insieme degli esseri umani viventi nati prima del* 1500?
Esso è definito da una proprietà coerente, ma non ha elementi, quindi è l'insieme vuoto.

***Stabilire quali delle seguenti proprietà definiscono insiemi vuoti***

***Livello* 2**

25. a) Attori che hanno vinto venti premi Oscar; b) Attrici mitiche [a) Sì; b) Non è un insieme]
26. a) Vincitori delle Olimpiadi del 1940; b) Cantanti di belle canzoni [a) Sì; b) Non è un insieme]
27. a) Calciatori non nati in Italia che hanno giocato per l'Italia; b) Svedesi di nome Mustafa [a) No; b) No]
28. a) Città belghe con più di 5 milioni di abitanti; b) Fiumi italiani lunghi più di 2000 Km [a) Sì; b) Sì]
29. a) Vulcani europei attivi alti più di 3000 *m*; b) Vulcani attivi presenti in Lombardia [a) No; b) Sì]
30. a) Quadrati perfetti che hanno 3 come cifra delle unità; b) Numeri primi compresi tra 24 e 28 [a) Sì; b) Sì]
31. a) Rettangoli con le diagonali di diversa misura; b) Rombi con le diagonali uguali [a) Sì; b) No]
32. a) Poligoni con tanti lati; b) Quadrilateri convessi con due angoli ottusi [a) Non è un insieme; b) No]
33. a) Eventi che hanno probabilità 150% di succedere; b) Eventi che hanno probabilità zero [a) Sì; b) No]
34. a) Numeri interi pari e multipli di 3; b) Numeri interi dispari e multipli di 4 [a) No; b) Sì]
35. a) Numeri interi multipli di 6 ma non di 18; b) Numeri interi multipli di 18 ma non di 6 [a) No; b) Sì]

## L'insieme dei numeri naturali

L'insieme dei numeri naturali è ordinato, nel senso che numeri che vengono scritti dopo indicano insiemi più numerosi. In effetti vale il seguente principio intuitivo

**Assioma di Kuratowski**
Scelti due numeri naturali a caso, che indichiamo con $m$ e $n$, possono accadere solo i tre fatti seguenti:
1. $m$ e $n$ occupano la stessa posizione, quindi sono uguali e scriviamo $m = n$.
2. il numero $m$ è scritto prima del numero $n$, diciamo che $m$ è minore di $n$ e scriviamo $m < n$.
3. il numero $m$ è scritto dopo del numero $n$, diciamo che $m$ è maggiore di $n$ e scriviamo $m > n$.

Il discorso che stiamo facendo può sembrare pedante, ma non lo è. Infatti se può sembrare inutile dire che 17 è minore di 32 e maggiore di 12 o addirittura che è uguale a 17; se, come spesso accade, lavoriamo non con numeri fissati, ma con numeri qualsiasi, che perciò indichiamo con simboli la questione appare più delicata. Così alcune volte siamo interessati a stabilire se un numero è non maggiore o non minore di un altro.

**Esempio 4**
Che significato hanno i seguenti segnali stradali?

Sono tutti dei divieti, ossia delle limitazioni, che impongono che, rispettivamente, un peso, due lunghezze e una velocità non superino i valori indicati. Ovviamente ci riferiamo a dati della vita reale, non del mondo matematico; pertanto la strada su cui si dovrà passare deve essere in grado di sostenere pesi superiori ai 6,5 tonnellate, sarà più ampia di 2,30 metri e più alta di 3,50 metri, e anche la velocità misurata con un'apposita strumentazione ha una soglia di tolleranza, quindi chi andrà a 50,1 Km/h non riceverà una multa. In ogni caso però sono indicatori che matematicamente devono essere letti come *peso non superiore a* 6,5 *tonnellate*, *larghezza non superiore a* 2,30 *m, altezza non superiore a* 3,50 *m, velocità non superiore a* 50 *km/h*.

**Definizione 3**
- Diremo che un numero naturale $m$ è **maggiore o uguale** di un numero naturale $\boldsymbol{n}$ se i due sono lo stesso numero, oppure se $m$ è maggiore di $n$.
- Diremo che un numero naturale $m$ è **minore o uguale** di un numero naturale $n$ se i due sono lo stesso numero, oppure se $m$ è minore di $n$.

**Notazione 5**
- Per dire che $m$ è maggiore o uguale a $n$ scriveremo $m \geq n$.
- Per dire che $m$ è minore o uguale a $n$ scriveremo $m \leq n$.

Una volta che abbiamo gli elementi dobbiamo poterli combinare fra loro per ottenerne altri, come abbiamo già visto con gli enunciati logici che abbiamo composto con i connettivi.

**Definizione 4**
Diciamo **operazione binaria interna ad un insieme** una legge coerente che permette di associare a due elementi di un insieme al massimo un elemento dello stesso insieme.

Poiché i numeri naturali nascono dall'esigenza di contare, l'operazione più comune è quella di *continuare a contare*, che appunto permette di passare da un numero più piccolo, che viene prima, a uno più grande, che viene dopo. Cioè se abbiamo i numeri 6 e 10 per esempio, dopo avere raggiunto il 6, continuiamo a contare altri 10 numeri e vediamo dove siamo arrivati.

**Definizione 5**

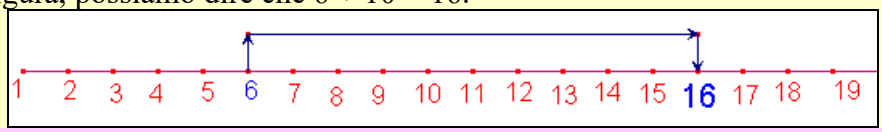
Diciamo **addizione** di due numeri naturali $m$ e $n$, il numero naturale $s$ che si ottiene contando altri $n$ numeri naturali successivi al numero $m$. Entrambi i numeri $m$ e $n$ si chiamano **addendi**, il numero risultato $s$ si dice loro **somma**.

**Notazione 6**

L'addizione di $m$ e $n$ si indica con il simbolo $m + n$.

**Esempio 5**

Come mostrato in figura, possiamo dire che 6 + 10 = 16.




**Che cosa significa?**

**Addendo.** I vocaboli che in italiano finiscono con *ando*, *endo* derivano dal cosiddetto *gerundivo latino* che indica una cosa che deve farsi. Così per esempio il laureando è colui che si deve laureare, l'operando colui che deve essere operato e così via. Quindi l'addendo è *ciò che deve essere aggiunto.*

Cominciamo a chiederci come funziona questa operazione. Comunque scegliamo un numero naturale e comunque gliene aggiungiamo un altro, il risultato, la somma, sarà sempre un numero naturale? Possiamo certamente rispondere di sì, dato che aggiungere significa solo spostarsi in avanti, senza *uscire* dai numeri naturali.

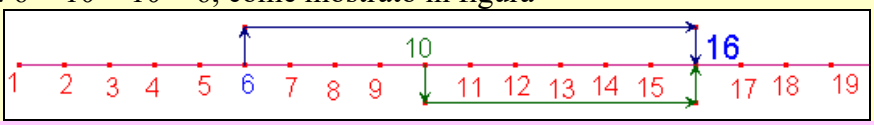
**Definizione 6**

Un'operazione in cui il risultato appartiene allo stesso insieme degli operandi si dice **interna** in quell'insieme.

Quindi l'addizione è interna nell'insieme dei numeri naturali.Un altro quesito è: possiamo dire che 6 + 10 e 10 + 6 hanno la stessa somma? Cioè che 6 + 10 = 10 + 6 è un enunciato logico vero? Ma soprattutto possiamo dirlo solo per 6 e 10 oppure per altre coppie di numeri, o, ancora meglio, per *qualsiasi* coppia di numeri?

**Esempio 6**

Effettivamente si ha: 6 + 10 = 10 + 6, come mostrato in figura




In effetti non è difficile capire che non importa con quale numero iniziamo a contare, ma quanti numeri contiamo complessivamente. Quindi possiamo affermare che è vero il seguente risultato.

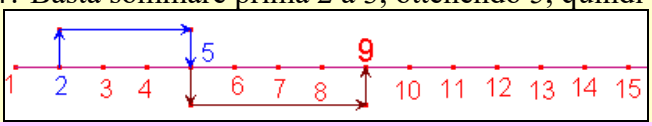
**Teorema 1 (Legge commutativa della somma).**

La somma di due numeri naturali non dipende dall'ordine in cui si presentano gli addendi. In simboli: $m + n = n + m$, qualunque numero naturale rappresenti ciascun simbolo.

Un'altra cosa che ci dobbiamo chiedere è: la somma è un'operazione binaria, cioè interviene fra due numeri, come ci si comporta allora se sommiamo più di due numeri?

**Esempio 7**

Qual è il risultato di 2 + 3 + 4? Basta sommare prima 2 a 3, ottenendo 5, quindi sommare questo numero a 4.

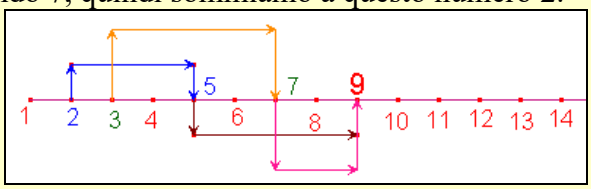



In pratica abbiamo contato complessivamente 2, 3 e 4 volte. Quindi non è difficile capire che avremmo po-

tuto anche contare in modo diverso.

**Esempio 8**

Sommiamo prima 3 e 4, ottenendo 7, quindi sommiamo a questo numero 2.




Ovviamente il risultato è ancora 9, perché abbiamo contato sempre 2, 3 e 4 unità, anche se in modo diverso dal precedente.

Il risultato precedente vale comunque si scelgono tre numeri naturali, come attestato dal seguente teorema.

**Teorema 2 (Legge associativa della somma)**

La somma di tre numeri naturali non dipende dalla scelta di quali addendi sommare per primi. In simboli: $(m + n) + p = m + (n + p)$, qualunque numero naturale rappresenti ciascun simbolo.

**Che cosa significa?**

**Associativo**. Deriva chiaramente dal verbo associare, mettere insieme. Fu usato per la prima volta solo nel 1844 da William Rowan Hamilton, un famoso algebrista inglese del XIX secolo.
**Commutativo**. È un aggettivazione del verbo commutare che vuol dire *scambiare*. Fu usato per la prima volta dal matematico francese François Joseph Servois in un articolo pubblicato nel 1814.

Alcune somme possono semplificarsi, definendo una nuova operazione.

**Esempio 9**

La somma $4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20$, è ottenuta sommando 5 volte lo stesso addendo 4.

Definiamo allora una nuova operazione che semplifica le somme in cui gli addendi sono tutti uguali fra loro.

**Definizione 7**

Diciamo **moltiplicazione** del numero naturale $m$ per il numero naturale $n$, il numero naturale $p$, che si ottiene addizionando $n$ addendi tutti uguali a $m$. $m$ e $n$ si chiamano **fattori**, $p$ si chiama **prodotto.**

**Notazione 7**

La moltiplicazione di $m$ per $n$ si indica con il simbolo $m \times n$, oppure con $m \cdot n$

**Che cosa significa?**

**Moltiplicazione.** Essenzialmente significa *ottenere molto*, e in effetti se i fattori sono numeri naturali il loro prodotto è sempre superiore ai singoli fattori.

**Esempio 10**

Quindi la somma vista nel precedente esempio, $4 + 4 + 4 + 4 + 4$, si può scrivere $4 \cdot 5$, oppure $4 \times 5$.

Ovviamente essendo la moltiplicazione una particolare somma verifica analoghe proprietà.

**Teorema 3**

La moltiplicazione è interna nei naturali e gode delle proprietà commutativa e associativa.

## L'insieme dei numeri interi relativi

Possiamo costruire nuove operazioni a partire da quelle note.

**Esempio 11**

Se sappiamo che 5 sommato a un altro numero fornisce come risultato 12, qual è questo numero? Ossia, quanti numeri dobbiamo contare, a partire da 5, per arrivare a 12? Non è difficile trovare che ne dobbiamo contare 7, cioè 5 + 7 = 12.

La precedente, ovviamente è un'operazione diversa dalla somma.

**Definizione 8**

Diciamo **sottrazione** di due numeri naturali $m$ e $n$, con $m > n$, il numero naturale $d$ che sommato a $n$ ha per risultato $m$. Il numero $m$ si chiama **minuendo**, $n$ **sottraendo**, $d$ **differenza**.

**Notazione 8**

La sottrazione di $n$ da $m$ si indica con il simbolo $m - n$.

**Che cosa significa?**

**Sottraendo**. Il suo significato è *che deve essere sottratto*.
**Minuendo.** Significa che deve essere diminuito.
**Differenza**. È la quantità che, se diversa da zero, dice di quanto i due numeri differiscono, cioè quale numero misura la loro diversità.

Abbiamo definito la sottrazione fra numeri naturali in modo che il sottraendo sia maggiore del minuendo, ossia in modo che non togliamo più di ciò che abbiamo, ciò per far sì che l'operazione risulti interna nei naturali. Se vogliamo eliminare questa condizione, dobbiamo perciò definire un nuovo insieme di numeri, che contiene i naturali.

**Definizione 9**

Chiameremo insieme dei numeri **interi negativi** l'insieme {...; –3; –2; –1}, ossia l'insieme formato dai numeri naturali, ciascuno preceduto dal segno – e scritti in ordine inverso.

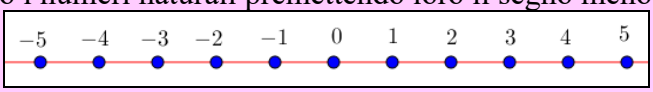
**Definizione 10**

Chiameremo insieme dei numeri **interi relativi** l'insieme dei numeri interi negativi, di quelli positivi e dello zero, cioè {...; –3; –2; –1; 0; 1; 2; 3; 4; ...}.

**Notazione 9**

L'insieme dei numeri interi relativi si indica con il simbolo $\mathbb{Z}$, che è l'iniziale della parola tedesca Zahlen, che significa numero, ma anche contare.

Costruire i numeri interi relativi è molto semplice, basta porre lo zero a sinistra del primo numero naturale e poi ricopiare in ordine inverso i numeri naturali premettendo loro il segno meno.




Ovviamente l'insieme dei numeri interi relativi non ha né un elemento più grande di tutti gli altri, come accadeva anche per $\mathbb{N}$, ma neanche un numero più piccolo, mentre 1 è il più piccolo, il primo, dei numeri naturali.

**Teorema 4**

Nell'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi relativi, la somma è interna e gode delle proprietà commutativa e associativa. La sottrazione è interna.

Poniamo anche la seguente definizione.

**Definizione 11**
Il numero naturale $n$ e il numero intero negativo $-n$, si chiamano numeri fra loro **opposti**.

Vale la seguente intuitiva proprietà.

**Teorema 5**
Nell'insieme $\mathbb{Z}$ la somma di due numeri è zero se e solo se i numeri sono fra loro opposti. Cioè si ha: $x + (-x) = 0$ e se $x + y = 0$, allora $x = -y$ e $y = -x$.

La sottrazione non è commutativa. Infatti se $m \neq n$ allora $(m - n)$ e $(n - m)$ sono numeri fra loro opposti. La sottrazione non è neppure associativa.

**Esempio 12**
- Si ha $7 - 3 = 4$; $3 - 7 = -4$.
- Abbiamo $4 - (3 - 2) = 4 - 1 = 3$. Invece $(4 - 3) - 2 = 1 - 2 = -1$.

Osserviamo che la sottrazione non è altri che una somma, quindi quando nel seguito parleremo di somma intenderemo in generale l'addizione o la sottrazione.

La moltiplicazione si può definire anche in $\mathbb{Z}$, con le stesse regole se uno dei due fattori è positivo.

**Esempio 13**
Moltiplicare 7 per –3 equivale a moltiplicare –3 per 7, cioè a sommare 7 addendi uguali a –3, ottenendo ovviamente –21.

Per completezza dobbiamo definire il prodotto di due numeri interi negativi.

**Definizione 12**
Il prodotto fra i numeri interi negativi $(-m)$ e $(-n)$ è il numero intero positivo $m \cdot n$.

**Esempio 14**
Moltiplicare (–3) per (–5) non è sommare *meno* tre unità uguali a (–5), poiché tale espressione non ha significato, ecco perché definiamo la moltiplicazione fra numeri negativi. A questo punto si capisce anche perché la definiamo come numero positivo, proprio per distinguere il risultato dall'operazione diversa, ma significativa, $(-3) \cdot 5$. In effetti vedremo in seguito che vi è un ragione più importante per fare ciò.

Un'altra questione importante si ha quando in una moltiplicazione uno dei due fattori è lo zero.

**Esempio 15**
Moltiplicare 4 per 0 vuol dire sommare 4 addendi nulli e quindi ovviamente si ha come risultato zero. Del resto se sommiamo due o più addendi uguali nessuno dei quali è zero, ovviamente non possiamo ottenere mai zero, quindi se $x \cdot y = 0$, $x$ o $y$, o anche tutti e due devono essere uguali a zero.

Tenuto conto dell'esempio precedente, enunciamo il seguente risultato.

**Teorema 6 (Principio di annullamento del prodotto)**
Se il prodotto fra due numeri interi ha come risultato zero, allora almeno uno dei due fattori è lo zero, e viceversa.

Adesso dobbiamo imparare ad eseguire espressioni in cui contemporaneamente abbiamo moltiplicazione e somma.

**Esempio 16**

Come possiamo svolgere operazioni del tipo $3 \cdot (4 + 5)$? Possiamo eseguire nel modo seguente: $3 \cdot (4 + 5) = 3 \cdot 9 = 27$; ma anche: $3 \cdot (4 + 5) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 12 + 15 = 27$.

Quanto visto nell'esempio precedente in effetti vale in generale per numeri interi qualsiasi.

**Teorema 7 (Legge distributiva del prodotto rispetto alla somma)**

Comunque si considerano tre numeri interi relativi si ha:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c;\ a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$$

**Che cosa significa?**

**Distributiva**. Perché eseguiamo la moltiplicazione *distribuendola* su ciascuno dei due addendi.

Grazie alla legge distributiva possiamo dare significato al prodotto fra due numeri negativi.

**Esempio 17**

Abbiamo $-3 \cdot 0 = 0$. Ma possiamo anche scrivere $0 = 5 - 5$ (o come qualsiasi altra sottrazione di due numeri uguali). Quindi abbiamo: $(-3) \cdot 0 = -3 \cdot (5 - 5) = -3 \cdot 5 + (-3) \cdot (-5) = -15 + (-3) \cdot (-5)$. Ma allora scriviamo: $-15 + (-3) \cdot (-5) = 0$. Poiché la somma di due numeri è zero solo se i numeri sono opposti, ciò significa che deve essere $(-3) \cdot (-5) = +15$.

Generalizzando l'esempio precedente giustifichiamo la Definizione 6 che afferma appunto che il prodotto di due numeri negativi è un numero positivo.
La proprietà distributiva si rivela molto utile nel calcolo mentale

**Esempio 18**

- Se volessimo moltiplicare a mente $23 \cdot 14$, applicando la proprietà distributiva penseremmo la moltiplicazione come $23 \cdot (10 + 4)$. Moltiplicare per 10 è molto semplice, basta aggiungere uno zero, 230. Moltiplicare per 4 non è complicatissimo, basta solo un po' di allenamento mentale, così senza grossi problemi e senza usare strumenti meccanici otteniamo: $23 \cdot (10 + 4) = 230 + 92 = 322$.
- La proprietà distributiva si applica anche nella consueta moltiplicazione in colonna. Infatti quando eseguiamo $157 \cdot 238$ nel modo seguente

$$\begin{array}{r} 157\ \times \\ 238 \\ \hline 1256 \\ 471\phantom{0} \\ 314\phantom{00} \\ \hline 37366 \end{array}$$

gli spazi che abbiamo lasciato in realtà possono riempirsi con degli zeri

$$\begin{array}{r} 157\ \times \\ 238 \\ \hline 1256 \\ 4710\phantom{0} \\ 31400\phantom{00} \\ \hline 37366 \end{array}$$

perché dipendono dal fatto che, applicando la proprietà distributiva abbiamo:

$$157 \cdot 238 = 157 \cdot (200 + 30 + 8) = 157 \cdot 200 + 157 \cdot 30 + 157 \cdot 8.$$

Solo che la moltiplicazione la stiamo eseguendo al "contrario", partendo cioè da 8 e finendo con 200, il che può sempre farsi perché vale la proprietà associativa.

Visto che abbiamo definito come nuova operazione la somma di addendi ripetuti, risulta naturale fare lo stesso con i fattori ripetuti.

**Definizione 13**

Dati il numero intero $m$ e il numero naturale $n$, diciamo **elevamento** di **m** alla **potenza** $n$, il numero che si ottiene moltiplicando $m$ per sé stesso $n$ volte. $m$ lo chiamiamo **base** e $n$ **esponente**.

**Notazione 10**

L'elevamento di $m$ all'esponente $n$ si scrive $m^n$ e si legge *m alla n*-esima (seconda, terza, …)

**Esempio 19**

Quindi la moltiplicazione $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$ la indichiamo brevemente con $7^4$ e lo leggiamo *sette alla quarta*. E poiché $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 49 \cdot 49$, anche con $49^2$ (*quarantanove alla seconda* o *al quadrato*). Perciò $7^4 = 49^2 = 2401$.

Tenuto conto delle regole per moltiplicare numeri negativi fra loro risulta evidente il seguente teorema.

**Teorema 8**

Se $m$ è un numero intero e $n$ un numero naturale, allora $m^n$ è un numero intero

- positivo se $m$ è positivo o se $m$ è negativo e $n$ è un numero pari.
- negativo se $m$ è negativo e $n$ è un numero dispari.

**Esempio 20**

- Si ha $(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32$.
- Invece $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = +16$.

Per la stessa definizione valgono i seguenti risultati.

**Teorema 9**

Se $m$ è un numero intero, $n$ e $p$ due numeri naturali, allora valgono le seguenti uguaglianze:

$$m^n \cdot m^n = m^{n+p}; \qquad (m^n)^p = m^{n \cdot p}.$$

**Esempio 21**

- Che significa $2^3 \cdot 2^4$? Moltiplicare 2 per se stesso 3 volte e poi altre 4 volte, cioè moltiplicare 2 per se stesso 7 volte. Ossia $(2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^7$.
- Che vuol dire $(2^3)^4$? Moltiplicare per 4 volte per se stesso il fattore $(2^3)$, quindi $(2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3)$, ossia $(2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^{12}$.

# Verifiche

## Lavoriamo insieme

- *Supponiamo che un postino sia entrato per consegnare la posta in un grattacielo, salendo subito al* 34° *piano, poi sia sceso di* 8 *piani, salito di* 15 *piani, ancora salito di* 9 *piani, sceso di* 7 *piani, ancora sceso di* 13 *piani, salito di* 11 *piani e infine si sia riposato. A che piano si è riposato*?
  La soluzione è data dalla seguente espressione: + 34 – 8 + 15 + 9 – 7 –13 + 11 = 69 – 28 = 41. Cioè il postino si è riposato al 41° piano.
- Dobbiamo stare attenti però al fatto che i dati siano coerenti. Infatti supponiamo che le successive mosse del postino avessero condotto alla seguente espressione risolutrice:
  $$+ 24 - 8 - 18 + 2 + 12 - 10 + 16 = 54 - 36 = 18.$$
  Sembrerebbe che perciò in questo secondo caso il postino si fosse fermato al 18° piano. Non è così perché dobbiamo effettuare le operazioni a due per volta, dato che le operazioni del postino, singolarmente possono portare a situazioni contraddittorie. Infatti la seconda consegna è effettuata al 24 – 8 = 16° piano, e la terza al piano 16 – 18 = –2. Quindi o il postino è sceso in un eventuale sotterraneo o i dati sono incoerenti.

***Tradurre in espressioni numeriche i seguenti problemi, quindi risolverli***

***Livello* 1**

1. Un antico problema di aritmetica ricreativa. Una lumaca deve raggiungere la cima di un muro alto 7 metri, ma la sua autonomia è di soli 4 metri, che compie in un giorno. Così si ferma a riposarsi la notte, in tal modo però scivola di 3 metri. Quindi riprende il suo cammino ogni giorno salendo di 4 metri e riposandosi, il che comporta lo scivolare di 3 metri. Si chiede in quanti giorni raggiunge la cima. [6 giorni]
2. Carletto per gioco sale sull'ascensore del suo palazzo al terzo piano e comincia a premere i tasti a caso. Prima di essere sgridato dalla mamma è salito di 4 piani, sceso di 2, sceso di 1, salito di 5, sceso di 4, salito di 8. A che piano è stato sorpreso dalla mamma? [Decimo]
3. Nella seguente tabella sono riportate le entrate e uscite di una famiglia nei primi sei mesi dell'anno. Sapendo che il saldo finale è di € 849,00, vogliamo sapere qual era il saldo all'inizio di Gennaio. [Negativo per € 1057,00]

| Mese | Entrate | Uscite |
|---|---|---|
| Gennaio | € 1245,00 | € 848,00 |
| Febbraio | € 2078,00 | € 1574,00 |
| Marzo | € 1745,00 | € 2074,00 |
| Aprile | € 1625,00 | € 985,00 |
| Maggio | € 1582,00 | € 1354,00 |
| Giugno | € 1490,00 | € 1024,00 |

4. Nella seguente tabella sono riportate le entrate e uscite di una famiglia nei primi sei mesi dell'anno. Sapendo che il saldo finale è di € 1058,00 e quello iniziale era di € 856,00, stabilire il valore delle entrate nel mese di Marzo. [€ 1793,00]

| Mese | Entrate | Uscite |
|---|---|---|
| Gennaio | € 3048,00 | € 2574,00 |
| Febbraio | € 2548,00 | € 2941,00 |
| Marzo | € ..... | € 1985,00 |
| Aprile | € 2684,00 | € 2548,00 |
| Maggio | € 2745,00 | € 2516,00 |
| Giugno | € 2154,00 | € 2206,00 |

5. Gianna non ricorda quanti euro ha speso per comprare uno zaino. Ricorda però di essere uscita con €75,00 in tasca, ha speso € 2,00 per la metropolitana, dove ha trovato per terra una banconota da €10,00. Poi ha comprato dei giornali per € 7,00 e un paio di jeans per € 37,00; quindi ha comprato lo zaino. Tornando a casa ha incontrato Wilma che le ha restituito un prestito di € 13,00. A questo punto in tasca si è ritrovata € 24,00. Quanto è costato lo zaino? [€ 28,00]

6. Nella seguente tabella sono riportate le entrate e uscite di una famiglia nei primi sei mesi dell'anno. Sapendo che il saldo finale è di € 754,00 e quello iniziale era di € 1248,00, stabilire il valore delle entrate nel mese di Maggio. [Dati incoerenti]

| Mese | Entrate | Uscite |
|---|---|---|
| Gennaio | € 2154,00 | € 1814,00 |
| Febbraio | € 2012,00 | € 1725,00 |
| Marzo | € 2301,00 | € 1365,00 |
| Aprile | € 2001,00 | € 1958,00 |
| Maggio | € …… | € 2032,00 |
| Giugno | € 2245,00 | € 2102,00 |

7. Se un numero $n$ è pari, come si indica il successivo numero pari? [$n + 2$]
8. Se un numero $n$ è pari, come si indica il successivo numero dispari? [$n + 1$]
9. Se un numero $n$ è dispari, come si indica il precedente numero dispari? [$n - 2$]
10. Per potere assistere ad uno spettacolo teatrale, gli adulti pagano 10 euro a testa, un solo bambino accompagnato da due adulti non paga, invece un bambino non accompagnato paga 5 euro. La famiglia Fibonacci, formata da 7 adulti e 5 bambini, si reca a teatro. Quanto pagheranno? [80 euro]
11. Nel campionato di calcio chi vince prende 3 punti, chi pareggia 1 punto e chi perde 0 punti. Ad un certo punto del torneo la squadra del Fibonacci ha 9 punti. Sapendo che non ha mai pareggiato e che ha perso un numero doppio di partite rispetto a quante ne ha vinte, quante partite ha giocato? [9]
12. Martedì la temperature massima fu 4°C più alta di quella di lunedì. Mercoledì invece la temperatura massima fu 6°C più fredda di quella di lunedì. Se Martedì la temperatura massima fu 22°C, quale fu la massima di mercoledì? [12° C]
13. Alessia e Mattia fanno un gioco a due, in cui non è previsto il pareggio, il vincitore guadagna 2 punti e il perdente ne perde 1. Se Alessia vince 3 partite e Mattia alla fine ha 5 punti, quante partite hanno giocato? [8]

***Livello 2***

14. Un coltello pesa quanto due cucchiai, tre cucchiai pesano quanto un coltello e una forchetta, un mestolo pesa quanto un coltello e un cucchiaio. Se una forchetta pesa 40 grammi, quanto pesano le altre posate? [Cucchiaio 40 g, Coltello 80g, Mestolo 120 g]
15. Un pastore disse a un altro: *Se mi darai otto pecore avremo lo stesso numero di animali*. Rispose l'altro: *Dammene tu otto e io ne avrò il doppio delle tue*. Quante pecore aveva ciascuno dei due pastori? [56 e 40]
16. Tre amici Alberto, Bice e Carlo sono andati insieme a pescare. Alberto e Bice insieme hanno preso 14 pesci; Bice e Carlo, insieme, ne hanno presi 20; Alberto e Carlo 18. Quanti pesci hanno preso, complessivamente, i cinque amici? [26]
17. In una gara sui 450 metri, Alice parte con 100 metri di vantaggio su Carla, che è più veloce di Alice, dato che nel tempo in cui Alice percorre 10 metri lei ne percorre 15. Alla fine della gara chi arriva prima e con quanto vantaggio sull'altra? [Carla, 50 metri]
18. Alcuni amici vanno a fare una gita in montagna e portano ciascuno un panino. Due di questi mangiano il panino prima di pranzo. A pranzo uno degli zaini, che contiene 5 panini, cade in un torrente e non può più recuperarsi. Allora gli amici dividono a metà i panini rimasti e ciascuno, tranne i due che hanno già mangiato, mangia metà panino. Quanti sono gli amici? [12]
19. Il grillo parlante quando è arrabbiato fa salti lunghi 2 metri indietro, quando non lo è i suoi salti sono lunghi 1 metro e vanno in avanti. Un giorno parte dalla casa di Geppetto e fa in totale 15 salti. Se 6 di questi salti sono fatti quando è arrabbiato, di quanti metri si è allontanato dalla casa di Geppetto? [1 *m* all'indietro]
20. Il doppio del triplo di un numero e il triplo del doppio dello stesso numero, danno luogo allo stesso risultato? [Sì]
21. Un milione di miliardi e un miliardo di milioni rappresentano numeri diversi? [No]

## Lavoriamo insieme

Le calcolatrici tascabili sono spesso utili, ma come per tutte le macchine non si deve abusare del loro uso. Per esempio è utile ma non necessario usarle per calcolare 73 · 15. Infatti sfruttando la proprietà distributiva possiamo dire: 73 · 15 = 73 · (10 + 5) = 73 · 10 + 73 · 5, ma calcolare le due moltiplicazioni mentalmente è abbastanza semplice: 730 + 365 = 1095.

***Effettuare le seguenti moltiplicazioni con l'ausilio delle proprietà distributive, in modo da ottenere solo moltiplicazioni il cui risultato è noto a mente***

22. a) 8 · 21; b) 5 · 24; c) 3 · 19; d) 15 · 32; e) 47 · 13; f) 18 · 51
23. a) 33 · 42; b) 20 · 59; c) 62 · 101; d) 43 · 43; e) 111 · 27; f) 19 · 102
24. a) 64 · 120; b) 24 · 61; c) 101 · 202; d) 111 · 42; e) 1001 · 27; f) 10001 · 73

## Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente antico problema.

*Un avaro disse ad un ingenuo*: *Ti farò arricchire rapidamente. Fammi vedere quanto denaro hai in tasca, poiché io te ne darò altrettanto ma poi tu dovrai darmi* € 16,00. *Continueremo in questo modo quante volte vorrai. L'ingenuo accettò e accecato dalla prospettiva di arricchire facilmente e dall'illusione di vedersi raddoppiare ogni volta quanto aveva in tasca, non si accorse che dopo avere raddoppiato per quattro volte il denaro che aveva in tasca, gli rimasero solo* € 16,00 *che dovette perciò dare all'avaro, rimanendo senza soldi. Quanto denaro aveva in tasca prima di iniziare*?

Se alla fine aveva € 16,00, vuol dire che prima ne aveva € 8,00 e l'avaro glieli ha raddoppiati. Ma ancora prima gli aveva tolto € 16,00, perciò ne aveva € 24,00. Quindi ragionando a ritroso la catena completa è la seguente: $16 \xrightarrow{/2} 8 \xrightarrow{+16} 24 \xrightarrow{/2} 12 \xrightarrow{+16} 28 \xrightarrow{/2} 14 \xrightarrow{+16} 30 \xrightarrow{/2} 15$. Quindi all'inizio l'ingenuo aveva 15 euro.

### *Livello 2*

25. Un problema adattato da Eulero. Tre ragazzi Aldo, Bea e Carla giocano a biglie tre partite; poiché la posta è in palline, chi vince raddoppia il numero di quelle che già possiede, che gli vengono cedute in parti uguali dai perdenti. In ogni partita, uno dei tre giocatori a turno, secondo l'ordine alfabetico dei nomi, vince e gli altri due perdono, così alla fine, tutti e tre hanno 64 palline. Si vuol sapere quante ne aveva ciascuno prima di iniziare a giocare. [50, 65, 77]
26. Aldo esce a passeggio con Bruna e Carla. Aldo ha lo stesso denaro di Bruna e paga il biglietto per la discoteca per tutti e tre, che costa 10 euro per ciascuno. Dopo avere pagato si accorge di avere la metà dei soldi di Bruna. Quanti soldi aveva Aldo quando è uscito? [60 euro]
27. Hansel e Gretel per non perdersi nel bosco lasciano 1 sassolino ogni 10 metri. Dopo che hanno lasciato cadere 25 sassolini, si accorgono che gliene sono rimasti solo altri 15, quindi ne lasciano cadere uno ogni 20 metri. Quando hanno finito i sassolini, raccolgono 10 rami secchi e li lasciano cadere uno ogni 30 metri. Quando il papà li lascia nel bosco sono rimasti 3 rametti. Quanta strada hanno fatto finora? [760 *m*]

### L'angolo delle correzioni

Le seguenti operazioni sono errate, correggerle.

1. 1 + 2 · (3 + 4) = 1 + 6 + 4 = 7 + 4 = 11.
2. 5 – 4 – 3 = 5 – 1 = 4.
3. 8 + 5 · 3 = 13 · 3 = 39.
4. (–3 – 2) · (5 + 1) = 5 · (5 + 1) = 25 + 1 = 26.
5. 4 · (–5 + 2) = 4 · 5 + 4 · 2 = 20 + 8 = 28.
6. (4 – 6) · (2 – 2) = 4 · 2 – 6 · (–2) = 8 +12= 20.
7. 2 + (7 · 3) = 2 · 7 + 2 · 3 = 14 + 6 = 20.
8. (3 · 8) – 3 = (3 – 3) + (8 – 3) = 0 + 5 = 5.
9. 7 – (4 – 1) = 7 – 4 – 1 = 3 – 1 = 2.
10. 5 – (4 · 2) = 5 – 4 – 5 · 2 = 20 – 10 = 10.

## Lavoriamo insieme

*Semplificare la seguente espressione nel modo più rapido, ossia eseguendo solo quelle potenze che risultano necessarie*: $\left(\left(2^2\cdot 3^2\right)^3\cdot 6^2\cdot 3^3\cdot\left(6^4\cdot 6^3\right)^5\right.$.

Cominciamo ad applicare le proprietà enunciate nella teoria: $\left[\left(2\cdot 3\right)^2\right]^3\cdot 6^2\cdot 3^3\cdot\left(6^{4+3}\right)^5=\left(6^2\right)^3\cdot 6^2\cdot 3^3\cdot\left(6^7\right)^5=$ $=6^6\cdot 6^2\cdot 3^3\cdot 6^{35}=6^{6+2+35}\cdot 3^3=6^{43}\cdot 3^3$. Non riusciamo a semplificare ulteriormente l'espressione.

***Utilizzando i Teoremi enunciati nella teoria, semplificare le seguenti espressioni***

***Livello* 1**

28. a) $2^3\cdot 2^5\cdot 2^7\cdot 2^4$; b) $3^2\cdot 3^3\cdot\left(3^4\right)^2$; c) $\left(5\cdot 5^2\right)^3\cdot\left(5^4\cdot 5\right)^4$; d) $7^2\cdot\left(7\cdot 7^2\right)^3\cdot\left(7^4\cdot 7\right)$
[a) $2^{23}$; b) $3^{13}$; c) $5^{29}$; d)$7^{16}$]

29. a) $2\cdot 2^2\cdot 2^3\cdot 2^4$; b) $2^2\cdot 2^3\cdot\left(2^3\right)^4\cdot\left(2^4\right)^4$; c) $\left(3\cdot 5^2\right)^3\cdot\left(3^2\cdot 3\right)^3$; d)$\left[\left(3^2\right)^3\right]^4\cdot\left[\left(3^3\right)^2\right]^4$
[a) $2^{10}$; b) $2^{11}$; c)$3^9\cdot 5^6$; d)$3^{48}$]

30. a) $2^4\cdot\left(2^2\right)^2\cdot\left(2^3\right)^4\cdot\left(2^4\right)^3$; b) $3^2\cdot 5^2\cdot 3^3\cdot 2^3$; c) $3\cdot 2\cdot 5\cdot 2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot 5$ [a) $2^{32}$; b) $2^3\cdot 3^5\cdot 5^2$; c) $2^4\cdot 3^3\cdot 5^2$]

31. a) $-2\cdot 7\cdot 11\cdot 7^4\cdot 11^3\cdot 13^2$; b) $2\cdot 3\cdot 2^2\cdot 5^2\cdot\left(-2\cdot 3^3\right)\cdot\left(-2\cdot 5^2\right)\cdot\left(-2^2\cdot 3^2\cdot 5^3\right)$
[a) $2\cdot 7^5\cdot 11^4\cdot 13^2$; b) $-2^7\cdot 3^6\cdot 5^7$]

32. a) $\left[\left(2^2\cdot 5^2\right)^3\cdot 3^3\right]^4\cdot\left[\left(2^4\cdot 3^4\right)^2\cdot 5^2\right]^4$; b) $\left\{\left[\left(2^2\right)^3\right]^4\right\}^5\cdot\left\{\left[\left(2^5\right)^4\right]^3\right\}^2$ [a) $2^{40}\cdot 3^{44}\cdot 5^{32}$; b) $2^{240}$]

33. a) $\left(2^2\right)^3\cdot\left(2^3\right)^2\cdot\left(2^6\right)^2$; b) $\left\{\left[\left(5^2\cdot 7^2\right)^3\cdot 2^3\right]^4\cdot 3^4\right\}^5\cdot\left\{\left[\left(2^3\cdot 5^3\right)^4\cdot 3^4\right]^3\cdot 7^3\right\}^5$ [a) $2^{24}$; b) $2^{111}\cdot 3^{200}\cdot 5^{420}\cdot 7^{165}$]

***Livello* 2**

34. Un'azienda ha avuto una produzione di $2^{17}$ chicchi di riso. Nel giro di tre anni si prevede di raddoppiare la produzione. Il tecnico del marketing dice che quindi si devono raccogliere $2^{34}$ chicchi; la segretaria di produzione afferma che dovranno essere invece $4^{17}$; il direttore del settore vendite non è d'accordo, saranno $2^{18}$; infine il responsabile pubblicitario afferma che il risultato corretto è invece $4^{34}$. Chi ha ragione e perché? [Direttore settore vendite]

35. Chi è più grande, $2^{3^4}$ oppure $\left(2^3\right)^4$? Giustificare la risposta $\left[2^{3^4}\right]$

36. Tenuto conto che $2^{10}=1024$, cioè $2^{10}\approx 10^3$, quale potenza di 2 è circa $10^9$? [$2^{30}$]

37. Possiamo dire che $2^3\cdot 3^3=6^3$? [Sì]

38. Possiamo dire che $2^3+3^3=5^3$? [No]

### L'angolo delle correzioni

Le seguenti operazioni sono errate, correggerle.

1. $11\cdot(2+1)^2=11\cdot 2^2+11\cdot 1=44+11=55$.
2. $3^2\cdot 3^3=3^6$.
3. $3^2\cdot 4^2=12^4$.
4. $3^2+3^3=3^5$.
5. $3^2\cdot 2^3=6^6$.
6. $(3^2+3^3)\cdot 3^4=3^7+3^2=3^9$.
7. $(4^8)^2\cdot 4^2-4=4^{64}\cdot 4^2-4=4^{66}-4=4^{65}$.
8. $(2^9)^2\cdot 2^8\cdot 2^7\cdot(2^6)^3=(2^9)^2\cdot 2^{15}\cdot(2^6)^3=(2^{30})^6=2^{180}$.

**Intervallo matematico**

Diverse sono le questioni che hanno un fondo giocoso e che riguardano le potenze. Una delle più famose e interessanti è quella relativa alla leggenda che si narra sull'inventore degli scacchi. In effetti vi sono molte versioni che riferiscono la stessa storia, ambientandola in paesi diversi, la Cina, l'India e altri paesi esotici. La struttura è però comune a tutte le leggende.

Si narra che un re o imperatore di un grande e ricco paese fu così contento di apprendere il gioco degli scacchi che decise di accogliere qualsiasi richiesta del suo inventore, un tale Sessa. Il re naturalmente si aspettava che fossero richieste ori o pietre preziose, rimase quindi sorpreso che Sessa chiedesse di ricevere soltanto 1 chicco di riso per la prima casella del gioco degli scacchi, 2 per la seconda, 4 per la terza, 8 per la quarta e così via, raddoppiando sempre il numero di chicchi presenti nella casella precedente, fino ad arrivare a $2^{63}$ chicchi di riso. Il re sorrise e accolse volentieri la richiesta, felice di essersela cavata con un così povero compenso.

Ben presto però cominciò a preoccuparsi un po' di più, dato che i contabili della corte dopo diversi giorni non erano ancora riusciti a calcolare il numero esatto di chicchi di riso. Si sentì veramente male il giorno in cui gli fu comunicato che non si poteva accogliere la richiesta di Sessa, poiché gli immensi magazzini reali non possedevano neanche un millesimo di quanto si doveva.

Vediamo di contare quanti sono effettivamente questi chicchi di riso. Dobbiamo calcolare la seguente somma: $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{63}$. Potremmo calcolare la precedente somma con l'aiuto di una calcolatrice, diciamo però che si può far vedere, con tecniche che ancora non siamo in grado di capire, che essa risulta uguale a $2^{64} - 1 = 18446744073709551615$ e fin qui nulla di particolare. Infatti, quanti sono questi chicchi? Un milione, un miliardo? Di più di meno? Il numero ha 20 cifre, tenuto conto che un miliardo ha 10 cifre, noi abbiamo più di dieci miliardi di miliardi di chicchi. Credo che già questo numero ci impressioni un po'. Ma rendiamolo più reale, quanti chili di riso sono, all'incirca? Il peso di un chicco di riso dipende ovviamente dalla varietà, uno dei più grandi è il cosiddetto Arborio, 1000 chicchi pesano circa 38 grammi (Fonte Ente Nazionale Risi), quindi i chicchi di Sessa pesano circa 701 miliardi di tonnellate (li raggruppiamo in gruppi da mille, cioè dividiamo per 1000, poi moltiplichiamo per 0,038 chilogrammi e dividiamo per un milione per portare in tonnellate). Tanto per avere un idea, nel 2015 nel mondo si sono prodotti circa 734 milioni di tonnellate di riso. Era veramente troppo, anche per un grande imperatore!

## Divisibilità e fattorizzazione nell'insieme dei numeri interi

Secondo la fisica tutti i corpi sono costituiti da particelle elementari, detti atomi, la cui parola significa *indivisibili*, in effetti gli stessi atomi sono costituiti da particelle più piccole, come elettroni e protoni o ancora più piccole come i cosiddetti quark. Anche i numeri interi sono composti da parti indivisibili. Cominciamo a porre qualche definizione.

**Definizione 14**

Diciamo che il numero intero $m$ è **multiplo** del numero intero $n$ se esiste un numero intero $p$ tale che $m = n \cdot p$. Se $m$ è multiplo di $n$, $n$ si dice **divisore** di $m$.

Questa nozione è fondamentale nelle ripartizioni in parti uguali.

**Esempio 22**

Giacomo ha acquistato 12 penne uguali spendendo € 7,30. Il suo amico Augusto, patito della matematica, lo rimprovera dicendo che è stato imbrogliato perché il prezzo che ha pagato non può essere corretto. Augusto sostiene che, dato che le penne sono uguali, hanno lo stesso prezzo, ma allora il totale deve essere un multiplo di 12, mentre non è possibile in alcun modo ottenere 730 (cioè i centesimi di euro) come prodotto di 12 per un numero intero. Infatti $12 \cdot 60 = 720$ e $12 \cdot 61 = 732$. Quindi le penne potevano costare 60 centesimi l'una e il totale doveva essere € 7,20; oppure 61 centesimi l'una, per un totale di € 7,32.

L'esempio precedente ci suggerisce che stabilire se un numero è o no multiplo di un altro è importante in tutti i casi in cui vogliamo dividere in parti uguali.
Nel caso di due numeri, uno multiplo dell'altro, possiamo definire una nuova operazione.

**Definizione 15**

Dati i numeri naturali $m$ ed $n$, con $m$ multiplo di $n$, diciamo **divisione** di $m$ per $n$, l'operazione di determinare un numero intero $p$ per cui si ha: $m = n \cdot p$. $m$ si chiama **dividendo**, $n$ **divisore** e $p$ **quoziente**.

**Notazione 11**

La divisione di $m$ per $n$ si indica con $m : n$ p con $m/n$.

Ovviamente la divisione fra due numeri naturali, uno multiplo dell'altro, non gode né della proprietà commutativa, né di quella associativa.

**Esempio 23**

- 16 è multiplo di 2, quindi $16 : 2 = 8$, ma ovviamente 2 non è multiplo di 16 e quindi l'operazione $2 : 16$, che non abbiamo ancora definito, non può avere lo stesso risultato.
- Allo stesso modo possiamo calcolare $12 : 2 : 3$ solo nell'ordine naturale, cioè $(12 : 2) : 3 = 6 : 3 = 2$, mentre non sappiamo ancora come eseguire $12 : (2 : 3)$.

Vediamo come possiamo trovare i divisori di un numero naturale.

**Esempio 24**

Cerchiamo i divisori di 24. Facilmente si vede che $24 = 2 \cdot 12$, quindi 2 e 12 sono due divisori di 24. Ma poiché $12 = 2 \cdot 6$, utilizzando la proprietà associativa possiamo anche scrivere:

$$24 = 2 \cdot 12 = 2 \cdot (2 \cdot 6) = 4 \cdot 6$$

Cioè anche 4 e 6 sono divisori di 24. Ancora $6 = 2 \cdot 3$, quindi scriviamo:

$$24 = 4 \cdot 6 = 4 \cdot (2 \cdot 3) = 8 \cdot 3$$

Cioè anche 3 e 8 sono divisori di 24. Fino adesso abbiamo trovato i seguenti divisori:

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$$

Possiamo dire che non vi sono altri divisori di 24? Sì perché abbiamo visto che i divisori si trovano a coppie, quindi l'unica possibilità che rimane, dopo il 4, è che 5 sia divisore di 24, ma ciò non accade.

Sembrerebbe, dal precedente esempio che si possa dire che i divisori di un numero sono sempre in numero pari, perché appunto si trovano a coppie. Vediamo se ciò è vero.

**Esempio 25**
Quali sono i divisori di 4? Facilmente si vede che sono solo 1, 2, 4. Cioè sono in numero dispari. Come mai ciò accade? Perché le coppie sono (1; 4) e (2; 2), cioè la seconda coppia ha gli elementi uguali e quindi non possiamo contare due volte lo stesso numero.

Non è difficile capire che quanto visto nell'esempio precedente vale per tutti i numeri che sono quadrati perfetti, come 9, 16, 25, … Quindi vale il seguente risultato

**Teorema 10**
Un numero naturale ha un numero dispari di divisori solo se è un quadrato perfetto.

Ovviamente ogni numero ha due divisori, che sono il numero 1 e lo stesso numero, dato che, per esempio, $12 = 12 \cdot 1 = 1 \cdot 12$. Possiamo dire che ogni numero naturale ha almeno due divisori? No, perché il numero 1 ha un solo divisore, dato che in questo caso il divisore "se stesso" coincide con 1. Non è difficile capire che ciò accade solo per il numero 1. Gli altri numeri naturali hanno effettivamente almeno due divisori. È però possibile che vi siano numeri che hanno **solo** due divisori.

**Esempio 26**
Il numero 17 si può scrivere solo come $1 \cdot 17$ oppure come $17 \cdot 1$.

I numeri come 17 meritano una definizione, perché sono gli *atomi* che cercavamo.

**Definizione 16**
- Un numero naturale $p$ che ha solo due divisori distinti (1 e $p$) si chiama numero **primo**.
- Un numero naturale che ha più di due divisori si chiama numero **composto**.

Quindi il numero 1 non è né primo, né composto. Abbiamo la validità del seguente fondamentale risultato.

**Teorema 11 (di Euclide)**
L'insieme dei numeri primi è infinito.

Abbiamo visto che i numeri composti si possono scrivere in diversi modi come prodotto di fattori, per esempio $12 = 1 \cdot 12$, ma anche $12 = 2 \cdot 6$. Se però imponiamo che i fattori siano solo numeri primi o loro potenze, allora ogni numero si può scrivere in un solo modo. Così possiamo scrivere 12 solo come $3 \cdot 4$, dato che 3 è un numero primo e $4 = 2^2$. Vale il seguente importantissimo risultato.

**Teorema 12 (Fondamentale dell'aritmetica)**
Ogni numero naturale può scomporsi in un solo modo come prodotto di potenze di fattori primi.

**Esempio 26**
Il numero 24 si può scrivere come prodotto di fattori che sono potenze di numeri primi solo nel modo seguente: $24 = 8 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$. Ovviamente la scrittura $24 = 3 \cdot 2^3$, è considerata equivalente alla precedente. È invece diversa la scritta: $24 = 1^5 \cdot 2^3 \cdot 3$. Ma ciò non costituisce una negazione del precedente teorema perché 1 non è un numero primo e quindi questa non è una scomposizione di 24 in fattori primi, solo la prima lo è.

L'esempio ci fa capire perché non possiamo considerare 1 come numero primo, dato che diversamente il teorema fondamentale dell'aritmetica non sarebbe vero.
Dato che è importante scomporre i numeri naturali in fattori, dobbiamo cercare dei metodi che facilitino questa ricerca.
Ricordiamo che l'ultima cifra a destra di un numero naturale si chiama *cifra delle unità*.

**Esempio 27**

I possibili prodotti di 2 per le 10 cifre sono: $2 \cdot 0 = 0$; $2 \cdot 1 = 2$; $2 \cdot 2 = 4$; $2 \cdot 3 = 6$; $2 \cdot 4 = 8$; $2 \cdot 5 = 10$; $2 \cdot 6 = 12$; $2 \cdot 7 = 14$; $2 \cdot 8 = 16$; $2 \cdot 9 = 18$. Come si vede tutti i prodotti hanno come cifra delle unità 0, 2, 4, 6 o 8. Ma se moltiplichiamo un qualsiasi numero per 2, la cifra delle unità si ottiene dal prodotto fra 2 e la cifra delle unità del numero. Così quando moltiplichiamo 126743 per 2, la cifra delle unità è la stessa di quella di $3 \cdot 2$, cioè 6. Quindi un numero intero moltiplicato per 2 ha come cifra delle unità un numero dell'insieme $\{0; 2; 4; 6; 8\}$.

Quanto visto nell'esempio precedente può racchiudersi nel seguente risultato.

**Teorema 13 (Criterio di divisibilità per 2)**

Un numero naturale è divisibile per 2 solo se la sua cifra delle unità appartiene a $\{0, 2, 4, 6, 8\}$.

Valgono anche altri criteri, più difficili da dimostrare e che quindi ci limitiamo ad enunciare.

**Teorema 14 (Criterio di divisibilità per 3)**

Un numero naturale è divisibile per 3 solo se la somma delle sue cifre è un numero divisibile per 3.

**Teorema 15 (Criterio di divisibilità per 5)**

Un numero naturale è divisibile per 5 solo se la sua cifra delle unità appartiene all'insieme $\{0, 5\}$.

**Dimostrazione**

Se moltiplichiamo un numero pari per 5 la sua cifra delle unità sarà 0, dato che $2 \cdot 5 = 10$, e moltiplicare per esempio per 4 equivale a moltiplicare il precedente risultato per 2, quindi finirà ancora per 0. Se invece moltiplichiamo per un numero dispari la cifra delle unità sarà 5, poiché

$$5 \cdot 1 = 5,\ 5 \cdot 3 = 15,\ 5 \cdot 5 = 25,\ 5 \cdot 7 = 35 \text{ e } 5 \cdot 9 = 45.$$

**Teorema 16 (Criterio di divisibilità per 11)**

Un numero naturale è divisibile per 11 solo se la differenza fra la somma delle sue cifre di posto pari e la somma delle cifre di posto dispari è un numero divisibile per 11.

Si tenga conto che 0 è divisibile per qualunque numero, quindi nel criterio precedente la differenza può anche fare 0. Inoltre i criteri sono condizioni necessarie e sufficienti, quindi se non sono verificate le proprietà enunciate i numeri non sono divisibili per 2, 3, 5 o 11.
Vediamo qualche esempio di applicazione dei precedenti criteri.

**Esempio 28**

- 276 è divisibile per 3 perché la somma delle sue cifre è $2 + 7 + 6 = 15$, che è divisibile per 3.
- 235 non è divisibile per 3 perché la somma delle sue cifre è $2 + 3 + 5 = 10$, che non è divisibile per 3.
- 235 è divisibile per 5 perché finisce per 5, 276 no perché finisce per 6.
- 1353 è divisibile per 11 perché le somme alternate $1 + 5 = 6$ e $3 + 3 = 6$, sono uguali, quindi la loro differenza è 0.
- Anche 5170 è divisibile per 11 perché le somme alternate sono $5 + 7 = 12$ e $1 + 0 = 1$, e la loro differenza è $12 – 1 = 11$.
- Non è invece divisibile per 11, il numero 54762, perché $(5 + 7 + 2) – (4 + 6) = 11 – 10 = 1$, che non è divisibile per 11.

Vale il seguente importante risultato.

**Teorema 17**

Se la somma di alcuni numeri è divisibile per un certo numero $n$ e tutti gli addendi tranne uno sono divisibili per $n$, anche l'addendo rimanente deve esserlo.

**Esempio 29**

- La somma 3 + 6 + 9 + 12, deve fornire per forza un numero divisibile per 3, perché tutti gli addendi sono divisibili per 3. Infatti si ha: 3 + 6 + 9 + 12 = 30.
- La somma 3 + 6 + 9 + 11, deve fornire per forza un numero non divisibile per 3, perché solo 3 dei 4 addendi sono divisibili per 3, quindi se la somma lo fosse, per il teorema precedente anche il quarto addendo dovrebbe essere divisibile per 3. Infatti si ha: 3 + 6 + 9 + 11 = 29, che non è divisibile per 3.
- Invece la somma 3 + 6 + 9 + 7 + 5 può essere divisibile per 3, anche se tutti gli addendi non sono divisibili per 3, perché in questo caso i non divisibili sono più di uno. Infatti la somma è 30.

Con i criteri precedenti possiamo scomporre più facilmente in fattori primi.

**Esempio 30**

Vogliamo scomporre il numero 12600. Osserviamo che è divisibile per 2, quindi scriviamo: $12600 = 2 \cdot 6300$. Anche 6300 è pari, quindi $12600 = 2 \cdot 2 \cdot 3150 = 2^2 \cdot 3150$. Anche 3150 è pari: $12600 = 2^3 \cdot 1575$. Invece 1575 non è divisibile per 2, ma è divisibile per 3, perché 1 + 5 + 7 + 5 = 18 è divisibile per 3. Quindi $12600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 525$. Anche 525 è divisibile per 3, perché 5 + 2 + 5 = 12, perciò si ha: $12600 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 175$. Ora, 175 non è divisibile per 3, perché 1 + 7 + 5 = 13, ma lo è per 5, da cui si ha: $12600 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 35$; 35 è divisibile per 5. $12600 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$. Questa è la scomposizione definitiva perché 7 è un numero primo.

Potevamo mettere il tutto nel seguente schema

| | |
|---|---|
| 12600 | 2 |
| 6300 | 2 |
| 3150 | 2 |
| 1575 | 3 . |
| 525 | 3 |
| 175 | 5 |
| 35 | 5 |
| 7 | 7 |

Può essere interessante cercare gli eventuali divisori comuni a due o più numeri.

**Esempio 31**

Per i prossimi giochi studenteschi ogni scuola deve formare squadre formate dallo stesso numero di atleti, nei tre settori di età: fino a 14 anni, da 15 a 17 anni e oltre i 17 anni. Tenuto conto che in ogni settore si hanno rispettivamente a disposizione 18, 24 e 30 atleti, vogliamo sapere quanti atleti devono comporre ciascun gruppo.
La richiesta equivale a cercare, fra tutti i divisori dei numeri 18, 24 e 30, il più grande dei divisori comuni. Non è difficile vedere che tale numero è 6. Infatti: $18 = 6 \cdot 3$; $24 = 6 \cdot 4$; $30 = 6 \cdot 5$.

L'esempio visto ci permette di enunciare il seguente risultato.

**Teorema 18**

L'insieme dei divisori comuni a dati numeri interi ha sempre un massimo.

**Definizione 17**

Il maggiore dei divisori comuni a due o più numeri interi si chiama loro **massimo comune divisore**.

**Notazione 12**

Il massimo comune divisore si indica con il simbolo *MCD*

Vi è un metodo più veloce per trovare il massimo comune divisore di due o più numeri interi?

**Esempio 32**

Scomponiamo in fattori primi i tre numeri dell'esempio precedente:

$$18 = 2 \cdot 3^2;\ 24 = 2^3 \cdot 3;\ 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

Osserviamo che tutti e tre i numeri contengono i fattori 2 e 3, i divisori comuni sono {1; 2; 3; 6} e il più grande è ovviamente 6.

Il precedente esempio ci permette di enunciare il seguente risultato.

**Teorema 19**

Il massimo comune divisore di due o più numeri naturali si ottiene moltiplicando le potenze dei fattori primi che i numeri hanno in comune.

Ovviamente due o più numeri possono avere in comune solo il divisore 1, per esempio il 10 e il 21, dato che $10 = 2 \cdot 5$ e $21 = 3 \cdot 7$. A numeri del generi diamo un nome particolare.

**Definizione 18**

Due numeri che hanno massimo comune divisore uguale a 1, si dicono **coprimi** o **primi fra loro**.

Consideriamo un'altra questione.

**Esempio 33**

Dal piazzale antistante la stazione di Smallville, alle 7:30 di ogni giorno feriale partono 3 autobus diretti alle tre scuole della cittadina. A causa delle diverse distanze gli autobus hanno una periodicità diversa. In particolare la successiva corsa parte, rispettivamente ogni 8, 10 e 12 minuti. Vogliamo sapere quando sarà la prossima volta in cui gli autobus partiranno insieme. In pratica dovremmo costruire le tabelle orarie delle linee di bus, cercando un numero comune a tutte e tre, come mostrato accanto, ma ciò equivale a cercare un multiplo comune ai numeri 6, 8 e 12, anzi a cercare il più piccolo di essi, che è proprio 24. Quindi 24 sono i minuti che passano prima che i tre bus ripartano insieme.

| Bus A | Bus B | Bus C |
|---|---|---|
| 7:30 | 7:30 | 7:30 |
| 7:36 | 7:38 | 7:42 |
| 7:42 | 7:46 | **7:54** |
| 7:48 | **7:54** | 8:06 |
| **7:54** | 8:04 | 8:24 |

In vista del precedente esempio enunciamo il seguente risultato.

**Teorema 20**

L'insieme dei multipli comuni a dati numeri ha sempre un minimo.

**Definizione 19**

Il minore dei multipli comuni a due o più numeri interi si chiama loro **minimo comune multiplo**

**Notazione 13**

Il minimo comune multiplo si indica con *mcm*.

Vediamo come calcolare il minimo comune multiplo.

**Esempio 34**

Consideriamo i numeri del precedente esempio: 6, 8 e 12. Scomponiamoli in fattori primi.

$$6 = 2 \cdot 3;\ 8 = 2^3;\ 12 = 2^2 \cdot 3$$

Ovviamente un multiplo comune deve contenere tutti i fattori di tutti i numeri, quindi non è difficile capire che esso è: $mcm(6; 8; 12) = 2^3 \cdot 3 = 24$.

Quindi, tenuto conto del precedente esempio possiamo enunciare il seguente risultato.

**Teorema 21**

Il minimo comune multiplo di due o più numeri è dato dal prodotto di tutte le massime potenze dei fattori primi distinti contenute nei numeri.

Vi è una semplice relazione fra *mcm* e *MCD* di una stessa coppia di numeri.

**Esempio 35**

Consideriamo i numeri 8 e 12. Abbiamo $8 = 2^3$; $12 = 2^2 \cdot 3$ e $mcm(8; 12) = 2^3 \cdot 3$; $MCD(8; 12) = 2^2$, cioè $8 \cdot 12 = 2^3 \cdot 2^2 \cdot 3 = mcm(8; 12) \cdot MCD(8; 12)$.

Quanto visto nell'esempio precedente non è casuale, ma accade sempre, come afferma il seguente teorema.

**Teorema 22**

Dati due numeri naturali $p$ e $q$ si ha: $mcm(p; q) \cdot MCD(p; q) = p \cdot q$.

**Dimostrazione**

Per esercizio

La proprietà precedente non è però generalizzabile a più di due numeri.

**Esempio 36**

Si ha: $8 = 2^3$; $10 = 2 \cdot 5$; $12 = 2^2 \cdot 3$; $mcm(8; 10; 12) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$; $MCD(8; 10; 12) = 2$. Ma si ha

$$8 \cdot 10 \cdot 12 = 960 \text{ e } (2^3 \cdot 3 \cdot 5) \cdot 2 = 240.$$

# Verifiche

## Lavoriamo insieme

*Trovare i divisori di* 40.

Sappiamo che sono a coppie, la prima delle quali è ovviamente (1, 40). Il numero è pari, quindi la successiva coppia sarà (2, 20). Non è divisibile per 3, ma lo è per 4, quindi abbiamo (4, 10). Abbiamo poi (5, 8), e abbiamo finito perché 40 non è divisibile né per 6 né per 7, ed è inutile proseguire perché con il secondo fattore siamo già arrivati ad 8, quindi abbiamo concluso le verifiche. In totale abbiamo quindi gli 8 divisori seguenti: {1; 2; 4; 5; 8; 10; 20; 40}.

***Trovare tutti i divisori dei seguenti numeri***

***Livello 1***

1. a) 28; b) 30; c) 33 [a) {1; 2; 4; 7; 14; 28}; b) {1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30}; c) {1; 3; 11; 33}]
2. a) 36; b) 42; c) 49 [a) {1; 2; 3; 6; 12; 18; 36}; b) {1; 2; 3; 6; 7; 14; 21; 42}; c) {1; 7; 49}]
3. a) 51; b) 60; c) 72
   [a) {1; 3; 17; 51}; b) {1; 2; 3; 4; 5; 6; 10; 12; 15; 20; 30; 60}; c){1; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 12; 18; 24; 36; 72}]

***Livello 2***

4. 10 ha 4 divisori, possiamo dire che 100 ha 8 o 16 divisori o nessuna delle due? [Ne ha 9]
5. 10 ha 4 divisori, 20 ne ha 6, possiamo dire che per ogni numero che ha 4 divisori, il suo doppio ne ha 6? [No, 15 ha 4 divisori ma 30 ne ha 8]
6. I quadrati perfetti hanno un numero dispari di divisori, i cubi perfetti non quadrati, come 27, ne hanno un numero dispari o pari? [Pari]

***Livello 3***

7. a) Un numero come 7 ha solo 2 divisori, il suo quadrato quanti ne ha? b) La proprietà vale per qualsiasi numero che ha solo 2 divisori? [a) 3; b) Sì]
8. a) 7 ha solo 2 divisori, il suo cubo quanti ne ha? b) La proprietà vale per qualsiasi numero che ha solo 2 divisori? [a) 4; b) Sì]
9. Se $n$ ha 4 divisori e $m$ ne ha 6, possiamo dire che $m \cdot n$ ha 24 divisori?
   [No 10 ha 4 divisori, 30 ne ha 6, 300 ne ha 18]
10. La risposta al quesito precedente, è sempre 18? [No, $8 \cdot 32$ ha 9 divisori]
11. Quando accade che se un numero ha 4 divisori, il suo doppio ne ha 6?
    [Quando il numero è pari ma diverso da 8]

## Lavoriamo insieme

*Per verificare se un numero è o no primo, quanti tentativi dobbiamo fare*?

Per esempio per verificare se 113 è primo, dovremmo fare in teoria 111 tentativi, verificando se i numeri da 2 a 112 sono divisori di 113 o no? Ciò non è necessario, infatti intanto non ha senso vedere se il numero è divisibile per 4 se non lo è per 2, oppure se lo è per 9, dato che non lo è per 3. Quindi in effetti basta solo vedere se qualcuno dei numeri primi che lo precedono è o no un suo divisore. In effetti possiamo ancora diminuire il numero delle verifiche. Consideriamo alcuni casi: $113 = 2 \cdot 56 + 1 = 3 \cdot 37 + 2 = 5 \cdot 22 + 3 = 7 \cdot 16 + 1 = 11 \cdot 10 + 3$. A questo punto possiamo fermarci concludendo che 113 è primo. Ciò perché osserviamo che in ogni successiva uguaglianza il secondo fattore diminuisce, mentre il primo aumenta. Ciò significa che nel momento in cui otteniamo un secondo fattore minore o uguale del primo abbiamo finito. In effetti basta controllare fino al più grande intero contenuto nella radice quadrata del numero, nel nostro caso al massimo fino a 10, poiché $\sqrt{113} \approx 10,6$.

***Verificare, usando il minor numero possibile di verifiche, quali fra i seguenti numeri sono primi***

***Livello 2***

12. a) 43; b) 207; c) 111; d) 403; e) 319; f) 727; g) 1223; h) 1143 [a); f); g)]
13. a) 747; b) 1023; c) 1237; d) 4321; e) 12349; f) 54321; g) 13579 [c)]
14. a) 24681; b) 11111; c) 110111; d) 135531; e) 123457; f) 333337 [e); f)]

***Livello 3***

15. I numeri le cui cifre sono tutte uguali a 1 si chiamano *repunit*, alcuni di essi sicuramente non sono primi, quali? [Con un numero di cifre pari, tranne 11, o multiplo di 3]
16. A partire da 11111 costruiamo altri 5 numeri inserendo la cifra 0 in una posizione a piacere, quali di tali numeri sono primi? [Solo 101111]
17. Usando tutte le cifre 1, 2, 3, 4, 5 e 6 si possono costruire ben 720 numeri, per esempio 123456 o 635421, quanti di essi sono primi? Giustificare la risposta. [Nessuno]

## Lavoriamo insieme

Il crivello di Eratostene è un metodo per determinare numeri primi. Consiste nella seguente procedura, si scrivono tutti i numeri che vogliamo testare, per esempio i numeri da 215 a 261. Eliminiamo subito i numeri pari, che non sono primi.

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 215 | ~~216~~ | 217 | ~~218~~ | 219 | ~~220~~ | 221 | ~~222~~ | 223 | ~~224~~ | 225 | ~~226~~ |
| 227 | ~~228~~ | 229 | ~~230~~ | 231 | ~~232~~ | 233 | ~~234~~ | 235 | ~~236~~ | 237 | ~~238~~ |
| 239 | ~~240~~ | 241 | ~~242~~ | 243 | ~~244~~ | 245 | ~~246~~ | 247 | ~~248~~ | 249 | ~~250~~ |
| 251 | ~~252~~ | 253 | ~~254~~ | 255 | ~~256~~ | 257 | ~~258~~ | 259 | ~~260~~ | 261 | |

Ora togliamo i multipli di 3, partendo dal primo di essi, cioè 216, anche se lo avevamo già tolto

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 215 | ~~216~~ | 217 | ~~218~~ | ~~219~~ | ~~220~~ | 221 | ~~222~~ | 223 | ~~224~~ | ~~225~~ | ~~226~~ |
| 227 | ~~228~~ | 229 | ~~230~~ | ~~231~~ | ~~232~~ | 233 | ~~234~~ | 235 | ~~236~~ | ~~237~~ | ~~238~~ |
| 239 | ~~240~~ | 241 | ~~242~~ | ~~243~~ | ~~244~~ | 245 | ~~246~~ | 247 | ~~248~~ | ~~249~~ | ~~250~~ |
| 251 | ~~252~~ | 253 | ~~254~~ | ~~255~~ | ~~256~~ | 257 | ~~258~~ | 259 | ~~260~~ | ~~261~~ | |

Passiamo ai multipli di 5, partendo da 215

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ~~215~~ | ~~216~~ | 217 | ~~218~~ | ~~219~~ | ~~220~~ | 221 | ~~222~~ | 223 | ~~224~~ | ~~225~~ | ~~226~~ |
| 227 | ~~228~~ | 229 | ~~230~~ | ~~231~~ | ~~232~~ | 233 | ~~234~~ | ~~235~~ | ~~236~~ | ~~237~~ | ~~238~~ |
| 239 | ~~240~~ | 241 | ~~242~~ | ~~243~~ | ~~244~~ | ~~245~~ | ~~246~~ | 247 | ~~248~~ | ~~249~~ | ~~250~~ |
| 251 | ~~252~~ | 253 | ~~254~~ | ~~255~~ | ~~256~~ | 257 | ~~258~~ | 259 | ~~260~~ | ~~261~~ | |

Adesso i multipli di 7, il primo dei quali è $217 = 7 \cdot 31$

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ~~215~~ | ~~216~~ | ~~217~~ | ~~218~~ | ~~219~~ | ~~220~~ | 221 | ~~222~~ | 223 | ~~224~~ | ~~225~~ | ~~226~~ |
| 227 | ~~228~~ | 229 | ~~230~~ | ~~231~~ | ~~232~~ | 233 | ~~234~~ | ~~235~~ | ~~236~~ | ~~237~~ | ~~238~~ |
| 239 | ~~240~~ | 241 | ~~242~~ | ~~243~~ | ~~244~~ | ~~245~~ | ~~246~~ | 247 | ~~248~~ | ~~249~~ | ~~250~~ |
| 251 | ~~252~~ | 253 | ~~254~~ | ~~255~~ | ~~256~~ | 257 | ~~258~~ | ~~259~~ | ~~260~~ | ~~261~~ | |

Per i multipli di 11 partiamo da $221 = 13 \cdot 17$.

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ~~215~~ | ~~216~~ | ~~217~~ | ~~218~~ | ~~219~~ | ~~220~~ | ~~221~~ | ~~222~~ | 223 | ~~224~~ | ~~225~~ | ~~226~~ |
| 227 | ~~228~~ | 229 | ~~230~~ | ~~231~~ | ~~232~~ | 233 | ~~234~~ | ~~235~~ | ~~236~~ | ~~237~~ | ~~238~~ |
| 239 | ~~240~~ | 241 | ~~242~~ | ~~243~~ | ~~244~~ | ~~245~~ | ~~246~~ | ~~247~~ | ~~248~~ | ~~249~~ | ~~250~~ |
| 251 | ~~252~~ | 253 | ~~254~~ | ~~255~~ | ~~256~~ | 257 | ~~258~~ | ~~259~~ | ~~260~~ | ~~261~~ | |

Adesso abbiamo finito perché il successivo numero primo è 17 e $17 \cdot 17 = 289 > 261$. Quindi i numeri rimasti sono primi.

### *Livello 2*

***Utilizzando il crivello di Eratostene determinare tutti i numeri primi compresi tra le seguenti coppie***

18. a)125 e 173; b) 193 e 231; c) 264 e 312; d) 327 e 413.

## Lavoriamo insieme

*Troviamo scritto su un foglio macchiato d'olio il seguente numero* X24X42X, *in esso con delle X abbiamo indicato le cifre illeggibili. Sappiamo che tutte le cifre illeggibili sono uguali fra loro e che il numero è divisibile per* 33, *vogliamo sapere qual è il numero*.

Utilizziamo le nozioni sulla divisibilità. Dato che esso è divisibile per 33 è divisibile sia per 3 che per 11, deve perciò verificare entrambe le regole di divisibilità. Quindi la somma delle sue cifre deve essere un numero divisibile per 3. Sommando le cifre otteniamo 12 + 3X, quale che sia la cifra rappresentata da X questo numero è sempre divisibile per 3. Adesso consideriamo la divisibilità per 11. Sommiamo le cifre di posto dispari: 2X + 8 e quelle di posto pari: 4 + X. Effettuiamo la differenza fra queste somme: 2X + 8 – (4 + X) = 2X + 8 – 4 – X = X + 4, questo numero deve essere zero, ma non vi sono cifre che aggiunte a 4 danno zero. C'è però il 7 che aggiunto fornisce 11, quindi il numero misterioso è 7247427.

***Determinare tutti i valori che possono assumere le cifre mascherate con una X, nei numeri seguenti affinché essi risultino divisibili per i numeri a fianco segnati***

***Livello 1***

19. a) 369X per 3; b) 123X45 per 2; c) 54X21 per 11 [a) {0; 3; 6; 9}; b) ∅; c) 0]
20. a) 123X56768 per 8; b) 492X5709 per 11; c) 123X5678 per 4 [a) qualsiasi; b) 8; c) ∅]
21. a) 24X578 per 6; b) 102536X per 9; c) 245578X64 per 5 [a) {1; 4; 7}; b) 1; c) ∅]

***Livello 2***

22. a) X1X1 per 11; b) X213X per 22; c) 20X0X1230X per 10 [a) qualsiasi tranne 0; b) 2; c) 0]
23. a) 2451X12X3X per 44; b) 234X5125XX per 12; c) 2X1354X56 per 3 [a) 6; b) ∅; c) {2; 5; 8}]

24. Simone ha comprato una scatola di pupazzi a 9 euro l'uno e li ha spediti al suo socio Attilio che ha un negozio di giocattoli. Sulla scatola ha scritto il prezzo complessivo che ha speso, solo che il postino aveva le mani sporche di grasso, così si legge 11X4, dove con X intendiamo che la cifra non si legge. Quanti sono i pupazzi? [3]
25. Marcus e i suoi amici hanno ordinato 12 pizze, ognuna delle quali ha lo stesso costo. Il fattorino che le consegna ha le mani sporche di grasso, così nello scontrino si legge € 68,X8, con X intendiamo dire che la cifra non si legge. Quanto costa ciascuna pizza? [€ 5,69 ∨ € 5,74]
26. Dal *Sun Tsu Suan Ching* un testo cinese del IV secolo. *Tre sorelle escono di casa rispettivamente ogni* 3, 4 *e* 5 *giorni. Se un certo giorno escono tutti e tre insieme dopo quanti giorni riusciranno insieme?* [60]
27. In realtà i mille di Garibaldi erano più di mille ma meno di 1100, precisamente erano un numero divisibile per 9 che ha la proprietà di avere la somma delle prime tre cifre uguale alla quarta. Quanti erano? [1089]
28. Osserviamo che $143 \cdot 7 = 1001$, $143 \cdot 14=2002$, $143 \cdot 21 = 3003$, $143 \cdot 28 = 4004$. Senza effettuare i calcoli, quanto fa $143 \cdot 63$? [9009]

***Livello 3***

29. Con riferimento al problema precedente trovare una regola generale. Cioè se $143 \cdot n = abba$, con $a$ e $b$ cifre generiche, che tipo di numero deve essere $n$? [Multiplo di 7]
30. Sempre con riferimento al problema precedente, può accadere che si abbia $143 \cdot n = abcabc$? [Sì, per $n$ multiplo di 7 maggiore di 99]
31. Dal *Sun Tsu Suan Ching* un testo cinese del IV secolo. *Un numero è tale che se lo dividiamo per* 3 *il resto è* 2; *dividendolo per* 5 *il resto è* 3; *dividendolo per* 7 *il resto è* 2. *Qual è questo numero*? [Ci sono infiniti di questi numeri, il più piccolo è 23]
32. Se $143 \cdot n = 123123$, quanto fa $n$? [861]
33. Determinare i valori delle cifre $x$ e $y$ in modo che $81y1058294x$ sia divisibile per 33. [Tutte le cifre per cui $x + y = 10$]

## Lavoriamo insieme

*Scomporre in fattori primi il numero* 752.

Possiamo usare il seguente schema:

| | |
|---|---|
| 752 | 2 |
| 376 | 2 |
| 188 | 2 |
| 94 | 2 |
| 47 | 47 |
| 1 | |

, in cui abbiamo scritto, a sinistra i risultati delle divisioni per il fattore primo di destra. In tal modo basta contare ciascun fattore primo, scrivendo quindi $752 = 2^4 \cdot 47$

***Scomporre in fattori primi i seguenti numeri naturali***

***Livello 2***

34. a) 124; b) 272; c) 315; d) 1023; e) 1122 [a) $2^2 \cdot 31$; b) $2^4 \cdot 17$; c) $3^2 \cdot 5 \cdot 7$; d) $3 \cdot 11 \cdot 31$; e) $2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 17$]

35. a) 1245; b) 2015; c) 3027; d) 4026; e) 5001
[a) $3 \cdot 5 \cdot 83$; b) $5 \cdot 13 \cdot 31$; c) $3 \cdot 1009$; d) $2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 61$; e) $3 \cdot 1667$]

36. a) 6584; b) 7364; c) 9875; d) 12345; e) 13579
[a) $2^3 \cdot 823$; b) $2^2 \cdot 7 \cdot 263$; c) $5^3 \cdot 79$; d) $3 \cdot 5 \cdot 823$; e) $37 \cdot 367$]

## Lavoriamo insieme

*Determinare MCD e mcm dei numeri* 612 e 3570.

Scomponiamo i due numeri: $\begin{array}{r|l} 612 & 2 \\ 306 & 2 \\ 153 & 3 \\ 51 & 3 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$ e $\begin{array}{r|l} 3570 & 2 \\ 1785 & 3 \\ 595 & 5 \\ 119 & 7 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$. Abbiamo perciò $612 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 17$; $3570 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17$.

Quindi: $MCD(612; 3570) = 2 \cdot 3 \cdot 17 = 102$ e $mcm(612; 3570) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17 = 21420$. Verifichiamo la validità della regola che lega fra loro *MCD* e *mcm* di due numeri:

$$MCD(612;3570) = \frac{612 \cdot 3570}{mcm(612;3570)} = \frac{\left(\cancel{2^2} \cdot \cancel{3^2} \cdot \cancel{17}\right) \cdot \left(2 \cdot 3 \cdot \cancel{5 \cdot 7} \cdot 17\right)}{\cancel{2^2} \cdot \cancel{3^2} \cdot \cancel{5 \cdot 7} \cdot \cancel{17}} = 2 \cdot 3 \cdot 17 = 102$$

***Determinare MCD e mcm dei seguenti numeri, verificando la validità della relazione*** $MCD(a,b) = \dfrac{a \cdot b}{mcm(a,b)}$ ***; provare altresì che la detta relazione non vale per più di 2 numeri***

### *Livello* 1

37. a) (12; 36); b) (32; 24); c) (18; 48); d) (100; 110) [a) (12; 36); b) (8; 96); c) (6; 144); d) (10; 1100)]
38. a) (124; 241); b) (123; 234); c) (123; 321) [a) (1; 29884); b) (3; 9594); c) (3; 13161)]
39. a) (505;404); b) (10;12;14); c) (48;96;124); d) (32;40;56)
[a) (101;2020); b) (2; 420); c) (4; 2976); d) (8; 1120)]
40. a) (32; 128; 1024); b) (143; 1815; 132); c) (120; 504; 1440)
[a) (32; 1024); b) (11; 94380); c) (24; 10080)]
41. a) ($2^2 \cdot 3^3$ ; $2^2 \cdot 3^4$; $2^5 \cdot 3^7$; $2 \cdot 3^8$); b) ($2^4 \cdot 5^2$ ; $2^{12}$ ; $2 \cdot 5^7$; $3 \cdot 11^8$) [a) (24; $2^5 \cdot 3^8$); b) (1; $2^{12} \cdot 3 \cdot 5^7 \cdot 11^8$)]
42. a) ($5^2 \cdot 13^3$ ; $5 \cdot 7^4 \cdot 17^4$; $2^5 \cdot 5^2$; $2 \cdot 3 \cdot 5^4$; $5^3$); b) ($2^4 \cdot 3^3$ ; $2^3 \cdot 3^4$; $2^5 \cdot 5^2$; $2^8 \cdot 13^4$; $2^7 \cdot 7^2$)
[a) (1 ; $2^5 \cdot 3 \cdot 5^4 \cdot 7^4 \cdot 13^3 \cdot 17^4$); b) ($2^4$ ; $2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13^4$)]

### *Livello* 2

43. a) (2486; 3784); b) (3315; 4199); c) (7936; 11904)[a) (22; 427592); b) (221; 62985); c) (3968; 23808)]
44. a) (15400; 18800); b) (123456; 246912); c) (93; 8649)
[a) (200;1447600); b) (123456;246912); c) (93; 8649)]
45. a) (4199; 741; 1105); b) (234; 3456; 7890) [a) (13; 62985); b) (6; 59080320)]
46. a) (122; 244; 366); b) (13; 169; 2197); c) (56; 88; 200) [a) (122; 732); b) (13; 2197); c) (8; 15400)]
47. a) (24; 32; 36; 40); b) (28; 49; 63; 70); c) (32; 64; 128; 256; 512)
[a) (4; 1440); b) (7; 8820); c) (32; 512)]

## Lavoriamo insieme

*Mattia non ricorda quanti francobolli possiede. Ricorda però che prima li aveva in classificatori tutti pieni, ciascuno dei quali ne conteneva* 20 *e che poi li ha messi in nuovi classificatori da* 31, *sempre tutti pieni. Ricorda poi di avere certamente più di* 1000 *francobolli. Qual è il minimo numero di francobolli posseduti da Mattia*?

Cerchiamo un numero multiplo contemporaneamente di 20 e 31 e maggiore di 1000. Il primo di questi multipli è $20 \cdot 31 = 620$ che non va bene, perché non è il più grande. Quindi va bene il successivo, cioè $620 \cdot 2 = 1240$.

### *Livello* 1

48. Un mattone pesa 2 Kg più mezzo mattone. Quanto pesano due mattoni? [8 Kg]

49. Arianna ha 28 biglie, di colore rosso, blu o verde. Se le biglie verdi sono il doppio delle rosse e la metà di quelle blu. Scrivi i numeri delle biglie blu, verdi e rosse, nell'ordine. [16; 2; 4]
50. Elio dice a suo fratello: *pensa un numero intero, aggiungigli* 2, *il risultato moltiplicalo per* 3, *togli* 4 *e dividi per* 11. *Che numero hai ottenuto*? Se il fratello risponde 4, che numero ha pensato? [14]
51. Carmen riesce a sistemare i propri DVD in contenitori da 5, 7 e 11. Qual è il minimo numero di DVD che ha? [385]
52. Helen colleziona monete che custodisce in classificatori da 13 per quelle di diametro inferiore a *cm* 1, da 12 per quelle di diametro tra *cm* 1 e *cm* 2, da 7 per quelle di diametro superiore ai *cm* 2. Se i suoi classificatori sono tutti pieni e ne ha certamente più di 5 del primo tipo, più di 8 del secondo e più di 6 del terzo, quante monete ha al minimo? [228]
53. Per una gita scolastica i partecipanti possono essere distribuiti in pullman da 52 posti e pullman da 25, in modo che non vi siano posti vuoti. Sapendo che si prenotano non più di 5 pullman grandi e non più di 3 di quelli piccoli, quanti sono al massimo i partecipanti? [335]
54. Un autobus può contenere 52 viaggiatori seduti e non permette che vi siano viaggiatori in piedi. Se una comitiva di 213 persone vuole affittare degli autobus, quanti ne deve affittare? [5]
55. Se abbiamo a disposizione 60 caramelle, qual è il più piccolo numero di bambini che dobbiamo avere perché non possiamo dare a tutti lo stesso numero di caramelle? [7]
56. Nel gioco *Regina, reginella*, ciascuno deve arrivare dalla Regina facendo passi di animale. Sappiamo che Sharon arriva dalla regina con 10 passi da tartaruga, 2 da lepre e 1 da canguro. Sappiamo inoltre che un passo di canguro è lungo quanto 2 da lepre e quanto 6 da tartaruga. Se Stefania arriva dalla regina facendo solo passi da tartaruga, quanti passi fa? [22]
57. La sirenetta ha trovato in fondo al mare meno di 20 gioielli. Vuole dividerle in parti uguali fra le sue sette sorelle, ma non può farlo perché ne mancano due. Per fortuna una delle sorelle decide di rinunciare alla sua parte, così Ariel può dividere i gioielli in parti uguali fra le rimanenti sorelle. Quanti sono i gioielli? [12]

***Livello* 2**

58. Con riferimento al quesito precedente sui DVD, se li sistemiamo in contenitori da 13 rimangono 2 posizioni vuote, cambia la risposta? [Sì; 1155]
59. Con riferimento al quesito dei pullman, se non riusciamo a sistemare tutti i partecipanti solo in pullman da 50, perché rimangono 8 persone senza posto, quanti sono i partecipanti? [258]
60. In un campionato di calcio a 8 squadre per ogni partita si assegnano 3 punti alla squadra vincente e 0 a quella perdente, in caso di pareggio si assegna 1 punto a ciascuna squadra. A fine campionato (di andata e ritorno), sommando tutti i punteggi ottenuti dalle squadre, qual è il massimo punteggio che si può ottenere? [336]

## Lavoriamo insieme

*Supponiamo di avere tre forme di grana che pesano* 52, 68 *e* 76 *chilogrammi; poiché esse sono difficilmente commercializzabili, il commerciante decide di dividerle in pezzi più piccoli, ma tutte di uguale peso. Quanto deve pesare ciascuno dei pezzi in chili interi se il loro numero totale deve essere il più piccolo possibile*?

Poiché vogliamo dividere le forme in parti tutti uguali e senza spreco è evidente che andiamo a cercare un divisore comune ai tre numeri; inoltre poiché vogliamo ottenere il minor numero possibile di pezzi dobbiamo cercare il loro massimo comune divisore.

Cominciamo a scomporre i numeri dei tre pesi: $52 = 2^2 \cdot 13$, $68 = 2^2 \cdot 17$, $76 = 2^2 \cdot 19$. Quindi il loro *MCD* è 4. Perciò suddividiamo le tre forme in $(52 + 68 + 76) : 4 = 196 : 4 = 49$ pezzi da 4 kg. ciascuno.

***Livello* 1**

61. Brenda ha comprato 24 praline al cioccolato, 32 torroncini e 20 caramelle per fare delle confezioni contenenti lo stesso numero di dolci, sia per tipo che in totale. a) Quante confezioni può fare mettendo in ognuno il massimo numero di dolci di ogni tipo? b) Quanti dolci di ciascun tipo vi saranno in ogni confezione? [a) 4; b) 6; 8; 5]
62. Ho a disposizione 24 mazzi di carte, 40 pupazzi, 16 palle e 32 soldatini. Quanti pacchi regalo contenenti gli stessi oggetti posso formare al più? [8]
63. Le figurine da basket sono in buste da 6, quelle da calcio in buste da 8, quelle da baseball in buste da 12 e quelle di tennis in buste da 9. Quante buste di ogni sport devo comprare come minimo per avere

lo stesso numero di figurine per sport? [12; 9; 6; 8]

64. Federico, Tiziana e Amos frequentano lo stesso dentista. Ciascuno dei tre ritorna sempre dopo lo stesso numero di giorni, rispettivamente 6, 8 e 12 giorni. Se oggi si sono incontrati nella sala d'aspetto, fra quanti giorni si rivedranno? (Si suppone che il dentista riceva ogni giorno compresi i festivi) [24]
65. Tre navi il primo gennaio partono da A per andare a B dove effettuano un nuovo carico. Lo stesso giorno di arrivo ripartono per A dove scaricano e ancora lo stesso giorno di arrivo ripartono per B) Continuano questo andirivieni per tutto l'anno. Sapendo che la prima nave compie un tragitto di andata e ritorno in 12 giorni, la seconda in 16 giorni e la terza in 20, fra quanti giorni ripartiranno da A lo stesso giorno? [240]

***Livello* 2**

66. Caterina ha invitato 8 suoi amici per il giorno di Pasqua e a ognuno vuole regalare lo stesso numero di ovetti. Non tutti però sono certi di poter venire: Giulio verrà solo se lo farà Giada, mentre Anna, Carlo e Tommaso forse andranno insieme a Parigi. Quanti ovetti deve comprare almeno perché possa darne a tutti lo stesso numero, quanti che siano gli intervenuti? [120]
67. Erika ha più di 50 ma meno di 120 caramelle. Si accorge che mentre è insieme ad Alice e Bob potrebbe dividerle in parti uguali con loro. Nel frattempo arrivano Tom ed Erika e così non può più dividere le caramelle in parti uguali fra tutti. Dopo qualche minuto arrivano Dalila e Mirko, perciò lo può fare di nuovo. Quante caramelle ha Erika a) minimo? b) massimo? [a) 63; b) 84]
68. Mathias può sistemare le sue figurine a gruppi di 2, di 3, di 4, di 5 e di 6, ma non a gruppi di 7 perché gliene avanzano 4, quante figurine ha, se sono più di 100 ma meno di 1000? [480]

## L'insieme dei numeri razionali relativi

Abbiamo già notato che non sappiamo come calcolare 2 : 16 o 3 : 2, perché non abbiamo definito l'operazione di divisione di due numeri, in cui il primo non è multiplo del secondo. Vediamo quindi come possiamo generalizzare l'operazione di divisione nell'insieme dei numeri interi.

**Esempio 37**

I numeri 18 e 4 non sono uno multiplo dell'altro, ma vi è un multiplo di 4 più "vicino" e più piccolo di 18. Esso è il numero 16. Quindi potremmo scrivere $18 = 4 \cdot 4 + 2$. Questo fatto vale in effetti per qualsiasi coppia di numeri interi. Per esempio possiamo scrivere: $2 = 0 \cdot 3 + 2$, $8 = 2 \cdot 4 + 0$, $19 = 3 \cdot 6 + 1$, … Quello che si osserva è che in ogni caso ciò che dobbiamo aggiungere al prodotto per ottenere il dividendo è sempre più piccolo del divisore.

Tenuto conto dell'esempio precedente possiamo enunciare il seguente risultato.

**Teorema 23**

Dati due numeri naturali $m$ e $n$, con $n \neq 0$, esistono sempre due numeri naturali $q$ ed $r$, con $q$ tale che $q \cdot n$ sia il più grande dei multipli di $n$ che non supera $m$ e con $r < n$, per cui si ha: $m = n \cdot q + r$.

**Definizione 20**

Nella divisione $m : n$, in cui si ha $m = n \cdot q + r$

- $m$ si chiama **dividendo**;
- $n$ si chiama **divisore**;
- $q$ si chiama **quoziente;**
- $r$ si chiama **resto**.

**Notazione 14**

La divisione di $m$ per $n$ si indica in uno dei seguenti modi: $m : n$, $m/n$, $\frac{m}{n}$. Quando la scriviamo nell'ultima forma la chiamiamo **frazione**, mentre chiamiamo il numero $m$ **numeratore** e il numero $n$ **denominatore**

**Che cosa significa?**

**Quoziente.** Derivato dal latino *quotus* che ha il significato di *quanto*. In generale il quoziente è una quantità. L'etimologia della parola non fornisce informazioni più precise sul suo significato.
**Frazione**. Dal latino *fractionis* che significa *rottura*. Frazionare significa quindi spezzare e in effetti il procedimento ingenuo della frazione è appunto quello di dividere una quantità in un certo numero di parti uguali.
**Numeratore**. Equivale a *numero*. Esprime il numero di frazioni unitarie: per esempio 7/5 indica 7 volte la frazione 1/5.
**Denominatore**. Il prefisso *de* in generale si riferisce a qualcosa posto in basso (per esempio deporre o declinare), quindi in qualche modo esprime la posizione di tale quantità nella frazione.

Così abbiamo esteso l'operazione di divisione a numeri interi qualsiasi. Adesso cerchiamo di capire perché abbiamo detto che il divisore o il denominatore di una frazione non può essere zero.

**Esempio 38**

- Consideriamo i numeri 7 e 0. Possiamo scrivere $0 = 7 \cdot 0 + 0$, cioè $0 : 7 = 0$.
- Invece non possiamo calcolare 7 : 0, perché $7 = 0 \cdot 0 + 7 = 0 \cdot 1 + 7 = 0 \cdot 548 + 7$, … cioè ci sarebbero troppi risultati, mentre il nostro calcolo deve essere univoco.

Nel momento in cui dividendo e divisore non sono uno multiplo dell'altro, non siamo più nell'ambito dei numeri interi. Perciò l'operazione di divisione di due numeri interi non è interna in tale insieme. Quindi, come abbiamo fatto per la sottrazione nei naturali, dobbiamo considerare un nuovo insieme numerico, che contenga i numeri interi e anche i risultati di tutte le divisioni fra interi. Per fare ciò dobbiamo innanzitutto

cercare di scrivere i risultati delle divisioni sotto forma di numero. Per fare ciò facciamo come mostrato nell'esempio successivo.

**Esempio 39**

Consideriamo la divisione 13 : 5. Possiamo scrivere 13 = 5 · 2 + 3. Ciò significa che il numero 13/5 è un numero più grande di 2 ma più piccolo di 3. Per indicare un numero del genere scriviamo la virgola dopo il 2. Adesso dobbiamo stabilire cosa scrivere dopo questa virgola. Teniamo conto della notazione posizionale dei numeri, secondo cui 13 = 10 + 3. Allora il resto, 3, lo moltiplichiamo per 10 e lo dividiamo per il divisore, ottenendo 30 = 5 · 6 + 0. Dato che in questo caso 30 e 5 sono uno multiplo dell'altro, diciamo che la divisione è conclusa e scriviamo 13/5 = 2,6.

Abbiamo perciò creato nuovi numeri, che scriviamo usando la virgola e le consuete cifre. Dobbiamo chiederci però se, considerati due numeri interi qualsiasi, quello che abbiamo visto nell'esempio possa sempre farsi e conduca sempre a risultati simili a quelli visti.

**Esempio 40**

Vogliamo cercare il numero associato a 13/7. Avremo 13 = 7 · **1** + 6. allora moltiplichiamo il resto per 10 e consideriamo 60/7, ottenendo: 60 = 7 · **8** + 4. Continuiamo il procedimento:

40 = 7 · **5** + 5; 50 = 7 · **7** + 1; 10 = 7 · **1** + 3; 30 = 7 · **4** + 2; 20 = 7 · **2** + 6; 60 = 7 · **8** + 4; …

sembra che il nostro procedimento stavolta non finisca mai. Ed in effetti così è. Però dovremmo accorgerci che siamo entrati in un ciclo, cioè rifaremo sempre le stesse operazioni. Quindi dovremmo scrivere: 13/7 = 1,857142857142…

Abbiamo effettivamente trovato che i risultati delle divisioni fra interi qualsiasi sono nuovi numeri. Non è difficile capire che in effetti la divisione di due numeri interi deve per forza condurre al ripetersi di operazioni già fatte, perché il resto di una divisione è sempre minore del divisore, quindi, per esempio nel caso precedente in cui abbiamo diviso per 7, al massimo dopo 6 volte dovremmo ottenere un resto già ottenuto e quindi ripeteremo sempre le stesse operazioni. In effetti vi sono anche altri numeri un po' diversi dai due visti prima.

**Esempio 41**

Che numero è 13/6? Abbiamo 13 = 6 · **2** + 1; 10 = 6 · **1** + 4; 40 = 6 · **6** + 4; 40 = 6 · **6** + 4; … Cioè siamo entrati in un ciclo, ma non subito dopo la virgola. Il nostro numero sarà 13/6 = 2,16666….

Non è difficile capire che non ci sono altre possibilità.

**Definizione 21**

L'insieme dei risultati delle divisioni di due numeri interi con il divisore non nullo, cioè l'insieme delle frazioni, si chiama anche **insieme dei numeri razionali**. Essi si possono scrivere con il quoziente seguito da una virgola e da infinite cifre formate da un primo gruppo di cifre, che può anche mancare, che non si ripete e si chiama **antiperiodo** e un secondo gruppo di cifre che si ripete all'infinito e si chiama **periodo**. In particolare chiamiamo

- **decimali limitati** quelli che hanno periodo zero;
- **periodici semplici**, quelli che non hanno l'antiperiodo e hanno il periodo diverso da zero;
- **periodici misti**, quelli che hanno l'antiperiodo e il periodo diverso da zero.

**Notazione 15**

- L'insieme dei numeri razionali si indica con il simbolo $\mathbb{Q}$.
- Il periodo dei numeri periodici si indica con un tratto orizzontale che lo sovrasta.

**Esempio 42**

- Il numero $13:5=13/5=\frac{13}{5}=2,6$ è un numero decimale limitato, dato che il suo periodo è formato dallo

zero, potremmo infatti scrivere 2,60000000…..

- Il numero $13:6=13/6=\frac{13}{6}=1,2\overline{6}$ è un numero periodico misto, di antiperiodo 2 e periodo 6.
- Il numero $13:7=13/7=\frac{13}{7}=1,\overline{857142}$ è un numero periodico semplice di periodo 857142.

**Che cosa significa?**

**Periodo**. Dal greco *periodos* che vuol dire *circuito*, composto da *peri* che vuole dire *intorno*, e *hodòs* che significa *strada*. Dato che i circuiti sono curve chiuse, spesso circonferenze, e che in un circuito i corridori ripassano per gli stessi punti, il significato è stato esteso appunto a qualcosa che si ripete nel tempo o nello spazio.

Vale il seguente ovvio risultato.

**Teorema 24**

Il numero $m/n$ ha periodo che può essere al massimo formato da $(n-1)$ cifre.

**Dimostrazione**

Abbiamo già osservato che dividendo $m$ per $n$ i resti successivi sono tutti minori di $n$ e una volta che uno di essi si ripete, tutto il gruppo si ripeterà, pertanto non possiamo averne più di $n-1$.

Ovviamente i numeri interi sono decimali limitati.

**Esempio 43**

Abbiamo visto che: $\frac{13}{5}=2,6$. Moltiplichiamo numeratore e denominatore per 3, ottenendo $\frac{39}{15}$. Abbiamo: $39 = 15 \cdot \mathbf{2} + 9$; $90 = 15 \cdot \mathbf{6} + 0$, cioè anche $\frac{39}{15}=2,6$. Chiaramente lo stesso numero, dato che le due operazioni effettuate si sono annullate a vicenda.

In vista del precedente esempio poniamo la seguente definizione.

**Definizione 22**

Due frazioni che rappresentano lo stesso numero razionale si dicono **equivalenti**.

Quindi ci sono infinite frazioni che rappresentano lo stesso numero razionale.

**Esempio 44**

Tutte le seguenti infinite frazioni, $\frac{13\cdot 2}{5\cdot 2}=\frac{13\cdot 3}{5\cdot 3}=\frac{13\cdot 4}{5\cdot 4}=\frac{13\cdot 5}{5\cdot 5}=\frac{13\cdot 6}{5\cdot 6}=\ldots$, sono equivalenti a $\frac{13}{5}=2,6$.

Dato che vi sono infinite frazioni fra loro equivalenti, possiamo considerare solo una rappresentante di esse.

**Definizione 23**

Una frazione in cui numeratore e denominatore sono numeri coprimi fra loro, si dice **ridotta ai minimi termini**.

Infatti se numeratore e denominatore non hanno fattori in comune non possiamo ulteriormente ridurle.

**Esempio 45**

La frazione 4005/3285 è ridotta ai minimi termini? Certamente no, perché numeratore e denominatore son entrambi divisibili per 5. Allora scomponiamo in fattori primi: $\frac{4005}{3285}=\frac{3^2\cdot 5\cdot 89}{3^2\cdot 5\cdot 73}$. Si vede che $MCD(4005;$

3285) = $3^2 \cdot 5 = 45$, quindi possiamo eliminare questo fattore comune, ottenendo: $\frac{89}{73}$, che è ovviamente ridotta ai minimi termini.

La riduzione ai minimi termini permette anche di confrontare due frazioni.

**Esempio 46**

- Le frazioni $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$, sono certamente diverse, perché hanno uguale denominatore ma diverso numeratore. Anzi possiamo anche dire che si ha: $\frac{1}{2} < \frac{3}{2}$;
- Cosa possiamo dire delle frazioni $\frac{3}{5}, \frac{5}{8}$? Non hanno lo stesso denominatore, ma possiamo ottenerlo nel modo più semplice cioè moltiplicando il numeratore e il denominatore della prima frazione per il denominatore della seconda e numeratore e denominatore della seconda per il denominatore della prima. Cioè $\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 8}{5 \cdot 8} = \frac{24}{40}, \frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 5}{8 \cdot 5} = \frac{25}{40}$. Adesso possiamo dire che si ha: $\frac{3}{5} = \frac{24}{40} < \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$.

Possiamo allora enunciare il seguente risultato.

**Teorema 25**

Si ha $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ se e solo se $m \cdot q = p \cdot n$; $\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$ se e solo se $m \cdot q = p \cdot n$.

È interessante vedere come si possa passare da un numero razionale alla frazione che lo rappresenta.

**Esempio 47**

Che frazione rappresenta il numero decimale limitato 3,78? Possiamo moltiplicare e dividere per una stessa quantità senza che ciò cambi il numero. Così possiamo scrivere: $3,78 = \frac{378}{100}$. Quindi abbiamo ottenuto facilmente la frazione associata al numero, che possiamo anche scrivere: $3,78 = \frac{2 \cdot 189}{2 \cdot 50} = \frac{189}{50}$.

Dal precedente esempio si ha il seguente immediato risultato.

**Teorema 26**

Ogni numero decimale limitato è associato a una frazione il cui numeratore è il numero scritto senza virgola e il denominatore è una potenza di 10 di esponente il numero di cifre dopo la virgola.

Anche per i numeri periodici vi sono delle regole simili, più difficili da dimostrare e che perciò ci limitiamo a riportare.

**Teorema 27**

Ogni numero periodico semplice è associato a una frazione il cui numeratore è la differenza fra il numero senza la virgola e il numero prima della virgola, e il denominatore è un numero formato da tanti 9 quante sono le cifre del periodo.

Per capire la regola enunciata nel teorema precedente vediamo un esempio.

**Esempio 48**

Al numero periodico semplice $7,\overline{123}$ associamo la frazione $7,\overline{123} = \frac{7123 - 7}{999} = \frac{7116}{999} = \frac{2372}{333}$.

Vediamo un analogo risultato per i periodici misti.

**Teorema 28**

Ogni numero periodico misto è associato a una frazione il cui numeratore è la differenza fra il numero senza la virgola e il numero formato dalle cifre non periodiche, e il denominatore è un numero formato da tanti 9 quante sono le cifre del periodo seguito da tanti 0 quante quelle dell'antiperiodo.

Vediamo l'esempio chiarificatore.

**Esempio 49**

Si ha: $7,45\overline{123} = \frac{745123-745}{99900} = \frac{744378}{99900} = \frac{6\cdot 124063}{6\cdot 16650} = \frac{124063}{16650}$.

Vi è anche la possibilità di effettuare la procedura inversa, ossia capire che tipo di numero razionale rappresenta una frazione, senza dovere effettuare la divisione.

**Teorema 29**

Una frazione ridotta ai minimi termini rappresenta
- un numero decimale limitato solo se il suo denominatore contiene solo fattori di 2 o di 5;
- un numero periodico semplice solo se il suo denominatore contiene solo fattori diversi da 2 e 5;
- un numero periodico misto solo se il suo denominatore contiene fattori di 2 o di 5 e fattori diversi da questi.

Vediamo degli esempi riferiti al precedente risultato.

**Esempio 50**

- Consideriamo la frazione $\frac{13}{20}$, poiché il suo denominatore contiene solo fattori di 2 o 5, $20 = 2^2 \cdot 5$, essa rappresenta un numero decimale limitato. Infatti $\frac{13}{20} = \frac{13\cdot 5}{20\cdot 5} = \frac{65}{100} = 0,65$.
- La frazione $\frac{14}{33}$ rappresenta un numero periodico semplice, poiché il suo denominatore contiene solo fattori diversi da 2 e 5, 33 = 3 · 11. Infatti $\frac{14}{33} = 0,\overline{42}$.
- La frazione $\frac{21}{52}$ rappresenta un numero periodico misto, poiché il suo denominatore contiene fattori di 2 o 5 e fattori diversi da 2 e 5, $52 = 2^2 \cdot 13$. Infatti $\frac{21}{52} = 0,40\overline{384615}$.
- Non possiamo dire che $\frac{25}{35}$ è periodico misto, infatti anche se il suo denominatore contiene fattori di 5 e 7, la frazione non è ai minimi termini. Quando la riduciamo essa diviene $\frac{5}{7}$ e rappresenta invece un periodico semplice.

Un'altra cosa interessante da osservare è che abbiamo difficoltà a esprimere tabularmente $\mathbb{Q}$, perché in tale insieme non esiste il concetto di successivo e di precedente. Cioè date due frazioni siamo in grado di confrontarle, ossia sappiamo se sono uguali o chi è la più grande e chi la più piccola, ma non siamo in grado di trovare la successiva di una frazione. Se possiamo dire che il successivo del numero naturale 7 è 8, perché fra i due numeri non vi sono altri numeri naturali, non possiamo indicare il successivo del numero 12,3, perché per esempio fra 12,3 e 12,4 ci sono infiniti altri numeri: 12,34; 12,33331; 12,30000001;..... Ciò vale qualunque altra coppia di numeri razionali venga scelta.

Questa proprietà di $\mathbb{Q}$ di poter trovare fra due numeri razionali almeno un altro numero razionale, e quindi infiniti altri, si esprime dicendo che $\mathbb{Q}$ è un **insieme denso**.

Concludiamo considerando quelle particolari frazioni che vanno sotto il nome di percentuali, ossia frazioni di denominatore 100. La loro particolarità consiste nel fatto che talvolta risulta interessante distinguere una porzione di qualcosa, quantificando quanta parte del totale essa comprende. Ovviamente ciò può farsi dividendo in un numero di parti uguali a piacere, ma a causa del fatto che i nostri numeri sono scritti in base 10 e per avere un numero di parti "sufficiente" si è deciso di dividere in 100 parti uguali, ottenendo così le percentuali. Le usiamo per indicare l'aumento o la diminuzione di un prezzo o di una popolazione o di altro.

**Esempio 51**

- Un paio di pantaloni costano 40 euro, per i saldi il loro prezzo è scontato del 30%, qual è il nuovo prezzo? Lo sconto del 30% equivale a moltiplicare il totale per 30/100 = 0,3, pertanto lo sconto è di 40 · 0,3 = 12 euro e il prezzo scontato è perciò (40 – 12) = 28 euro. In effetti un metodo più veloce consiste nel calcolare il 70% del prezzo, cioè ciò che rimane dopo lo sconto. Infatti 40 · 0,7 = 28.
- Lo scorso anno il prezzo medio della benzina era di € 1,653 quest'anno è diventato € 1,412. Di quanto è diminuito in percentuale? La diminuzione assoluta è stata pari a € (1,653 – 1,412) = €0,241. Per determinare che parte del prezzo iniziale è effettuiamo la divisione 0,241/1.653 ≈ 0,146 = 14,6%.
- Un certo giorno un titolo in borsa è aumentato del 3,42%, se all'inizio valeva € 1,45, quale sarà il suo prezzo finale? Dobbiamo calcolare 1,45 + 1,45 · 0,0342 ≈ 1,50. Poteva ottenere lo stesso risultato più velocemente con l'operazione 1,45 · 1,0342.

Tenendo conto degli esempi precedenti possiamo enunciare i seguenti risultati.

**Teorema 30**

- Per calcolare la diminuzione del $p$% di una quantità $x$ basta moltiplicare $x$ per $(1 - p/100)$.
- Per calcolare l'aumento del $p$% di una quantità $x$ basta moltiplicare $x$ per $(1 + p/100)$.

# Verifiche

## Lavoriamo insieme

*Ridurre ai minimi termini la frazione* $\frac{66}{1287}$.

Scomponiamo in fattori numeratore e denominatore: $\frac{66}{1287}=\frac{2\cdot 3\cdot 11}{2\cdot 3^2\cdot 11\cdot 13}$. Adesso eliminiamo i fattori comuni: $\frac{66}{1287}=\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{11}}{\cancel{2}\cdot 3^{\cancel{2}}\cdot\cancel{11}\cdot 13}=\frac{1}{3\cdot 13}=\frac{1}{39}$.

***Ridurre ai minimi termini le seguenti frazioni***

*Livello 2*

1. a) $\frac{1245}{2365}$; b) $\frac{375}{450}$; c) $\frac{572}{1287}$; d) $\frac{38250}{34425}$; e) $\frac{23400}{1560}$; f) $\frac{32760}{1716}$ $\left[a)\frac{249}{473};\ b)\frac{5}{6};\ c)\frac{4}{9};\ d)\frac{146}{153};\ e)15;\ f)\frac{210}{11}\right]$

2. a) $\frac{132496}{127764}$; b) $\frac{139536}{217056}$; c) $\frac{12480}{262080}$; d) $\frac{127050}{131285}$; e) $\frac{35784}{46176}$; f) $\frac{2^3\cdot 3^4\cdot 5^6\cdot 7^8}{2^4\cdot 3^3\cdot 5^5\cdot 7^9}$

$\left[a)\frac{28}{27};\ b)\frac{9}{14};\ c)\frac{1}{21};\ d)\frac{30}{31};\ e)\frac{783}{962};\ f)\frac{15}{14}\right]$

3. a) $\frac{3378375}{13513500}$; b) $\frac{3599024}{6380088}$; c) $\frac{12000}{67500}$; d) $\frac{2\cdot 3\cdot 7}{3\cdot 5\cdot 7}$; e) $\frac{3^2\cdot 5\cdot 13}{3\cdot 5\cdot 17}$; f) $\frac{2^2\cdot 3^3\cdot 5^5}{2^3\cdot 3^2\cdot 5^5}$

$\left[a)\frac{1}{4};\ b)\frac{22}{39};\ c)\frac{8}{45};\ d)\frac{2}{5};\ e)\frac{39}{17};\ f)\frac{3}{2}\right]$

4. a) $\frac{2^2\cdot 2^3\cdot 2^4}{2^3\cdot 2^5\cdot 2}$; b) $\frac{2^3\cdot 6^2\cdot 8^4}{3^3\cdot 4^4\cdot 10^2}$; c) $\frac{2^5\cdot 3^4\cdot 5^3}{2^6\cdot 3^5\cdot 5^3}$; d) $\frac{2^2\cdot 5\cdot 7\cdot 11^2}{5\cdot 7^2\cdot 11}$; e) $\frac{(2^2)^3\cdot(3^3)^2\cdot(5^2)^4}{(2^3)^2\cdot(3^2)^3\cdot(5^4)^2}$

$\left[a)1;\ b)\frac{128}{75};\ c)\frac{1}{24};\ d)\frac{44}{7};\ e)1\right]$

*Livello 2*

5. a) $\frac{121^2\cdot 49^3\cdot 64^4}{132^3\cdot 28^3\cdot 128^2}$; b) $\frac{10^2\cdot 12^3\cdot 14^4\cdot 16^5}{20^2\cdot 24^2\cdot(28\cdot 30^2)^2}$; c) $\frac{12^2\cdot 15^3\cdot 18^2}{10^3\cdot 9^2\cdot 16^4}$; d) $\frac{16^3\cdot 27^4\cdot 25^6}{32^2\cdot 9^6\cdot 75^3}$

$\left[a)\frac{3773}{108};\ b)\frac{802816}{16875};\ c)\frac{243}{8192};\ d)\frac{62500}{27}\right]$

6. a) $\frac{3630312}{3169320}$; b) $\frac{(2+3)^3\cdot(3+4)^2\cdot(4+5)^4}{(2+4)^3\cdot(3+5)^4\cdot(5+2)^2}$; c) $\frac{(3+5)^{2+4}\cdot(5+7)^{3+4}\cdot(7+9)^{2+3}}{(3+7)^{3+2}\cdot(3+9)^{2+4}\cdot(5+9)^{4+3}}$ $\left[a)\frac{63}{55};\ b)\frac{30375}{32768};\ c)\frac{2^{28\cdot 3}}{5^5\cdot 7^7}\right]$

## Lavoriamo insieme

- *Scrivere la frazione generatrice del numero decimale limitato* 12,34.
  Dato che il numero è decimale limitato, basta scrivere al numeratore il numero senza virgola e al denominatore 1 seguito da tanti zeri quante sono le cifre decimali, cioè $\frac{1234}{100}=\frac{617}{50}$.
- *Scrivere la frazione generatrice del numero periodico semplice* $0,\overline{987}$.
  La regola da applicare consiste nel porre al numeratore la differenza fra il numero senza virgola e la parte intera e al denominatore il numero formato da tanti 9 quante sono le cifre del periodo, cioè $\frac{987-0}{999}=\frac{329}{333}$.
- *Scrivere la frazione generatrice del numero periodico misto* $1,35\overline{790}$.
  Modifichiamo leggermente la regola precedente. Al numeratore poniamo la differenza fra il numero senza virgola e il numero composto dalla parte intera e dall'antiperiodo, al denominatore il numero

formato da tanti 9 quante le cifre del periodo, seguiti da tanti zero quanto quelle dell'antiperiodo. Quindi: $\frac{135790-135}{99900}=\frac{135655}{99900}=\frac{27131}{19980}$.

***Scrivere la frazione generatrice dei seguenti numeri razionali***

***Livello 1***

7. a) $0,708\overline{3}$; b) $1,\overline{09}$; c) $6,8\overline{3}$; d) $15,\overline{6}$; e) $137,0\overline{3}$; f) $234,\overline{567}$ $\left[a)\frac{7013}{9900};b)\frac{12}{11};c)\frac{41}{6};d)\frac{47}{3};e)\frac{4111}{30};f)\frac{8679}{37}\right]$

8. a) $74,51\overline{42}$; b) $1246,9\overline{1}$; c) $3,667\overline{78}$; d) $6,88\overline{6}$; e) $9,1\overline{2}$; f) $3,9\overline{28}$

$\left[a)\frac{245897}{3300};b)\frac{56111}{45};c)\frac{121037}{33000};d)\frac{1033}{150};e)\frac{821}{39};f)\frac{3839}{990}\right]$

9. a) $0,\overline{8977}$; b) $1,451\overline{26}$; c) $,\overline{23696}$; d) $0,3530\overline{3}$; e) $2,133\overline{304}$; f) $3,7\overline{84}$

$\left[a)\frac{8977}{9999};b)\frac{5747}{3960};c)\frac{123695}{99999};d)\frac{233}{660};e)\frac{2131171}{99900};f)\frac{1249}{330}\right]$

***Giustificare le risposte ai seguenti quesiti***

***Livello 2***

10. I numeri $0,\overline{77}$ e $0,\overline{7}$ sono fra loro uguali o diversi? [Uguali]
11. Il numero $7,\overline{9}$ è razionale non intero? [No, intero, è 8]
12. Tenuto conto del precedente quesito provare che i numeri periodici semplici di periodo 9 sono numeri interi.
13. Il numero $2,1\overline{9}$ è decimale limitato? [Sì, è 2,2]
14. Tenuto conto del precedente quesito provare che i numeri periodici misti di periodo 9 sono numeri decimali limitati, la cui parte decimale è il numero successivo dell'antiperiodo.
15. Fra $0,1\overline{23}$ e $0,\overline{123}$, chi è il maggiore? $\left[0,1\overline{23}\right]$
16. Fra $0,9\overline{87}$ e $0,\overline{987}$, chi è il maggiore? $\left[0,\overline{987}\right]$

## Lavoriamo insieme

*Che tipo di numero decimale rappresenta la frazione* $\frac{13}{24}$?

Possiamo utilizzare il Teorema 29. Dato che la frazione è ridotta ai minimi termini e si ha: $24=2^3\cdot 3$, per il detto teorema la frazione rappresenta un numero periodico misto. Verifichiamo: $\frac{13}{24}=0,541\overline{6}$.

***Date le seguenti frazioni, utilizzando il Teorema 29, dire che tipo di numero razionale rappresenta ciascuna di esse (dl = decimale limitato; ps = periodico semplice; pm = periodico misto)***

***Livello 1***

17. a) $\frac{1}{13}$; b) $\frac{19}{24}$; c) $\frac{1}{17}$; d) $\frac{13}{144}$; e) $\frac{2}{15}$; f) $\frac{27}{42}$; g) $\frac{44184}{789}$; h) $\frac{13}{38}$

[a) ps; b) pm; c) ps; d) pm; e) pm; f) pm; g) pm; h) pm]

18. a) $\frac{12}{25}$; b) $\frac{21}{20}$; c) $\frac{3}{40}$; d) $\frac{11}{101}$; e) $\frac{28}{73}$; f) $\frac{7}{24}$; g) $\frac{1}{52}$; h) $\frac{1}{32}$ [a) dl; b) dl; c) dl; d) ps; e) ps; f) pm; g) pm; h) dl]

***Livello 2***

19. a) $\frac{4}{46}$; b) $\frac{27}{24}$; c) $\frac{12}{34}$; d) $\frac{13}{169}$; e) $\frac{3}{30}$; f) $\frac{21}{35}$; g) $\frac{44}{5500}$; h) $\frac{17}{68}$ [a) ps; b) dl; c) ps; d) ps; e) dl; f) dl; g) dl; h) dl]

## Lavoriamo insieme

*Ordinare le frazioni* $\frac{5}{7}$ ; $\frac{3}{4}$ ; $\frac{13}{19}$.

Possiamo confrontarle a due a due con il metodo cosiddetto del prodotto in croce, ossia moltiplichiamo numeratore dell'una per il denominatore dell'altra, il prodotto maggiore dice che è più grande la frazione che ha il numeratore in tale prodotto. Non è altro che la riduzione a un denominatore comune, che non è per forza il minimo. Per esempio, poiché $5 \cdot 4 < 7 \cdot 3$, allora $\frac{5}{7} < \frac{3}{4}$, poiché è come se avessimo scritto $\frac{5}{7} = \frac{5 \cdot 4}{7 \cdot 4} = \frac{20}{28} < \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 7} = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}$, in questo caso il denominatore è anche *mcm*. A questo punto confrontiamo un'altra coppia, per esempio $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 19}{4 \cdot 19} = \frac{57}{76} > \frac{13 \cdot 4}{19 \cdot 4} = \frac{52}{76}$, per stabilire che $\frac{3}{4}$ è la maggiore delle frazioni. Infine, poiché $\frac{5}{7} = \frac{5 \cdot 19}{7 \cdot 19} = \frac{95}{133} > \frac{13 \cdot 7}{19 \cdot 7} = \frac{91}{133}$, possiamo dire che si ha: $\frac{3}{4} > \frac{5}{7} > \frac{13}{19}$. In alternativa effettuiamo il *mcm* dei denominatori: $\frac{5}{7} = \frac{380}{532}$ ; $\frac{3}{4} = \frac{399}{532}$ ; $\frac{13}{19} = \frac{273}{532}$. Oppure scriviamo i numeri in forma decimale: $\frac{5}{7} = 0,\overline{714285}$ ; $\frac{3}{4} = 0,75$ ; $\frac{13}{19} \approx 0,68$

***Ordinare i seguenti gruppi di frazioni***

***Livello 1***

20. a) $\left(\frac{1}{4}, \frac{7}{27}\right)$; b) $\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{5}\right)$; c) $\left(\frac{5}{8}, \frac{11}{18}\right)$; d) $\left(-\frac{3}{4}, -\frac{7}{9}\right)$ $\left[a)\ \frac{1}{4} < \frac{7}{27};\ b)\ \frac{3}{5} < \frac{2}{3};\ c)\ \frac{11}{18} < \frac{5}{8};\ d)\ -\frac{7}{9} < -\frac{3}{4}\right]$

21. a) $\left(\frac{9}{11}, \frac{4}{5}\right)$; b) $\left(-\frac{7}{9}, -\frac{4}{5}\right)$; c) $\left(\frac{6}{19}, \frac{1}{3}\right)$; d) $\left(-\frac{11}{3}, -\frac{18}{5}\right)$ $\left[a)\ \frac{4}{5} < \frac{9}{11};\ b)\ -\frac{4}{5} < -\frac{7}{9};\ c)\ \frac{6}{19} < \frac{1}{3};\ d)\ -\frac{11}{3} < -\frac{18}{5}\right]$

22. a) $\left(\frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{8}{13}\right)$; b) $\left(\frac{2}{3}, \frac{11}{17}, \frac{5}{8}\right)$; c) $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, -\frac{4}{5}\right)$ $\left[a)\ \frac{4}{7} < \frac{3}{5} < \frac{8}{13};\ b)\ \frac{5}{8} < \frac{11}{17} < \frac{2}{3};\ c)\ -\frac{2}{3} < -\frac{3}{4} < -\frac{4}{5}\right]$

23. a) $\left(\frac{16}{17}, \frac{14}{15}, \frac{28}{31}\right)$; b) $\left(\frac{42}{35}, \frac{51}{47}, \frac{63}{56}\right)$; c) $\left(-\frac{147}{18}, -\frac{214}{37}, -\frac{55}{7}\right)$

$\left[a)\ \frac{28}{31} < \frac{14}{15} < \frac{16}{17};\ b)\ \frac{51}{47} < \frac{63}{56} < \frac{42}{35};\ c)\ -\frac{147}{18} < -\frac{55}{7} < -\frac{214}{37}\right]$

***Livello 2***

24. a) $\left(\frac{11}{12}, \frac{15}{16}, \frac{18}{19}, \frac{21}{23}\right)$; b) $\left(-\frac{15}{17}, -\frac{19}{22}, -\frac{31}{34}, -\frac{62}{65}\right)$ $\left[a)\ \frac{21}{23} < \frac{11}{12} < \frac{15}{16} < \frac{18}{19};\ b)\ -\frac{62}{65} < -\frac{31}{34} < -\frac{15}{17} < -\frac{19}{22}\right]$

***Livello 3***

25. Fra $\frac{m}{n}$ e $\frac{m+1}{n+1}$, con $m, n \in \mathbb{N}$, si può stabilire chi è maggiore? $\left[m > n \Rightarrow \frac{m}{n} > \frac{m+1}{n+1};\ m < n \Rightarrow \frac{m}{n} < \frac{m+1}{n+1}\right]$

26. Se $m > n > 0$ e $p > q > 0$, è vero che $\frac{m}{p} > \frac{n}{q}$? $\left[\text{No}, \frac{3}{2} > \frac{4}{3}\right]$

27. Se $m > n > 0$ e $p > q > 0$, è vero che $\frac{m}{q} > \frac{n}{p}$? [Sì]

## Lavoriamo insieme

- *Sappiamo che su* 20 *studenti della* I H, 13 *praticano sport, che percentuale di studenti pratica uno sport*? Dobbiamo fare in modo di scrivere la frazione $\frac{13}{20}$, come una frazione equivalente ma con denominatore 100. Basta quindi moltiplicare numeratore e denominatore per 5: $\frac{13}{20} = \frac{13 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{65}{100} = 65\%$.

- Se la I H avesse avuto 21 studenti non saremmo riusciti a scrivere la frazione $\frac{13}{21}$ in una frazione equivalente con denominatore 100, dato che 21 non è un divisore di 100. Allora avremmo trovato un valore approssimato. In particolare, poiché 21 · 4 = 84 e 21 · 5 = 105, possiamo dire che la percentuale cercata è compresa tra 4 · 13 = 52% e 5 · 13 = 65%. Oppure possiamo esprimere la frazione in numero decimale: $\frac{13}{21} = 0.\overline{6190476}$, dicendo quindi che essa è circa il 62%, valore più preciso dei precedenti.

***Livello* 1**

28. Che percentuale rappresenta uno sconto di € 15,00 su un prezzo iniziale di € 40,00? [37,5]
29. Il prezzo della benzina è aumentato del 2,5%, se prima costava e 1,300 al litro, che prezzo ha adesso? Il risultato va approssimato a 3 cifre decimali. [€ 1,333]
30. Dopo uno sconto del 20% un articolo costa € 44,80, quanto costava prima? [€ 56,00]
31. Il 30% degli abitanti di un grosso palazzo, è formato da 87 persone, quanti sono tutti gli abitanti? [290]
32. Su 1250 persone, il 42% sono maschi, il 40% di questi sono stranieri. Quanti italiani maschi ci sono? [315]

***Livello* 2**

33. Un ragazzo va al cinema e, fra il prezzo del biglietto, gelati e altri dolci che compra, spende 1/3 dei soldi che ha con sé; tornando a casa non si accorge di avere un buco in tasca e perde i 2/3 del denaro che gli era rimasto. Alla fine si accorge di avere solo 12 euro; quanti soldi aveva con sé? [€ 54,00]
34. Marco ha comprato alcune caramelle, una la ha mangiata subito, metà delle rimanenti le ha messe in tasca e le rimanenti le ha nascoste. Suo fratello Luca le ha trovate, e ha ripetuto ciò che aveva fatto Marco, ne ha mangiata una e ne ha prese metà delle rimanenti. Lo stesso ha poi fatto il terzo fratello Matteo. Quando l'ultimo fratello, Giovanni, ha trovato le caramelle ne erano rimaste solo 7, che egli ha preso tutte. Quante erano le caramelle inizialmente? [63]
35. Il prezzo di un paio di pantaloni, comprensivo dell'IVA al 22%, è di € 45,14. Quanto costerebbero i pantaloni se l'IVA fosse abolita? [€ 37,00]
36. a) Con riferimento al precedente quesito, se l'IVA aumentasse al 25% quanto costerebbero i pantaloni? b) E se invece diminuisse al 19%? [a) € 46,25; b) € 44,03]
37. Un negozio pubblicizza lo sconto del 20% + 20%, ossia sconta del 20% un capo e poi applica un ulteriore 20% al capo già scontato. In pratica è come se effettuasse un unico sconto di quanto? [36%]
38. Con riferimento al precedente quesito, se lo sconto è del 40% + $x$% ed esso equivale al 58%, quanto vale $x$? [30]
39. È più conveniente uno sconto del 30% + 20% o uno del 20% + 30%? Giustificare la risposta. [Uguali]

***Livello* 3**

40. Il costo di un quadro è stato dimezzato per 4 volte di fila, perché non si trovavano venditori. Alla fine che percentuale di sconto è stata applicata? [93,75%]
41. Un'azione, un certo giorno perde il 15% del suo valore, il giorno dopo invece aumenta del 15%. Possiamo dire che alla fine ha lo stesso valore iniziale? [No, ha perso il 2,25%]
42. Un oggetto costava, comprensivo di IVA, 50,00. A causa di un aumento dell'IVA adesso costa € 52,00, di quanto è aumentata l'IVA? [Dati mancanti]
43. Risolvere il precedente quesito sapendo che all'inizio l'IVA era al 12%. [4,48%]

## Operazioni con le frazioni

Passiamo adesso alle operazioni con le frazioni.

**Esempio 52**

- Come si calcola $\frac{3}{4}+\frac{5}{4}$? Che significa questa somma? $\frac{3}{4}$ si ottiene dividendo un oggetto in 4 parti uguali e prendendone 3. Ma anche $\frac{5}{4}$ si ottiene dividendo in 4 parti uguali, anche se poi se ne prendono 5 della stessa grandezza. Ciò significa che $\frac{3}{4}+\frac{5}{4}$ equivale a sommare 3 e 5 oggetti uguali, ottenendo 8 oggetti uguali ciascuno a $\frac{1}{4}$. perciò ovviamente $\frac{3}{4}+\frac{5}{4}=\frac{8}{4}=2$.
- Come si calcola $\frac{3}{4}+\frac{7}{6}$? Basta ricondurre ciascuna delle due frazioni a una con lo stesso denominatore. Dato che $\frac{3}{4}=\frac{3\cdot 6}{4\cdot 6}=\frac{18}{24};\frac{7}{6}=\frac{7\cdot 4}{6\cdot 4}=\frac{28}{24}$ si ha: $\frac{3}{4}+\frac{7}{6}=\frac{18}{24}+\frac{28}{24}=\frac{46}{24}=\frac{23}{12}$.

In effetti però potremmo scrivere due frazioni con lo stesso denominatore, in modo che questo sia il minimo possibile.

**Esempio 53**

$\frac{3}{4}$ e $\frac{7}{6}$ possono scriversi con lo stesso denominatore, considerando il *mcm*(4; 6) = 12, cioè avremo: $\frac{3}{4}=\frac{3\cdot 3}{4\cdot 3}=\frac{9}{12};\frac{7}{6}=\frac{7\cdot 2}{6\cdot 2}=\frac{14}{12}$, quindi $\frac{3}{4}+\frac{7}{6}=\frac{9}{12}+\frac{14}{12}=\frac{23}{12}$.

Possiamo allora enunciare il seguente risultato.

**Teorema 31**

Si ha: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot m+c\cdot n}{mcm(b,d)}$, con $m=\frac{mcm(b,d)}{b}, n=\frac{mcm(b,d)}{d}$.

Passiamo alla moltiplicazione fra frazioni.

**Esempio 54**

La moltiplicazione di due frazioni è ovvia, dalla stessa definizione di frazione. Abbiamo: $\frac{3}{5}\cdot\frac{8}{7}=\frac{3\cdot 8}{5\cdot 7}=\frac{24}{35}$.

Dall'esempio precedente abbiamo il caso generale.

**Teorema 32**

Si ha: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$.

Più delicata appare la trattazione della divisione fra frazioni.

**Esempio 55**

Cosa significa: $\frac{8}{3}:\frac{5}{4}$? Che significa 8 : 4? Suddividere 8 oggetti in 4 parti uguali. Così 8 : 4 = 2. Si può però scrivere anche 8/4 = 8 · 1/4 = 2. Allora 8 : (5/4) = 8 : (5 · 1/4) = 8 : 5 : 1/4 = 8/5 : 1/4 = 8/5 · 4 = 32/5. Infine

si ha: 8/3 : 5/4 = 8/3 · 4/5 = 32/15.

Quanto visto nell'esempio ci permette di enunciare il seguente risultato generale.

**Teorema 33**

Si ha: $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$.

Poniamo una definizione.

**Definizione 24**

Dato un numero $N$ diverso da zero, diciamo suo **inverso** o suo **reciproco**, il numero $M$ per cui si ha: $N \cdot M = 1$. La reciproca della frazione $n/m$, con $n \neq 0$ è la frazione $m/n$.

Possiamo ora considerare una proprietà per la divisione di potenze che hanno la stessa base.

**Esempio 56**

Come possiamo scrivere $\frac{2^5}{2^3}$? Scriviamo $\frac{2^5}{2^3}=\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot 2\cdot 2}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}}=2^2$. Cioè $\frac{2^5}{2^3}=2^{5-3}=2^2$.

Possiamo quindi enunciare il seguente risultato.

**Teorema 34**

Vale la seguente formula: $m^n : m^p = m^{n-p}, m \in \mathbb{Z},\ n, p \in \mathbb{N}$.

La precedente regola permette di dare significato anche a potenze con esponente negativo o nullo.

**Esempio 57**

Che significa $5^0$? Per il teorema precedente possiamo scrivere: $5^0 = 5^{1-1} = 5^{2-2} = ... = 5/5 = 25/25 = ... = 1$.

Facciamo attenzione all'esempio precedente, in esso **non abbiamo dimostrato** che $5^0 = 1$, abbiamo solo detto che se vogliamo che la regola stabilita dal Teorema 34 valga anche quando $n - p = 0$, allora dobbiamo dire che si ha: $5^0 = 1$. Ovviamente si avrà anche $3^0 = 1$, $(2/7)^0 = 1$ e così via. Quindi poniamo la seguente definizione.

**Definizione 25**

Diciamo che la scritta $n^0$, $n \neq 0$, rappresenta il numero 1.

Non diamo alcun senso alla scritta $0^0$, perché dovrebbe essere allora $0^0 = 0^{1-1} = \frac{0}{0}$, ma in precedenza non avevamo dato significato alla divisione al secondo membro.
Avendo definito le potenze ad esponente zero, possiamo osservare che la notazione esponenziale permette di scomporre ogni numero naturale nella **notazione posizionale decimale**. Così il numero 1234 si può scrivere come $1234 = 1\cdot 10^3 + 2\cdot 10^2 + 3\cdot 10^1 + 4\cdot 10^0$.
Adesso vediamo di dare significato anche alle potenze con esponente negativo.

**Esempio 58**

Che significa $5^{-2}$? Abbiamo: $5^{-2} = 5^{0-2} = 5^0/5^2 = (1/5)^2$.

Anche in questo caso, come per la potenza nulla, l'esempio precedente **non abbiamo dimostrato** che $5^{-2} = (1/5)^2$, ma abbiamo applicato la regola stabilita dal Teorema 34; pertanto se vogliamo che essa valga anche quando $n - p < 0$, allora dobbiamo dire che si ha: $5^{-2} = (1/5)^2$. Chiaramente avremo anche $4^{-3} = (1/4)^3$, $8^{-4} = (1/8)^4$ e così via. Pertanto poniamo la seguente definizione.

**Definizione 26**

Diciamo che la scritta $m^{-n}$, con $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N}$, rappresenta il numero $\frac{1}{m^n}$.

## L'angolo storico

- I simboli che usiamo per le cifre sono detti indo–arabi, perché risultano una sistemazione da parte degli arabi di un'invenzione indiana. Ciò è avvenuto in un'epoca a noi abbastanza vicina, cioè il IX secolo d. C. In questa stessa epoca è nato lo zero sia come simbolo, sia come cifra, sia soprattutto come concetto. In effetti lo zero, nella cultura occidentale non appare prima del 1200, importato dalla matematica araba da Leonardo Pisano detto il Fibonacci (figlio di Bonaccio), il quale lo ha anche "battezzato", chiamandolo *zefiro* che con variazioni è poi diventato zero.
- Anche i simboli < e >, sono sorti nel panorama matematico in epoca relativamente recente, essi infatti si trovano per la prima volta nella letteratura matematica in un'opera di Thomas Harriot, *Artis analyticae praxis ad aequationes algebraicas resolvendas*, pubblicata postuma nel 1641.
- Pure i simboli + e – hanno origini abbastanza recenti, dato che apparvero per la prima volta in stampa, in un libro di aritmetica pratica pubblicato a Leipzig nel 1489. Il loro uso non è divenuto norma fino al XIX secolo.
- Il simbolo moderno del prodotto (cioè ·) è dovuto al grande filosofo e matematico tedesco Gottfried Wilhelm von Leibniz che lo usò in una lettera del 1698 indirizzata al matematico svizzero Johan Bernoulli. Il simbolo $\times$ fu invece usato da William Oughtred nel 1628.
- La regola che usiamo di solito per moltiplicare due numeri è abbastanza recente. In antichità venivano usate molte altre regole. In particolare Luca Pacioli nel 1494, nel *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*, ne presenta ben 8: per *scachieri*, *castellucio*, *a travelletta* o *per colona*, *per quadrilatero*, *per crocetta*, *per gelosia* o *graticola*, *per reppiego* e *a scapezza*. Mostriamo per esempio quella *per castellucio*.

$$
\begin{array}{r}
234 \quad \times \\
567 \\
\hline
2\ 0^{a} \\
1\ 4^{b} \\
1\ 5^{c}\ 2\ 4^{d} \\
1\ 2^{e}\ 2\ 1^{f} \\
10^{g}\ 1\ 8^{h}\ 28^{i} \\
\hline
13\ 2\ 6\ 7\ 8
\end{array}
$$

Abbiamo usato delle lettere per spiegare da cosa derivano i numeri scritti:

$$^{a}5\times 4;^{b}7\times 2;^{c}5\times 3;^{d}6\times 4;^{e}6\times 2;^{f}7\times 3;^{g}5\times 2;^{h}6\times 3;^{i}7\times 4$$

Come si vede una struttura alquanto laboriosa.

- L'uso di un punto o una virgola per separare la parte intera di un numero da quella decimale è abbastanza recente. Il belga Simon Stevin (1548 – 1620) usava una curiosa notazione, per esempio 27.549 lo indicava con 27 (0) 5 (1) 4 (2) 9 (3). Successivamente lo svizzero Jorst Bürgi (1552 – 1632) introdusse un pallino sopra la cifra delle unità della parte intera, scrivendo $2\overset{\circ}{7}\,549$. Curiosamente fu un italiano, tale Magini, a introdurre il punto decimale. La virgola decimale è invece dovuta all'olandese Willebrord Snellius.

## I protagonisti

**Eratostene**. Matematico greco nato a Cirene nel 276 a.C. e morto nel 194 a.C. Fu bibliotecario della famosa biblioteca di Alessandria, è noto per aver determinato con buona approssimazione la misura del raggio terrestre. È anche famoso poiché risulta il "destinatario" de Il metodo, opera minore di Archimede in cui questi descrive il suo metodo di scoperta di molte formule per il calcolo dei volumi di alcuni corpi rotondi.

# Verifiche

## Lavoriamo insieme

*Semplificare l'espressione*: $\frac{4}{25}\cdot\left(\frac{4}{25}-1+\frac{25}{4}\right)\cdot\left(\frac{6}{5}-\frac{5}{2}\right)-\left(\frac{2}{5}\right)^2\cdot\left[3\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^3-\left(\frac{5}{2}\right)^3\right]+4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{2}{5}-\frac{5}{2}\right)$.

Procediamo con ordine, sviluppando intanto le espressioni all'interno delle parentesi tonde.

$$\frac{4}{25}\cdot\frac{16-100+625}{100}\cdot\frac{12-25}{10}-\frac{4}{25}\cdot\left[3\cdot\frac{8}{125}-\frac{125}{8}\right]+4\cdot\frac{8}{27}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{4-25}{10}.$$

Sempre lavorando all'interno delle parentesi sommiamo i numeri al numeratore ed effettuiamo le moltiplicazioni legittime: $\frac{4}{25}\cdot\frac{541}{100}\cdot\frac{-13}{10}-\frac{4}{25}\cdot\left[\frac{24}{125}-\frac{125}{8}\right]+\frac{32}{27}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{-21}{10}$.

Moltiplichiamo, laddove possibile, semplificando con il cosiddetto metodo a croce, cioè numeratore con denominatore.

$$\frac{\cancel{4}^{1}}{25}\cdot\frac{541}{\cancel{100}^{25}}\cdot\frac{-13}{10}-\frac{4}{25}\cdot\frac{192-15625}{1000}+\frac{\cancel{32}^{8}}{\cancel{27}^{9}}\cdot\frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{2}^{1}}\cdot\frac{-\cancel{21}^{7}}{\cancel{10}^{1}}=-\frac{7033}{6250}-\frac{4}{25}\cdot\frac{-15433}{1000}-\frac{56}{9}=$$

$$=-\frac{7033}{6250}-\frac{\cancel{4}^{1}}{25}\cdot\frac{-15\,433}{\cancel{1000}^{250}}-\frac{56}{9}=-\frac{7033}{6250}+\frac{15\,433}{6250}-\frac{56}{9}.$$

Adesso effettuiamo l'ultimo minimo comune denominatore:

$$\frac{-63\,297+138\,897-350\,000}{56\,250}=-\frac{274\,400}{56\,250}=-\frac{2^{\cancel{5}4}\cdot\cancel{5^2}\cdot 7^3}{\cancel{2}\cdot 3^2\cdot 5^{\cancel{3}3}}=-\frac{2^4\cdot 7^3}{3^2\cdot 5^3}=-\frac{5488}{1125}.$$

***Semplificare le seguenti espressioni***

***Livello 1***

1. a) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{4}{3}$; b) $\frac{5}{4}-\frac{4}{5}+\frac{5}{6}-\frac{6}{5}$; c) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$ $\left[a)-\frac{1}{12};b)\frac{1}{12};c)\frac{31}{16}\right]$
2. a) $\frac{7}{5}+\frac{2}{9}-4-\frac{14}{5}+\frac{1}{3}$; b) $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{5}{8}$; c) $\frac{1}{4}+\frac{3}{5}-\frac{1}{10}+\frac{3}{2}-1$ $\left[a)-\frac{247}{90};b)-\frac{1}{24};c)\frac{5}{4}\right]$
3. a) $-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{4}{6}-\frac{5}{8}+\frac{1}{12}$; b) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$; c) $1-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{5}{6}$ $\left[a)-\frac{11}{24};b)2;c)\frac{5}{4}\right]$
4. $\frac{4}{5}+\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}-\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}-\frac{3}{10}\right)+\frac{1}{12}-\frac{1}{6}$ $\left[\frac{37}{20}\right]$
5. a) $\frac{5}{8}-\frac{2}{3}+\frac{2}{5}-\frac{3}{4}+\frac{1}{6}-\left(\frac{8}{5}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)$; b) $\frac{5}{6}+\frac{6}{5}+\frac{5}{4}-\left(\frac{2}{3}+\frac{7}{10}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{7}{12}\right)$ $\left[a)-\frac{103}{40};b)1\right]$
6. $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\left(1+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{10}+\frac{2}{3}-\left(\frac{3}{4}+\frac{4}{5}\right)$ $\left[-\frac{27}{20}\right]$
7. $-\frac{1}{2}+\frac{6}{5}-\frac{3}{4}-\frac{14}{15}-\left(\frac{4}{9}+\frac{3}{2}+\frac{8}{3}+\frac{5}{3}\right)-\left(\frac{1}{18}+\frac{7}{10}\right)-\frac{7}{12}+\frac{3}{5}$ $[-8]$

***Livello 2***

8. a) $\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{8}\cdot\left(-\frac{11}{4}-\frac{3}{2}\right)$; b) $\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)+\frac{3}{4}$ $\left[a)\frac{11}{32};b)0\right]$
9. $\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)-6\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\right)\cdot\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{5}\right)$ $\left[\frac{86}{225}\right]$
10. a) $\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{2}{3}\cdot 2-1$; b) $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$ $\left[a)\frac{25}{48};b)-\frac{1}{9}\right]$

11. a) $\left(\frac{1}{4}\right)^3-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot 2+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{4}\cdot 3+5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5$; b) $\left(\frac{2}{3}-1\right)\cdot\left(\frac{4}{9}+\frac{2}{3}+1\right)-\left(\frac{2}{3}-1\right)^3$ $\left[a)\frac{113}{192};b)-\frac{2}{3}\right]$

12. $\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{9}{16}+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{9}{16}-\frac{3}{8}+\frac{1}{4}\right)$ $\left[-\frac{1}{4}\right]$

13. $\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{5}{6}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{5}{6}\right)-\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}-\frac{5}{6}\right)^2$ $\left[-\frac{29}{72}\right]$

14. $\left[\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}-1\right)^2+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}+1\right)^2\right]\cdot\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)\right]$ $\left[\frac{145}{432}\right]$

15. a) $\left(\frac{2}{3}-1\right)\cdot\left(\frac{2}{3}+1\right)+\left[\frac{1}{3}-2-\left(\frac{1}{2}+1\right)\right]^2$; b) $\left(\frac{1}{3}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}-1\right)-\left(\frac{2}{3}+2\right)^3$ $\left[a)\frac{605}{36};b)-\frac{502}{27}\right]$

16. a) $\left\{\frac{2}{5}-\left[\frac{5}{2}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\right]\cdot\frac{1}{4}\right\}\cdot\frac{3}{8}$; b) $\frac{1}{4}-\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{2}{3}-1-\left(\frac{1}{4}-2\right)\right]\cdot\frac{1}{2}\right\}\cdot\frac{1}{2}$ $\left[a)-\frac{1}{160};b)-\frac{3}{32}\right]$

17. a) $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{5}-\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)$; b) $\left\{\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)-1\right]\right\}\cdot\frac{4}{3}$ $\left[a)-\frac{13}{840};b)-\frac{41}{54}\right]$

18. $\left\{\frac{2}{5}-\left[\frac{3}{4}+\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\right]\right\}\cdot\left(\frac{2}{5}-\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{3}$ $\left[\frac{213}{800}\right]$

19. a) $\left(\frac{1}{4}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{4}+1\right)-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)^2$; b) $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-1\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-1\right)^2$ $\left[a)-\frac{139}{144};b)-\frac{2}{9}\right]$

20. $\left(\frac{2}{5}-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{2}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)^2$ $\left[-\frac{533}{720}\right]$

## Lavoriamo insieme

*Semplificare la seguente espressione*: $\dfrac{\frac{4}{7}-\left(\frac{3}{4}\right)^2-\frac{5}{8}}{\frac{1}{56}+\frac{1}{28}-\frac{5}{7}}$.

Lavoriamo innanzitutto sulle espressioni poste a numeratore e denominatore della linea di frazione più lunga: $\dfrac{\frac{4}{7}-\frac{9}{16}-\frac{5}{8}}{\frac{1+2-40}{56}}=\dfrac{\frac{64-63-70}{112}}{\frac{1+2-40}{56}}=\dfrac{-\frac{69}{112}}{\frac{-37}{56}}$. Adesso teniamo conto che una frazione è una divisione e ricordiamo la regola: *la divisione fra due frazioni equivale al prodotto della prima per l'inversa della seconda*. Quindi $-\frac{69}{112}\cdot\frac{-56}{37}=-\frac{69}{\cancel{112}^{\,2}}\cdot\frac{-\cancel{56}^{\,1}}{37}=\frac{69}{74}$.

***Semplificare le seguenti espressioni frazionarie***

***Livello 1***

21. a) $\dfrac{\frac{11}{13}+\frac{13}{11}-2}{\frac{13}{11}-\frac{11}{13}}$; b) $\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}:\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}-\frac{2}{3}}$; c) $\dfrac{\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+1}\cdot\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-1}{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-1}$; d) $\dfrac{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)^2}\cdot\left(\frac{5}{2}+\frac{2}{9}\right)$

$\left[a)\frac{1}{12};b)\frac{1}{85};c)-\frac{49}{221};d)\frac{1}{18}\right]$

22. a) $\left(-3\cdot\frac{\frac{3}{2}-2}{1-\frac{1}{2}}+1\right)\cdot\frac{9}{2}$; b) $\frac{\frac{\frac{7}{3}}{3}-1}{-\frac{5}{9}}$; c) $\left(\frac{\frac{1}{8}+1}{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1}+\frac{\frac{5}{3}+1}{-\frac{1}{5}-3}\right)\cdot\left(\frac{-30}{7}\right)$ $\left[a)18;b)\frac{2}{5};c)-\frac{20}{7}\right]$

23. a) $\frac{\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\right)\right]^2}{\frac{1}{4}+\frac{4}{25}+\frac{2}{5}}$; b) $1-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}-\frac{2}{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}\right)$; c) $\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{1}{6}\right)}{\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{36}}$ $\left[a)\frac{1}{100};b)\frac{41}{5};c)\frac{1}{6}\right]$

24. a) $\frac{1+\frac{\frac{3}{5}}{8}}{\frac{5}{8}+2-3\cdot\frac{8}{5}}$; b) $\frac{\frac{1}{4}+2-\frac{1}{\frac{1}{4}+2}}{\frac{1}{4}+4-\frac{3}{\frac{1}{4}+2}}$; c) $\frac{\left(1+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-1\right)}{\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}}$ $\left[a)-\frac{43}{57};b)\frac{13}{21};c)\frac{5}{16}\right]$

25. a) $\frac{\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+1-\frac{1}{8}\right)}{\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\right)}$; b) $\frac{\frac{4}{9}+\frac{9}{16}-3}{\left(\frac{2}{3}-2\right)\cdot\left(\frac{4}{9}+\frac{4}{3}+4\right)}\cdot\frac{3\cdot\frac{4}{9}+16}{16+\frac{9}{2}}$ $\left[a)-\frac{161}{10};b)\frac{7}{32}\right]$

26. a) $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{5}+3}+\frac{6}{\frac{1}{5}-3}-\frac{\frac{3}{5}+2\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2+9}{\left(\frac{1}{5}-3\right)\cdot\left(\frac{1}{5}+3\right)}\cdot\frac{\frac{1}{25}+39}{5-\frac{3}{25}}$; b) $\frac{\frac{1}{4}+\frac{4}{9}-3-\frac{5}{36}}{\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}+1\right)}\cdot\frac{23}{1+\frac{9}{2}}$ $\left[a)\frac{107}{16};b)\frac{32}{3}\right]$

27. a) $\frac{\frac{7}{2}+\frac{7}{4}-1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-2}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+2\right)}{\frac{3}{4}-3}$; b) $\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-1-\frac{3}{2}}{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-1}\cdot\frac{\frac{1}{4}-1}{\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+1\right)}\cdot\frac{\frac{1}{2}+1}{3\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)}$ $\left[a)-\frac{25}{9};b)-\frac{7}{5}\right]$

### *Livello 2*

28. a) $\frac{\frac{\frac{8}{3}+\frac{11}{5}}{\frac{3}{8}+\frac{5}{11}}}{\left(\frac{5}{11}+\frac{11}{5}\right)\cdot\frac{121}{146}}$; b) $\frac{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}}{\left(\frac{2}{3}-1\right)^2}+\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1}{\left(\frac{1}{2}-3\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+3\right)}-\frac{\frac{2}{5}-\frac{1}{4}+1}{\frac{2}{5}+\frac{1}{4}-1}$ $\left[a)\frac{8}{3};b)\frac{709}{84}\right]$

29. a) $\frac{1-\frac{1}{\frac{5}{2}+\frac{1}{2}}}{1+\frac{1}{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}}}+1-\frac{1}{2}-\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{1}{3}$; b) $\frac{\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}-\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}}{\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}-1}\cdot\left(1-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}\right)$ $\left[a)\frac{1}{36};b)\frac{12}{25}\right]$

30. a) $\dfrac{\left(\dfrac{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}-\frac{1}{4}}+\dfrac{\frac{1}{5}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}\right)\cdot\dfrac{\frac{2}{5}-\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}+\frac{3}{4}}}{\frac{1}{10}-\frac{2}{5}+\frac{3}{10}-\frac{7}{20}}+1$; b) $\left(1-\dfrac{1-\frac{1}{3}}{\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)^2}\cdot\dfrac{\frac{1}{3}-1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)}\right)\cdot\dfrac{\frac{3}{2}-\frac{1}{4}}{\left(\frac{5}{3}+\frac{1}{2}\right)^2}$ $\left[a)-\frac{1433}{207};b)\frac{931}{2535}\right]$

31. a) $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}+\frac{7}{2}-1}-\dfrac{\frac{3}{4}-\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{4}-\frac{3}{2}}\cdot\dfrac{\frac{7}{3}}{\frac{3}{4}-1}$; b) $\dfrac{\frac{1}{4}+6}{\frac{1}{4}+\frac{5}{2}+4}-\dfrac{7-\frac{1}{2}}{9}-\dfrac{\frac{3}{2}+1}{6-\frac{3}{2}}-\dfrac{\frac{3}{4}+7}{\frac{1}{2}-14}$ $\left[a)-\frac{1094}{117};b)\frac{2}{9}\right]$

32. $\dfrac{1}{\frac{3}{4}+\frac{4}{3}-3}+\dfrac{1}{\frac{3}{4}+\frac{4}{3}+3}-\dfrac{\frac{3}{4}+\frac{4}{3}}{\left(\frac{3}{4}+\frac{4}{3}\right)^2-9}\cdot\dfrac{\left(\frac{3}{4}+\frac{4}{3}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}+\frac{4}{3}-3\right)}{\left(\frac{25}{12}\right)^2}$ $\left[-\frac{12}{11}\right]$

***Livello 3***

33. a) $\dfrac{\dfrac{\frac{1}{5}+1}{\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{5}+3\right)}+\dfrac{\frac{1}{5}-1}{\left(\frac{1}{5}+1\right)\cdot\left(\frac{1}{5}-3\right)}-\dfrac{1-\frac{2}{5}}{\frac{1}{5}\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)}}{\dfrac{-\frac{4}{5}}{3-\frac{4}{5}+\left(\frac{1}{5}\right)^2}-\left[\dfrac{\frac{6}{5}}{\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{5}-3\right)}+\dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{25}}\right]}$; b) $\dfrac{\dfrac{2}{\frac{7}{4}-2}-\dfrac{3}{\frac{7}{4}+4}}{\dfrac{2}{\left(\frac{7}{4}\right)^2+\frac{7}{4}-2}-\dfrac{3}{\left(\frac{7}{4}+4\right)\cdot\left(\frac{7}{4}-1\right)}}$ $\left[a)\frac{5}{6};b)-\frac{63}{8}\right]$

34. a) $\left(\dfrac{\dfrac{\frac{1}{3}+4}{\frac{1}{3}+1}}{\frac{2}{3}+3}-\dfrac{\frac{1}{3}+3}{\frac{1}{3}+1}\right)\cdot\left(1-\dfrac{\frac{1}{3}+2}{\frac{1}{3}+1}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{20}{71}\right)$; b) $\left(\dfrac{\frac{11}{3}+\frac{3}{11}}{\frac{11}{3}-\frac{3}{11}}+\dfrac{1}{1+\frac{3}{11}}-\dfrac{1}{1-\frac{3}{11}}\right)\cdot\dfrac{3\cdot\left(\frac{12}{8}-1\right)}{1-\frac{2}{14}}$ $\left[a)\frac{1}{16};b)1\right]$

## Lavoriamo insieme

Un problema proposto da un indiano vissuto nel IX secolo, un tale Mahavira.
20 *uomini dovevano portare un palanchino per una lunghezza di due yojana in cambio di una somma di* 720 *dinari. Due uomini stanchi lasciarono perdere dopo* 2 *krosa, dopo altri due krosa lasciarono altri* 3 *uomini e dopo metà del rimanente tragitto abbandonarono* 5 *uomini. I rimanenti conclusero il viaggio e ricevettero l'intero compenso, come doveva essere diviso fra i* 20 *uomini*?
Non ci lasciamo impressionare dagli yojana e dai krosa, sono antiche unità di misura di lunghezza, quello che a noi interessa è solo sapere che 4 krosa equivalgono a 1 yojana. Quindi abbiamo 10 uomini che percorrono l'intero tragitto, 5 che ne fanno i $\frac{3}{4}$, 3 metà e 2 solo $\frac{1}{4}$. Il problema è perciò quello di ripartire in parti proporzionali al lavoro svolto i 720 dinari. Ora per ogni quarto di viaggio la somma è di $\frac{720}{4}$ = 180 dinari, che deve essere ripartita fra 20 persone, quindi la somma da dare ai primi due è solo di $\frac{180}{20}$ = 9 dinari ciascuno. I 3 devono ricevere invece i 9 dinari per la prima parte e $\frac{180}{18}$ = 10 dinari per la seconda

parte di viaggio, cioè 19 dinari ciascuno. Allo stesso modo i 5 riceveranno 19 dinari più $\frac{180}{15} = 12$ dinari per la terza parte, cioè 31 dinari ciascuno. Infine i 10 rimasti avranno $31 + \frac{180}{10} = 49$ dinari.

Verifichiamo: $2 \cdot 9 + 3 \cdot 19 + 5 \cdot 31 + 10 \cdot 49 = 720$.

***Livello 2***

35. Un problema tratto dal Lilavati, un testo indiano del XII secolo. *Dimmi, matematico, come dobbiamo dividere i guadagni fra tre commercianti che hanno messo rispettivamente* 51, 68 *e* 85 *monete in una stessa operazione commerciale da cui si sono ottenute* 300 *monete*? [75; 100; 125]
36. Un problema di Chaturveda, un matematico indiano del XII secolo. *Il prezzo di cento mattoni, la cui lunghezza, spessore e larghezza sono rispettivamente* 16, 8 *e* 10 *è di* 6 *dinari. Abbiamo ricevuto* 100000 *mattoni le cui dimensioni sono tutte* 1/4 *in meno del previsto. Quanto dovremmo pagare*? [2531,25 dinari]
37. In una strana ditta lavorano il bisnonno, il nonno, il padre e il figlio. Il guadagno viene diviso in modo tale che il padre prenda il doppio rispetto al proprio figlio. Se il guadagno è stato di €120000, quanto ha avuto ciascuno? [€8000; €16000; €32000; €64000]
38. Per costruire un muro si impiegano tre operai. I primi due lavorano insieme per 5 ore, poi uno dei due si riposa e subentra il terzo che lavora per 3 ore con il secondo e per altre 4 ore solo con il primo. Se il compenso totale è di € 300, come deve essere suddiviso fra i tre? [€ 112,50; € 100,00; € 87,50]
39. Con riferimento al precedente quesito. Se gli ultimi due avessero lavorato insieme per tre ore e l'ultima ora avessero lavorato tutti insieme, la ripartizione del compenso sarebbe cambiata? [Sì: € 108,00; € 108,00; € 84,00]

## Lavoriamo insieme

*Semplificare la seguente espressione*: $\dfrac{\dfrac{3^2 \cdot 9^{-3}}{27^{-4}} + 3}{\dfrac{9 + 3 \cdot 3^{-2}}{3^{-4} \cdot 27}}$.

Ci accorgiamo che tutte le potenze possono essere ricondotte alla base comune 3, quindi effettuiamo intanto questa operazione: $\dfrac{\dfrac{3^2 \cdot \left[3^2\right]^{-3}}{\left[3^3\right]^{-4}} + 3}{\dfrac{9 + 3^{-1}}{3^{-4} \cdot 3^3}}$. Osserviamo che non abbiamo ricondotto il 9 a $3^2$ perché in quel caso è un addendo e non un fattore, pertanto non avremmo ricevuto alcun vantaggio da questa espressione, non potendo applicare nessuna delle regole valide per le moltiplicazioni e le divisioni fra potenze. Continuiamo:

$$\frac{\dfrac{3^2 \cdot 3^{-6}}{3^{-12}} + 3}{\dfrac{9 + 3^{-1}}{3^{-1}}} = \frac{\dfrac{3^{-4}}{3^{-12}} + 3}{\dfrac{9 + \frac{1}{3}}{3^{-1}}} = \frac{3^{-4-(-12)} + 3}{\dfrac{27+1}{3} \cdot 3}.$$

Notiamo che abbiamo trasformato una frazione in moltiplicazione e a un'altra abbiamo applicato la proprietà della divisione fra potenze aventi la stessa base:

$$\frac{3^{-4+12} + 3}{\dfrac{27+1}{\cancel{3}^1} \cdot \cancel{3}^1} = \frac{3^8 + 3}{28} = \frac{3^8 + 3}{28} = \frac{6561 + 3}{28} = \frac{6564}{28} = \frac{1641}{7}.$$

***Applicando le proprietà delle potenze semplificare le seguenti espressioni***

***Livello 1***

40. a) $2^{-2} \cdot 2^3 \cdot 2^{-4} \cdot 2^5 \cdot 2^0$; b) $2^{-2} \cdot 4^3 \cdot 8^{-4} \cdot 16^5 \cdot 32^{-6} \cdot 64^7$; c) $3^3 \cdot 3^{-4}; 3^5 \cdot 3^2$ [a) $2^2$; b) $2^{24}$; c) $3^{-4}$]
41. a) $3^5 \cdot 3^{-3} \cdot 2^{-8} \cdot 8^{-1}$; b) $\left(6^2 \cdot 12^{-3}\right)^{-1} : \left(18^{-3} : 16^4\right)^2$; c) $\left(5^3\right)^2 \cdot \left(5^2\right)^{-3} : 25^3$ [a) $2^{-11} \cdot 3^2$; b) $2^{42} \cdot 3^{13}$; c) $5^{-6}$]

42. a) $\left(4^2:8^3\right)^{-4}\cdot\left(2^{-2}:2^3\right)^4\cdot 16$; b) $\dfrac{7^2\cdot 7^{-3}\cdot 49^5}{343\cdot 7^{-2}}$; c) $\dfrac{3^2\cdot 5\cdot 3^{-3}\cdot 5^{-2}}{3\cdot 5^2\cdot 3^{-2}\cdot 5^{-3}}$ [a) $2^4$; b) $7^8$; c) 1]

43. a) $\dfrac{3^{-7}}{\dfrac{3^{-4}}{\dfrac{3^{-3}}{3^{-2}}}}$; b) $2^3\cdot 3^{-2}\cdot 4^3\cdot 6^{-2}\cdot 8^5\cdot 9^{-4}$; c) $\dfrac{2^3\cdot 4^{-2}\cdot 8^3}{4^{-2}\cdot 16^2}$; d) $\dfrac{3^{-2}\cdot 9^{-3}\cdot 18^5}{12^{-4}\cdot 18^2}$

[a) $3^{-2}$; b) $2^{22}\cdot 3^{-12}$; c) $2^4$; d) $2^{11}\cdot 3^2$]

*Livello 2*

44. a) $\left(4^{-2}+3^{-1}\right)\cdot\left(4^{-2}-3^{-1}\right)$; b) $\left(2^{-1}+1-2^{-2}\right)\cdot\left(2^{-1}+1-2^{-2}\right)$ [a) $2^{-8}-3^{-2}$; b) $2^{-4}\cdot 5^{-2}$]

45. a) $\left(3^{-1}+3^{-2}-3^{-3}\right)\cdot\left(3^{-1}+3^{-2}-3^{-3}\right)$; b) $\left(2\cdot 3^{-1}-3\cdot 2^{-2}\right)\cdot\left(2\cdot 3^{-2}-3\cdot 2^{-1}\right)$ [a) $3^{-6}\cdot 11^{-2}$; b) $2^{-3}\cdot 3^{-3}\cdot 23$]

46. a) $\dfrac{(2^{-2}+1)\cdot(2^{-2}-1)}{2^{-2}+2\cdot 2^{-2}+1}$; b) $\dfrac{(3^{-3}+9^{-2})\cdot\left[\left(3^{-3}\right)^2-3^{-3}\cdot 9^{-2}+\left(9^{-2}\right)^2\right]}{\left[\left(3^3\right)^{-2}-\left(9^{-2}\right)^2\right]^2}$ [a) $-2^{-2}\cdot 3\cdot 5\cdot 7^{-1}$; b) $2^{-4}\cdot 3^4\cdot 7$]

47. $\dfrac{\left(2^{-3}\right)^2}{\left(2^{-2}-6^{-1}\right)\cdot\left(2^{-2}-3^{-2}\right)}+\dfrac{\left(6^{-1}\right)^3}{\left(6^{-1}-3^{-2}\right)\cdot\left(6^{-1}-2^{-2}\right)}+\dfrac{\left(3^3\right)^{-2}}{\left(3^{-2}-2^{-2}\right)\cdot\left(3^{-2}-6^{-1}\right)}$ [$2^{-2}\cdot 3^{-2}\cdot 19$]

48. a) $\dfrac{\left(3^{-3}\cdot 6^{-2}+4^{-1}\cdot 2^{-2}\right)^2+\left(3^{-3}\cdot 2^{-2}-4^{-1}\cdot 6^{-2}\right)^2}{\left(3^{-3}\cdot 12^{-1}+4^{-1}\cdot 18^{-1}\right)^2+\left(3^{-3}\cdot 18^{-1}-4^{-1}\cdot 12^{-1}\right)^2}$; b) $\dfrac{\left(10^{-2}+15^{-1}-6^{-2}\right)\cdot\left(10^{-2}-15^{-1}+6^{-2}\right)}{\left(10^{-2}\right)^2-\left(15^{-1}-6^{-2}\right)^2}$

[a) $2\cdot 13^{-1}\cdot 41$; b) $2^{42}\cdot 3^{13}$; 1]

49. $\dfrac{1+2\cdot 4^{-2}-\left(2^{-3}\right)^2-2\cdot 2^{-3}\cdot(-1)+\left(4^{-2}\right)^2-(-1)^2}{1-2^{-3}+4^{-2}+1}$ [$2^{-4}\cdot 3$]

50. Aldo e i suoi tre amici Bice, Claudio e Dora sono alle prese con il problema di dimezzare il numero $4^{756}$. Aldo dice che fa $2^{378}$, poiché secondo lui deve dimezzarsi sia la base che l'esponente. Bice invece afferma che fa $2^{1511}$,perché il numero iniziale può scriversi come $2^{1512}$. Claudio asserisce che la corretta metà è $2^{756}$, dato che deve dimezzarsi solo la base e Dora infine assicura che ha ragione lei, indicando in $4^{378}$ il risultato esatto. Chi ha ragione e perché? [Bice]

## Lavoriamo insieme

La notazione esponenziale è molto usata nelle scienze, per esempio in fisica o in chimica. Ciò infatti rende più semplice risolvere certi problemi. Sappiamo per esempio che la distanza media della terra dal sole è 150 milioni di chilometri, mentre la velocità della luce è di 300000 Km al secondo, cioè in un secondo la luce percorre 300000 Km. Se volessimo determinare in quanto tempo la luce del sole arriva fino a noi dovremmo semplificare la frazione $\dfrac{150\,000\,000}{300\,000}$, che non è difficile da ridurre. Se scriviamo però i due numeri nella notazione esponenziale in base 10: $\dfrac{15\cdot 10^7}{3\cdot 10^5}=5\cdot 10^2$, troveremmo più semplicemente il risultato. Sono perciò necessari 500 secondi. Quanti minuti rappresentano? In un minuto ci sono 60 secondi, quindi $\dfrac{500}{60}=\dfrac{50}{6}\approx 8{,}3=8^m48^s$.

***Usando la notazione esponenziale e la seguente tabella in cui sono riportati i dati sui pianeti del nostro sistema solare, risolvere i seguenti problemi.***

| Pianeta | Distanza media dal sole (in *Km*) | Raggio medio (in *Km*) | Massa (in *Kg*) |
|---|---|---|---|
| **Mercurio** | $5{,}79\cdot 10^{10}$ | $2{,}433\cdot 10^3$ | $3{,}18\cdot 10^{23}$ |
| **Venere** | $1{,}082\cdot 10^{11}$ | $6{,}08\cdot 10^3$ | $4{,}881\cdot 10^{24}$ |
| **Terra** | $1{,}496\cdot 10^{11}$ | $6{,}378\cdot 10^3$ | $5{,}976\cdot 10^{24}$ |
| **Marte** | $2{,}28\cdot 10^{11}$ | $3{,}386\cdot 10^3$ | $6{,}41\cdot 10^{23}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Giove** | $7{,}783 \cdot 10^{11}$ | $7{,}137 \cdot 10^{4}$ | $1{,}9 \cdot 10^{27}$ |
| **Saturno** | $1{,}429 \cdot 10^{12}$ | $6{,}037 \cdot 10^{4}$ | $5{,}681 \cdot 10^{26}$ |
| **Urano** | $2{,}875 \cdot 10^{12}$ | $2{,}56 \cdot 10^{14}$ | $8{,}678 \cdot 10^{25}$ |
| **Nettuno** | $4{,}504 \cdot 10^{12}$ | $2{,}27 \cdot 10^{4}$ | $1{,}026 \cdot 10^{26}$ |
| **Plutone** | $5{,}91 \cdot 10^{12}$ | $1{,}1 \cdot 10^{3}$ | $1{,}3 \cdot 10^{26}$ |

***Livello 2***

51. Determinare quante volte il raggio della Terra è più grande di quello di Mercurio [≈ 2,6]
52. Determinare quante volte il raggio di Saturno è più grande di quello di Plutone [≈ 55]
53. Determinare quante volte il raggio di Venere è più piccolo di quello di Nettuno [≈ 3,7]
54. Determinare quante volte il pianeta Giove è più pesante di Venere [≈ 389]
55. Determinare quante volte il pianeta Urano è più leggero di Giove [≈ 185]
56. Determinare dopo quanti minuti la luce del sole raggiunge Mercurio [≈ 3,26]
57. Determinare dopo quante ore la luce del sole raggiunge Saturno [≈ 1,3]
58. Determinare dopo quante ore la luce del sole raggiunge Plutone [≈ 5,5]
59. L'elettrone ha una massa di circa $9{,}11 \cdot 10^{-31}$ *Kg* Determinare un valore approssimato della massa del protone sapendo che essa è circa 1800 volte quella dell'elettrone [$\approx 1{,}6 \cdot 10^{-27}$ *Kg*]
60. Diciamo anno luce la distanza che la luce percorre in un anno Stabilire quanto vale in *Km*. [$\approx 9{,}46 \cdot 10^{15}$]

## L'angolo delle correzioni

Correggere gli errori commessi in ciascuna delle seguenti espressioni.

1. $2^3 \cdot 2^{-3} = 2^6$; $3^2 \cdot 3^{-3} : 3^{-4} = 3^{-1} : 3^{-4} = 3^{-5}$; $2^3 \cdot 8^{-2} : 4^7 = 2^3 \cdot 2^6 : 2^{14} = 2^9 \cdot 2^{14} = 2^{23}$
2. $2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^{-2} : 2^{-3} = 2^1 \cdot 2^{-1} = 2^0 = 1$; $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^{-2} = 6^2 \cdot 5^{-2} = 30^0 = 1$
3. $7^4 \cdot 7^{-2} \cdot 7^3 \cdot 7^{-5} = 7^{-8} \cdot 7^{-15} = 7^{-23}$; $4^2 \cdot 2^{-4} = 8^{-2} = \frac{1}{64}$
4. $3^3 + 3^{-3} = 3^0 = 1$; $5^3 - 5^2 : 5^{-3} \cdot 5^4 = 5 : 5 = 1$; $\left(3^2\right)^{-2} \cdot \left(3^{-3}\right)^3 = 3^{-1} \cdot 3^{-1} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$.

## Giochiamo alla matematica

Diversi sono i cosiddetti trucchi che vengono fatti utilizzando le frazioni. Uno dei più noti è il seguente.

- *Un mandriano morì lasciando in eredità ai suoi tre figli* 17 *vacche, da dividersi con il seguente criterio. Metà dovevano andare al primo, un terzo al secondo e un nono al terzo. Era anche scritto che ciascuno dei tre doveva ricevere vacche vive e intere, non parti di esse.*
  La questione apparve immediatamente molto complessa, dato che a voler fare le cose così come era stato detto il primo figlio doveva ricevere $\frac{17}{2} = 8{,}5$ vacche, il secondo $\frac{17}{3} = 5{,}\overline{6}$ e il terzo $\frac{17}{9} = 1{,}\overline{8}$. Quindi apparentemente il problema è irrisolvibile, almeno lasciando le vacche intere. Il notaio che lesse il testamento si offrì però di risolverlo, proponendo il seguente procedimento. Poiché anch'egli possedeva delle vacche, aggiunse una sua vacca alle 17 lasciate in eredità. Questo rendeva più semplice la divisione, dato che 18 è multiplo di 2, 3 e 9. Pertanto applicò le frazioni scritte nel testamento a questa mandria modificata, dando al primogenito $\frac{18}{2} = 9 > 8{,}5$ vacche, al secondo $\frac{18}{3} = 6 > 5{,}\overline{6}$ e all'ultimo $\frac{18}{9} = 2 > 1{,}\overline{8}$. Così facendo divise esattamente le 17 vacche e poté recuperare la propria. In effetti ciascuno dei figli ebbe più di quel che gli spettava, fu quindi contento e non protestò. Qui l'apparente magia consiste nel fatto che le proporzioni stabilite nel testamento non erano corrette, nel senso che la somma delle parti non equivaleva all'intera mandria. Infatti abbiamo che si ha: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{9+6+2}{18} = \frac{17}{18} < \frac{18}{18} = 1$, pertanto in questo modo doveva rimanere $\frac{1}{18}$ di vacca da non dare a nessuno dei tre.
- Ancora un altro interessante quesito è il seguente. *Una bottiglia contiene un litro di acqua, una fiasca un litro di vino. Dalla bottiglia togliamo dieci centilitri di acqua e li riversiamo nella fiasca, mescoliamo in*

*modo da ottenere una miscela omogenea e poi ne togliamo un decilitro che versiamo nella bottiglia. Adesso abbiamo due miscele, vogliamo sapere se vi è più acqua nella miscela del fiasco o più vino in quella nella bottiglia*.

Seguiamo cosa è accaduto. All'inizio abbiamo 1 litro di acqua nella bottiglia e 1 litro di vino nella fiasca. Al primo travaso nella bottiglia avremo 0,9 $\ell$ di acqua e nella fiasca 1 $\ell$ di vino e 0,1 $\ell$ di acqua. Quindi nella fiasca vi sono 1,1 $\ell$ di miscela, formata da $\frac{1}{1,1}\ell=\frac{10}{11}\ell$ di vino e $\frac{0,1}{1,1}\ell=\frac{1}{11}\ell$ di acqua. Se perciò togliamo un decilitro di miscela stiamo togliendo $\left(\frac{1}{10}\cdot\frac{10}{11}\right)\ell=\frac{1}{11}\ell$ di vino e $\left(\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{11}\right)\ell=\frac{1}{110}\ell$ di acqua. Quindi al secondo travaso avremo, nella bottiglia, $\left(\frac{9}{10}+\frac{1}{110}\right)\ell=\frac{99+1}{110}\ell=\frac{100}{110}\ell=\frac{10}{11}\ell$ di acqua e $\frac{1}{11}\ell$ di vino; nella fiasca invece avremo $\left(1-\frac{1}{11}\right)\ell=\frac{10}{11}\ell$ di vino e $\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{110}\right)\ell=\frac{11-1}{110}\ell=\frac{10}{110}\ell=\frac{1}{11}\ell$ di acqua. Come si vede, e forse non ce lo aspettavamo, la quantità di vino nella bottiglia è la stessa quantità di acqua nella fiasca.

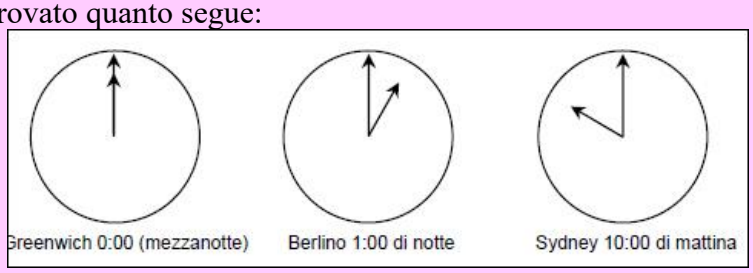
## Per la prova Invalsi

**Quesiti sui numeri naturali e interi relativi**

### Lavoriamo insieme

Il seguente quesito fu assegnato alle prove Invalsi del 2005, per studenti della prima Superiore.
*Si vuole suddividere, se possibile, un rettangolo avente le dimensioni di* 24 *cm e* 36 *cm*, *in quadrati che siano tutti uguali tra loro, e i più grandi possibili. Quanto dovrà misurare il lato di ogni quadrato*? A) 4 *cm* B) 6 *cm* C) 12 *cm* D) *Non è possibile suddividere*
In pratica dobbiamo dividere ciascun lato del rettangolo in modo che sia la base che l'altezza siano formati da segmenti di uguale lunghezza, cioè dobbiamo considerare il MCD(24, 36) = 12. In questo modo dividiamo il lato di 24 *cm* in 2 parti uguali e quello da 36 *cm* in 3 parti uguali. Il rettangolo perciò sarà diviso in $24 \cdot 36 / 12^2 = 6$ quadrati di lato appunto 12 *cm*. Ovviamente questi sono i maggiori possibili, la risposta è perciò la C.

1. (OCSE-PISA) Chiacchierata via internet. Mark (da Sydney, Australia) e Hans (da Berlino, Germania) comunicano spesso tra loro utilizzando le «chat» su Internet. Per poter chattare devono collegarsi a Internet nello stesso momento. Per trovare un'ora appropriata per chattare Mark ha consultato una tabella dei fusi orari e ha trovato quanto segue:



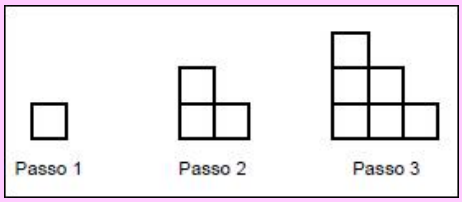

Quando sono le 19:00 a Sydney, che ora è a Berlino? [10:00 di mattina]

2. (OCSE-PISA) Mark e Hans non possono chattare tra le 9:00 e le 16:30 della loro rispettiva ora locale, perché devono andare a scuola. Inoltre, dalle 23:00 alle 7:00 ora locale non possono chattare perché stanno dormendo. Qual è un'ora giusta per Mark e Hans per chattare?
[Sydney: dalle 16:30 alle 18:00, dalle 7:00 alle 8:00;
Berlino: dalle 7:30 alle 9:00, dalle 22:00 alle 23:00]

3. (OCSE-PISA) Tasso di cambio. Mei-Ling, una studentessa di Singapore, si prepara ad andare in Sudafrica per 3 mesi nell'ambito di un piano di scambi tra studenti. Deve cambiare alcuni dollari di Singa-

pore (SGD) in rand sudafricani (ZAR). Mei-Ling ha saputo che il tasso di cambio tra il dollaro di Singapore e il rand sudafricano è: 1 SGD = 4,2 ZAR. Mei-Ling ha cambiato 3.000 dollari di Singapore in rand sudafricani a questo tasso di cambio. a) Quanti rand sudafricani ha ricevuto Mei-Ling? b) Quando Mei-Ling torna a Singapore dopo 3 mesi, le restano 3.900 ZAR. Li cambia di nuovo in dollari di Singapore, notando che il nuovo tasso di cambio è: 1 SGD = 4,0 ZAR. Quanti dollari di Singapore riceve Mei-Ling? c) Durante questi 3 mesi il tasso di cambio è passato da 4,2 a 4,0 ZAR per 1 SGD. Per Mei-Ling è più vantaggioso che il tasso di cambio sia 4,0 ZAR invece di 4,2 ZAR nel momento in cui cambia i suoi rand sudafricani in dollari di Singapore? Spiega brevemente la tua risposta.

[a) 12.600; b) 975; c) No]

4. (OCSE-PISA) Motivi a scaletta Roberto costruisce dei motivi a scaletta usando dei quadrati. Procede per passi successivi: 

Come puoi vedere, usa un quadrato per il Passo 1, tre quadrati per il Passo 2 e sei quadrati per il Passo 3. Quanti quadrati dovrà usare per il quarto passo? [10]
5. (Invalsi 2003) Un ascensore parte dal secondo piano, sale di tre piani, scende di due e poi di altri quattro, infine sale di due piani. A che piano è arrivato? [B]
A) Al piano terra. B) Al primo. C) Al secondo. D) Al terzo. E) Al quarto.
6. (Invalsi 2004) Quale tra le seguenti proposizioni è vera? [B]
A) Ogni numero intero divisibile per tre è divisibile per nove B) Ogni numero intero divisibile per 4 è divisibile per due C) Se il prodotto di due numeri interi è divisibile per 5, ognuno dei due interi è divisibile per 5 D) Se la somma di due numeri interi è divisibile per 5, ognuno degli addendi è divisibile per 5.
7. (Invalsi 2004) Siano $m$ ed $n$ due numeri naturali diversi da zero. Se si scambia $m$ con $n$, quale delle seguenti espressioni modifica il proprio valore? A) $m + n$ B) $m \cdot n$ C) $m^n$ D) $m^0 - n^0$ [C]
8. (Invalsi 2006) Se si hanno 42 palline di diversi colori, sapendo che 1 pallina su 7 è rossa, quante sono quelle rosse? A) 35 B) 8 C) 7 D) 6 [D]
9. (Invalsi 2006) Sulla cima del monte Amiata il 5 Aprile del 2004, alle ore 6.00, è stata registrata una temperatura di 5 gradi sotto lo zero; alle ore 13.00 la temperatura era salita di 10 gradi, la misurazione delle ore 21.00 registrava una diminuzione di 12 gradi rispetto alle ore 13.00. quale delle seguenti espressioni esprime correttamente la temperatura alle ore 21.00? [A]
A) (–5) + (+10) + (–12) B) (–5) – (+10) + (–12) C) (–5) + (–10) – (–12) D) (–5) + (–10) – (+12)
10. (Invalsi 2006) Nell'insieme dei numeri naturali, quale delle seguenti espressioni corrisponde ad un quadrato perfetto? A) $3^2 \cdot 2^3 \cdot 5^2$ B) $3^2 \cdot 2^2 \cdot 5^3$ C) $3^2 \cdot 4^3 \cdot 5^2$ D) $3^3 \cdot 4^3 \cdot 5^2$ [C]
11. (Invalsi 2006) Dati due numeri naturali $a$ e $b$ diversi da zero, se $a$ è multiplo di $b$, quanto vale il loro minimo comune multiplo? A) $a \cdot b$ B) $a$ C) $b$ D) 1 [B]
12. (Invalsi 2006) $(-1/2)^{-4}$ = A) $(1/2)^{1/4}$ B) $(1/2)^4$ C) $(-1/2)^{1/4}$ D) $(-2)^4$ [D]
13. (Invalsi 2006) $\frac{2^{15} - 2^{14}}{2^{13}}$ = A) 1 B) 2 C) $1/2^{12}$ D) $1/2^{13}$ [B]
14. (Invalsi 2007) $a$, $b$ e $c$ sono tre numeri interi positivi tali che: $a$ è multiplo di $b$, e $c$ è multiplo di $a$. Quale delle seguenti terne soddisfa le condizione date? [D]
A) $a = 12$; $b = 6$; $c = 3$ B) $a = 12$; $b = 3$; $c = 6$ C) $a = 6$; $b = 6$; $c = 3$ D) $a = 6$; $b = 3$; $c = 12$
15. (Invalsi 2011) L'insegnante chiede: "*Se n è un numero naturale qualsiasi, cosa si ottiene addizionando i tre numeri* $2n + 1$, $2n + 3$ *e* $2n + 5$?" Mario afferma: "*Si ottiene sempre il triplo di uno dei tre numeri*". Luisa risponde: "*Si ottiene sempre un numero dispari*". Giovanni dice: "*Si ottiene sempre un multiplo di* 3". Chi ha ragione? [Tutti e tre]
16. (Invalsi 2011) In un torneo di calcio fra scuole una squadra guadagna 3 punti se vince, 1 punto se pareggia e nessun punto se perde. Una squadra ha vinto tante partite quante ne ha pareggiate. Quale dei seguenti punteggi non può aver totalizzato la squadra? A) 24 B) 28 C) 30 D) 32 [C]

## Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente quesito assegnato alle prove Invalsi del 2011, per la seconda Superiore.
*Considera l'affermazione: "Per ogni numero naturale n, $2^n + 1$ è un numero primo". Mostra con un esempio che l'affermazione è falsa.*
Basta considerare $n = 3$, dato che $2^3 + 1 = 8 + 1 = 9 = 3 \cdot 3$. In effetti questo è il primo numero naturale per cui la proprietà è falsa infatti abbiamo: $2^1 + 1 = 3$; $2^2 + 1 = 5$. La proprietà è vera ancora per $n = 4$: $2^4 + 1 = 17$, mentre è falsa per $n = 5$: $2^5 + 1 = 32 + 1 = 33$. Non sappiamo se vi sono infiniti numeri naturali per cui la proprietà è vera, mentre può dimostrarsi che vi sono infiniti numeri naturali per cui è falsa. Infatti può mostrarsi che se $n$ è un numero dispari, $2^n + 1$ è un numero multiplo di 3.

17. (Invalsi 2013) La stampante laser L in un minuto stampa il triplo delle pagine della stampante deskjet D. Quando L e D lavorano contemporaneamente stampano in tutto 24 pagine al minuto. Se D viene sostituita con una stampante laser identica a L, quante pagine potranno essere stampate complessivamente in un minuto? A) 24 B) 30 C) 36 D) 48 [C]
18. (Invalsi 2013) In un quartiere di una città, il calendario della raccolta differenziata (carta, vetro e plastica) prevede che la raccolta della carta avvenga ogni 28 giorni, quella del vetro ogni 21 giorni e quella della plastica ogni 14 giorni. Oggi sono state effettuate le raccolte di carta, vetro e plastica. La prossima volta in cui la raccolta di carta, vetro e plastica verrà fatta contemporaneamente sarà tra quanti giorni? [84]
19. (Invalsi 2013) Un gruppo di biologi, per stimare quante trote ci sono in un lago, ne pesca 200 e, dopo averle marcate, le rigetta nel lago. Dopo qualche giorno, utilizzando la stessa rete, vengono pescate 720 trote e solo 12 di esse sono marcate. In base a queste informazioni, quante trote possiamo pensare che ci siano all'incirca nel lago? A) 2000 B) 9000 C) 12000 D) 144000 [C]
20. (Invalsi 2014) Marco afferma che, per ogni numero naturale $n$ maggiore di 0, $n^2 + n + 1$ è un numero primo. Marco ha ragione? Giustifica la risposta. [No, per $n$ dispari maggiore di 1 sono tutti composti]
21. (Invalsi 2014) Se $k$ è un numero intero negativo, qual è il maggiore tra i seguenti numeri? [C]
A) $5 + k$ B) $5 \cdot k$ C) $5 - k$ D) $5^k$
22. (Invalsi 2017) Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni relative a numeri interi è vera (V) o falsa (F). A) Se $a + b$ è divisibile per 2, allora sia $a$ sia $b$ sono divisibili per 2 B) Se il prodotto di due numeri è divisibile per 6, allora almeno uno dei due fattori è divisibile per 6 C) Se $a$ è un multiplo di 3 e $b$ è un multiplo di 4, allora $a \cdot b$ è un multiplo di 6. [A) F; B) F; C) V]
23. Gianluca va a trovare un amico che abita in un paese che dista 40 *km* dal suo a una velocità media di 75 *km/h*. Al ritorno, a causa della nebbia, deve rallentare e la sua velocità media diventa 60 *km/h*. a) Qual è stata la velocità media del viaggio di andata e ritorno? b) Se il paese fosse stato distante 50 *km*, il risultato precedente sarebbe variato? Giustificare la risposta. [a) ≈ 66,7 *Km/h*; b) No]

**Quesiti sui numeri razionali**

## Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente quesito assegnato nelle prove Invalsi del 2011, per la seconda superiore.
*L'età della Terra è valutata intorno ai* $4{,}5 \times 10^9$ *anni. L'Homo Erectus è comparso circa* $10^6$ *anni fa. Qual è la stima che più si avvicina all'età che la Terra aveva quando è comparso l'Homo Erectus*? A) $4{,}5 \times 10^9$ *anni* B) $3{,}5 \times 10^9$ *anni* C) $4{,}5 \times 10^6$ *anni* D) $4{,}5 \times 10^3$ *anni*
La terra aveva un'età di circa $4{,}5 \times 10^9 - 10^6$ anni, che è circa $4{,}5 \times 10^9$, infatti togliere da un numero dell'ordine dei miliardi, un numero che è dell'ordine dei milioni è come togliere un chilo da una tonnellata, cioè non ci si accorge neanche. Pertanto la risposta corretta à la A)

24. (Invalsi 2003) $0{,}2 \times 0{,}2 \times 0{,}2 =$ A) 0,8 B) 0,6 C) 0,06 D) 0,08 E. 0,008 [E]
25. (Invalsi 2003) Qual è la millesima parte di $10^{15}$? A) $10^5$ B) $10^{12}$ C) $10^{\frac{15}{1000}}$ D) $\left(\frac{1}{100}\right)^{15}$ E) $10^{18}$ [B]
26. (Invalsi 2004) Quale dei seguenti numeri NON è compreso tra 2 e 3? [C]
A) 15/7 B) 63/27 C) 39/12 D) 7/3
27. (Invalsi 2004) Il quoziente di 11 diviso 4 è 2 con resto 3. Quale delle seguenti espressioni è corretta?
A) $11/4 = 2 \cdot ¾$ B) $11/4 = 2 + ¾$ C) $11/4 = 2 + 3$ D) $11/4 = 2/3$ [B]

28. (Invalsi 2004) Quanti numeri razionali sono compresi tra 2,4 e 2,85? [A]
A) Infiniti B) Quattro C) Quarantacinque D) Ottantuno

29. (Invalsi 2004) Un numero decimale è composto da 5 cifre e gode delle seguenti proprietà: la cifra dei centesimi è 2; la cifra delle decine è uguale alla cifra dei centesimi aumentata di 7; la cifra delle unità è il doppio della cifra dei decimi; la cifra dei decimi è uguale alla cifra delle decine diminuita di 6; la cifra delle centinaia è uguale alla cifra delle unità. Qual è il numero? [D]
A) 292,32 B) 292,12 C) 484,82 D) 696,32

30. (Invalsi 2005) Sostituendo ad $a$ il numero 0,000375 e a $b$ il numero 3,75, quale delle seguenti relazioni è vera? A) $10^3 \cdot a = b$ B) $a = b \cdot 10^4$ C) $b = a \cdot 10^{-4}$ D) $a = b \cdot 10^{-4}$ [D]

31. (Invalsi 2005) Se al numero 0,999 si aggiunge 1 centesimo, che cosa si ottiene? [B]
A) 1 B) 1,009 C) 1,99 D) 1,999

32. (Invalsi 2006) $(5^9 : 5^4) : 5^3 + 5^2 =$ A) 1 B) $5^4$ C) $10^2$ D) 50 [D]

33. (Invalsi 2006) Quale tra le seguenti espressioni ha lo stesso valore di $8{,}35 \times 10^4$?
A) $83{,}5 \times 10^2$ B) $8{,}035 \times 10^5$ C) $0{,}835 \times 10^5$ D) $0{,}835 \times 10^3$ [C]

34. (Invalsi 2007) Luca ha 9 anni, esattamente i 3/14 dell'età di suo padre. Quanti anni ha il padre di Luca? A) 42 B) 33 C) 26 D) 23 [A]

35. (Invalsi 2011) La dimensione di un televisore è la misura della diagonale dello schermo espressa in pollici (1 pollice = 2,54 cm). Nei televisori di nuova generazione il rapporto tra la larghezza e l'altezza dello schermo è 16:9. a) Se la larghezza dello schermo di uno di questi televisori è circa 57,5 *cm*, qual è all'incirca la sua altezza? b) Da quanti pollici è il televisore? A) 20 (= 50,80 *cm*) B) 26 (= 66,04 *cm*) C) 28 (= 71,12 *cm*) D) 32 (= 81,28 *cm*) [a) 32,3 *cm*; b) B]

36. (Invalsi 2011) Qual è la metà di $\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$? A) $\left(\frac{1}{4}\right)^{50}$ B) $\left(\frac{1}{2}\right)^{25}$ C) $\left(\frac{1}{2}\right)^{51}$ D) $\left(\frac{1}{2}\right)^{49}$ [D]

37. (Invalsi 2011) L'espressione $\frac{9}{10}+\frac{8}{10^2}+\frac{7}{10^4}+\frac{2}{10^5}$ si può rappresentare mediante il numero decimale
A) 98,72 B) 9,8072 C) 0,9872 D) 0,98072 [D]

38. (Invalsi 2011) Si sa che $2^{10} = 1024$. Quale fra le seguenti potenze del 10 è quella che più si avvicina a $2^{70}$? A) $10^{24}$ B) $10^{21}$ C) $10^{14}$ D) $10^7$ [B]

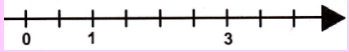
39. (Invalsi 2012) Giovanni afferma che $\left(\frac{3}{40}\right)^{80}$ è maggiore di $\left(\frac{3}{40}\right)^{81}$. Ha ragione? [C]
A) Giovanni ha ragione perché quando si eleva a potenza una qualsiasi frazione il risultato diminuisce all'aumentare dell'esponente; B) Giovanni non ha ragione perché l'esponente della seconda frazione è maggiore dell'esponente della prima; C) Giovanni ha ragione perché moltiplicando $\left(\frac{3}{40}\right)^{80}$ per $\frac{3}{40}$, che è minore di 1, si ottiene un numero minore di $\left(\frac{3}{40}\right)^{80}$; D) Giovanni non ha ragione perché calcolando $\left(\frac{3}{40}\right)^{81}$ si ottiene una frazione con un numeratore maggiore di quello di $\left(\frac{3}{40}\right)^{80}$.

40. (Invalsi 2012) Un turista italiano in viaggio in Svizzera, prima di cambiare i suoi euro in franchi, esamina le seguenti proposte fatte da due banche: Banca A: 1 euro viene scambiato con 1,412 franchi senza spese. Banca B: 1 euro viene scambiato con 1,416 franchi con una commissione fissa di 2 franchi. a) Se il turista cambia 300 euro, quanti franchi ottiene presso la banca A? b) Carlo afferma che, qualunque sia la somma che si vuole cambiare, è sempre più conveniente la banca A. Ha ragione?
[a) 423,60; b) No fino a 500 euro, poi conviene B]

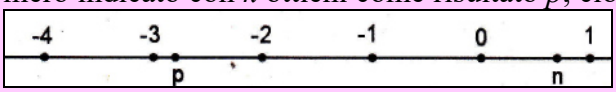
41. (Invalsi 2013) Un atomo di idrogeno contiene un protone la cui massa $m_p$ è $2 \cdot 10^{-27}$ *kg*, all'incirca, e un elettrone la cui massa *me* è all'incirca $9 \cdot 10^{-31}$ kg. Quale tra i seguenti valori approssima meglio la massa totale dell'atomo di idrogeno (cioè $m_p + m_e$)? [A]
A) $2 \cdot 10^{-27}$ *kg* B) $11 \cdot 10^{-31}$ *kg* C) $11 \cdot 10^{-58}$ *kg* D) $18 \cdot 10^{-58}$ *kg*

42. (Invalsi 2013) Quale tra le seguenti sequenze di numeri è ordinata in modo crescente? A) $-10^4$, $-4 \cdot 10^{-4}$, $10^{-4}$, $1/10^{-4}$; B) $-4 \cdot 10^{-4}$, $-10^4$, $1/10^{-4}$, $10^{-4}$; C) $-10^4$, $10^{-4}$, $1/10^{-4}$, $-4 \cdot 10^{-4}$; D) $-4 \cdot 10^{-4}$, $-10^4$, $10^{-4}$, $1/10^{-4}$
[A]

43. (Invalsi 2014) Il risultato di $16^{100} : 2$ è uguale a A) $8^{99}$ B) $8^{100}$ C) $16^{50}$ D) $2^{399}$. [D]

44. (Invalsi 2017) Posiziona sulla retta 

i seguenti numeri: 4; 2,5; 3/2; 5/10 [5/10; 3/2; 2,5; 4]

45. (Invalsi 2017) Sulla seguente retta orientata sono riportati alcuni numeri. Se moltiplichi $n$ per un numero indicato con $k$ ottieni come risultato $p$, cioè $n \cdot k = p$. Quale tra i seguenti può essere il valore di $k$?


A) 1/4 B) –1/4 C) –4 D) 4

46. (Invalsi 2017) Calcola l'espressione $\dfrac{1-\frac{1}{7}}{1+\frac{1}{7}}$ e scrivi il risultato sotto forma di un'unica frazione. $\left[\frac{3}{4}\right]$

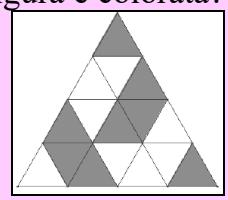
**Quesiti sulle percentuali**

## Lavoriamo insieme

Il seguente quesito è stato assegnato nelle prove Invalsi del 2012.
*Nelle ultime elezioni svoltesi in un paese europeo è andato a votare il* 70% *degli aventi diritto al voto. Di questi il* 20% ha *votato per il partito A. Quale percentuale di aventi diritto al voto ha votato per il partito A*?
A) 60% B) 50% C) 20% D) 14%
Per il partito A non ha votato il 20% dei votanti, bensì il 20% di quelli che hanno votato, cioè il 20% del 70%, che è il 14%. Infatti supposto che gli aventi diritto fossero stati 100, 70 di questi hanno votato e il 20% di 70 è 70 · 0,2 = 14, che è appunto il 14% degli aventi diritto. Pertanto la risposta corretta è D.

47. (Invalsi 2003) Marco ha acquistato un libro con lo sconto del 25% e lo ha pagato 24 euro. Qual è il prezzo di copertina del libro, in euro? A) 6 B) 30 C) 32 D) 34 E. 36 [C]

48. (Invalsi 2004) Un paio di scarpe costa 75 €. Se il negoziante decide di applicare uno sconto del 20%, a quale prezzo verranno vendute? A) 50 € B) 55 € C) 60 € D) 65 € [C]

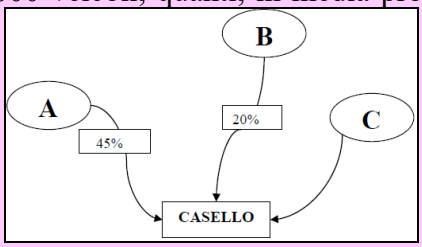
49. (Invalsi 2005) Quale percentuale della figura è colorata? A) 80% B) 50% C) 45% D) 40% [B]


50. (Invalsi 2006) A Borgolieto il costo della vita è aumentato in un anno dello 0,7%, e prezzi al consumo sono stati adeguati a tale aumento. Se un anno fa una famiglia spendeva 200€ in bollette varie, quanto spende adesso? A) 200,7 € B) 201,14 € C) 207 € D) 214 € [B]

51. Invalsi 2006) Le alunne della I A sono in tutto 10 e costituiscono il 40% della classe. Quanti sono gli alunni in totale (maschi e femmine) in I A? A) 15 B) 22 C) 25 D) 30 [C]

52. (Invalsi 2006) Un'automobile ha un prezzo di listino di 10000 euro. il concessionario offre uno sconto del 20%; inoltre un cliente può risparmiare un ulteriore 5% su tale prezzo scontato se paga in contanti. Quanto è lo sconto complessivo fatto a un cliente che paga in contanti? [A]
A) 24% B) 25% C) 26% D) 30%

53. (Invalsi 2006) Quale relazione esiste tra $x$ e $y$, se si afferma che $x$ è il 30% di $y$? Proporzionalità
A) diretta B) inversa C) quadratica D) cubica [A]

54. (Invalsi 2007) In figura è rappresentato il flusso verso un casello autostradale dei veicoli provenienti dalle località A, B, C, con le relative percentuali medie, riferite ad un qualsiasi giorno feriale. Se ogni giorno feriale arrivano al casello 2000 veicoli, quanti, in media provengono da C? A) 900 B) 700


C) 400 D) 350 [B]

55. (Invalsi 2007) Matteo vuole comperare un CD del suo cantante preferito. Il costo del CD è di € 26,50. Quanto spende Matteo se ottiene uno sconto del 10%? A) €2,65 B) €16,50 C) €23,85 D) €26,40 [C]

56. (Invalsi 2011) Per l'acquisto di un computer sono stati spesi 300 euro. Il prezzo è composto dal costo base più l'IVA, pari al 20% del costo base. Quanto è stato pagato di IVA? [50 euro]

57. (Invalsi 2012) Luigi e Paolo investono la stessa somma di denaro. Dopo il primo anno, la somma investita da Luigi è aumentata del 10% e quella investita da Paolo è diminuita del 5%. Luigi e Paolo decidono di reinvestire per un altro anno ancora le somme ottenute dopo il primo anno. Nel secondo anno Luigi perde il 5%, mentre Paolo guadagna il 10%. Se Luigi e Paolo hanno investito inizialmente una somma di 1000 euro ciascuno, quanto avrà ciascuno dei due alla fine del secondo anno? Scrivi i calcoli che fai per trovare la risposta e infine riporta i risultati. [Luigi 1045; Paolo 1094,50]

58. (Invalsi 2012) La seguente tabella riporta il numero di occupati, in migliaia, in Italia in ciascuno degli anni dal 1995 al 2005.

| Anni | Occupati (in migliaia) |
|---|---|
| 1995 | 20240 |
| 1996 | 20326 |
| 1997 | 20384 |
| 1998 | 20591 |
| 1999 | 20847 |
| 2000 | 21210 |
| 2001 | 21604 |
| 2002 | 21913 |
| 2003 | 22241 |
| 2004 | 22404 |
| 2005 | 22563 |

a) Quale tra le seguenti espressioni dà come risultato l'aumento percentuale del numero di occupati nel 2001 rispetto al numero di occupati nel 2000? A) 21604/21210 × 100 B) 394/21210 × 100 C) 21210/21604 × 100 D) 394/21604 × 100 Di quanto sono aumentati gli occupati dal 1995 al 2005? c) Qual è stato l'aumento medio annuo del numero di occupati nei dieci anni dal 1995 al 2005?
[a) B; b) 2323 migliaia; c) 21302 migliaia]

59. (Invalsi 2012) La tabella seguente riporta alcune informazioni nutrizionali stampate su tre confezioni di cereali per la prima colazione:

| | Confezione 1 | Confezione 2 | Confezione 3 |
|---|---|---|---|
| grammi di cereali | 100 | 200 | 70 |
| percentuale di zucchero | 20% | 10% | 20% |

Sulla base dei dati in tabella, indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa.
a) La quantità di zucchero contenuta nella confezione 2 è uguale alla quantità di zucchero contenuta nella confezione 3. b) La quantità di zucchero contenuta nella confezione 1 è maggiore della quantità di zucchero contenuta nella confezione 2. c) La quantità di zucchero contenuta nella confezione 1 è maggiore della quantità di zucchero contenuta nella confezione 3. [a) F; b) F; c) V]

60. (Invalsi 2012) In un negozio un abito è messo in vendita con uno sconto del 30% sul prezzo originario. Durante la stagione dei saldi il prezzo già scontato viene ancora abbassato del 10%. Qual è la percentuale complessiva di sconto sul prezzo originario dell'abito? A) 20% B) 33% C) 37% D) 40% [C]

61. (Invalsi 2013) Considera un quadrato di lato $a$. Se si aumenta il lato $a$ del 20%, si ottiene un nuovo quadrato di lato $b$. a) Quale delle seguenti espressioni rappresenta la misura di $b$? A) $20\,a$ B) $1{,}20\,a$ C) $a + 20$ D) $a + 0{,}20$ b) Di quanto aumenta in percentuale l'area del quadrato di lato $b$ rispetto all'area del quadrato di lato $a$? A) Del 20% B) Del 40% C) Del 44% D) Del 120%
[a) B; b) C]

62. (Invalsi 2013) L'ISTAT, nelle "Previsioni della popolazione italiana per l'Anno 2020", prevede che in quell'anno i quindicenni italiani saranno circa 592000, cioè lo 0,95% della popolazione italiana del 2020. Calcola qual è, secondo l'ISTAT, il numero stimato di italiani nel 2020. Esprimi il risultato con un numero intero. [62315789]

63. (Invalsi 2013) La seguente tabella riporta il numero di vittime per incidenti stradali dal 2001 al 2007 in una regione italiana.

| Anno | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Numero di vittime | 792 | 776 | 700 | 681 | 635 | 539 | 531 |

(Fonte: Eurostat, Regional Transport Statistics)

a) In quale dei seguenti periodi si è avuta la diminuzione più consistente del numero di vittime per incidenti stradali? A) tra il 2001 e il 2002 B) tra il 2002 e il 2003 C) tra il 2003 e il 2004 D) tra il 2004 e il 2005. b) Di quale percentuale è diminuito il numero di vittime per incidenti stradali dal 2001 al 2007? Scrivi i calcoli che fai per trovare la risposta e infine riporta il risultato. [a) B; b) 33%]

64. (Invalsi 2013) Marco vuole acquistare un nuovo motorino e un amico gli offre 400 euro per il vecchio. Due rivenditori gli fanno le seguenti offerte per lo stesso modello di motorino: Offerta A: prezzo di 2500 euro e il 10% di sconto se consegna al rivenditore il vecchio motorino. Offerta B: prezzo di 2950 euro, sul quale è praticato uno sconto del 20%. Che cosa conviene fare a Marco?

[Accettare l'offerta B e vendere il vecchio motorino all'amico]

65. (Invalsi 2014) A una corsa campestre partecipa il 60% degli alunni di una scuola. Dopo i primi 3 km il 30% degli alunni partecipanti si ritira e, dopo altri 5 km, si ritira il 40% dei restanti. Tutti gli altri arrivano al traguardo. Se gli alunni della scuola sono 1000, quanti arrivano al traguardo? Scrivi i calcoli che hai fatto per trovare la risposta e poi riporta il risultato. [420]

66. (Invalsi 2015) Nella seguente tabella, $d$ rappresenta la distanza in metri fra l'abitazione e la scuola di ciascuno degli alunni di una classe.

| Distanza in metri dalla scuola | $100 \le d < 500$ | $500 \le d < 1000$ | $1000 \le d < 1500$ | $1500 \le d < 2000$ | $2000 \le d < 2500$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Numero di alunni | 2 | 8 | 5 | 7 | 3 |

a) Quanti sono gli alunni che abitano a meno di 1 *km* dalla scuola? b) Qual e la percentuale di alunni che abitano a meno di 1,5 *km* dalla scuola? A) 15% B) 20% C) 40% D) 60% [a) 10; b) D]

67. (Invalsi 2015) Su un vasetto di yogurt alla vaniglia da 125 g, sono indicati gli ingredienti. In particolare, si legge: "preparazione dolciaria alla vaniglia: 11%. a) Quanti grammi di preparazione dolciaria alla vaniglia sono presenti, all'incirca, nel vasetto? A) 13,8 B) 1,3 C) 11,0 D) 11,4. b) Sulla confezione dello yogurt e riportata anche la seguente tabella dei valori medi nutrizionali, per ogni 100 g di yogurt alla vaniglia. Quanti grammi di carboidrati, all'incirca, sono presenti in un vasetto di yogurt alla vaniglia da 125 g? A) 20,4 B) 13,0 C) 16,3 D) 7,7 [A; A]

| | |
|---|---|
| Proteine | 2,8 g |
| Carboidrati | 16,3 g |
| Grassi | 3,2 g |

68. (Invalsi 2017) Ai soci di un supermercato un detersivo è venduto, con lo sconto del 20%, al prezzo di l,40 €. Quanto costa quel detersivo ai clienti che non sono soci del supermercato e che pertanto non hanno diritto allo sconto? A) 1,12 € B) 2,80 € C) 1,68 € D) 1,75 € [D]

69. (Invalsi 2019) In un'industria una macchina A produce in un minuto il triplo di cialde di caffè rispetto a una macchina B. Quando le macchine A e B lavorano contemporaneamente producono in tutto 40 cialde al minuto. Se la macchina B viene sostituita con una macchina identica ad A, quante cialde potranno essere prodotte complessivamente in un minuto? A) 50 B) 60 C) 40 D) 80 [B]

## Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica
A = Abacus gara on line gestita dalla Grace Church School
B = Giochi organizzati dall'Università Bocconi
AHSME = Annual High School Mathematics Examination
MT = Mathematics Teacher, rivista della NCTM
OMI = Olimpiadi della Matematica italiane

### Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente quesito assegnato all' AHSME 1975.

*Determinare la somma delle cifre del numero* $\left(10^{408}+1\right)^2$.

Sviluppiamo: $\left(10^{408}+1\right)^2 = (10^{408}+1)\cdot(10^{408}+1) = 10^{816}+10^{408}+10^{408}+1 = 10^{816}+2\cdot 10^{408}+1$.

Adesso chiediamoci che tipo di numero è il risultato. $10^{816}$ è formato da 1 e 816 zeri, allo stesso modo $2\cdot 10^{408}$ è formato da 2 seguito da 408 zeri. Quando sommiamo questi due numeri avremo ancora un numero con 817 cifre, che sono 1 (la prima), 2 (quella di posto 409 dalla fine) e poi tutti zeri. Sommando 1 a questo numero otterremo $1\underbrace{0\ldots0}_{407}2\underbrace{0\ldots0}_{407}1$, la somma delle cifre è 1 + 2 + 1 = 4.

1. (AHSME 1951) Quanti interi positivi minori di 50 hanno un numero dispari di divisori? [7]
2. (AHSME 1951) Formiamo un numero di sei cifre ripetendo un numero di tre cifre, per esempio 256256 oppure 678678. Qual è il più grande numero per cui ogni numero di questa forma è divisibile? [1001]
3. (AHSME 1967) La somma $2a3 + 326$, fornisce il numero $5b9$, che è divisibile per 9. Quant'è $a + b$? [6]
4. (AHSME 1978) Quattro ragazzi comprano una barca per 60 euro. Il primo paga metà della somma pagata dagli altri ragazzi, il secondo paga un terzo della somma pagata dagli altri e il terzo paga un quarto della somma pagata dagli altri. Quanto paga il quarto ragazzo? [€ 13,00]
5. (AHSME 1979) Trovare la somma delle cifre del più grande numero pari di tre cifre che non cambia se scambiamo fra loro le cifre delle unità e delle centinaia. [25]
6. (AHSME 1995) Un campo rettangolare è largo 300 piedi e lungo 400 piedi. Mediamente si trovano tre formiche per ogni pollice quadrato [12 pollici = 1 piede]. Fra i seguenti numeri quale approssima meglio il numero di formiche in tutto il campo? [C]
   A) $5\cdot 10^5$ B) $5\cdot 10^6$ C) $5\cdot 10^7$ D) $5\cdot 10^8$ E) $5\cdot 10^9$

### Lavoriamo insieme

Consideriamo un quesito assegnato alla semifinale italiana dei giochi della Bocconi del 1996.
*Scrivo il numero* 1996 *su un foglio bianco. Essendo pari lo divido per* 2 *ottenendo, con calcoli mentali o con l´aiuto della calcolatrice*, 998, *che scrivo sul foglio. Continuo allora con queste regole*: a) *se l´ultimo numero scritto è pari, lo divido per* 2 *e scrivo il risultato*; b) *se il numero è dispari, gli aggiungo* 1 *e scrivo il risultato ottenuto. Dopo un po' di passaggi, ottengo il numero* 2 *che scrivo sul foglio. Quanti numeri sono stati scritti sul foglio*?
Vediamo la successione di operazioni: 1996 → 998 → 499 → 500 → 250 → 125 →126 → 63 → 64 → 32 → 16 → 8 → 4 → 2. Quindi abbiamo scritto un totale di 14 numeri.

7. (B 1996) L´ultimo CD dei Math–Singer costa un numero intero di franchi. Pur non avendo il portafoglio vuoto, Matteo non può acquistarlo poiché gli mancano 47 franchi. Anche Matilde non può comprarlo in quanto le mancano 2 franchi per pagarlo. Matilde e Matteo decidono allora di mettere in comune i loro franchi, ma anche in questo caso non hanno sufficienti franchi per comprarlo. Quanti franchi costa il CD dei Math–Singer? [48 franchi]
8. (B 1996) Sul bordo di uno stagno circolare sono piantati 5 magnifici salici sui cui rami si trovano dei passeri il cui numero totale è inferiore a 30. Ad un certo momento, un passero è passato dal primo al secondo salice. Due passeri sono in seguito passati dal secondo al terzo salice, poi tre dal terzo al quarto, quattro dal quarto al quinto ed infine cinque passeri si sono spostati dal quinto salice al primo. Dopo questi trasferimenti, vi era lo stesso numero di passeri su ciascuno dei cinque salici. Quanti sono i passeri posati su ciascuno dei cinque salici prima di tutti i trasferimenti? [1, 6, 6, 6, 6]

9. (B 1996) Nella lista dei numeri seguenti: {6, 7, 29, 4, 13, 5, 2, 8, 9} eliminate due numeri la cui somma è 12 e la cui differenza vale 2. Poi, eliminate due numeri la cui somma vale 12 e il cui prodotto vale 32. In seguito, eliminate due numeri la cui differenza vale 7 e il cui prodotto vale 78. Infine, eliminate due numeri tali che, quando si divide l´uno per l´altro, il quoziente vale 3 ed il resto 2. Quale numero rimane? [2]
10. (B 1996) Tom si diverte con la sua enciclopedia dei giochi matematici. Questo libro è composto di 4 pagine di copertina non numerate e 256 pagine numerate nell´ordine da 1 a 256. Le pagine a sinistra portano un numero pari mentre quelle a destra hanno un numero dispari. Tom ha aperto a caso una pagina dell´enciclopedia. Calcola la somma delle sei cifre dei numeri di pagina che ha davanti. Questa somma è la più grande possibile. Qual è il numero della pagina a sinistra? [198]
11. (B 1996) Le 3 coppie Angelo e Chiara, Enrico e Simonetta, Guido e Marina totalizzano in sei 137 anni. Enrico e sua moglie hanno 47 anni in due; Chiara è la più anziana delle tre signore ed ha 4 anni in più della più giovane, mentre ogni marito ha 5 anni più della rispettiva moglie. Qual è l´età dei tre mariti? [27, 26, 23]

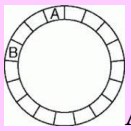
## Lavoriamo insieme

Consideriamo un quesito proposto all'Università di Stanford negli Stati Uniti, dove si sono tenuti per molti anni delle famose gare matematiche.
*Due amiche A e B si incontrano dopo tanto tempo. A chiede a B se ha figli e quanti anni hanno ciascuno di essi. B risponde dicendo che ha tre figli, i numeri che esprimono le loro età moltiplicati fra loro hanno un prodotto di* 36 *e la somma di tali numeri corrisponde al numero civico della porta davanti la quale sono ferme a parlare. A dice che, pur essendo brava in matematica, non riesce a determinare le tre età, allora B aggiunge dicendo che il maggiore dei suoi figli ha gli occhi azzurri*.
Quest'ultima affermazione sembrerebbe priva di senso, vedremo invece che è effettivamente importantissima. Infatti la prima informazione ci dice che i figli possono avere una delle seguenti tre terne di età: (1, 1, 36), (1, 2, 18), (1, 2, 12), (1, 4, 9), (2, 2, 9), (1, 6, 6), (2, 3, 6), (3, 3, 4). Dato che esse sono le uniche terne il cui prodotto fornisce 36. Se le sommiamo otteniamo sempre risultati diversi, tranne nei casi: 2 + 2 + 9 = 1 + 6 + 6 = 13. Dato che A ha detto di non riuscire a determinare le età dei tre ragazzi esse devono essere ferme davanti ad una abitazione posta al numero 13. La terza informazione svela l'inghippo, dato che la mamma parla di un maggiore, i due gemelli che vi sono fra i tre figli non possono comprendere il primogenito, come accadrebbe nel caso (1, 6, 6). Quindi i bambini hanno 9, 2 e 2 anni.

12. (A 1998) Trova il più piccolo numero intero che non contiene la cifra 9, ma è divisibile per 999. [111888]
13. (A 1998) Scriviamo il seguente numero decimale infinito: 0,14916253649… in cui scriviamo i quadrati perfetti uno accanto all'altro. Quale sarà la centesima cifra dopo la virgola? [9]
14. (A 1998) Scriviamo 1, 9, 9, 8 e continuiamo scrivendo la cifra delle unità della somma delle 4 cifre precedenti. Così il quinto numero sarà 7 perché 1 + 9 + 9 + 8 = 27; il sesto numero sarà 3 perché 9 + 9 + 8 + 7 = 33, e così via. Possiamo ottenere la sequenza 1, 2, 3, 4? [No]
15. (A 1998) "*Quante persone abitano in questa casa*?" chiese un poliziotto. "*Tre*", fu la risposta. "*Quanti anni hanno*?", "*Il prodotto delle loro età è* 225, *e la somma è uguale al numero civico di questa casa*". Il poliziotto guardò e disse: "*Sei il più vecchio dei tre*?", "*Si*", fu la risposta. "*Mi basta*!", disse il poliziotto. Quanti anni hanno gli abitanti della casa? [3, 3, 25]
16. (B 1999) Messer Tobia, che non è mai stato una spia, possiede un terreno rettangolare "quasi" quadrato: la sua lunghezza e la sua larghezza, che sono numeri interi espressi in metri, differiscono esattamente di 1 metro. L´area del terreno di Tobia, espresso in metri quadrati, è un numero di 4 cifre: la cifra delle migliaia e quella delle centinaia sono uguali; lo stesso dicasi per la cifra delle decine e quella delle unità. Qual è la larghezza del terreno di Tobia? Nota: il problema ammette tre soluzioni. [1122, 4422, 9900]
17. (B 1999) La Signora e il Signor Settimi hanno 7 figli nati tutti, stranamente, il 7 luglio. Ogni anno, per il loro compleanno la signora Settimi offre ad ogni figlio una torta con tante candeline quanti sono i suoi anni. Giovanni Settimi, il più giovane, si ricorda che 5 anni fa le candeline erano, in totale, la metà di quelle di quest´anno. Quante candeline saranno accese quest´anno? [70]
18. (B 2000) In un dado "normale", la somma dei punti su due facce opposte è sempre uguale a 7. Enrico ha messo su un tavolo tre dadi "normali", uno sopra l´altro a formare una torre. Sulla faccia superiore

del dado in cima alla torre c´è un 4. Quanto vale la somma dei punti nelle cinque facce nascoste (comprese tra due dadi o il tavolo)? [17]

19. (B 2000) I miei quattro cugini arrivano a casa nostra domenica mattina all´ora della colazione e si fermano per dodici giorni di vacanza. Sono molto golosi, come noi del resto! Per fortuna la mamma, previdente, ha comperato 168 barrette di cioccolato in modo che ognuno possa, durante i dodici giorni, mangiarne una a colazione e una a merenda. Purtroppo, alla sera del nono giorno, i nostri cugini devono interrompere il loro soggiorno e rientrare a casa. Noi continuiamo, malgrado la loro assenza, a gustarci le barrette di cioccolato con la stessa frequenza. In quale giorno della settimana mangeremo l´ultima barretta? [Lunedì]

20. (B 2002) Nella pista in figura si muovono 2 pulci. 

Ad ogni secondo, la pulce A si sposta di 3 caselle in senso orario mentre la pulce B si sposta di 2 caselle in senso contrario. Dopo quanti secondi le due pulci si poseranno per la prima volta contemporaneamente sulla stessa casella? [13]

21. (A 2002) Un numero intero ha esattamente 8 divisori, fra i quali ci sono 35 e 77. Trovare il numero. [385]

## Lavoriamo insieme

Vediamo un quesito assegnato ai Giochi Bocconi del 2003.
*Cinque amici (Alberto, Carlo, Davide, Edoardo, Filip) sono andati insieme a pescare. Alberto e Carlo, messi insieme, hanno preso* 14 *pesci; Carlo e Davide, insieme, ne hanno presi* 20; *Davide ed Edoardo, insieme*, 18; *Edoardo e Filip*, 12; *infine, Alberto e Filip ne hanno presi* 16. *Quanti pesci hanno preso, complessivamente, i cinque amici*?
Se sommiamo i sei numeri otteniamo il doppio dei pesci presi, quindi il numero richiesto è

$$(14 + 20 + 18 + 12 + 16) / 2 = 80 / 2 = 40$$

22. (A 2003) Un insegnante scrive un numero sulla lavagna. Uno studente dice: "*Il numero è divisibile per* 31". Un altro dice: "*Il numero è divisibile per* 30". Ancora un altro "*Il numero è divisibile per* 29". E così via, ognuno dicendo la stessa frase con un numero in meno del precedente, finché il trentesimo studente dice: "*Il numero è divisibile per* 2". Alla fine l'insegnante dice che solo 2 delle 30 affermazioni sono sbagliate e sono state dette una dopo l'altra. Quali sono?
["*Il numero è divisibile per* 16" e "*Il numero è divisibile per* 17"]

23. (B 2003) Ad un concorso di Matematica le ragazze erano il doppio dei maschi. Ognuno dei partecipanti ha ottenuto 8, 9 o 10 punti e tutti insieme hanno totalizzato 156 punti. Quanti ragazzi (maschi) hanno partecipato al concorso? [6]

24. (OMI 2003) Quante cifre ha il più grande numero primo palindromo con un numero pari di cifre? (Nota: un numero si dice palindromo se può essere letto indifferentemente da sinistra a destra o da destra a sinistra. Per esempio, 141 e 2552 sono palindromi, mentre 1231 no). [2: Il numero 11]

25. (B 2003) Leone è velocissimo nei calcoli e chiede a Paolo: "*Qual è l'ultima cifra di* $2003^{2003}$?" Aiuta Paolo. [7]

26. (OMI 2005) Quanti sono i numeri interi maggiori o uguali a 1 e minori o uguali a 100 che sono uguali al quadrato del numero dei propri divisori positivi? (Attenzione: tra i divisori di un numero vi sono anche 1 ed il numero stesso). [Solo il numero 9]

## Lavoriamo insieme

Consideriamo un quesito assegnato alle Olimpiadi della matematica del 2006.
*Laura sta leggendo un libro e nota che il numero della pagina a cui è arrivata è divisibile per* 3, 4 *e* 5. *Qual è la cifra delle unità del numero della pagina successiva*?
Un numero divisibile per 4 e per 5 è divisibile per 20, quindi anche per 10, cioè ha cifra delle unità uguale a zero. Perciò la cifra delle unità del numero successivo è 1.

27. (B 2007) Una scatola contiene delle caramelle gialle (al limone) e delle caramelle verdi (alla menta). Se aggiungessimo una caramella gialla, le caramelle gialle rappresenterebbero un quarto del contenuto della scatola mentre, se ne togliessimo una, sarebbero solo il quinto del contenuto della scatola. Quan-

te caramelle verdi contiene la scatola? [24]

28. (OMI 2007) Allo stadio gli spettatori entrano attraverso cinque cancelli, posti uno di fianco all'altro, secondo questa regola: viene fatta entrare una persona dal primo cancello, poi due persone dal secondo cancello, poi tre persone dal terzo, poi quattro persone dal quarto e infine cinque persone dal quinto. Poi si ricomincia procedendo allo stesso modo e si va avanti finché non sono entrati tutti. Sapendo che Raffaele sarà la 2007–esima persona ad entrare, da quale cancello entrerà? [Quinto]
29. (OMI 2007) Sul pianeta Uru le settimane durano 8 giorni, i mesi (tutti indistintamente) durano 34 giorni e in un anno ci sono 14 mesi. Quando il primo giorno dell'anno cade di domenica (ultimo giorno della settimana) si celebra la Festa del Pianeta. Sapendo che oggi su Uru è la Festa del Pianeta, tra quanti giorni sarà la prossima? [952]
30. (B 2008) Matteo e Rossella sono entrambi golosi e si contendono i cioccolatini che hanno. Matteo conta i suoi. "*Se ne avessi il triplo, ne avrei più di* 31 – dice a Rossella – *ma, se ne avessi il doppio, ne avrei meno di* 31!". Prende allora un cioccolatino di Rossella e confessa: "*anche adesso, se ne avessi il doppio, ne avrei sempre meno di* 31!". A questo punto, è Rossella a prendere 4 cioccolatini a Matteo – le piacciono troppo! – dicendogli poi: "*non ti lamentare! Anche adesso, se tu avessi il triplo dei cioccolatini che hai, ne avresti più di* 31!" Quanti cioccolatini aveva Matteo prima di questa accanita discussione? [14]
31. (B 2008) Jacob, in vacanza al mare, si dedica al suo hobby preferito: la pesca. Il primo giorno pesca 1 pesce; il secondo giorno, 2 pesci; il terzo giorno, 3 pesci. Nei giorni successivi pesca 4 pesci al giorno fino al terzultimo giorno della sua vacanza, quando Jacob pesca soltanto 3 pesci. Il penultimo giorno, 2; l'ultimo giorno, solo 1. Durante l'intera vacanza, Jacob ha pescato in tutto 52 pesci. Quanti giorni è durata la vacanza al mare di Jacob? [16]

## Lavoriamo insieme

Vediamo un quesito assegnato ai giochi della Bocconi del 2008.
*Una calcolatrice ha solo due tasti: il tasto* "–1" (*meno* 1) *e il tasto* ":3" (*diviso* 3). *Al momento dell'accensione, sullo schermo compare il numero* 2008. *Quante volte bisogna premere complessivamente, al minimo, i tasti* "–1" *e* ":3" *per poter leggere il risultato* "1" *sullo schermo*? Poiché le divisioni devono risultare esatte, possiamo eseguirle solo se il dividendo è un multiplo di 3. Quindi l'unica sequenza possibile è la seguente:

$$2008 \xrightarrow{-1} 2007 \xrightarrow{:3} 669 \xrightarrow{:3} 223 \xrightarrow{-1} 222 \xrightarrow{:3} 74 \xrightarrow{-1} 73 \xrightarrow{-1} 72 \xrightarrow{:3}$$
$$\xrightarrow{:3} 24 \xrightarrow{:3} 8 \xrightarrow{-1} 7 \xrightarrow{-1} 6 \xrightarrow{:3} 2 \xrightarrow{-1} 1$$

Quindi in totale 13 volte.

32. (OMI 2008) Pietro e Paolo festeggiano il loro onomastico in pizzeria con i loro amici. Alla fine della cena il conto viene diviso in parti uguali tra tutti i presenti e ciascuno dovrebbe pagare 12 Euro. Con grande generosità però, gli amici decidono di offrire la cena a Pietro e Paolo; il conto viene nuovamente diviso in parti uguali tra gli amici di Pietro e Paolo (cioè tutti i presenti esclusi Pietro e Paolo), e ciascuno di loro paga 16 Euro. Quanti sono gli amici? [8]
33. (OMI 2008) Alberto, Barbara e Clara giocano in un grande piazzale dove ci sono 2008 birilli. Alberto butta giù il triplo dei birilli buttati giù da Barbara, che a sua volta butta giù il doppio dei birilli buttati giù da Clara. Quanti birilli al massimo può aver buttato giù Alberto? [1338]
34. (OMI 2008) Quanti sono i numeri interi positivi multipli di almeno uno tra 5 e 7 e minori o uguali a 1000? [314]

## Questions in English

Nota: Gli anglosassoni usano il punto come la nostra virgola e viceversa. 1.2 significa 1,2 e 1,000 mille

### Working together

This is a question assigned at AHSME in 1995.

*The addition below is incorrect. The display can be made correct by changing one digit*[1] *d, wherever it occurs, to another digit e. Find the sum of d and e.*

$$\begin{array}{r} 742586 \\ +829430 \\ \hline 1212016 \end{array}$$

The addition in the columns containing the ten-thousands and hundredthousands[2] digits is incorrect. The only digit common to both these columns is 2. Changing these 2's to 6's makes the arithmetic correct. Changing the other two 2's to 6's has no effect on the correctness of the remainder of the addition, and no digit other than 2 could be changed to make the addition correct. Thus, $d = 2$, $e = 6$, and $d + e = 8$.

35. (MT 1992) Dick, Roger and Kamal run laps every day after work. Dick runs one-third of a lap per minute, Roger runs one-fifth of a lap per minute, and Kamal runs one-sixth of a lap per minute. They start together and agree to continue running until they all reach the starting point at the same time. How many laps does each run? [Dick: 10; Roger: 6; Kamal: 5]
36. (MT 1992) One invention saves[3] 30% on fuel[4]; a second saves 45%; a third 25%. If you use all three inventions at once, how much can you save? [71,125%]
37. (MT 1992) In 100 pound watermelon is 95% water. It is dehydrated until it is 90% water. What is its weight after dehydration? [50 pounds]
38. (MT 1992) Find the number $t$ and the digit symbolized by $a$ in: $[3 \cdot (230 + t)]^2 = 492a04$. [$a = 8$, $t = 4 \vee -464$]
39. (MT 1993) $\dfrac{2^1 + 2^0 + 2^{-1}}{2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4}}$ equals A) 6 B) 8 C) 31/2 D) 24 E) 512 [B]
40. (MT 1994) 9A523176 is divisible by 8. Find A. [Can be any digit]
41. (AHSME 1995) Anita attends a baseball game in Atlanta and estimates that there are 50,000 fans in attendance. Bob attends a baseball game in Boston and estimates that there are 60,000 in attendance. A league official who knows the actual numbers attending the two games notes that: i) The actual attendance in Atlanta is within 10% of Anita's estimate; ii) Bob's estimate is within 10% of the actual attendance in Boston. To the nearest 1,000, the largest possible difference between the numbers attending the two games is? [22,000]
42. (AHSME 1995) If M is 30% of Q, Q is 20% of P, and N is 50% of P, then M/N = ? [3/25]
43. (AHSME 1995) The total in-store price for an appliance is \$99.99. A television commercial advertises the same product for three easy payments of \$29.98 and a one-time shipping and handling charge[5] of \$9.98. How much is saved by buying the appliance from the television advertiser? [7 cents]
44. (AHSME 1995) How many base 10 four-digit numbers, N = *abcd*, satisfy all three of the following conditions? i) $4{,}000 \le N < 6{,}000$; ii) N is a multiple of 5; iii) $3 \le b < c \le 6$ [24]

### Working together

This is a question assigned at AHSME in 1996.

*A father takes his twins and a younger child out to dinner on the twins' birthday. The restaurant charges* \$4.95 *for the father and* \$0.45 *for each year of a child's age, where age is defined as the age at the most recent birthday. If the bill is* \$9.45, *which of the following could be the age of the youngest child*? A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

The sum of the children's ages is 10 because \$9.45 − \$4.95 = \$4.50 = 10·\$0.45. If the twins were 3 years old or younger, then the third child would not be the youngest. If the twins are 4, the youngest child must be 2.

[1] cifra
[2] centinaia di migliaia
[3] fa risparmiare
[4] carburante
[5] Spese di trasporto e consegna

45. (AHSME 1996) The addition below is incorrect. What is the largest digit that can be changed to make the addition correct? [7]

$$\begin{array}{r} 641 \\ 852 \\ \underline{+973} \\ 2456 \end{array}$$

46. (AHSME 1996) Given that $0 < a < b < c < d$, which of the following is the largest? [E]

$$A)\frac{a+b}{c+d} \quad B)\frac{a+d}{b+c} \quad C)\frac{b+c}{a+d} \quad D)\frac{b+d}{a+c} \quad E)\frac{c+d}{a+b}$$

47. (AHSME 1997) Mientka Publishing Company prices its best seller "*Where's Walter?*" as follows: $C(n)=\begin{cases} 12n & if \ \ 1 \le n \le 24 \\ 11n & if \ \ 25 \le n \le 48 \\ 10n & if \ \ n \ge 49 \end{cases}$, where $n$ is the number of books ordered, and $C(n)$ is the cost in dollars of n books. Notice that 25 books cost less than 24 books. For how many values of $n$ is it cheaper[6] to buy more than $n$ books than to buy exactly $n$ books? [6]

## Working together

This question was assigned at AHSME in 1999.
*What is the sum of the digits of the decimal form of the product* $2^{1999} \cdot 5^{2001}$ ?
Note that $2^{1999} \cdot 5^{2001} = 2^{1999} \cdot 5^{1999} \cdot 5^2 = 25 \cdot 10^{1999}$. Hence the number is formed by 25 followed by 1999 zeros, the requested sum is 7.

48. (AHSME 1997) If $a$ and $b$ are digits for which $\begin{array}{r} 2a \\ \times b3 \\ \hline 69 \\ 92\phantom{0} \\ \hline 989 \end{array}$ Then $a + b$ is? [7]

49. (AHSME 1998) Letters $a$, $b$, $c$, and $d$ represent four different digits selected from 0, 1, 2, . . . , 9. If $\frac{a+b}{c+d}$ is an integer that is as large as possible, what is the value of $a + b$? [17]

50. (AHSME 1999) Find the sum of all prime numbers between 1 and 100 that are simultaneously 1 greater than a multiple of 4 and 1 less than a multiple of 5. [118]

51. (AHSME 1999) Before Ashley started a three-hour drive, her car's odometer[7] reading was 29792, a palindrome. (A palindrome is a number that reads the same way from left to right as it does from right to left.) At her destination, the odometer reading was another palindrome. If Ashley never exceeded the speed limit of 75 miles per hour, which of the following was her greatest possible average speed?
A) $33+\frac{1}{3}$ B) $53+\frac{1}{3}$ C) $66+\frac{2}{3}$ D) $70+\frac{1}{3}$ E) $74+\frac{1}{3}$ [D]

[6] più economico
[7] contachilometri

# Attività di recupero

## Concetto di insieme. L'insieme dei numeri naturali e dei numeri interi

**Fase 1: Osserva**

- L'insieme dei primi 7 numeri pari si può anche scrivere per elenco, scrivendo i suoi elementi fra parentesi graffe: $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$.
- L'insieme $B = \{12, 15, 18, 21\}$ indica i multipli di 3 compresi tra 12 e 21, o anche compresi tra 12 e 22, o tra 10 e 23 e in altri modi simili, dato che fra i numeri 10 e 23 i multipli di 3 sono gli stessi che fra i numeri 12 e 21.
- Per indicare i multipli di 5 compresi tra 100 e 1000 dovremmo elencare 181 numeri (da $5 \cdot 20$ a $5 \cdot 200$), otteniamo lo stesso scrivendo $C = \{100, 105, 110, \ldots, 990, 995, 1000\}$, in cui i puntini indicano gli elementi mancanti, questi si capiscono guardando la evidente regola verificata dai numeri scritti.
- L'insieme dei numeri primi compresi tra 48 e 52 non ha elementi, quindi si indica con il simbolo $\{\}$ oppure con $\varnothing$ e lo chiamiamo insieme vuoto.
- La quarta potenza di 2 si scrive $2^4$ ed indica il prodotto $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$. Ma è anche uguale alla seconda potenza di 4, cioè a $4^2$. In ogni caso rappresenta il numero 16.
- Il prodotto $5^7 \cdot 5^{12}$ è uguale a $5^{12+7} = 5^{19}$.
- Il prodotto $11^3 \cdot 6^3$ è uguale a $(11 \cdot 6)^3 = 66^3$.
- Il prodotto $12^5 \cdot 14^2$ non si semplifica in un'unica potenza.

Adesso, tenuto conto dei precedenti esempi ti vengono proposte delle attività parzialmente compilate che tu devi completare

**Fase 2: Completa …**

1. L'insieme dei primi 12 numeri dispari per elenco, si indica con $A = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$.
2. L'insieme $B = \{23, 29, 31, 37, 41, 43\}$ indica i numeri …….. compresi tra 23 e 43, o anche compresi tra 20 e 44, e in altri modi simili, dato che fra i numeri 20 e … i numeri ……. sono gli stessi che fra i numeri 23 e ….
3. Per indicare i numeri di 3 cifre che hanno come cifra delle decine il 7, dovremmo elencare …. numeri (da 170 a …….), otteniamo lo stesso scrivendo $C = \{170, \ldots, 172, \ldots, 179, 270, \ldots, \ldots, 978, \ldots\}$, in cui i puntini indicano gli elementi mancanti.
4. L'insieme dei quadrati perfetti compresi tra 101 e … non ha elementi, quindi si indica con il simbolo … oppure con $\varnothing$ e lo chiamiamo ……..
5. La dodicesima potenza di 3 si scrive …. ed indica il prodotto ……... Ma è anche uguale alla …….. potenza di 9, cioè a ….. Ma anche alla quarta potenza di … o alla terza potenza di …..
6. Il prodotto $11^4 \cdot 11^{\cdots}$ è uguale a $11^{4+\cdots} = 11^{23}$.
7. Il prodotto $\ldots^5 \cdot 8^5$ è uguale a $(\ldots \cdot 8)^5 = 16^5 = 2^{\cdots}$.
8. La somma $2^5 + 2^2$ …….
9. La somma $2^5 + 3^5$ …….
10. La somma $3^5 + 4^2$ è uguale a $\ldots^2$, ma non rappresenta una regola generale.

E infine mettiti alla prova svolgendo degli esercizi completi.

**Fase 3: Prova!**

***Scrivere per elenco i seguenti insiemi di cui è fornita una loro proprietà***

1. L'insieme dei numeri multipli di 4 compresi tra 234 e 260. [{236, 240, 244, …,260}]
2. L'insieme dei numeri primi compresi tra 23 e 60. [{23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59}]
3. L'insieme delle coppie di numeri primi gemelli (differiscono di 2 unità) compresi tra 11 e 34. [{(11; 13), (17; 19), (29; 31)}]
4. L'insieme dei numeri interi che differiscono di 21 unità compresi tra – 17 e 1475. [{– 17, 4, 25, 46, …, 21453, 1474}]
5. L'insieme dei numeri interi il cui cubo è compreso tra – 170 e 541. [{– 5, – 4, …, 7, 8}]

***Indicare una proprietà verificata dai seguenti insiemi espressi per elenco***

6. $A = \{12, 16, 20, 24\}$, $B = \{11, 13, 17, 19\}$ [multipli di 4 tra 12 e 24; primi tra 11 e 19]
7. $C = \{121, 144, 169\}$, $D = \{50, 52, \ldots, 600, 602\}$ [quadrati di 11, 12 e 13; pari tra 50 e 602]
8. $E = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$, $F = \{14, 23, 32, 41\}$
[interi formati con le cifre 1, 2 e 3 usate una sola volta; numeri di due cifre la cui somma è 5]
9. $G = \{10, 11, 14, 19, 40, 41, 44, 49, 90, 91, 94, 99\}$, $H = \{12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89\}$
[interi di due cifre entrambe quadrati; interi di due cifre in cui le decine sono 1 in più delle unità]
10. $I = \{12, 24, 36, 48\}$, $L = \{12, 14, 16, 18, 21, 23, \ldots, 89, 92, 94, 96, 98\}$
[interi di due cifre in cui le decine sono il doppio delle unità; interi di 2 cifre una pari e una dispari]

***Quali dei seguenti insiemi sono vuoti?***

11. $A$ = multipli di 11 fra 100 e 109; $B$ = interi il cui quadrato non è positivo. [A]
12. $A$ = numeri primi fra 111 e 122; $B$ = interi contemporaneamente quadrati e cubi fra 10 e 50. [B]
13. $A$ = interi le cui cifre sommano 17 fra 25 e 88; $B$ = interi fra 100 e 500, non divisibili per 3, le cui cifre sono uguali. [A]
14. $A$ = multipli di 4 ma non di 8; $B$ = multipli di 14 ma non di 7. [B]
15. $A$ = uomini alti più di 3 $m$; $B$ = stelle distanti dalla terra meno di $10^6$ $Km$. [A; B]

***Semplificare, ove possibile, le seguenti espressioni con le potenze***

16. $2^4 \cdot 2^3$; $5^8 + 5^7$; $7^{24} \cdot 3^{24}$; $2^2 \cdot 2^5 \cdot 2^6 \cdot 2$ [$2^7$; $5^8 + 5^7$; $21^{24}$; $2^{12}$]
17. $3^7 \cdot 5^7$; $2^3 + 2^3$; $2^4 \cdot 4^2$; $5^2 \cdot 5^3 \cdot 25^2$ [$15^7$; $2^4$; $2^8$; $5^9$]
18. $3^4 \cdot 4^3$; $7^5 + 7^5$; $11^4 \cdot 22^2$; $3^2 \cdot 9^3 \cdot 27^4$ [$3^4 \cdot 4^3$; $7^5 + 7^5$; $11^4 \cdot 22^2$; $3^{20}$]

***Determinare, se esiste un valore intero di x per il quale le seguenti uguaglianze risultano vere***

19. $x^4 \cdot 5^8 = 5^{12}$; $x^3 \cdot 4^5 = 4^{15}$; $x^2 \cdot 11^2 = 33^2$; $x \cdot x^{10} = x^{11}$ [5; ∅; 3, qualsiasi]
20. $x^4 \cdot 2^x = 2^6$; $x^3 \cdot 3^x = 3^5$; $x^3 \cdot 5^3 = 25^6$; $x^7 \cdot 11^{x+1} = 11^{19}$ [2; ∅; ∅, 11]

## Divisibilità e fattorizzazione nell'insieme dei numeri interi

**Fase 1: Osserva**

- Vogliamo trovare tutti i divisori del 180. Sappiamo che sono a coppie, a partire da quella banale (1; 180). Il numero è pari, quindi c'è anche (2; 90); è divisibile per 3: (3; 60); per 4: (4; 45). Osserviamo che ogni volta il primo elemento della coppia aumenta e il secondo diminuisce, così come la differenza dei due. Passiamo a (5; 36), a (6; 30). Il numero non è divisibile per 7, né per 8 (dividendo per 4 abbiamo ottenuto 45). Lo è per 9: (9; 20) e per 10: (10; 18). Non per 11, ma per 12: (12; 15). A questo punto abbiamo finito perché non è divisibile per 13 e 14. L'ultimo trovato era 15, quindi se continuiamo ritroveremo le stesse copie scritte in ordine inverso.
- Abbiamo visto che il numero 180 ha 18 divisori. Del resto 180 si può scrivere $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$. Se aumentiamo di una unità ciascuno degli esponenti delle basi e li moltiplichiamo fra loro otteniamo: $(2 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (1 + 1) = 18$. Questo non è un caso, ma un risultato generale. Così se volessimo sapere quanti divisori ha $48 = 2^4 \cdot 3$, possiamo dire, senza calcolarli, che sono un totale di $(4 + 1) \cdot (1 + 1) = 10$. In effetti essi sono: (1; 48), (2; 24), (3; 16), (4; 12), (6; 8).
- Vogliamo verificare, usando il minor numero possibile di verifiche, se 1147 è primo oppure no. Non è divisibile per 2, 3 ($1 + 1 + 4 + 7 = 13$ non divisibile per 3) o 5. Dividiamo per 7 e otteniamo $1147 = 7 \cdot 163 + 6$. Non è divisibile per 11 ($(1 + 7) – (1 + 4) = 3$, non divisibile per 11). Dividiamo per 13: $1147 = 13 \cdot 88 + 3$. Passiamo al successivo numero primo: 17. si ha: $1147 = 17 \cdot 67 + 8$. Continuiamo: $1147 = 19 \cdot 60 + 7$; $1147 = 23 \cdot 49 + 20$; $1147 = 29 \cdot 39 + 16$; $1147 = 31 \cdot 37$. Quindi il numero non è primo. Se anche quest'ultima divisione non fosse stata esatta non avremmo continuato molto, poiché i due fattori erano molto vicini, avremmo controllato solo 37 e se non funzionava neanche con questo avremmo detto che il numero era primo.
- Sappiamo che il numero 4X21X111 è multiplo di 11, che cifra può nascondere il simbolo X? Se il numero è divisibile per 11 vuol dire che la differenza $(4 + 2 + X + 1) – (X + 1 + 1 + 1) = (7 + X) – (X + 3) = 4$, deve essere 0 o un numero divisibile per 11, ma ciò non accade per alcun valore di X, quindi la domanda è mal posta.
- Se il numero fosse stato invece 41X213X11 la differenza sarebbe diventata $(4 + X + 1 + X + 1) – (1 + 2 + 3 + 1) = (6 + 2X) – 7 = 2X – 1$. Non esiste alcun valore intero di X affinché essa faccia zero. Men-

tre se X = 6, diventa 2 · 6 – 1 = 11. Ed è l'unico valore per cui si ottiene un multiplo di 11. Pertanto X = 6 e 416213611 è divisibile per 11.

- Vogliamo scomporre in fattori primi 456. Costruiamo il seguente schema: $\begin{array}{r|l} 456 & 2 \\ 228 & 2 \\ 114 & 2 \\ 57 & 3 \\ 19 & 19 \\ 1 & \end{array}$. Quindi possiamo dire che si ha: $456 = 2^3 \cdot 3 \cdot 19$.
- Abbiamo a disposizione 10 nastri rossi, 8 verdi e 12 bianche, quante coccarde della bandiera italiana possiamo fare usando il massimo numero di nastri di ogni colore in ogni coccarda? Si tratta di determinare MCD(8, 10, 12) = 2. Quindi al massimo ogni coccarda sarà formata da 6 nastri, 2 per colore. Il numero totale di coccarde sarà perciò 4, cioè 8: 4, dato che esauriti i nastri verdi, anche se ne abbiamo ancora di rossi e bianchi non possiamo fare il tricolore.

Adesso, tenuto conto dei precedenti esempi ti vengono proposte delle attività parzialmente compilate che tu devi completare

**Fase 2: Completa …**

1. Per trovare tutti i divisori del 68, cominciamo dalla coppia banale (…; …). Il numero è pari, quindi c'è anche (…; …); non è divisibile per 3; è divisibile per …: (…; 17); non è divisibile per 6, 7, …, …. Dato che 9 · 9 = 81 > 68, possiamo concludere dicendo che ……. Infine i divisori cercati sono i seguenti: 1, 2, …, …, …, … .
2. Siccome $68 = 2^2 \cdot$ …, potevamo dire subito che i suoi divisori sarebbero stati un totale di: (… + 1) · (… + …) = …. Quindi possiamo dire che anche $45 = \ldots^2 \cdot \ldots$ ha 6 divisori, mentre invece $24 = 2^3 \cdot 3$, ha un totale di (… + 1) · (… + …) = … divisori.
3. Vogliamo verificare, usando il minor numero possibile di verifiche, se 127 è primo oppure no. Non è divisibile per 2, 3 (1 + … + … = … non divisibile per 3) o 5. Dividiamo per 7 e otteniamo 127 = 7 · … + …. Non è divisibile per 11 ((1 + …) – …) = …, non divisibile per 11). Dividiamo per …: 127 = … · 9 + …. Dato che il quoziente ottenuto, 8, è minore del divisore, …, possiamo concludere che 127 … primo.
4. Sappiamo che il numero 14X3X2X45 è multiplo di 9, che cifra può nascondere il simbolo X? Se il numero è divisibile per 9 vuol dire che la …. (1 + 4 + …….) = …. + 3X, deve essere un numero divisibile per …, ma ciò non accade per alcun valore di X, perché la somma fra un multiplo di 3 e un non multiplo di 3, non è multiplo di …, quindi a maggior ragione di …, quindi la domanda è mal posta.
5. Se il numero fosse stato invece 14X3X245 la somma sarebbe diventata (……) = 2X + …. In questo caso invece se X = …, diventa … = 9. Ed è l'unico valore per cui si ottiene un multiplo di 9. Pertanto X = … e 14…3….245 è divisibile per ….
6. Vogliamo scomporre in fattori primi 476. Costruiamo il seguente schema: $\begin{array}{r|l} 476 & 2 \\ 238 & \ldots \\ 119 & \ldots \\ \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \\ 1 & \end{array}$. Quindi possiamo dire che si ha: $476 = 2^{\cdots} \cdot \ldots \cdot \ldots$ .
7. Abbiamo a disposizione 20 fette di salame, 15 di prosciutto e 25 di provola, quanti tramezzini uguali con il maggior numero di affettati dello stesso tipo possiamo fare? Si tratta di determinare …(15, 20, …) = …. Quindi al massimo ogni tramezzino conterrò … fette di prosciutto, … fette di salame e … fette di provola. Il numero totale di tramezzini sarà perciò …, cioè ……., dato che esaurite le fette di

…., anche se ne abbiamo ancora degli altri affettati non possiamo fare tramezzini con … tipi di affettati.

8. In un negozio pony express, alle 8:00 del mattino partono tre corrieri, uno che porta la posta prioritaria, uno le raccomandate e l'altro i pacchi. Tenuto conto delle consegne, essi impiegano in media, rispettivamente, 25, 30 e 40 minuti per fare il giro e partire per una nuova consegna. Se l'orario di lavoro è per ciascuno al massimo di 6 ore, a quali ore i tre ripartiranno ancora insieme? Stavolta dobbiamo calcolare il …(25; 30; 40) = … Quindi vuol dire che i tre dovrebbero ripartire insieme dopo … minuti, che sono però più di … ore, pertanto possiamo concludere che …… Invece potranno partire insieme di nuovo il primo e il secondo ogni …(25; 30) = … minuti, quindi alle ore …, … Il primo e il terzo dopo mcm(…; …) = … minuti, quindi alle ore …. Infine il secondo e il terzo dopo …….. = … minuti, cioè alle ore …, …, ….

E infine mettiti alla prova svolgendo degli esercizi completi.

**Fase 3: Prova!**

***Trovare tutti i divisori dei seguenti numeri***

1. a) 42; b) 65; c) 88 [a) {1; 2; 3; 6; 7; 14; 21; 42}; b){1; 5; 13; 65}; c){1; 2; 4; 8; 11; 22; 44; 88}]
2. a) 94; b) 121; c) 150 [a) {1; 2; 47; 94}; b) {1; 11; 121}; c) {1; 2; 3; 50; 5; 30; 6; 25; 10; 15; 75; 150}]

***Scomponendo i numeri in fattori primi, determinare, senza trovarli, quanti divisori ha ciascuno***

3. a) 110; b) 234; c) 300; d) 402; e) 501; f) 612; g) 784; h) 856; i) 948
[a) 6; b) 12; c) 18; d) 6; e) 4; f) 18; g) 15; h) 8; i) 12]

***Verificare, usando il minor numero possibile di verifiche, quali fra i seguenti numeri sono primi***

4. a) 113; b) 203; c) 317; d) 421; e) 569; f) 601; g) 713; h) 827; i) 911 [a); c); d) e); f) ; h); i)]

***Determinare gli eventuali valori da assegnare alla cifra X, affinché il numero scritto sia divisibile per quanto assegnato***

5. X123X per 3; 122XX34 per 11; XXX135 per 5; 2567X7652 per 3 [$3 \vee 6 \vee 9$; $\varnothing$; $\forall$ X; $5 \vee 8$]
6. 21X416X per 22; 1X454X per 6; X2X3X3X per 10; 25X2X0X per 15 [4; $2 \vee 8$; $\varnothing$; 5]
7. 1X2X3X4 per 66; 1X27X994 per 9; X142128 per 7; 13X639 per 13 [$\varnothing$; 2; 7; 2]

***Scomporre in fattori primi i seguenti numeri, usando il consueto schema***

8. 124, 255, 310, 406, 518 [$2^2 \cdot 31$; $3 \cdot 5 \cdot 17$; $2 \cdot 5 \cdot 31$; $2 \cdot 7 \cdot 29$; $2 \cdot 7 \cdot 37$]
9. 624, 745, 832, 996 [$2^4 \cdot 3 \cdot 13$; $5 \cdot 149$; $2^6 \cdot 13$; $2^2 \cdot 3 \cdot 83$]
10. Abbiamo a disposizione 100 bambole, 150 trenini e 200 trottole. Quanti pacchetti regalo contenenti ciascuno lo stesso numero di oggetti di ogni tipo, con il maggior numero di oggetti dello stesso tipo possiamo confezionare? [2]
11. Con riferimento al precedente quesito, restando inalterati il numero dei trenini e quello delle trottole, se fossimo riusciti a confezionare 4 pacchetti, quante sarebbero state almeno le bambole? [200]
12. Vogliamo dividere 3 cosce di prosciutto che pesano rispettivamente, in *Kg*, 4, 6 e 8, in pezzi più grandi possibili, ma dello stesso peso. Quanti pezzi in totale possiamo ottenere e quanto peserà ciascuno di essi? [9; 2 *Kg*]
13. Tre gufi in una foresta cominciano a emettere il loro grido insieme alla mezzanotte, poi ripetono il loro verso con cadenza periodica di 50, 70 e 90 minuti rispettivamente. Se all'alba, che in quel giorno è alle 6:00, smettono di emettere versi, a che ora canteranno di nuovo insieme? [Mai]
14. Con riferimento al precedente problema, cosa cambia se il secondo ripete il verso ogni 60 minuti e i gufi cantano anche durante il giorno? [Canteranno insieme alle 15:00 del giorno successivo]
15. Se invece i gufi cantano di nuovo insieme alle 7:30, ogni quanti minuti ripete il verso il secondo gufo? [Diverse possibilità: {1; 2; 3; 5; 6; 9; 10; 15; 18; 25; 30; 45; 50; 75; 90; 150; 225; 450} minuti]

## L'insieme dei numeri razionali relativi. Operazioni con le frazioni

**Fase 1: Osserva**

- Vogliamo ridurre ai minimi termini la frazione $\frac{7956}{8892}$. Scomponiamo numeratore e denominatore in fattori primi, con uno dei metodi già visti: $\frac{2^2 \cdot 3^2 \cdot 13 \cdot 17}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 13 \cdot 19}$. Eliminiamo i fattori comuni, ottenendo quan-

to richiesto: $\frac{\cancel{2^2 \cdot 3^2 \cdot 13} \cdot 17}{\cancel{2^2 \cdot 3^2 \cdot 13} \cdot 19} = \frac{17}{19}$.

- Vogliamo scrivere la frazione generatrice di 13,24. Essendo un numero decimale, è sufficiente scrivere $\frac{1324}{100}$, in cui al denominatore gli zeri sono tanti quante le cifre decimali. Ovviamente possiamo anche semplificare: $\frac{\cancel{4} \cdot 331}{\cancel{4} \cdot 25} = \frac{331}{25}$. La controprova possiamo ottenerla semplicemente effettuando la divisione.
- Vogliamo scrivere la frazione generatrice di $11,\overline{721}$. Il numero è periodico semplice, pertanto la regola è la seguente: $\frac{11721-11}{999} = \frac{11710}{999}$, in cui al denominatore i 9 sono tanti quante le cifre del periodo. Non possiamo ulteriormente semplificare.
- Vogliamo scrivere la frazione generatrice del numero periodico misto $3,012\overline{34}$. La regola è adesso: $\frac{301234-3012}{99000} = \frac{298222}{99000}$, in cui al denominatore gli zeri sono tanti quante le cifre dell'antiperiodo e i 9 quante quelle del periodo. Stavolta possiamo semplificare: $\frac{149111}{49500}$.
- Grazie al risultato stabilito dal Teorema 29, possiamo dire che la frazione $\frac{17}{24}$ rappresenta un numero periodico misto, poiché essa è ridotta ai minimi termini e il suo denominatori contiene sia fattori 2 che fattori diversi da 2 e da 5. Infatti, se dividiamo avremo: 17:24 = $0,708\overline{3}$.
- Se ci offrono di scegliere fra i 17/73 e i 421/1800, cosa conviene fare? Potremmo effettuare le divisioni, oppure un metodo più è quello di moltiplicare fra loro numeratore dell'una per il denominatore dell'altra, in questo caso ottenendo: 17 · 1800 = 30600 e 73 · 421 = 30723. Dato che il secondo numero è maggiore del secondo, la frazione maggiore è quella che, in questo prodotto, ha messo il numeratore, cioè $\frac{17}{73}$. In effetti abbiamo $\frac{17}{73} \approx 0,232; \frac{421}{1800} \approx 0,234$.
- Nei grandi magazzini sono cominciati i saldi, tutto al 30%. Quanto costeranno dei pantaloni che prima erano prezzati € 48,75? Piuttosto che calcolare lo sconto, conviene calcolare quel che rimane da pagare, ossia (100 – 30) = 70%. E quindi basta effettuare la moltiplicazione € 48,75 · 0,7 = € 34,125. Che ovviamente non è un prezzo "reale", quindi probabilmente pagheremo o un prezzo al centesimo più vicino, € 34,13 o ai 5 centesimi, cioè € 34,15.
- L'attuale aliquota I.V.A. sulle acque minerali è del 22%, che significa che il venditore deve versare il 22% di quanto ha incassato allo stato. Così per una bottiglia venduta a € 1,00, € 0,22 andranno allo stato. Se lo stato incassa sul prezzo di una bottiglia di acqua minerale € 0,17, quanto è stato il prezzo di vendita? In pratica vogliamo sapere il 22% di quale quantità è 0,17? Quindi stavolta dobbiamo procedere all'inverso, dato che € 0,17 = P · 0,22, dove P è il prezzo da trovare, perciò dobbiamo non moltiplicare, ma dividere, cioè P = € 0,17/0,22 ≈ € 0,77.
- Vogliamo semplificare l'espressione $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{5}{6}+\frac{1}{8}$. Portiamo le frazioni allo stesso denominatore, che ovviamente sarà il loro *mcm*, cioè 24: $\frac{16+18-20+3}{24} = \frac{17}{24}$, non ulteriormente riducibile.
- Adesso vogliamo semplificare $\frac{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)^2}{\left(\frac{2}{5}-1\right)\cdot\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\right)^2}$. Cominciamo a ridurre allo stesso de-

nominatore all'interno delle singole parentesi: $\dfrac{\frac{3-4}{12}\cdot\frac{8+9}{12}-\left(\frac{3+2-1}{6}\right)^2}{\frac{2-5}{5}\cdot\frac{6+1}{4}+\left(\frac{6+5}{15}\right)^2}=\dfrac{-\frac{1}{12}\cdot\frac{17}{12}-\left(\frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{6}^{3}}\right)^2}{-\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{4}+\left(\frac{11}{15}\right)^2}$, continuiamo ad eseguire i calcoli: $\dfrac{-\frac{17}{144}-\frac{4}{9}}{-\frac{21}{20}+\frac{121}{225}}=\dfrac{\frac{-17-64}{144}}{\frac{-945+484}{900}}=\dfrac{-\frac{\cancel{81}^{9}}{\cancel{144}^{16}}}{-\frac{461}{900}}=\dfrac{9}{\cancel{16}^{4}}\cdot\dfrac{\cancel{900}^{225}}{461}=\dfrac{2025}{1844}$.

- 3 amici comprano un biglietto della lotteria che costa € 5,00 mettendo rispettivamente € 1,50, € 2,50 ed € 1,00. Se vincessero un premio da € 1800,00 come dovrebbero dividerlo? Ovviamente ciascuno dovrà prendere proporzionalmente a quanto ha speso. Le relative proporzioni sono $\frac{1,5}{5}=\frac{\frac{3}{2}}{5}=\frac{3}{10};\frac{2,5}{5}=\frac{\frac{5}{2}}{5}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2};\frac{1}{5}$. Pertanto il secondo ovviamente dovrà avere metà del premio, € 900,00, il primo i 3/10, cioè € 540,00 e l'ultimo solo 1/5, ossia € 360,00.
- Applicando le proprietà delle potenze vogliamo semplificare $4^{-2} : 2^5 \cdot 8^{-3} : 16 \cdot 5^0$. A parte l'ultimo fattore abbiamo a che fare con potenze tutte riconducibili a base 2, e siccome $5^0 = 1$, possiamo quindi procedere trasformando tutto alla stessa base: $\left(2^2\right)^{-2}:2^5\cdot\left(2^3\right)^{-3}:2^4$, adesso possiamo applicare le proprietà delle potenze che affermano che la potenza di una potenza si ottiene moltiplicando fra loro gli esponenti: $2^{-4} : 2^5 \cdot 2^{-9} : 2^4$. E infine le proprietà per le quali ogni moltiplicazione fra potenze di uguale base equivale a una somma fra gli esponenti e ogni divisione la differenza, quindi si ha: $2^{-4-5-9-4} = 2^{-22}$.

**Fase 2: Completa …**

1. Per ridurre ai minimi termini la frazione $\frac{1485}{4356}$, scomponiamo numeratore e denominatore in fattori …, ottenendo: $\frac{3^{\cdots}\cdot 5\cdot\ldots}{2^2\cdot\ldots\cdot\ldots\cdot\ldots}$. Eliminiamo i fattori comuni, ottenendo: $\frac{\cdots}{44}$.
2. Vogliamo scrivere la frazione generatrice di 7,154. Essendo un numero ……., basta scrivere $\frac{\cdots}{1\ldots}$, in cui al denominatore gli zeri sono tanti quante le cifre ……. Semplificando si ha: $\frac{\cdots}{\cdots}$.
3. Per scrivere la frazione generatrice del numero …… $21,\overline{56}$, usiamo la regola seguente: $\frac{2156-\ldots.}{9\ldots..}$, in cui al denominatore i 9 sono tanti quante le cifre ….. La frazione ottenuta è $\frac{\cdots}{\cdots}$ che ….. essere semplificata.
4. Per scrivere la frazione generatrice del numero …… $13,417\overline{8}$, applichiamo la regola: $\frac{\ldots\ldots\ldots-\ldots.}{9\ldots..0}$, in cui al denominatore gli zeri sono tanti quante le cifre del …… e i 9 quante quelle del ……... Otteniamo così la frazione: $\frac{\cdots}{\cdots}$, che …….. semplificata.
5. La frazione $\frac{19}{8}$ rappresenta un numero ……., poiché essa è ridotta ai minimi termini e il suo denominatori contiene …. fattori 2 ….. fattori diversi da 2 e da 5.
6. Per stabilire quale frazione fra $\frac{2}{11}$ e $\frac{13}{71}$ è maggiore, moltiplichiamo fra loro …….. dell'una per il …….. dell'altra, in questo caso ottenendo: … · … = … e … · … = …. Dato che il … numero è … del

secondo, possiamo dire che $\frac{2}{11}$ è la frazione … perché ……..

7. Il prezzo della benzina è aumentato del 3,5%, dato che costava € 1,572 al litro, adesso il suo prezzo è aumentato di € 1,572 · …, diventando quindi € 1,…..
8. Il prezzo del pane al *Kg* nel supermercato A è di € 3,12 mentre nel supermercato B è di € 2,85. Possiamo dire quindi che in percentuale il pane nel supermercato B costa …… per ottenere questo risultato abbiamo effettuato l'operazione …/… e poi abbiamo moltiplicato per …
9. Per semplificare l'espressione $\frac{2}{5}-\frac{3}{8}+\frac{4}{3}-1$, portiamo le frazioni allo stesso denominatore, che sarà …, ottenendo: $\frac{\dots-\dots+\dots-\dots}{\dots}=\frac{\dots}{\dots}$.
10. Per semplificare $\frac{\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}+1\right)^2}{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\right)}$ riduciamo allo stesso … all'interno delle singole parentesi, ottenendo: $\frac{\left(\frac{\dots-\dots}{12}\right)^2+\left(\frac{1+\dots}{2}\right)^2}{\frac{\dots-\dots}{\dots}\cdot\frac{\dots+\dots}{\dots}}=\frac{\frac{\dots}{\dots}+\frac{\dots}{\dots}}{\frac{\dots}{\dots}}=\frac{\frac{\dots}{\dots}}{\frac{\dots}{\dots}}=\frac{\dots}{\dots}\cdot\frac{\dots}{\dots}=\frac{\dots}{\dots}$.
11. 3 operai svolgono rispettivamente i 2/7, i 3/8 e i 5/16 di un lavoro, la parte rimanente la finisce lo stesso proprietario. Se il costo dell'intero lavoro era previsto in € 4480,00, quanto riceve ciascun operaio e quanto risparmia il proprietario svolgendo da se l'ultima parte di lavoro? Portiamo le tre frazioni allo stesso denominatore, che è …, ottenendo così …/…, …/…, …/… A questo punto dividiamo 4480 per … e moltiplichiamo rispettivamente per …, …, …, ottenendo così i tre compensi, cioè € …,00, €…,00, €…,00. Ovviamente il proprietario ha risparmiato € (4480,00 - …..) = € ……
12. Vogliamo semplificare $3^{-4} : 9^4 \cdot 27^{-2} \cdot 81$. Abbiamo a che fare con potenze tutte riconducibili a base …, possiamo quindi procedere trasformando tutto alla stessa base: $3^{-4} : \dots^{\dots} \cdot \dots^{\dots} \cdot \dots^{\dots}$. Applichiamo le proprietà delle potenze che affermano che la potenza di una potenza si ottiene ……. fra loro gli esponenti: $3^{-4} : \dots^{\dots} \cdot \dots^{\dots} \cdot \dots^{\dots}$. E infine le proprietà per le quali ogni moltiplicazione fra potenze di uguale base equivale a una …….. fra gli esponenti e ogni ……. una loro differenza, quindi abbiamo: $3^{\dots\dots\dots\dots} = \dots^{\dots}$.

**Fase 3: Prova!**

***Ridurre ai minimi termini le frazioni seguenti***

1. a) $\frac{118}{340}$; b) $\frac{240}{168}$; c) $\frac{354}{560}$; d) $\frac{820}{1024}$; e) $\frac{1120}{476}$ $\left[a)\frac{59}{170};b)\frac{10}{7};c)\frac{177}{280};d)\frac{205}{256};e)\frac{40}{17}\right]$
2. a) $\frac{1156}{272}$; b) $\frac{6669}{1976}$; c) $\frac{2480}{80600}$; d) $\frac{693}{735}$; e) $\frac{7007}{4459}$ $\left[a)\frac{17}{4};b)\frac{27}{8};c)\frac{2}{65};d)\frac{33}{35};e)\frac{11}{7}\right]$

***Scrivere le frazioni generatrici dei seguenti numeri decimali***

3. a) 2,135; b) $2,\overline{135}$; c) $21,\overline{35}$; d) $2,1\overline{35}$; e) $2,13\overline{5}$ $\left[a)\frac{427}{200};b)\frac{79}{37};c)\frac{2114}{99};d)\frac{1057}{495};e)\frac{961}{450}\right]$
4. a) 0,999; b) $0,\overline{349}$; c) $5,23\overline{5}$; d) $-13,00\overline{30}$; e) $4,22\overline{010}$ $\left[a)\frac{999}{1000};b)\frac{349}{999};c)\frac{1178}{225};d)-\frac{4291}{330};e)\frac{105397}{24975}\right]$

***Senza effettuare la divisione stabilire il tipo di numero decimale rappresentato dalle seguenti frazioni (nelle risposte: dl = decimale limitato; ps = periodico semplice; pm = periodico misto)***

5. a) $\frac{1}{4}$; b) $\frac{3}{8}$; c) $\frac{5}{6}$; d) $\frac{9}{11}$; e) $\frac{1}{43}$ [a) *dl*; b) *dl;* c) *pm*; d) *ps*; e) *ps*]
6. a) $\frac{1}{34}$; b) $\frac{2}{18}$; c) $\frac{3}{56}$; d) $\frac{8}{14}$; e) $\frac{11}{47}$ [*ps*; *ps; pm*; *ps*; *ps*]

***Ordinare le seguenti coppie di frazioni***

7. a) $\left(\frac{15}{19};\frac{263}{333}\right)$; b) $\left(\frac{213}{250};\frac{23}{27}\right)$; c) $\left(\frac{35}{71};\frac{443}{900}\right)$; d) $\left(\frac{59}{25};\frac{111}{47}\right)$; e) $\left(\frac{626}{999};\frac{57}{91}\right)$

$\left[a)\frac{263}{333};b)\frac{213}{250};c)\frac{35}{71};d)\frac{111}{47};e)\frac{626}{999}\right]$

***Risolvi i seguenti problemi sulle percentuali***

8. Le fragole sono aumentate del 15%, se prima costavano € 1,15 al *Kg*, qual è il nuovo prezzo? [≈€1,17]
9. La popolazione di una città è passata da 23450 a 23128 Qual è la diminuzione percentuale? [≈ 1,4 %]
10. Ad un concerto rock hanno partecipato un totale di 1742 spettatori, sappiamo che circa il 31% di essi erano minorenni e perciò hanno pagato € 12,00 a testa I maggiorenni hanno pagato invece € 18,00 a testa Tenuto conto che ci sono stati degli ingressi gratuiti e che l'incasso è stato di € 26892, si vuol sapere quante gratuità ci sono state e che percentuale del totale rappresentano [68; ≈ 3,9%]
11. Un paio di scarpe costavano € 75,00 In saldo hanno uno sconto del 30%, ma rimangono ugualmente invendute, quindi vengono scontate di un'ulteriore 25% Si vuol sapere quanto costano le scarpe alla fine e qual è lo sconto percentuale rispetto al prezzo iniziale [≈ € 39,38; 52,5%]
12. Una scatola di cioccolatini due anni fa costava € 12,50, l'anno scorso € 13,25 e quest'anno €14,00 Calcolare le percentuali di aumento annue e biennali [6%; ≈ 5,7%; 12%]

***Semplificare le seguenti espressioni frazionarie***

13. a) $\frac{3}{5}+\frac{2}{3}-\frac{1}{4}+\frac{5}{3}$; b) $1-\frac{2}{5}+\frac{1}{4}-\frac{5}{9}+\frac{1}{2}$; c) $\frac{3}{7}+\frac{1}{14}-\frac{3}{2}+1$ $\left[a)\frac{161}{60};b)\frac{143}{180};c)0\right]$

14. a) $\frac{5}{9}-\frac{3}{4}+\frac{11}{3}-\left(\frac{3}{2}\right)^2$; b) $\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{13}{2}-\frac{3}{8}+\left(\frac{5}{2}\right)^3$; c) $\frac{2}{13}-\frac{5}{26}+\frac{7}{2}-1$ $\left[a)\frac{11}{9};b)\frac{349}{16};c)\frac{32}{13}\right]$

15. a) $\left(\frac{4}{3}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)-\frac{3}{20}+\frac{13}{60}$; b) $\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)-\frac{7}{6}$; c) $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{3}-1}+\frac{2}{9}\cdot\left(\frac{5}{8}-\frac{13}{4}\right)$ $\left[a)\frac{13}{60};b)-\frac{49}{36};c)-\frac{17}{6}\right]$

16. a) $\frac{\frac{5}{7}-\frac{3}{4}+1}{\frac{13}{8}-2+\frac{3}{2}}\cdot\frac{\left(\frac{7}{3}-1\right)^2-\frac{1}{9}}{\frac{2}{7}-\frac{7}{4}}$; b) $\frac{1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}-\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}}$; c) $\frac{\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}-\frac{1}{81}}}{\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\frac{1}{81}}}$ $\left[a)-\frac{40}{41};b)\frac{12}{7};c)\frac{72171}{3400}\right]$

***Risolvi i seguenti problemi sulle proporzionalità***

17. Un'eredità viene divisa fra i 3 eredi in modo che il primo prenda il doppio del secondo, il quale prende il triplo del terzo Se l'eredità è di € 700000, quanto eredita ciascuno dei tre? [€ 420000; € 210000; € 70000]
18. Gianna ha i 2/3 dell'età di Matteo, che a sua volta ha i ¾ dell'età di Kriss Se insieme hanno 90 anni, quanti anni ha ciascuno di essi? [20; 30; 40]
19. Jonathan e Jim partono contemporaneamente dalle loro case e si dirigono uno verso l'altro, viaggiando a velocità diverse ma costanti Si incontrano dopo 15 minuti, si salutano e continuano finché non raggiungono la casa dell'amico Se Jonathan raggiunge la casa di Jim dopo 20 minuti, quanto impiega Jim in totale a raggiungere la casa di Jonathan? [$26^m15^s$]

***Applicando le proprietà delle potenze semplificare le seguenti espressioni***

20. a) $2^{-5}\cdot 2^0\cdot 2^{-3}\cdot 16$; b) $3^2 : 27^{-1}\cdot 3^{-5}\cdot 243$; c) $5^2\cdot 25 : 125$ [a) $2^{-4}$; b) $3^5$; c) 5]
21. a) $2^3\cdot 3^3\cdot 125$; b) $7^2 : 14^{-2}\cdot 8^2\cdot 36$; c) $24^3\cdot 125 : 8\cdot 64^{-1}$ [a) $30^3$; b) $24^2$; c) $15^3$]
22. a) $(2^2)^3\cdot(4^3)^{-2} : (8^{-4})^{-2}$; b) $(1+2^2)^3 : 25^{-4}\cdot(21-2^4)^{-2}$; c) $11^2\cdot(2+3^2)^{-3} : (3^3-2^4)^{-1}$ [a) $2^{-14}$; b) $5^9$; c) 1]