3. Geometria del piano

3.4 Trasformazioni isometriche

Prerequisiti
- Nozioni di geometria euclidea
- Nozioni di insiemistica
- Nozioni di logica
- Il concetto di movimento rigido
- Poligoni e loro proprietà
- Il piano cartesiano

Obiettivi
- Individuare nella realtà fisica oggetti a cui si possono associare enti geometrici
- Creare modelli geometrici per risolvere semplici problemi reali
- Determinare visivamente il tipi di trasformazione che è applicata a due date figure ottenute una dall'altra mediante una trasformazione isometrica
- Individuare simmetrie in particolari figure geometriche

Contenuti
- Concetto di trasformazione geometrica. Le traslazioni
- Le Simmetrie
- Le Rotazioni

Parole Chiave
Punto unito – Retta unita – Rotazione – Simmetria – Traslazione – Vettore

Simbologia

$\vec{v}$	Indica un vettore
$\tau\ (P)$	Se τ è una trasformazione e P è un punto, indica il corrispondente del punto P mediante la trasformazione τ

Concetto di trasformazione geometrica. La traslazione.

In questa unità vogliamo rendere più rigoroso il concetto di movimento rigido che è stato usato in modo intuitivo nell'unità sui triangoli.
Se due figure vengono ottenute l'una dall'altra mediante un movimento rigido vuol dire che le due figure sono formate dagli stessi punti, i quali si succedono allo stesso modo. Se vogliamo sono due oggetti ottenuti dallo stesso stampo, con lo stesso procedimento, con una perfezione che non ci fa notare alcuna differenza fra di loro. Ma allora matematicamente abbiamo una corrispondenza biunivoca fra punti del piano. Vogliamo dare un nuovo nome a questa corrispondenza.

Definizione 1

Una corrispondenza biunivoca fra punti del piano o dello spazio si chiama **trasformazione geometrica**.

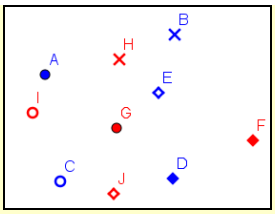
Definizione 2

Una trasformazione geometrica τ che conserva le distanze, tale cioè che il corrispondente di qualunque segmento AB mediante la τ è un segmento $A'B'$ isometrico ad AB si dice trasformazione **isometrica o isometria**.

Notazione 1

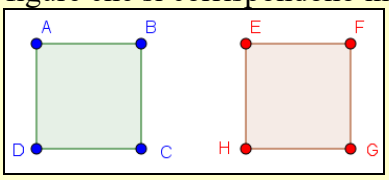
Data una trasformazione geometrica τ e un punto P, con il simbolo $\tau(P)$ indichiamo il corrispondente del punto P mediante la trasformazione τ.

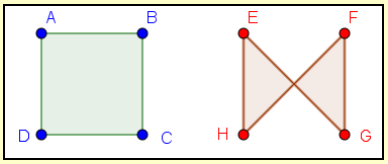
Esempio 1

- In figura 

è rappresentata la trasformazione geometrica $\tau : X \to Y$, che all'insieme $X = \{A, B, C, D, E\}$, formato da cinque punti, associa l'insieme $Y = \{F, G, H, I, J\}$, con la legge $\tau(A) = G$, $\tau(B) = H$, $\tau(C) = I$, $\tau(D) = F$, $\tau(E) = J$. Per comodità abbiamo segnato in blu gli elementi di X e in rosso quelli di Y, inoltre abbiamo usato lo stesso simbolo per indicare punti corrispondenti.
- Ma avremmo potuto definire infinite altre trasformazioni, per esempio associando ogni punto a sé stesso, cioè, una trasformazione geometrica $\tau' : X \to X$, definita dalla legge: $\tau'(A) = A$, $\tau'(B) = B$, $\tau'(C) = C$, $\tau'(D) = D$, $\tau'(E) = E$.
- O anche una trasformazione τ'': $X \to Y$, definita da $\tau''(A) = F$, $\tau''(B) = G$, $\tau''(C) = H$, $\tau''(D) = I$, $\tau''(E) = J$.
- O infinite altre.

Naturalmente il problema di stabilire quante delle precedenti trasformazioni sono isometrie è tutta un'altra questione.

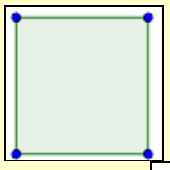
- In figura abbiamo rappresentato due figure che si corrispondono in una certa trasformazione geometrica 

anche se non sappiamo come è avvenuta la trasformazione, intuitivamente ci rendiamo conto che abbiamo a che fare con una isometria, perché le due figure, "appaiono" isometriche.
- Allo stesso modo ci rendiamo conto immediatamente che la trasformazione rappresentata dalla seguente figura non può essere una isometria. 

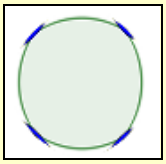
Vediamo adesso un esempio "pratico" di trasformazioni geometriche.

Esempio 2

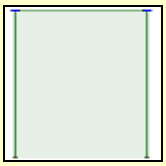
Consideriamo la seguente fotografia del grande matematico David Hilbert, vogliamo "giocare" un po' con essa modificandola mediante uno dei tanti programmi grafici disponibili. Tanto per fare il raffronto, effettuiamo le stesse trasformazioni anche su un quadrato.



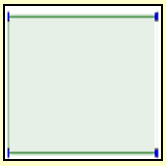
La prima operazione è il cosiddetto **effetto cerchio**



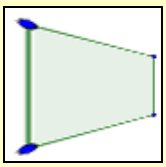
Effetto cilindro orizzontale



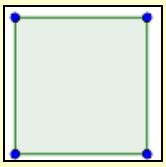
Effetto cilindro verticale



Effetto prospettiva orizzontale

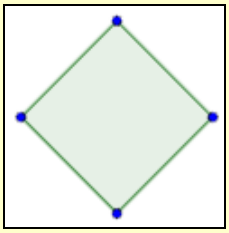


Tutte le precedenti trasformazioni effettuate sulla foto sono certamente non isometriche.
Vediamo invece qualche effetto che mantiene inalterate le proprietà isometriche della foto.



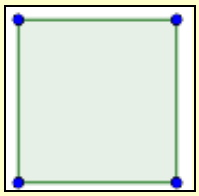
Effetto specchio

in cui non si nota differenza alcuna nel quadrato, mentre si osserva che la tesa del cappello di Hilbert è adesso sulla sua sinistra.



Effetto rotazione

in cui non si deve considerare il riquadro e quindi le sue dimensioni, ma solo ciò che vi è dentro.
Concludiamo con un'altra trasformazione che, pur non essendo isometrica, mantiene inalterate proprietà geometriche come la "forma".



Effetto ingrandimento

L'angolo storico

La cosiddetta geometria delle trasformazioni è relativamente recente. Per secoli fare geometria ha significato studiarla secondo quanto prescrisse Euclide nei suoi Elementi, scritti attorno al 300 a.C. Euclide considera sì il concetto di movimento da un punto di vista intuitivo e meccanico, ma non lo descrive, non dice cioè come possa avvenire, né lo considera come una "trasformazione".
Solo nel XIX secolo la geometria si avvia a trattare le trasformazioni geometriche, da un punto di vista algebrico, quindi come applicazioni da insiemi di punti a insiemi di punti. La vera e propria consacrazione si ha nel cosiddetto programma di Erlangen, ossia nella prolusione che il famoso matematico tedesco Felix Klein presentò all'Università di Erlangen come "presentazione" dei suoi studi, quando fu lì nominato professore.
Klein suggeriva appunto di studiare la geometria come una corrispondenza fra insiemi di punti; lo studio doveva poi fissarsi sui cosiddetti "invarianti", cioè su quegli enti che non cambiavano durante la trasformazione, come appunto la misura di segmenti o angoli, la direzione di rette e altre proprietà più complesse.

Adesso vediamo quali possono essere le più elementari trasformazioni isometriche.
Cominciamo con l'operazione di spostare la figura lungo una direzione, come se scorresse su binari paralleli. Dobbiamo premettere la definizione di alcuni strumenti necessari.

Definizione 3

Chiamiamo **vettore** un segmento sul quale abbiamo stabilito un orientamento. Un vettore è caratterizzato da 3 grandezze: **ampiezza** (la lunghezza del segmento), **direzione** (la retta a cui appartiene il segmento), **verso** (l'ordine con cui ci si sposta sulla retta direzione).

Definizione 4

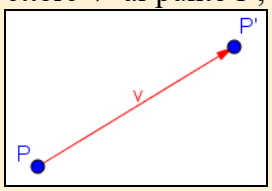
Due vettori che hanno uguali ampiezza, direzione e verso si dicono fra loro **equipollenti**.

Notazione 2

Indichiamo con il simbolo $\vec{v}$, un vettore di nome v.

Notazione 3

Indichiamo con $P + \vec{v}$ l'applicazione del vettore $\vec{v}$ al punto P, cioè il raggiungimento del punto P' a partire da P come è chiarito nella figura seguente.



Vale il seguente risultato.

Teorema 1

La relazione di equipollenza tra vettori è una relazione di equivalenza.

Che cosa significa?

Vettore. Dal latino *vehere* che significa trasportare con il carro. Il vettore indica quindi un movimento. Ricordiamo che in astronautica la parola vettore indica un razzo.

Quindi, fissato un punto del piano, il vettore è un segmento che ci indica di quanto, in che direzione e in che verso ci dobbiamo spostare, mediante la sua ampiezza, la retta a cui appartiene e l'ordine su di essa stabilito. Possiamo perciò dire che un vettore è individuato dalla sua ampiezza, dalla sua direzione e dal suo verso.

Esempio 3

Spesso nel linguaggio comune si parla di distanza in linea d'aria. Per esempio se dobbiamo spostarci da casa nostra al centro della città, diciamo che in linea d'aria questo è un percorso per esempio di 1 chilometro. Ciò significa che, se consideriamo il percorso più corto possibile, appunto quello che si effettuerebbe *volando*

senza ostacoli di alcuna natura, dovremmo percorrere 1 *Km*. In realtà nel nostro percorso siamo vincolati a seguire le strade tracciate, se andiamo con un mezzo siamo anche limitati dai divieti di circolazione e così via. Se però consideriamo il segmento orientato da casa (punto di partenza) al centro (punto di arrivo) e lungo 1 *Km* otteniamo il *vettore* che rappresenta il percorso minimo, anche se solo teorico.

Anche se potrebbe sembrare ovvio è importante definire anche il concetto seguente.

Definizione 5

Diciamo **vettore nullo** il vettore che applicato a qualsiasi punto del piano gli associa lo stesso punto.

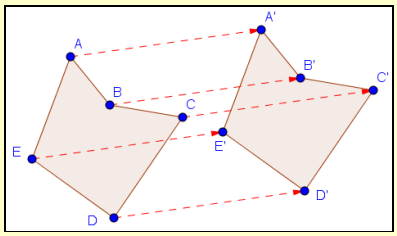
In effetti lo stare fermi è un tipo molto particolare di movimento, appunto il movimento nullo. Ce ne rendiamo meglio conto dall'osservazione fisica di un corpo in movimento. Anche se il corpo rimane fermo, da un punto di vista fisico qualcosa sta variando: il tempo.
Passiamo adesso a definire la prima corrispondenza biunivoca che vogliamo trattare.

Definizione 6

Diciamo **traslazione** di vettore $\vec{v}$ la trasformazione geometrica τ che a ogni punto P associa il punto $P + \vec{v}$.
Cioè in formula: $\tau(P) = P + \vec{v}$

Esempio 4

Di seguito proponiamo un esempio grafico di traslazione di un poligono, in questo caso basta traslare solo i vertici, dato che questi determinano univocamente il poligono. Non bisogna però dimenticare che si traslano tutti i punti del piano e non solo i vertici o i punti dei poligoni. Per facilitare le cose abbiamo indicato con lo stesso nome, ma seguito da un apice il vertice che si ottiene mediante la traslazione.

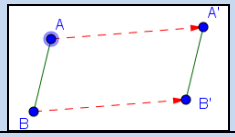


Osserviamo che i vettori che congiungono i vertici corrispondenti sono tutti paralleli fra loro.

Enunciamo il seguente risultato abbastanza intuitivo.

Teorema 2

Una traslazione è una isometria.
Dimostrazione
Per provare la tesi basta far vedere che traslando un segmento generico il suo traslato è isometrico a esso.

Schema dimostrativo			
Passo	**Azione**	**Conseguenza**	**Giustificazione**
1	Trasliamo un segmento AB di un generico vettore non nullo $\vec{v}$	Otteniamo il parallelogramma $AA'B'B$ 	Per definizione di traslazione AA' e BB' sono paralleli ed isometrici.
2	Consideriamo AB e $A'B'$	Sono isometrici	Perché lati opposti di uno stesso parallelogramma.

Una volta che siamo passati da un punto a un altro ci potrebbe interessare fare il contrario, andati in centro vogliamo ritornare a casa. Per far ciò abbiamo bisogno di definire quest'altro concetto.

Definizione 7

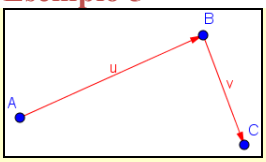
Dato un vettore $\vec{v}$, diciamo suo **vettore opposto**, quel vettore che ha la stessa ampiezza di $\vec{v}$, la stessa direzione ma verso opposto.

Notazione 4

Dato un vettore $\vec{v}$, il suo vettore opposto lo indichiamo con il simbolo $-\vec{v}$.

Consideriamo un'altra questione.

Esempio 5

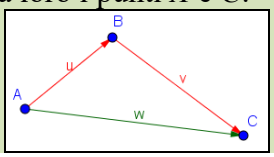


In figura, dal punto A siamo andati al punto B e poi al punto C. Se volessimo ritornare al punto A è necessario ripetere il percorso al contrario? Se consideriamo il percorso in linea d'aria certamente no, la strada che da C porta ad A è più corta della somma delle altre due. In effetti nella realtà potremmo essere vincolati dal fatto che non esiste una strada che da C porta direttamente ad A o che essa per vari motivi è meno preferibile del percorso più lungo CBA.

Vediamo di precisare quel che abbiamo evidenziato nell'esempio precedente.

Definizione 8

Dato il vettore $\vec{u}$ che collega fra loro i punti A e B e il vettore $\vec{v}$ che collega fra loro i punti B e C. Diciamo **somma** di $\vec{u}$ e $\vec{v}$ il vettore $\vec{w}$ che collega fra loro i punti A e C.



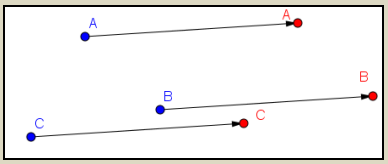
In pratica si usa la cosiddetta regola del parallelogramma, dato che il vettore $\vec{w}$ altri non è che la diagonale del parallelogramma in cui due lati consecutivi sono AB e BC.

Verifiche

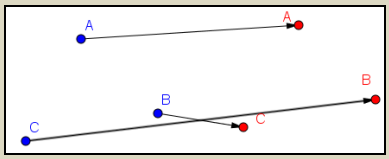
Lavoriamo insieme

Dato l'insieme $X = \{A, B, C\}$ di 3 punti nel piano, possiamo effettuare un totale di 6 diverse trasformazioni geometriche da X in se stesso. Studiarle.

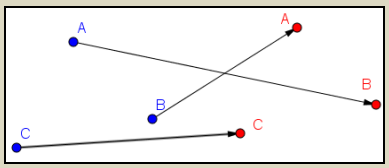
1. $\tau(A) = A$; $\tau(B) = B$; $\tau(C) = C$; è la cosiddetta trasformazione identica, in cui ogni punto viene associato a se stesso.



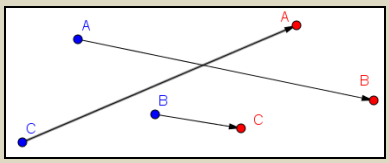
2. $\tau(A) = A$; $\tau(B) = C$; $\tau(C) = B$.



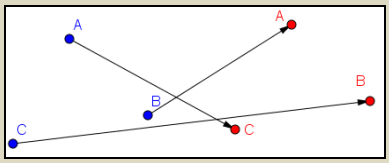
3. $\tau(A) = B$; $\tau(B) = A$; $\tau(C) = C$.



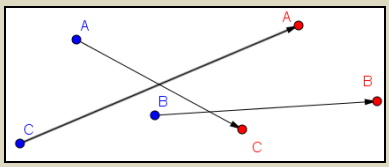
4. $\tau(A) = B$; $\tau(B) = C$; $\tau(C) = A$.



5. $\tau(A) = C$; $\tau(B) = A$; $\tau(C) = B$.



6. $\tau(A) = C$; $\tau(B) = B$; $\tau(C) = A$.

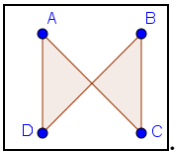


Livello 2

1. Quante diverse trasformazioni si possono effettuare dall'insieme $X = \{A, B\}$ a $Y = \{C, D\}$? [2]
2. Quante diverse trasformazioni si possono effettuare dall'insieme $X = \{A, B\}$ a $Y = \{C, D, E\}$? [6]
3. Quante diverse trasformazioni si possono effettuare dall'insieme $X = \{A, B, C\}$ a $Y = \{D, E, F\}$? [6]
4. Quante diverse trasformazioni dall'insieme $X = \{A, B, C\}$ a $Y = \{D, E, F\}$? associano A a D? [2]
5. Dato l'insieme $X = \{A, B, C, D\}$, quante diverse trasformazioni geometriche da X in se stesso, possiamo effettuare? [24]
6. Dato l'insieme $X = \{A, B, C, D\}$, quante delle trasformazioni geometriche da X in se stesso, hanno A fisso, cioè sono tali che sia $\tau(A) = A$? [6]
7. Dato l'insieme $X = \{A, B, C, D\}$, quante delle trasformazioni geometriche da X in se stesso, hanno sia A che B fisso? [2]
8. Dato l'insieme $X = \{A, B, C\}$, quante delle trasformazioni geometriche da X in se stesso, non hanno alcun punto fisso? [3]

Livello 3

9. Dato l'insieme $X = \{A, B, C, D\}$, quante delle trasformazioni geometriche da X in se stesso, non hanno alcun punto fisso? [9]
10. Dato un quadrato $ABCD$, quante delle trasformazioni che a ogni suo vertice associano un altro vertice dello stesso quadrato, hanno come risultato ancora un quadrato? Nel senso che i vertici della figura corrispondente devono essere uniti nello stesso ordine con cui vengono ottenuti. Per esempio $\tau(A) = C$; $\tau(B) = A$; $\tau(C) = D$; $\tau(D) = B$, da luogo al quadrilatero $CADB$, che non è un quadrato, come

mostrato in figura 

. [8]

Lavoriamo insieme

Data la trasformazione $\tau(x; y) = (3x + y\ ;\ x - 1)$, *determinare il trasformato del punto* (1; 2).
Avremo $\tau(1; 2) = (3 \cdot 1 + 2;\ 1 - 1) = (5; 0)$.

Livello 1

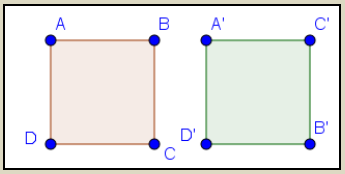
11. Determinare i corrispondenti dei seguenti punti secondo la trasformazione $\tau(x; y) = (2x + 3y\ ;\ x - y)$
(1; 2) ; (0; 0); (–1; 3) ; (2; –2) ; (0; –4) [(8; –1) ; (0; 0) ; (7; –4); (– 2; 4); (–12; 4)]
12. Determinare i corrispondenti dei seguenti punti secondo la trasformazione $\tau(x; y) = (x + y\ ;\ x - y + 1)$
(2; 2) ; (1; –1); (–2; 0) ; (0; –2) ; (3; –4) [(4; 1) ; (0; 1) ; (–2; –1); (–1; 3); (–1; 8)]
13. Determinare i corrispondenti dei seguenti punti secondo la trasformazione $\tau(x; y) = (2\ ;\ 3x - y + 2)$
(1; –3) ; (2; 2); (–2; –3) ; (0; –1) ; (–2; 0) [(2; 8) ; (2; 2) ; (2; –1); (2; 3); (2; –4)]

Livello 2

14. Determinare, se esistono, i punti uniti, cioè quelli per i quali si ha $\tau(x; y) = (x; y)$, nelle trasformazioni seguenti $\tau(x; y) = (x + y; y)$; $\tau(x; y) = (x + y + 1; x - y + 2)$; $\tau(x; y) = (2x + y - 1; 3)$
[(x; 0); (–4;–1); (–2; 3)]
15. Determinare, se esistono, i punti per i quali si ha $\tau(x; y) = (y; x)$, nelle trasformazioni seguenti $\tau(x; y) = (x; 2y)$; $\tau(x; y) = (x + y; 2)$; $\tau(x; y) = (2x + y - 1; x + 2y + 1)$ [(0; 0); ∅; (–1/2; 1/2)]
16. Determinare, se esistono, i punti per i quali si ha $\tau(x; y) = (x + y; y - x)$, nelle trasformazioni seguenti $\tau(x; y) = (x + y; y)$; $\tau(x; y) = (x + y + 1; x - y + 2)$; $\tau(x; y) = (2x + y - 1; 3)$ [(0; y); ∅; (1; 4)]

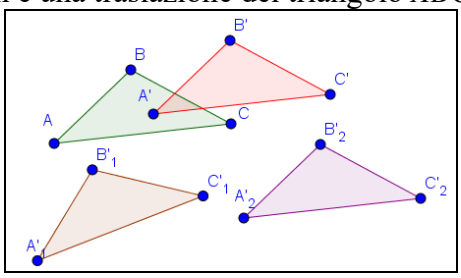
Lavoriamo insieme

In una traslazione può accadere che si inverta l'ordine di lettura?
La risposta è negativa, come mostrato con il quadrato *ABCD* in figura, che non potrà mai diventare il quadrato *A'C'B'D'*; dove il corrispondente di un vertice è quello che ha lo stesso nome con l'apice. Il vettore traslazione in questo caso è parallelo al lato *AB*. Il risultato non cambierebbe anche scegliendo vettori con direzioni diverse.

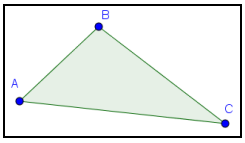


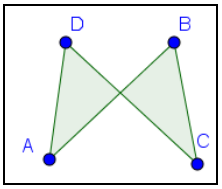
Livello 1

17. Quale vettore si ottiene sommando due vettori fra loro opposti? Giustificare la risposta. [Quello nullo]
18. Quali fra le seguenti figure non è una traslazione del triangolo *ABC*? [$A_1'B_1'C_1'$]

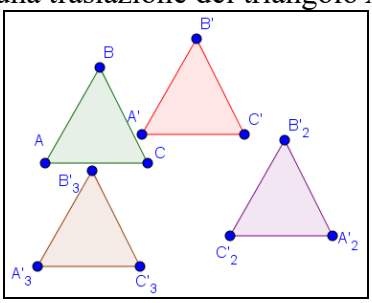


19. Effettuare la traslazione del seguente triangolo rispetto ai vettori: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AC}$.

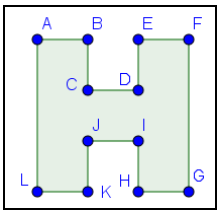




20. Effettuare la traslazione del seguente poligono rispetto ai vettori: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$.
21. Quali fra le seguenti figure non è una traslazione del triangolo ABC? [$A_2'B_2'C_2'$]



Livello 2

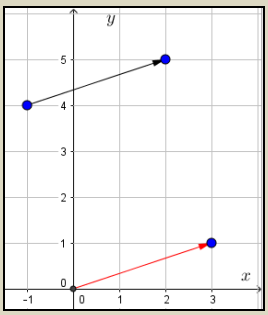


22. Effettuare la traslazione del seguente poligono rispetto ai vettori: $\overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{EJ}$, $\overrightarrow{AG}$.
23. Generalizzando la regola data per sommare due vettori, ottenere una regola per sommare più di due vettori.
24. Data una figura $\mathcal{F}$, le si applichi una traslazione di vettore $\vec{v}$, ottenendo $\mathcal{F}$'. A $\mathcal{F}$' si applichi una traslazione di vettore $\vec{w}$, ottenendo $\mathcal{F}$". Si dimostri che esiste una traslazione di vettore $\vec{v}+\vec{w}$ che permette di passare da $\mathcal{F}$ a $\mathcal{F}$".
25. Per simulare il movimento di un oggetto sullo schermo di un PC, si disegna l'oggetto, quindi dopo un brevissimo intervallo di tempo, non percepibile dall'occhio umano, si cancella l'oggetto che viene ridisegnato a una certa distanza da prima. E così via. Supponiamo di voler simulare il movimento orizzontale di un segmento lungo 10 pixel, lungo uno schermo largo 1024 pixel. Se ogni volta disegniamo il segmento 4 pixel più a destra di prima, quante operazioni di disegno e cancellatura, dobbiamo fare in totale per mostrare l'oggetto che attraversa lo schermo, apparendo all'inizio con il suo estremo sinistro nel primo pixel dello schermo, e poi sparisce del tutto? [508]
26. Con riferimento al precedente quesito, se le operazioni in totale sono 450, di quanti pixel ci spostiamo ogni volta? [5]

Lavoriamo insieme

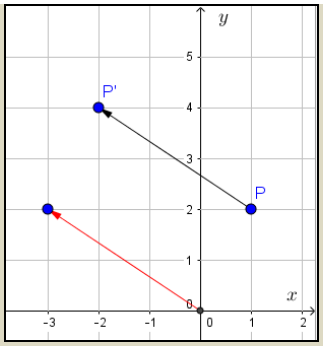
Nel piano cartesiano la traslazione ubbidisce a semplici regole, note anche dalla fisica. Intanto il vettore della traslazione è determinato dalle sue componenti, ossia dalle coordinate del punto che si ottiene ponendo il vettore sull'origine degli assi.

In figura mostriamo come il vettore nero venga traslato in modo che il suo punto di applicazione risulti l'origine, quindi le sue componenti sono (3; 1)



A questo punto per determinare il corrispondente di un punto $P \equiv (x_P; y_P)$ rispetto alla traslazione di vettore di componenti $(x_v; y_v)$, basta sommare algebricamente ottenendo $P' \equiv (x_P + x_v; y_P + y_v)$.

In figura vediamo cosa accade per il punto $P \equiv (1; 2)$ che traslato secondo il vettore $v \equiv (-3; 2)$, diventa il



punto $P' \equiv (1 - 3; 2 + 2) \equiv (-2; 4)$.

Livello 1

Determinare i corrispondenti dei punti indicati rispetto ai vettori accanto indicati

27. $A \equiv (0; 0)$, $v \equiv (1; 4)$; $B \equiv (0; 2)$, $v \equiv (-1; 0)$; $C \equiv (3; 0)$, $v \equiv (0; -1)$
[$A' \equiv (1; 4)$; $B' \equiv (-1; 2)$; $C' \equiv (3; -1)$]
28. $D \equiv (1; 2)$, $v \equiv (-1; -2)$; $E \equiv (3; -1)$, $v \equiv (1; -3)$; $F \equiv (2; -2)$, $v \equiv (2; -2)$
[$D' \equiv (0; 0)$; $E' \equiv (4; -4)$; $F' \equiv (4; -4)$]
29. $G \equiv (3; -3)$, $v \equiv (2; -1)$; $H \equiv (-1; -4)$, $v \equiv (-3; -2)$; $I \equiv (5; -2)$, $v \equiv (3; -3)$
[$G' \equiv (5; -4)$; $H' \equiv (-4; -6)$; $I' \equiv (8; -5)$]

Livello 2

30. $L \equiv (1; -1)$, $v \equiv (a; -a)$; $M \equiv (-2; 0)$, $v \equiv (a; b)$; $N \equiv (a; -b)$, $v \equiv (b; -a)$
[$L' \equiv (1 + a; -1 - a)$; $M' \equiv (a - 2; b)$; $N' \equiv (a + b; -a - b)$]
31. $P \equiv (a; b)$, $v \equiv (b; a)$; $Q \equiv (a - b; a + b)$, $v \equiv (a + b; a - b)$; $R \equiv (a; a - 1)$, $v \equiv (1 - b; b - 1)$
[$P' \equiv (a + b; a + b)$; $Q' \equiv (2a; 2a)$; $R' \equiv (a - b + 1; a + b - 2)$]

Livello 3

32. Per quali valori di a il punto L' dell'esercizio 24 diventa l'origine degli assi? [$a = -1$]
33. Per quali valori di a e di b il punto M' dell'esercizio 24 diventa l'origine degli assi? [$a = 2$; $b = 0$]
34. Per quali valori di a e di b il punto Q' dell'esercizio 25 diventa l'origine degli assi? [$a = 0$, b qualsiasi]
35. Per quali valori di a il punto L' dell'esercizio 24 diventa (1; 2)? [Impossibile]
36. Per quali valori di a il punto L' dell'esercizio 24 appartiene al I quadrante? [Impossibile]

Le simmetrie

Un altro tipo di trasformazione, che però non è un vero e proprio movimento piano, si può ottenere con un procedimento simile a quello che avviene quando ci si guarda allo specchio. Definiamolo.

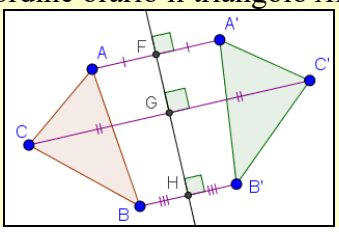
Definizione 9

Diciamo **simmetria assiale** di asse la retta a, la trasformazione geometrica che a ogni punto P del piano associa il punto P', ottenuto in modo che l'asse a sia perpendicolare al segmento PP' nel suo punto medio.

Vediamo qualche esempio grafico.

Esempio 6

In figura presentiamo la simmetria assiale del triangolo ABC rispetto a una retta. Abbiamo unito anche i vertici fra loro corrispondenti, per notare che tali segmenti sono effettivamente perpendicolari all'asse di simmetria e sono divisi a metà da tale asse. Osserviamo inoltre che la simmetria assiale non mantiene l'ordine di lettura, dato che, leggendo in ordine orario il triangolo ABC diventa il triangolo $A'C'B'$.



Enunciamo il seguente risultato abbastanza intuitivo.

Teorema 3

Una simmetria assiale è una isometria.
Dimostrazione per esercizio

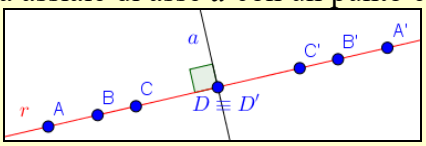
Negli esercizi del paragrafo precedente abbiamo usato un concetto che definiamo in modo più preciso.

Definizione 10

Data una trasformazione geometrica τ, diciamo che un ente geometrico X del piano o dello spazio (punto, retta, poligono, ...) è **unito** per τ se $\tau(X) = X$.

Parliamo quindi di punti uniti, rette unite e così via. Ovviamente in una simmetria assiale lo stesso asse è una retta unita, dato che naturalmente ogni punto è associato a se stesso. Facciamo attenzione al fatto che una retta unita non deve essere formata necessariamente da punti uniti.

Esempio 7

Nella figura seguente la retta r è perpendicolare alla retta a, quindi ogni punto di r si corrisponde in una simmetria assiale di asse a con un punto che ancora fa parte di r, ma solo il punto D, intersezione di r con a, è unito. 

Invece la stessa retta a non solo è unita, sempre rispetto alla simmetria assiale di asse la stessa a, ma in più ha tutti i punti che sono uniti.

Risulta immediata la dimostrazione del seguente risultato.

Teorema 4

In una simmetria assiale
- i punti dell'asse sono gli unici punti uniti;
- l'asse è l'unica retta di punti uniti;
- le rette perpendicolari all'asse sono unite.

Se applichiamo a una data figura F, una simmetria di asse la retta a, otteniamo una certa figura F'. Se applichiamo a F' la stessa simmetria riotteniamo F. Poniamo allora la seguente definizione

Definizione 11

Una trasformazione geometrica t per la quale si ha $t \circ t$ = Identità, si dice **involutoria**.

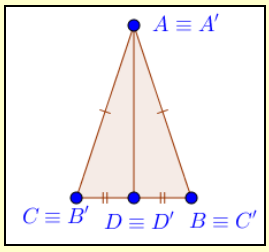
Una trasformazione involutoria è quindi inversa di sé stessa. È ovvia la validità del seguente risultato.

Teorema 5

Una qualsiasi simmetria assiale è involutoria.
Dimostrazione per la stessa definizione di simmetria assiale.

Esempio 8

In un qualsiasi triangolo isoscele la retta che contiene l'altezza relativa alla base è evidentemente asse di simmetria, come meglio mostrato in figura



In vista del precedente esempio poniamo la seguente definizione.

Definizione 12

Dato un poligono P per il quale esiste una simmetria assiale di asse una retta a, rispetto alla quale P è unito. La retta a si dirà **asse di simmetria** del poligono.

Perciò possiamo dire che nel triangolo equilatero vi sono 3 assi di simmetria.

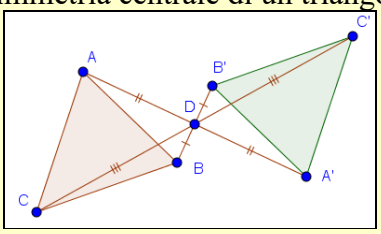
Adesso risulta naturale considerare un procedimento simile al precedente ma riferito a un punto, detto *centro*, piuttosto che a una retta. .

Definizione 13

Diciamo **simmetria centrale** di centro il punto C, la trasformazione geometrica che a ogni punto P associa il punto P', ottenuto in modo che i punti P, P' e C siano allineati e C sia il punto medio del segmento PP'.

Esempio 9

Di seguito proponiamo un esempio di simmetria centrale di un triangolo rispetto ad un punto a esso esterno.



In figura abbiamo tratteggiato i segmenti congiungenti i vertici corrispondenti, notando che essi passano per il centro, che è punto medio dei detti segmenti. Anche nel caso della simmetria centrale non viene conservato l'ordine di lettura.

Anche in questo caso enunciamo senza dimostrazione, che lasciamo per esercizio, i seguenti intuitivi risultati.

Teorema 6

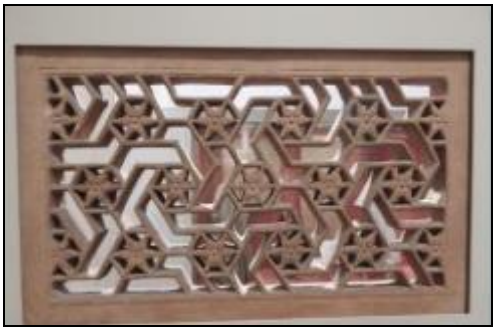
Ogni simmetria centrale è una isometria.

Teorema 7

In una simmetria centrale
- il centro è l'unico punto unito;
- ogni retta passante per il centro è una retta unita;
- non vi sono rette tutte formate da punti uniti.

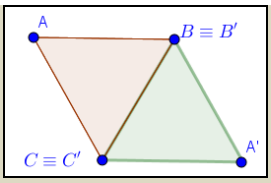
Concludiamo osservando che in un triangolo equilatero, baricentro, incentro, ortocentro e circocentro coincidono e sono centri di simmetria per il triangolo.

Sin da tempi remoti, soprattutto nelle culture arabe, le simmetrie sono state utilizzate nelle decorazioni di mattonelle, tappeti, vasi ecc. Vediamo un esempio in alcune decorazioni di origine araba, custodite presso il Victoria and Albert Museum di Londra.



Verifiche

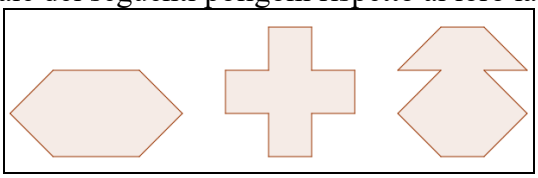
Lavoriamo insieme

In figura 

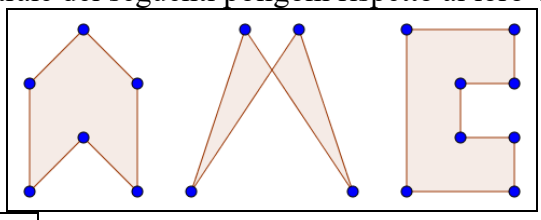
abbiamo effettuato la simmetria di un triangolo equilatero rispetto a uno dei suoi lati, che tipo di quadrilatero è ABA'C?
Dalla figura sembra un parallelogramma ed in effetti lo è, dato che i lati opposti sono ovviamente a due a due isometrici, anzi sono tutti isometrici, pertanto abbiamo a che fare con un rombo.

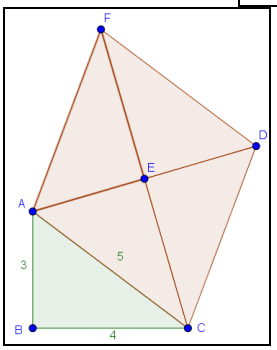
Livello 1

1. Se il triangolo *ABC* nel box lavoriamo insieme non è equilatero, possiamo dire che si ottiene sempre un parallelogramma? Giustificare la risposta. [No]
2. Con riferimento al quesito precedente, quando si può ottenere un parallelogramma anche se *ABC* non è equilatero? [Se è isoscele sulla base rispetto cui facciamo la simmetria]
3. Se *ABC* è rettangolo ed effettuiamo la simmetria rispetto a un cateto cosa otteniamo? [Un triangolo isoscele]
4. Se *ABC* è rettangolo ed effettuiamo la simmetria rispetto all'ipotenusa, cosa otteniamo? [Un quadrilatero con i lati a due a due isometrici, ma non quelli opposti]
5. Dato un triangolo *ABC* effettuiamo le simmetrie assiali rispetto ai 3 lati, possiamo dire che in questo modo otteniamo sempre un quadrilatero? Giustificare la risposta.
6. Dato un triangolo equilatero *ABC* effettuiamo le simmetrie assiali rispetto ai 3 lati, di che tipo è il poligono che ha per vertici i simmetrici dei punti opposti ai lati rispetto cui effettuiamo le simmetrie? Giustificare la risposta. [Triangolo equilatero]
7. Effettuare la simmetria assiale dei seguenti poligoni rispetto ai loro lati.



8. Effettuare la simmetria centrale dei seguenti poligoni rispetto ai loro vertici.



9. In figura 

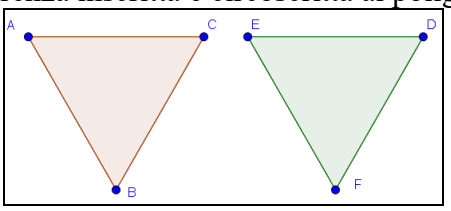
i triangoli sono ottenuti a partire da *ABC* con delle simmetrie assiali rispetto ai lati. Quanto misura il perimetro del poligono *ABCDF*? [22]

Livello 2

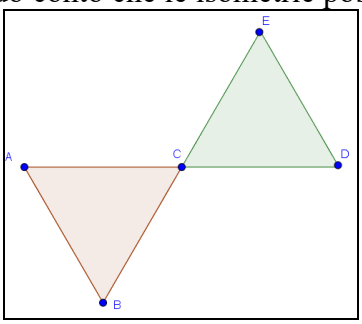
10. Dimostrare il Teorema 3.
11. Dimostrare il Teorema 5.
12. Dimostrare il Teorema 6.
13. Dimostrare il Teorema 7.
14. Il punto d'incontro delle diagonali di un generico parallelogramma è centro di simmetria per il poligo-

no? Giustificare la risposta. [No]

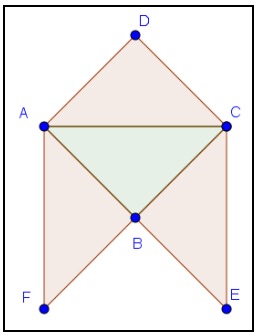
15. Un poligono regolare ha centro di simmetria? Giustificare la risposta.
[Sì, il centro della circonferenza inscritta e circoscritta al poligono]

16. L'isometria in figura collega fra loro due triangoli equilateri. 

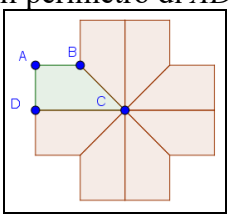
Questa isometria può essere sia una traslazione sia una simmetria assiale. In ciascuno dei due casi, individuare le coppie di vertici corrispondenti e le caratteristiche dell'isometria.

17. Come nell'esercizio precedente con questi altri triangoli equilateri, tenendo conto che le isometrie possono essere sia una simmetria assiale, sia una simmetria centrale.


18. Data una figura piana $\mathcal{F}$, le si applichi una simmetria assiale rispetto a un dato asse a per ottenere la figura $\mathcal{F}'$. A $\mathcal{F}'$ si applichi ancora una simmetria assiale rispetto a un asse a' parallelo ad a, ottenendo così la figura $\mathcal{F}''$. Dimostrare che possiamo passare da $\mathcal{F}$ a $\mathcal{F}''$ mediante una traslazione.

19. In figura 

il triangolo ABC è isoscele sulla base AB, i triangoli ADC, BCE e BFA sono simmetrici di ABC rispetto ai lati che hanno con esso in comune. Se $\overline{BA} = \overline{CB} = a, \overline{AC} = b$, quanto misura il perimetro di $ADCEBF$? [$4a + 2b$]

20. In figura 

il poligono è ottenuto a partire dal trapezio rettangolo $ABCD$, con successive simmetrie assiali, se $\overline{AD} = a, \overline{AB} = b, \overline{BC} = c, \overline{CD} = d$, quanto misura il perimetro del poligono?
[$8 \cdot (a + b)$]

Livello 3

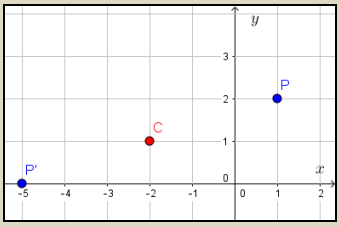
21. Con riferimento al precedente esercizio, comunque sia scelto ABC isoscele otteniamo sempre un poligono $ADCEBF$ il cui perimetro misura quanto trovato? Giustificare la risposta. [No, solo se $b \leq 2a$]
22. In un poligono regolare esistono sempre rette passanti per i suoi vertici che sono assi di simmetria per lo stesso poligono? Giustificare la risposta. [Solo se il poligono ha un numero pari di lati]
23. In un poligono regolare con un numero dispari di lati ci sono assi di simmetria? [Sì, gli assi dei lati]
24. Quanti assi di simmetria ha un esagono regolare? E un ettagono (sette lati)? [6; 7]
25. Quanti assi di simmetria ha un poligono regolare di n lati? Giustificare la risposta. [n]
37. Componiamo la simmetria rispetto a due rette fra loro perpendicolari che tipo di trasformazione isometrica otteniamo? Giustificare la risposta. [Simmetria di centro il punto intersezione]
38. Componiamo la simmetria rispetto a due rette fra loro parallele, che tipo di trasformazione isometrica

otteniamo? Giustificare la risposta. [Traslazione]

Lavoriamo insieme

Nel piano cartesiano determinare le leggi della simmetria centrale.

Si ottengono facilmente tenendo conto che, dato il punto $P \equiv (x_P; y_P)$ e il centro $C \equiv (x_C; y_C)$, il corrispondente $P' \equiv (x_{P'}; y_{P'})$ è tale che C è punto medio di PP'. Non è difficile capire che il punto medio è appunto tale da costituire la media aritmetica, pertanto le sue coordinate sono le medie aritmetiche delle coordinate degli estremi. Cioè $C \equiv \left(\frac{x_P + x_{P'}}{2}; \frac{y_P + y_{P'}}{2}\right)$. Quindi avremo: $\begin{cases} x_C = \frac{x_P + x_{P'}}{2} \\ y_C = \frac{y_P + y_{P'}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{P'} = 2x_C - x_P \\ y_{P'} = 2y_C - y_P \end{cases}$,



che sono le leggi cercate. In figura mostriamo la validità delle formule trovate. Abbiamo $P \equiv (1; 2)$, $C \equiv (-2; 1)$, secondo le formule dovrebbe essere $P' \equiv (2 \cdot (-2) - 1; 2 \cdot 1 - 2) \equiv (-5; 0)$, come effettivamente si ha.

Determinare i corrispondenti dei punti seguenti rispetto ai centri indicati

Livello 1

39. $A \equiv (0; 0)$, $C \equiv (2; 1)$; $B \equiv (0; 2)$, $C \equiv (0; 0)$; $D \equiv (1; 2)$, $C \equiv (2; 1)$
[$A' \equiv (4; 2)$; $B' \equiv (0; -2)$; $C' \equiv (3; 0)$]
40. $E \equiv (2; -3)$, $C \equiv (0; -1)$; $F \equiv (0; -1)$, $C \equiv (4; -3)$; $G \equiv (1; 0)$, $C \equiv (0; -1)$
[$E' \equiv (0; 1)$; $F' \equiv (8; -5)$; $G' \equiv (-1; -2)$]
41. $H \equiv (-2; -1)$, $C \equiv (-1; -2)$; $I \equiv (2; -4)$, $C \equiv (5; -6)$; $L \equiv (1; -3)$, $C \equiv (1; 3)$
[$H' \equiv (0; -3)$; $I' \equiv (8; -8)$; $L' \equiv (1; 9)$]

Livello 2

42. $M \equiv (0; 0)$, $C \equiv (a; b)$; $N \equiv (a; -b)$, $C \equiv (0; 0)$; $P \equiv (1; -1)$, $C \equiv (a; a)$;
[$M' \equiv (2a; 2b)$; $N' \equiv (-a ; b)$; $P' \equiv (2a - 1; 2a + 1)$]
43. $Q \equiv (a; b)$, $C \equiv (b; a)$; $R \equiv (a - b; a + b)$, $C \equiv (a + b; a - b)$; $S \equiv (a; a - 1)$, $C \equiv (-b; b - 1)$
[$Q' \equiv (2b - a; 2a - b)$; $R' \equiv (a + 3b; a - 3b)$; $S' \equiv (-a - 2b; 2b - a - 1)$]
44. Determinare le leggi della simmetria rispetto all'origine. [$(x' = -x; y' = -y)$]
45. Per quali valori di a il punto P' dell'esercizio 34 diventa l'origine degli assi? [Impossibile]
46. Per quali valori di a e di b il punto M' dell'esercizio 34 diventa l'origine degli assi? [$a = b = 0$]
47. Per quali valori di a e di b il punto Q' dell'esercizio 35 diventa (1; 1)? [$a = b = 1$]
48. Per quali valori di a e di b il punto N' dell'esercizio 35 diventa (1; 2)? [$a = -1, b = 2$]
49. Per quali valori di a il punto P' dell'esercizio 34 appartiene al II quadrante? $\left[-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}\right]$

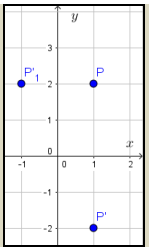
Livello 3

50. Usando la geometria analitica provare che la simmetria centrale è una trasformazione involutoria.

Lavoriamo insieme

Nel piano cartesiano determinare le leggi delle simmetrie rispetto agli assi cartesiani.

Facilmente si comprende che il corrispondente di $P \equiv (x_P; -y_P)$, analogamente il punto $P'' \equiv (-x_P; y_P)$ è il corrispondente di P rispetto alla simmetria di asse y. La figura seguente conferma l'intuizione.



Determinare i corrispondenti dei punti seguenti nelle simmetrie rispetto agli assi coordinati

Livello 1

51. $A \equiv (0; 0)$; $B \equiv (1; 2)$; $C \equiv (-1; 2)$; $D \equiv (3; -2)$
[$A' \equiv A'' \equiv (0; 0)$; $B' \equiv (1; -2)$, $B'' \equiv (-1; 2)$; $C' \equiv (-1; -2)$, $C'' \equiv (1; 2)$; $D' \equiv (3; 2)$, $D'' \equiv (-3; -2)$]

52. $E \equiv (-1; -2)$; $F \equiv (2; -3)$; $G \equiv (-1; 1)$; $H \equiv (0; -2)$
[$E' \equiv (-1; 2)$, $E'' \equiv (1; -2)$; $F' \equiv (2; 3)$, $F'' \equiv (-2; -3)$; $G' \equiv (-1; -1)$, $G'' \equiv (1; 1)$; $H' \equiv (0; 2)$, $H'' \equiv (0; 2)$]

Livello 2

53. $M \equiv (a; b)$; $N \equiv (a; -b)$; $P \equiv (a; a)$
[$M' \equiv (a; -b)$, $M'' \equiv (-a; b)$; $N' \equiv (a ; b)$, $N'' \equiv (-a; -b)$; $P' \equiv (a; -a)$, $P'' \equiv (-a; a)$]

54. $Q \equiv (a - b; a + b)$, $R \equiv (a + b; a - b)$; $S \equiv (a; a - 1)$ [$Q' \equiv (a - b; -a - b)$, $Q'' \equiv (-a + b; a + b)$; $R' \equiv (a + b; -a + b)$, $R'' \equiv (-a - b; a - b)$; $S' \equiv (a; 1 - a)$, $S' \equiv (-a; a - 1)$]

Livello 3

55. Per quali valori di a il punto P' dell'esercizio 45 diventa (2; 3)? [Impossibile]

56. Per quali valori di a e di b il punto M' dell'esercizio 45 diventa (–2; 3)? [$a = -2$, $b = -3$]

57. Per quali valori di a e di b il punto Q'' dell'esercizio 46 diventa (1; 1)? [$a = 0$, $b = 1$]

58. Per quali valori di a e di b il punto R'' dell'esercizio 46 diventa (1; 2)? $\left[a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}\right]$

59. Determinare le leggi della simmetria rispetto alla retta parallela all'asse x passante per (0; 2).
$$\left[\begin{cases} x' = x \\ y' = 4 - y \end{cases}\right]$$

60. Determinare le leggi della simmetria rispetto alla retta parallela all'asse y passante per (3; 0).
$$\left[\begin{cases} x' = 6 - x \\ y' = y \end{cases}\right]$$

La rotazione

Un altro tipo di movimento rigido è la rotazione, di cui abbiamo già parlato. Essa può farsi in due versi, o seguendo il giro delle lancette dell'orologio o nel verso contrario. Per convenzione scegliamo come verso di rotazione quello contrario alle lancette dell'orologio, detto anche *antiorario*.

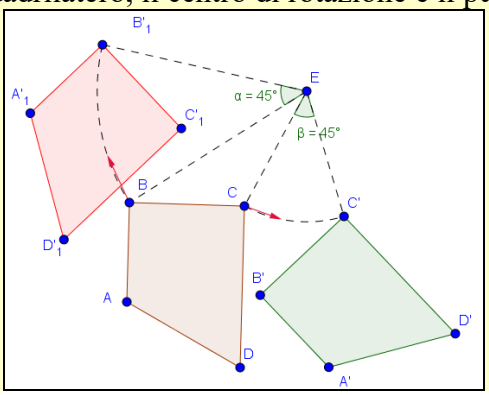
Definizione 14

Diciamo **rotazione** di centro C e angolo α la trasformazione geometrica che a ogni punto P associa il punto P', ottenuto considerando la circonferenza Γ di centro C e raggio CP e l'angolo α di vertice C, un lato del quale è la semiretta CP. Il punto P' è ottenuto dall'intersezione dell'altro lato dell'angolo con Γ.

Da un punto di vista per così dire pratico, la rotazione di un certo punto si effettua puntando il compasso sul centro della rotazione e, con l'apertura che va a toccare il punto, si sposta il compasso di un angolo uguale a quello della rotazione.

Esempio 10

Di seguito abbiamo ruotato il quadrilatero $ABCD$ di 45° prima in senso antiorario, ottenendo $A'B'C'D'$, e poi in senso orario, ottenendo l'altro quadrilatero, il centro di rotazione è il punto E.



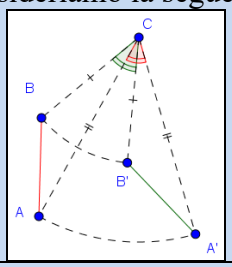
Anche in questo caso enunciamo e dimostriamo un risultato relativo all'isometria della trasformazione.

Teorema 8

Una rotazione è una isometria.

Dimostrazione

Per provare che una trasformazione è una isometria dobbiamo provare che, dato un qualsiasi segmento AB, il suo trasformato $A'B'$ è isometrico ad AB. Consideriamo la seguente figura per il riferimento.

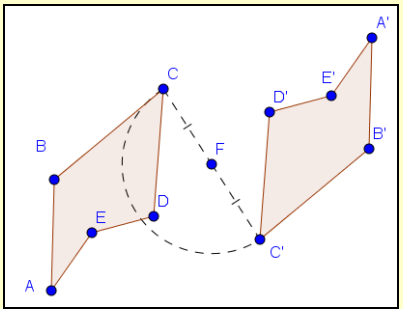


Schema dimostrativo			
Passo	**Azione**	**Conseguenza**	**Giustificazione**
1	Ruotiamo il segmento AB attorno al punto C di un angolo α.	Otteniamo $A'B'$. Si ha $\angle A\hat{C}A' = \angle B\hat{C}B' = \alpha$	Per definizione di rotazione.
2	Congiungiamo gli estremi dei due segmenti con il centro C.	Otteniamo i triangoli ABC e $A'B'C$.	
3	Confrontiamo i triangoli ABC e $A'B'C$.	I triangoli sono uguali.	Per il criterio LAL. • $\overline{AC} = \overline{A'C}$; $\overline{BC} = \overline{B'C}$ sono raggi di uguali circonferenze;

			• $\angle B\hat{C}A = \angle B'\hat{C}A'$, si ottengono togliendo ad angoli uguali uno stesso angolo, $A\hat{C}B'$.
4		La rotazione è una isometria.	Per il passo 3 anche AB e $A'B'$ sono isometrici.

Esempio 11

La figura seguente ci fa rendere conto facilmente che una simmetria centrale equivale a una rotazione di un angolo piatto rispetto lo stesso centro di simmetria.



Vale perciò il seguente risultato.

Teorema 9

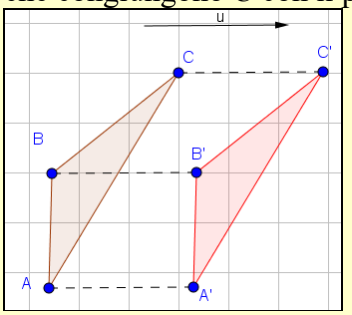
Una simmetria centrale di centro O equivale a una rotazione di un angolo piatto, sempre di centro O.

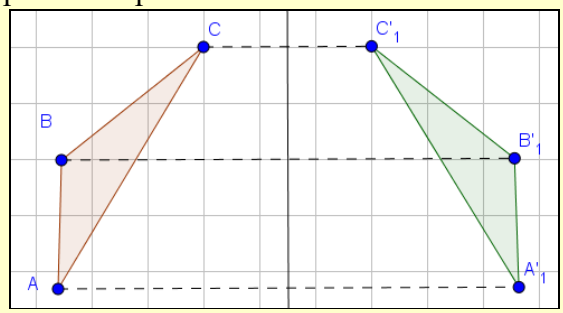
Da quel che abbiamo detto possiamo enunciare delle regole pratiche per stabilire, date due figure, se qualcuna delle trasformazioni isometriche trattate permette di passare da una all'altra.

- Se congiungendo tra loro i vertici corrispondenti si ottengono segmenti fra loro paralleli, allora la trasformazione è una traslazione o una simmetria assiale. In tal caso la determinazione effettiva si ottiene dal constatare se la trasformazione è diretta o inversa. Infatti la traslazione è una isometria diretta, ossia non cambia l'ordine di lettura dei vertici (considerando a esempio un poligono che, utilizzando il verso antiorario, a partire da A si legge $ABCDEF$, il suo trasformato a partire da A' si legge $A'B'C'D'E'F'$), mentre la simmetria assiale è una isometria inversa perché cambia questo ordine (con riferimento al poligono $ABCDEF$ il trasformato a partire da A' si legge $A'F'E'D'C'B'$).

Esempio 12

- In figura abbiamo trasformato lo stesso triangolo con una traslazione e una simmetria assiale, in modo che i segmenti che congiungono C con il proprio corrispondente siano in entrambi i casi isometrici.

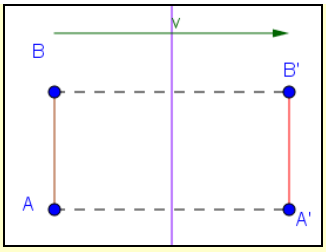




Come si nota, in entrambi i casi i segmenti che uniscono vertici corrispondenti sono paralleli fra loro, nel secondo caso però cambia il verso di lettura. Si può anche notare che nel primo caso sono isometrici anche gli altri segmenti che congiungono i vertici corrispondenti, nel secondo caso ciò non accade. Anche quest'ultimo fatto può servire a distinguere una traslazione da una simmetria assiale, ma non sempre.

- Nella seguente figura i segmenti AB e $A'B'$ si corrispondono tanto nella simmetria di asse la retta a, quanto nella traslazione di vettore $\vec{v}$ e non vi è alcun modo di distinguere quale delle due sia quella corretta. In questo caso particolare, le due trasformazioni applicate entrambe allo stesso oggetto

forniscono lo stesso risultato.

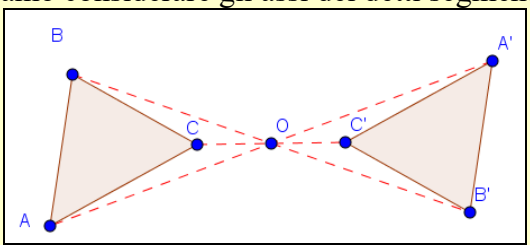


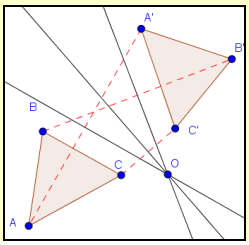
Continuiamo con le nostre regole pratiche.

- Se i segmenti congiungenti punti corrispondenti si incontrano in un punto la trasformazione è una simmetria centrale.
- Se gli assi dei segmenti congiungenti i punti corrispondenti si incontrano in un punto la trasformazione è una rotazione.

Esempio 13

Nella seguente figura, la prima trasformazione è una simmetria centrale, o una rotazione di 180°, la seconda è una rotazione di un angolo diverso da 180° e 360°. Nel primo caso i segmenti che uniscono i vertici corrispondenti si incontrano nel centro di simmetria. Nel secondo ciò non accade, per determinare il centro di rotazione dobbiamo considerare gli assi dei detti segmenti, che effettivamente si incontrano in *O*.



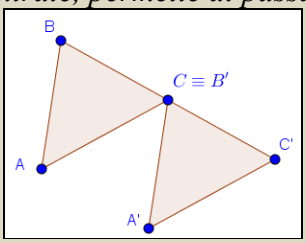


Vediamo un esempio di tavolino (custodito presso il Victoria and Albert Museum di Londra) decorato sfruttando largamente la simmetria centrale e la rotazione. L'origine del tavolino è turca, costruito circa nel 1560.

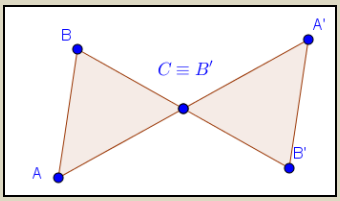
Verifiche

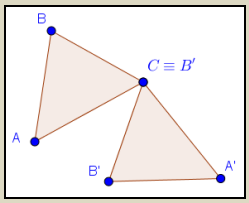
Lavoriamo insieme

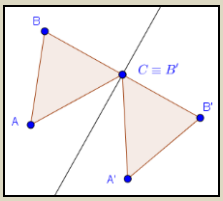
Con riferimento alla figura seguente stabilire quale delle quattro trasformazioni isometriche, traslazione, rotazione, simmetria assiale, simmetria centrale, permette di passare da ABC ad A'B'C'.



Abbiamo visto diversi metodi per rispondere alla nostra domanda, ciononostante potremmo ingannarci facilmente a causa del fatto che vi sono due punti delle due figure che coincidono. Questo infatti ci potrebbe far pensare che la trasformazione abbia un punto unito, facendoci optare quindi per una simmetria centrale o una rotazione. Ciò non è vero per il fatto che B' coincide con C e non con B, come dovrebbe se fosse unito.
Questo ragionamento limita la nostra ricerca alle altre due trasformazioni: simmetria assiale o traslazione. Ma ancora una volta possiamo eliminare facilmente la prima di esse. Infatti, una simmetria è una trasformazione inversa, cioè cambia l'ordine di lettura dei vertici, così se per leggere ABC nella prima figura usiamo il verso orario, nella figura trasformata con una simmetria dovremmo leggere $A'C'B'$, cosa che qui non accade. Di seguito vediamo gli esempi di trasformazione con due vertici che si corrispondono nei diversi casi di simmetria centrale, rotazione di angolo non multiplo di un piatto e simmetria di asse perpendicolare al lato BC.



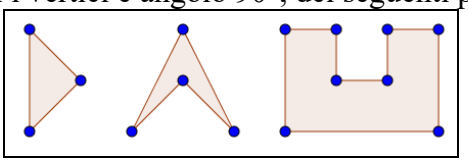




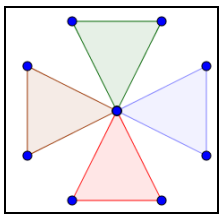
Tornando al nostro problema, possiamo concludere che la trasformazione è una traslazione di vettore $\overrightarrow{BC}$.

Livello 1

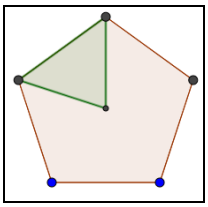
1. Effettuare le rotazioni di centri i vertici e angolo 90°, dei seguenti poligoni.



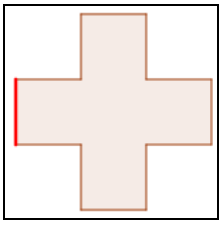
2. Costruire la seguente figura, nota come croce di Malta, mediante rotazione di un triangolo equilatero, scegliendo centro e angoli in modo opportuno.



3. Costruire un poligono regolare di 6, 8 e 10 lati, mediante la rotazione di un segmento attorno a un suo estremo, con angoli che misurano rispettivamente 60°, 45° e 36°.
4. Dopo avere costruito il seguente pentagono regolare, usando la rotazione attorno al centro segnato, effettuare la simmetria assiale rispetto alle rette contenenti i lati.



5. Con opportune rotazioni e a partire dal segmento rosso, costruire il seguente poligono a forma di croce



greca.

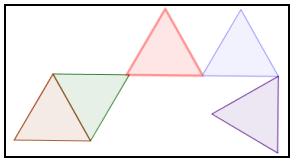
6. Con riferimento al precedente quesito determinare gli assi di simmetria del poligono.

Livello 2

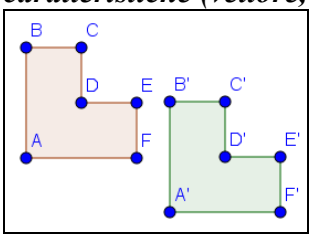
7. Costruire un poligono regolare di 6, 8 e 10 lati, mediante la rotazione di un triangolo attorno a un suo estremo. Scegliere in modo opportuno il triangolo di partenza.
8. Il tachimetro di un'automobile può considerarsi come la rotazione dell'indicatore della velocità rispetto a un suo estremo.

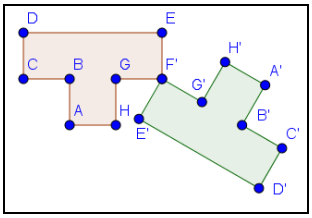
Se il tachimetro ha la forma di una semicirconferenza e misura massimo 240 *Km/h,* quando la macchina passa da 0 a 140 *km/h*, l'indicatore effettua una rotazione di quanti gradi? [105]
9. Il tachimetro in figura

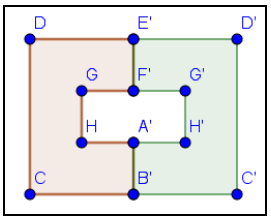
permette la rotazione dell'indicatore, da 0 a 240 *Km/h*, con un angolo di 270°. Quando la macchina passa da 70 a 160 *km/h*, l'indicatore effettua una rotazione di quanti gradi? [101°15′]
10. A partire da un triangolo equilatero possiamo costruire un esagono regolare mediante l'applicazione ripetuta di alcune delle trasformazioni isometriche qui presentate. Determinare tali trasformazioni, che possono essere più di una.
11. La seguente figura è ottenuta a partire dal triangolo posto più a sinistra, applicando in successione le quattro trasformazioni isometriche. Individuarle nel giusto ordine.

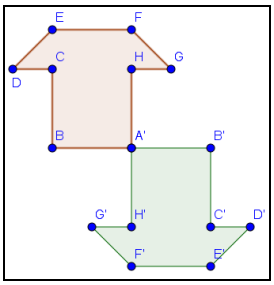


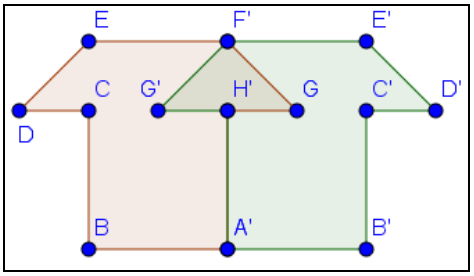
Determinare il tipo di isometria che permette di trasformare una figura nell'altra, determinando, se possibile le caratteristiche (vettore, centro, asse, angolo di rotazione)

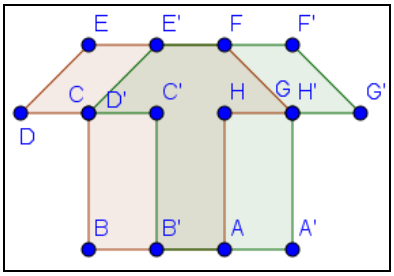
12. a) 

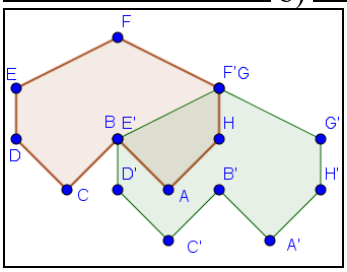
b) 

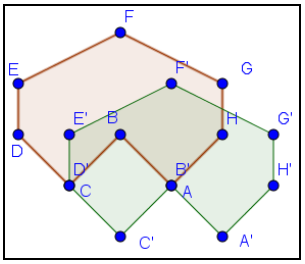
c) 

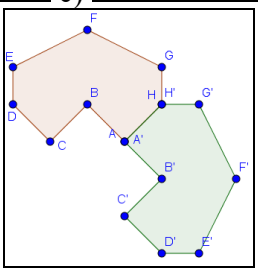
13. a) 

b) 

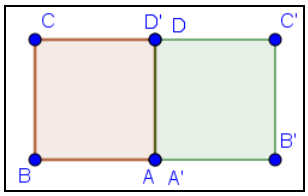
c) 

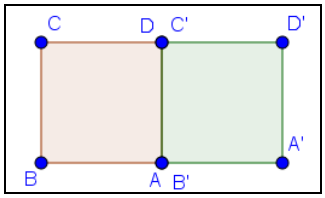
14. a) 

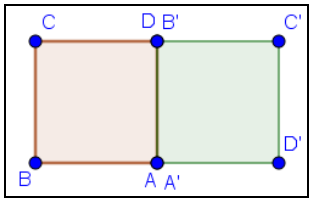
b) 

c) 

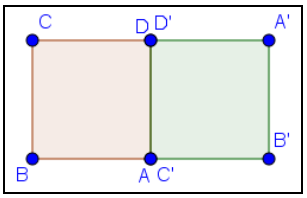
Livello 3

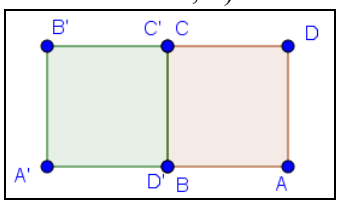
15. a) 

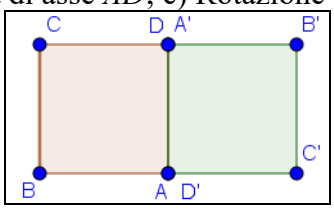
b) 

c) 

[a) Traslazione di vettore *BA*; b) Simmetria di asse *AD*; c) Rotazione di 90° di centro *A*]

16. a) 

b) 

c) 

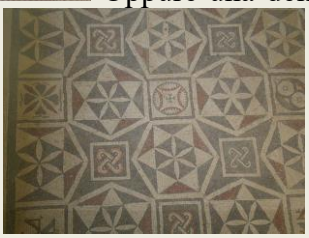
[a) Rotazione di 270° di centro *D* b) Rotazione di – 90° di centro *C*; c) Simmetria di centro il punto medio di *AD*]

17. Studiare le isometrie che mutano in sé un triangolo equilatero, ossia che associano a un triangolo equilatero sé stesso. Verificare che ve ne sono 6.
18. Ripetere quanto detto nell'esercizio precedente per un quadrato, verificando che stavolta esse sono in numero di 8.

Intervallo matematico

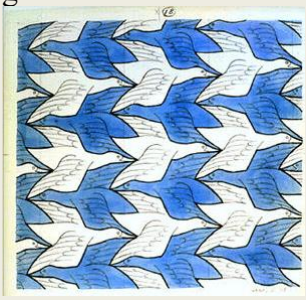
Diverse sono state le civiltà che hanno sfruttato le trasformazioni geometriche, specialmente la simmetria, nelle arti decorative. In particolare lo hanno fatto e continuano a farlo le civiltà cosiddette islamiche, in particolare dell'attuale Iran. Di seguito mostriamo alcuni esempi di manufatti custoditi presso il Victoria and Albert Museum di Londra.

Ma anche nelle civiltà occidentali la ripetizione di decorazioni con traslazioni o rotazioni ha prodotto raffinate decorazioni, come per esempio nella seguente tazza d'oro datata V sec. A.C., ritrovata a Gela e custodita presso il British Museum di Londra.

O nei mosaici di epoca romana, come testimoniato dal seguente mosaico di Dioniso, custodito presso il museo romano di Colonia. Oppure una delle tante pavimentazioni della cosiddetta Villa romana del Casale di Piazza Armerina. 

Anche in tempi a noi più recenti gli artisti si sono interessati a queste procedure, in particolare si ricorda il

grafico olandese Mauritz Cornelis Escher (1898 – 1972), di cui proponiamo l'opera del 1938 *Due uccelli*



in cui i due uccelli sono simmetrici uno dell'altro e le loro riproduzioni sono frutto di traslazioni; in *Lucertole* del 1939,

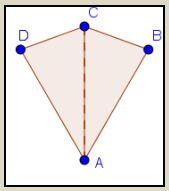
invece prevale la rotazione.

Ricordiamo infine l'artista americano Andy Warhol (1928 – 1987), che ha usato spesso la tecnica della riproducibilità, che matematicamente consiste in una serie di traslazioni in orizzontale e verticale, in cui però ogni oggetto differisce dal precedente per qualche dettaglio. Esempi sono le famose *Lattine della zuppa Campbell* o l'opera Marylin, custodita presso la Tate Modern di Londra, che di seguito proponiamo.

Per la prova Invalsi

Lavoriamo insieme

Il seguente quesito è stato assegnato alle prove Invalsi del 2003. *Il quadrilatero seguente è simmetrico rispetto alla retta AC. Sapendo che* $B\hat{A}C = 30°, C\hat{D}A = 70°$*, quanto vale* $B\hat{C}D$*?*

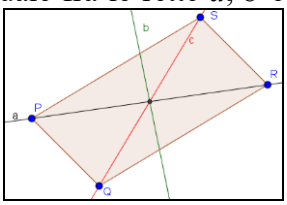


A) 140° B) 150° C) 160° D) 165° E) Le informazioni sono insufficienti.

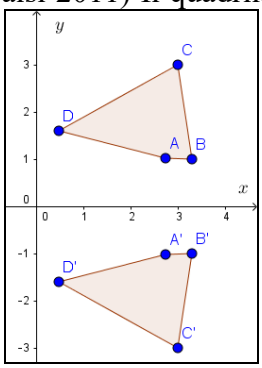
Dato che la simmetria è una trasformazione isometrica i triangoli *ADC* e *CBA* sono fra loro isometrici, quindi l'angolo $B\hat{C}D$ è doppio di $D\hat{C}A$, il quale è supplementare rispetto alla somma dei due angoli dati, pertanto misura 180° – (30° + 70°) = 180° – 100° = 80°. Infine l'angolo cercato misura 2 · 80° = 160°. Pertanto la risposta corretta è la C).

1. (Invalsi 2004) Un triangolo isoscele ha ciascuno dei due lati uguali lungo 6 *cm* e la base di lunghezza *x* (espressa in *cm*). Quale delle seguenti espressioni rappresenta il perimetro *p* del triangolo? [C]
   A) $x = 12 + p$ B) $p = 6 + x$ C) $p = 12 + x$ D) $p = 6 \cdot x$
2. (Invalsi 2005) Quale tra le seguenti affermazioni è FALSA? A) Un rettangolo ha due assi di simmetria B) Un rombo ha un solo asse di simmetria C) Un quadrato ha quattro assi di simmetria D) Un parallelogramma generico non ha assi di simmetria [B]

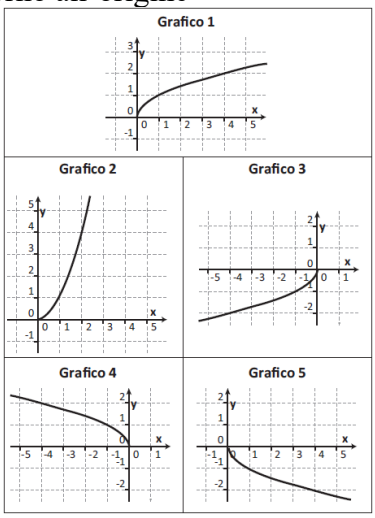
3. (Invalsi 2006) Quale delle seguenti figure non è simmetrica rispetto a un punto? [A]
A) Triangolo equilatero B) Rombo C) Rettangolo D) Parallelogramma

4. (Invalsi 2011) Quale fra le rette *a*, *b* e *c*, nel piano della figura, è un asse di simmetria del parallelogramma *PQRS*? 

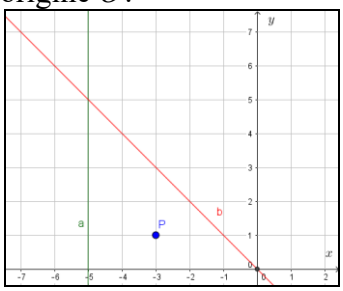
A) *a* B) *b* C) *c* D) Nessuna delle tre [B]

5. (Invalsi 2011) Il quadrilatero *A'B'C'D'* è ottenuto applicando al quadrilatero *ABCD* una trasformazione. 

Di quale trasformazione si tratta? A) Traslazione B) Simmetria rispetto all'asse *y* C) Simmetria rispetto all'asse *x* D) Rotazione attorno all'origine [C]



6. (Invalsi 2012) Di seguito sono rappresentati cinque grafici.
A) Quale grafico è il simmetrico del grafico 1 rispetto all'asse delle *x*? [5]
B) Quale grafico è il simmetrico del grafico 1 rispetto all'asse delle *y*? [4]
C) Quale grafico è il simmetrico del grafico 1 rispetto all'origine *O*? [3]

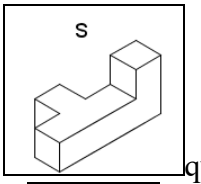


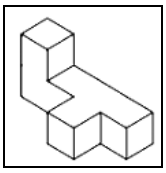
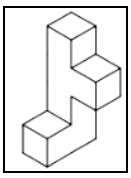
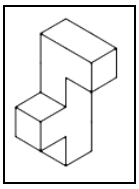
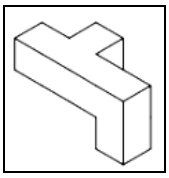
7. (Invalsi 2013) Il punto *P* in figura ha coordinate (– 3; 1).
A) Segna sulla figura il punto *Q*, simmetrico di *P* rispetto alla retta a.
B) Poi segna il punto *R*, simmetrico di *Q* rispetto alla retta b.
C) Quali sono le coordinate del punto *R*? A) (–7; 1) B) (1; 7) C) (7; 1) D) (–1;7) [D]

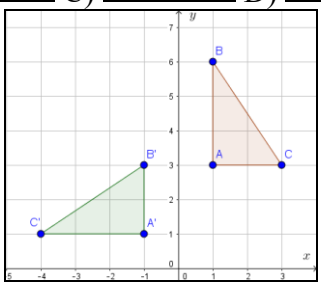
8. (Invalsi 2013) Osserva la seguente fotografia: Gli automobilisti che precedono l'autoambulanza vedono riflessa nello specchietto retrovisore la scritta: AMBULANZA Se la

parola "AMBULANZA" fosse scritta normalmente sulle autoambulanze, in quale dei seguenti modi gli automobilisti la vedrebbero riflessa nello specchietto retrovisore? [A]

A) B) C) D)

9. (Invalsi 2013) Se il solido S viene fatto ruotare, 

quale tra le seguenti configurazioni non può assumere? A)  B)  C)  D)  [D]

10. (Invalsi 2014) Osserva la seguente figura. 

Il triangolo $A'B'C'$ è stato ottenuto dal triangolo ABC attraverso A) una simmetria di centro (0; 3) B) una rotazione antioraria di centro (0;0) e ampiezza 90° C) una simmetria assiale rispetto all'asse y D) una rotazione antioraria di centro (1; 1) e ampiezza 90° [D]
11. (Invalsi 2015) Ruotando di un giro completo un trapezio rettangolo attorno al lato perpendicolare alle basi si ottiene: A) un cono B) un cilindro con una cavità conica C) un cilindro con un cono sovrapposto D) un tronco di cono [D]
12. (Invalsi 2015) Solo una delle seguenti affermazioni è vera. Quale? A) Ogni triangolo ha un centro di simmetria B) Tutti i triangoli equilateri hanno un centro di simmetria C) Ogni triangolo ha almeno un asse di simmetria D) Alcuni triangoli hanno un asse di simmetria [D]

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi

1. Dato un poligono regolare di N lati, dimostrare che esistono esattamente $2N$ isometrie che lo mutano in sé. Distinguere il caso N pari da N dispari.
2. Determinare le leggi della simmetria rispetto alla retta parallela all'asse x passante per $(a; b)$.
$$\left[\begin{cases} x' = x \\ y' = 2b - y \end{cases}\right]$$
3. Determinare le leggi della simmetria rispetto alla retta parallela all'asse y passante per $(a; b)$.
$$\left[\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = y \end{cases}\right]$$
4. Componendo due simmetrie di assi fra loro paralleli si ottiene una traslazione, determinare, modulo, e direzione del vettore. [Il doppio della distanza fra le rette; perpendicolare agli assi]

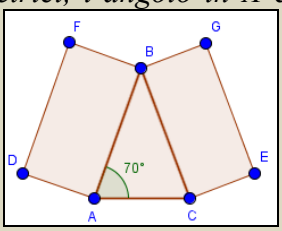
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.
AHSME = Annual High School Mathematics Examination
K = Kangourou della Matematica
OMI = Olimpiadi della Matematica italiane
HSMC = High School Mathematics Contest
MT = Mathematics Teacher, rivista della NCTM

Lavoriamo insieme

Questo quesito è stato pubblicato nel numero di Maggio 1991 della rivista Mathematics Teacher pubblicata dalla NCTM.

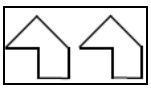
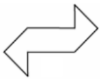
In figura, AB e BC sono isometrici, l'angolo in A è di 70°, I due quadrilateri sono entrambi rettangoli, quanto misura l'angolo FBG?



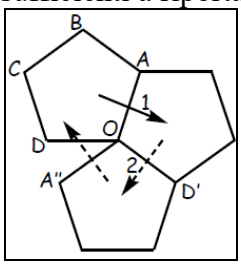
Essendo ABC isoscele di base AC, anche l'angolo in C è di 70°, quindi l'angolo in B è di 180° – 140° = 40°.

Dato che gli altri due angoli che servono a formare l'angolo FBG.

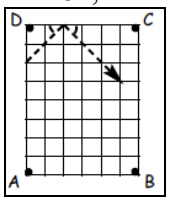
1. (OMI 2003) Giovanni ha bevuto troppo e comincia a camminare in modo strano: fa 1 passo in avanti; poi si volta di 90° verso destra e fa 2 passi in avanti; poi si volta di 90° verso destra e fa 1 passo in avanti; poi si volta di 90° verso sinistra e fa 1 passo all'indietro; dopo di che ricomincia da capo. Ogni passo è di 1 metro. Dopo 186 passi cade a terra svenuto. A quanti metri da dove era partito finisce la passeggiata di Giovanni? A) 0 B) 1 C) 2 D) $\sqrt{5}$ E) 4 [C]

2. (K 2004) Hai a disposizione due pezzi di cartone uguali fra loro come quelli in figura,  che puoi accostare, spostandoli nel piano a tuo piacimento ma non ribaltandoli. Quale delle seguenti figure non puoi ottenere? A) B) C)  D) E) [D]

3. (K 2006) In figura è rappresentato un pentagono regolare $OABCD$ ed i pentagoni che da esso si ottengono facendo prima una rotazione di centro O che porti il lato OD a sovrapporsi al lato OA (e OA a OD'), poi una rotazione di centro O che porti il lato OA a sovrapporsi al lato OD' (e OD' a OA''). Continuando in questo modo, qual è il minimo numero di rotazioni sufficienti a riportare il pentagono nella posizione iniziale? A) 6 B) 10 C) 12 D) 15 E) 20 [B]

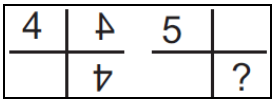


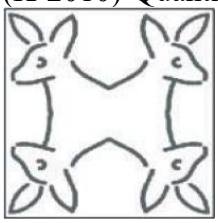
4. (K 2007) Una palla di biliardo colpisce il bordo del tavolo con un angolo di 45°, come mostrato in figura. In quale delle buche cadrà? A) A B) B C) C D) D E) in nessuna [C]



5. (K 2010) Facendo fare mezzo giro alla figura attorno al vertice F, si ottiene? [C]

A) B) C) D) E)

6. (K 2010) La cifra 4 si trova accanto a due specchi: la prima figura ti mostra l'effetto delle due riflessioni che ha subito. Quale è l'effetto finale delle riflessioni sulla cifra 5, cioè che cosa deve apparire al posto del punto di domanda?  A) B) C) D) E) [A]
7. (K 2010) Quanti assi di simmetria si possono individuare nella figura contenuta nel quadrato a lato?



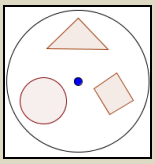
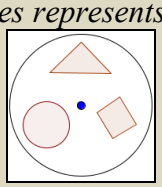
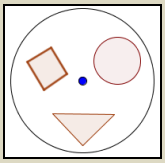
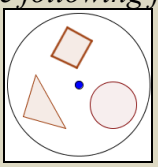
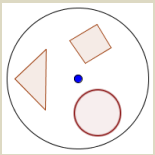
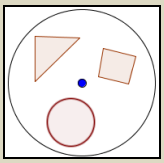
A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) Infiniti [C]
8. (K 2012) Un triangolo equilatero ruota, sempre nello stesso verso, intorno al suo centro prima di 3°, poi di 9°, poi di 27° e così via (cioè alla n esima rotazione ruota di $3n$°). Quante posizioni differenti (inclusa la prima) occuperà il triangolo nel corso di queste rotazioni? A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 360 [B]
9. (K 2016) Quale tra i seguenti segnali stradali ha il maggior numero di assi di simmetria? [A]

A) B) C) D) E)

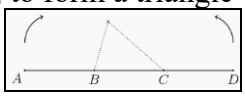
Questions in English

Working together

This is a question was published in the issue of September 1996 of Mathematics Teacher.

Which of the following figures represents the result when the following figure  *is rotated* 120 *degrees about its center*? A)  B)  C)  D)  E) 

Obviously A is the identity; B is a central symmetry around the center of the big circumference; C is the correct answer, while D and E are rotations but 90° and 45°.

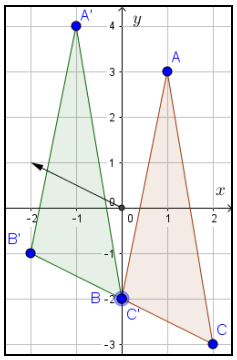
10. (AHSME 1979) Points A, B, C, and D are distinct and lie, in the given order, on a straight line. Line segments AB, AC and AD have lengths x, y, and z, respectively. If line segments AB and CD may be rotated about points B and C, respectively, so that points A and D coincide, to form a triangle with positive area, then which of the following three inequalities must be satisfied? 

[C]
I. $x < z/2$ II. $y < x + z/2$ III. $y < z/2$ A) only I B) only II C) only I and II D) only II and III E) I, II and III
11. (HSMC 2006)The point $A \equiv (-3;\ 2)$ is rotated 90° counter clockwise around the origin to point B. Point B is then reflected about the bisector of the coordinate axes, to point C. What are the coordinates of C? [$(-3;\ -2)$]
12. (K 2007) CDE is the rotation of the triangle ABC on C of 80°, what is the measure of angle $A\hat{B}D$? [D]
A) 25° B) 30° C) 35° D) 40° E) 45°
13. (HSMC 2008) Rectangle $PQRS$ lies in a plane with $PQ = RS = 2$ and $QR = SP = 6$. The rectangle is rotated 90° clockwise about R, then rotated 90° clockwise about the point to which S moved after the first rotation. What is the length of the path travelled by point P? $\left[\sqrt{80}+\sqrt{72}\right]$

Attività di recupero

Concetto di trasformazione geometrica. Le traslazioni.

Fase 1: Osserva

- Data la trasformazione $\tau(x; y) = (x + y; 2x - y + 1)$ vogliamo trovare il corrispondente della coppia (1; 2), si ha: $\tau(1; 2) = (1 + 2; 2 - 2 + 1) = (3; 1)$. Verifichiamo che la trasformazione non è commutativa. Infatti si ha $\tau(2; 1) = (2 + 1; 4 - 1 + 1) = (3; 4)$.
- Vogliamo vedere se la precedente trasformazione ha punti uniti, cioè se esiste una coppia $(x; y)$ per cui si abbia $\tau(x; y) = (x; y)$, cioè $(x + y; 2x - y + 1) = (x; y)$. Deve essere perciò $\begin{cases} x + y = x \\ 2x - y + 1 = y \end{cases}$, la prima scritta equivale ovviamente a $y = 0$, quindi sostituendo tale valore nella seconda si ha: $2x + 1 = 0$, cioè $x = -1/2$. Quindi l'unico punto unito è $(-1/2; 0)$.
- Dato il triangolo di vertici $A \equiv (1; 3)$, $B \equiv (0 ; -2)$, $C \equiv (2; -3)$, vogliamo determinare il suo corrispondente rispetto alla traslazione di vettore $\vec{v} \equiv (-2, 1)$. Rappresentiamo in figura ABC e costruiamo graficamente il suo trasformato. 

In pratica, per ottenere le coordinate dei punti trasformati in modo analitico basta aggiungere a ciascuna coordinata la coordinata omonima del vettore. Così avremo:
$$A' \equiv (1 - 2; 3 + 1) \equiv (-1; 4),\ B' \equiv (0 - 2; -2 + 1) \equiv (-2; -1),\ C' \equiv (2 - 2; -3 + 1) \equiv (0; -2).$$
Tali valori coincidono con quelli determinati usando solo il disegno.

Fase 2: Completa …

- Data la trasformazione $\tau(x; y) = (2x + 3y; x - y)$ vogliamo trovare il corrispondente della coppia (3; –2), si ha: $\tau(3; -2) = (2 \cdot 3$ .....; .....) = (....; ....). Verifichiamo che la trasformazione non è commutativa. Infatti si ha $\tau(-2; 3)$ = (..... ; .....) = (....; ....).
- Vogliamo vedere se la precedente trasformazione ha punti uniti, cioè se esiste una coppia $(x; y)$ per cui si abbia $\tau(x; y)$ = (....; ....), cioè $(2x + 3y;$ .....) = (.....; .....). Deve essere perciò $\begin{cases} 2x + 3y = x \\ \text{.....} = \text{.....} \end{cases}$, la prima scritta equivale ovviamente a y = ..., quindi sostituendo tale valore nella seconda si ha: ....., cioè x = ... Quindi l'unico punto unito è (....; ....).
- Una traslazione muta il punto $P \equiv (4; 3)$ nel punto $P' \equiv (-5; 4)$; possiamo determinare le coordinate del vettore? In generale il punto $P \equiv (x; y)$ in una traslazione di vettore $\vec{v} \equiv (v_x; v_y)$ viene trasformato in $P' \equiv$ ……. Nel nostro caso abbiamo: x = …., y = …., x' = …., y' = …., i termini incogniti sono …… Scriviamo le seguenti uguaglianze: $P' \equiv (-5; 4) \equiv$ …….. Considerando le uguaglianze fra le coordinate omonime, otteniamo: …… Il vettore cercato ha perciò coordinate: …….

Fase 3: Prova!

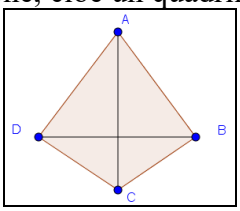
1. Determinare il trasformato del quadrato di vertici $A \equiv (1; 1)$, $B \equiv (1; 3)$, $C \equiv (3; 1)$, $D \equiv (3; 3)$, rispetto alla trasformazione $\tau(x; y) = (-2x + y; 2x - y)$ [$A' \equiv (-1; 1)$, $B' \equiv (1; -1)$, $C' \equiv (-5; 5)$, $D' \equiv (-3; 3)$]
2. Determinare il trasformato del quadrilatero di vertici $A \equiv (3; 1)$, $B \equiv (2; -1)$, $C \equiv (-1; 5)$, $D \equiv (5; 0)$, rispetto alla trasformazione $\tau(x; y) = (y; x)$. [$A' \equiv (1; 3)$, $B' \equiv (-1; 2)$, $C' \equiv (5; -1)$, $D' \equiv (0; 5)$]

3. Ci sono punti uniti nella trasformazione precedente? [Quelli che hanno ascissa e ordinata uguali]
4. Determinare il trasformato del quadrilatero di vertici $A \equiv (-2; -2)$, $B \equiv (-3; 1)$, $C \equiv (1; 0)$, $D \equiv (-4; 2)$, rispetto alla trasformazione $\tau(x; y) = (-y; -x)$. [$A' \equiv (2; 2)$, $B' \equiv (-1; 3)$, $C' \equiv (0; -1)$, $D' \equiv (-2; 4)$]
5. Ci sono punti uniti nella trasformazione precedente? [Quelli che hanno ascissa e ordinata opposte]
6. Determinare il trasformato del quadrato di vertici $A \equiv (0; 0)$, $B \equiv (2; 0)$, $C \equiv (2; 2)$, $D \equiv (0; 2)$, rispetto alla trasformazione $\tau(x + y - 1; x + 2y)$. [$A' \equiv (-1; 0)$, $B' \equiv (1; 2)$, $C' \equiv (3; 6)$, $D' \equiv (1; 4)$]
7. Ci sono punti uniti nella trasformazione precedente? [$(-1; 1)$]
8. Determinare il trasformato del quadrato di vertici $A \equiv (0; 0)$, $B \equiv (1; 0)$, $C \equiv (1; 1)$, $D \equiv (0; 1)$, rispetto alla trasformazione $\tau(3x - y - 1; -3x + y + 2)$. [$A' \equiv (-1; 2)$, $B' \equiv (2; -1)$, $C' \equiv (1; 0)$, $D' \equiv (0; 3)$]
9. Ci sono punti uniti nella trasformazione precedente? $\left[\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)\right]$
10. Determinare il trasformato del quadrilatero di vertici $A \equiv (0; 3)$, $B \equiv (-1; 1)$, $C \equiv (-2; 2)$, $D \equiv (0; 1)$, rispetto alla traslazione di vettore $\vec{v} \equiv (-2; 3)$. [$A' \equiv (-2; 6)$, $B' \equiv (-3; 4)$, $C' \equiv (-4; 5)$, $D' \equiv (-2; 4)$]
11. I punti $P \equiv (-2; 1)$ e $P' \equiv (4; 1)$ si corrispondono in una traslazione; determinare le componenti del vettore di traslazione. [$(6; 0)$]
12. Nell'esercizio precedente, quale sarebbe il vettore se scambiassimo i punti? [$(-6; 0)$]

Le simmetrie

Fase 1: Osserva

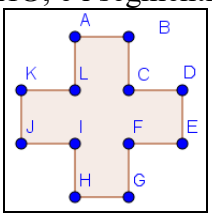
- Una simmetria centrale muta il punto $P \equiv (2; -1)$ nel punto $P' \equiv (-1; 0)$; possiamo determinare le coordinate del centro? Sappiamo che, in generale, il punto $P \equiv (x; y)$ in una simmetria di centro il punto $C \equiv (a; b)$ viene trasformato nel punto $P' \equiv (2a - x; 2b - y)$. Quindi nel nostro caso avremo: $P' \equiv (-1; 0) \equiv (2a - 2; 2b - (-1)) \equiv (2a - 2; 2b + 1)$. Dato che due punti nel piano cartesiano sono coincidenti quando hanno nell'ordine le stesse coordinate deve aversi: $\begin{cases} 2a - 2 = -1 \\ 2b + 1 = 0 \end{cases}$; dalla seconda si ottiene subito $b = -1/2$, che sostituito nella prima fornisce $2a = 2 - 1$, cioè $a = 1/2$, che sono le coordinate del centro.
- Dato che la simmetria centrale è una trasformazione *involutoria*, avremo che nella trasformazione di centro $(-1/2; 1/2)$, il corrispondente di $P' \equiv (-1; 0)$ sarebbe $P \equiv (2; -1)$.
- Un rombo ha le diagonali che sono assi di simmetria, così come un generico aquilone, cioè un quadrilatero che ha due coppie di lati consecutivi fra loro isometrici. Lo mostriamo in figura.



Fase 2: Completa …

- Dato il punto $A \equiv (-2; 1)$, vogliamo determinare il suo corrispondente rispetto alla simmetria di centro il punto $C \equiv (1; 3)$. Le leggi della simmetria sono: $\tau(x; y) = (2 \cdot 1 - x; .....)$, quindi nel nostro caso avremo: $\tau(-2; 1) = (..... ; .....)$.
- Con riferimento alla simmetria precedente avremo: $\tau(1; 3) = (.....; .....)$, questo vuol dire che la simmetria è una trasformazione .....

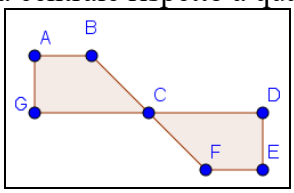
- Il seguente poligono concavo possiamo dire che ha un centro di simmetria, che è l'intersezione dei segmenti ..... e ..... Possiamo dire che ha ben 8 assi di simmetria, essi sono, il segmento AG, e i segmenti



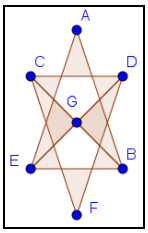
....., ..., LF, ..., ... Nonché gli assi dei segmenti AB e .....

Fase 3: Prova!

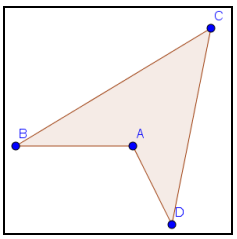
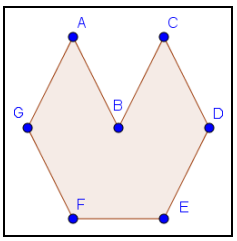
1. Determinare il trasformato del quadrilatero di vertici $A \equiv (1; -2)$, $B \equiv (-2; 2)$, $C \equiv (-3; 1)$, $D \equiv (1; 3)$, rispetto alla simmetria di centro $C \equiv (2; -1)$. [$A' \equiv (3; 0)$, $B' \equiv (6; 0)$, $C' \equiv (7; -3)$, $D' \equiv (3; -5)$]
2. Determinare il trasformato del quadrilatero di vertici $A \equiv (1; 4)$, $B \equiv (-2; 3)$, $C \equiv (0; 2)$, $D \equiv (1; 0)$, rispetto alla simmetria di centro $C \equiv (0; 1)$. [$A' \equiv (1; -4)$, $B' \equiv (4; -3)$, $C' \equiv (2; -2)$, $D' \equiv (1; 0)$]
3. Determinare il trasformato del quadrilatero di vertici $A \equiv (2; 1)$, $B \equiv (-2; 1)$, $C \equiv (3; 4)$, $D \equiv (2; -1)$, rispetto alla simmetria di centro $C \equiv (2; 0)$. [$A' \equiv (2; -1)$, $B' \equiv (6; -1)$, $C' \equiv (1; -4)$, $D' \equiv (2; 1)$]
4. I punti $P \equiv (0; 1)$ e $P' \equiv (-6; -1)$ si corrispondono in una simmetria centrale rispetto a quale centro? [$(-3; 0$]
5. I punti $P \equiv (2; -1)$ e $P' \equiv (-8; 7)$ si corrispondono in una simmetria centrale rispetto a quale centro? [$(-3; 3)$]
6. I punti $P \equiv (4; 0)$ e $P' \equiv (4; -2)$ si corrispondono in una simmetria centrale rispetto a quale centro?
7. Determinare il centro di simmetria della figura seguente. [C]



8. Determinare il centro di simmetria della figura seguente. [G]



9. Determinare gli assi di simmetria della figura seguente. [AC]



10. Determinare gli assi di simmetria della figura seguente. [AB e BC]